Agrégation interne de Mathématiques

(et CAERPA)

Session 2001

Première épreuve écrite

Partie I : Une identité remarquable

Dans cette partie, k désigne un corps commutatif. On note k^* l'ensemble des éléments non nuls de k et l'on désigne par G l'ensemble des bijections affines de k sur k.

1 °) Montrer que pour tout élément g de G il existe un unique élément a de k^* et un unique élément b de k tels que l'on ait $g(x) = ax + b$ pour tout x de k. Réciproquement, montrer que, pour tout élément a de k^* et tout élément b de k, l'application $x \mapsto ax+b$ de k dans k appartient à G.

2 °) Établir que G est un sous-groupe du groupe des bijections de k sur k et que l'application qui à $g \in G$, de la forme $x \mapsto ax + b$, associe la matrice $M(g) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est un morphisme injectif du groupe G dans le groupe $GL_2(k)$. Calculer $M(g^3)$ et $M(g^{-1})$.

3 °) Soit $g \in G$ et $M(g) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. À quelle condition l'application $g : k \to k$ a-t-elle un point fixe unique ? Calculer alors ce point fixe en termes de a et b.

Dans la suite de cette partie **I** on fixe trois éléments g_1, g_2 et g_3 de G. On pose $M(g_i) = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour $i = 1, 2, 3$; on pose également $g = g_1^3 \circ g_2^3 \circ g_3^3$ et $M(g) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4 °) Calculer a en termes des a_i, et calculer b sous la forme $A_1b_1 + A_2b_2 + A_3b_3$, où A_1, A_2 et A_3 s'expriment en termes de a_1, a_2, a_3.

On suppose **désormais**, dans cette partie **I**, que $g_1 \circ g_2$, $g_2 \circ g_3$ et $g_3 \circ g_1$ ont chacune un point fixe unique. On note α le point fixe de $g_1 \circ g_2$, β le point fixe de $g_2 \circ g_3$ et γ le point fixe de $g_3 \circ g_1$. On pose $\rho = a_1a_2a_3$ et l'on considère la quantité

$$b' = (1 - a_1a_2)(1 - a_2a_3)(1 - a_3a_1)(\alpha + \rho\beta + \rho^2\gamma).$$

5 °) Calculer b' sous la forme $A'_1b_1 + A'_2b_2 + A'_3b_3$, où $A'_1 = (1 - a_2a_3)A''_1$, $A'_2 = (1 - a_3a_1)A''_2$, $A'_3 = (1 - a_1a_2)A''_3$, et où A''_1, A''_2 et A''_3 s'expriment en termes de a_1, a_2, a_3 et de $\rho = a_1a_2a_3$.

6 °) On suppose **en outre**, dans cette question, que l'on a la relation $\rho^2 + \rho + 1 = 0$. Montrer que l'on a $A'_i = -\dfrac{a_3}{a_1}A_i$ pour $i = 1, 2, 3$ et $b' = -\dfrac{a_3}{a_1}b$.

7 °) Si $g_1 \circ g_2 \circ g_3$ a un point fixe unique, établir que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $g_1^3 \circ g_2^3 \circ g_3^3 = Id_k$;

(ii) $\rho^2 + \rho + 1 = 0$ et $\alpha + \rho\beta + \rho^2\gamma = 0$.

8 °) Dans cette question, on suppose le corps k de caractéristique 3. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $g_1^3 \circ g_2^3 \circ g_3^3 = Id_k$;

(ii) $\rho = 1$ et $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

Partie II : Le théorème de Morley

Soient $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien orienté, et E l'espace vectoriel associé. Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non nuls de E, on se permettra d'identifier l'angle $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ et sa mesure, qui est un élément de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. On pourra écrire $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = \alpha \bmod 2\pi$ pour dire que la mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ est la classe dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ du nombre réel α. De même si r est une rotation de E, on se permettra d'identifier l'angle de cette rotation avec sa mesure dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.
Par droite de $\mathcal{E}$ on entendra une droite **affine**. Si A et B sont deux points distincts de $\mathcal{E}$, (AB) désigne l'unique droite passant par A et B. Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont deux droites de $\mathcal{E}$, on se permettra d'identifier l'angle $(\widehat{\mathcal{D}, \mathcal{D}'})$ de ces deux droites et sa mesure, qui est un élément de $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$; comme plus haut, on pourra écrire $(\widehat{\mathcal{D}, \mathcal{D}'}) = \alpha \bmod \pi$.
On rappelle que l'application $\alpha \mapsto 2\alpha$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ induit un isomorphisme de groupes de $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Si $\alpha \bmod \pi$ est la mesure d'un angle de droites de $\mathcal{E}$, alors $2\alpha \bmod 2\pi$ est la mesure d'un angle de rotation, ou de vecteurs.
Dans cette partie on prend pour E l'espace vectoriel réel $\mathbb{C}$, muni du produit scalaire et de l'orientation pour lesquels la base $(1, i)$ est orthonormée directe. On prend pour $\mathcal{E}$ l'ensemble $\mathbb{C}$ vu comme espace affine sur lui-même. On considère également le groupe G de la partie **I**, pour le corps $k = \mathbb{C}$, *i.e.* l'ensemble des applications de $\mathbb{C}$ dans lui-même de la forme $z \mapsto az + b$, avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

1 °) Parmi les isométries du plan affine euclidien $\mathbb{C}$, lesquelles sont des éléments de G ? Parmi les éléments de G, lesquels sont des isométries ?

2 °) Soient α, β et γ trois points distincts de $\mathbb{C}$. On dit qu'ils forment un triangle équilatéral si les trois distances de α à β, de β à γ et de γ à α sont égales. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) α, β et γ forment un triangle équilatéral ;

(ii) il existe une racine cubique de l'unité ρ dans $\mathbb{C}$, différente de 1, telle que $\alpha + \rho\beta + \rho^2\gamma = 0$.

3 °) Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites concourantes de $\mathbb{C}$. Notons $s_{\mathcal{D}}$ et $s_{\mathcal{D}'}$ les symétries orthogonales par rapport à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ respectivement. Donner le centre et l'angle de la rotation $s_{\mathcal{D}'} \circ s_{\mathcal{D}}$ en termes de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ (on se contentera d'énoncer le résultat).

Dans la suite du problème on fixe trois points A, B et C **non alignés** de $\mathbb{C}$. On note a, b, c les angles de de droites respectifs $(\widehat{(AB), (AC)})$, $(\widehat{(BC), (BA)})$ et $(\widehat{(CA), (CB)})$; on note aussi h_1 la rotation de centre A et d'angle $2a$, h_2 la rotation de centre B et d'angle $2b$ et h_3 la rotation de centre C et d'angle $2c$.

4 °) Montrer que $h_1 \circ h_2 \circ h_3 = Id_{\mathbb{C}}$ (on pourra s'appuyer sur la question **3**°).

On choisit des droites Δ_A et Δ'_A passant par A et vérifiant la condition $(\mathcal{C}_A)$:

$(\mathcal{C}_A)$ les angles de droites $(\widehat{(AB), \Delta_A})$, $(\widehat{\Delta_A, \Delta'_A})$ et $(\widehat{\Delta'_A, (AC)})$ sont égaux.

On note a' l'angle de droites $(\widehat{(AB), \Delta_A})$ et g_1 la rotation de centre A et d'angle $2a'$.
On choisit de même des droites Δ_B et Δ'_B passant par B et vérifiant la condition $(\mathcal{C}_B)$:

$(\mathcal{C}_B)$ les angles de droites $(\widehat{(BC), \Delta_B})$, $(\widehat{\Delta_B, \Delta'_B})$ et $(\widehat{\Delta'_B, (BA)})$ sont égaux.

On note b' l'angle de droites $(\widehat{(BC), \Delta_B})$ et g_2 la rotation de centre B et d'angle $2b'$.
On choisit enfin des droites Δ_C et Δ'_C passant par C et vérifiant la condition $(\mathcal{C}_C)$:

$(\mathcal{C}_C)$ les angles de droites $(\widehat{(CA), \Delta_C})$, $(\widehat{\Delta_C, \Delta'_C})$ et $(\widehat{\Delta'_C, (CB)})$ sont égaux.

On note c' l'angle de droites $(\widehat{(CA), \Delta_C})$ et g_3 la rotation de centre C et d'angle $2c'$.

5 °) Montrer que la transformation $g_1 \circ g_2$ a un unique point fixe α, et identifier α en termes des droites Δ_A, Δ'_A, Δ_B et Δ'_B (on pourra s'appuyer sur la question **II.3**°).

On notera β et γ les points fixes de $g_2 \circ g_3$ et $g_3 \circ g_1$ respectivement.

6 °) Établir que les points α, β et γ sont distincts.

7 °) À l'aide de la partie **I**, montrer que si $g_1 \circ g_2 \circ g_3$ a un point fixe unique, alors α, β et γ forment un triangle équilatéral (théorème de F. Morley, 1860 – 1937).

Les points A, B et C restant fixés, on appelle *trisection* du triangle $\widehat{ABC}$ un choix de droites Δ_A, Δ'_A (passant par A), Δ_B, Δ'_B (passant par B), Δ_C, Δ'_C (passant par C) qui vérifient les conditions $(\mathcal{C}_A)$, $(\mathcal{C}_B)$, $(\mathcal{C}_C)$ et qui sont telles que $g_1 \circ g_2 \circ g_3$ ait un point fixe unique.

8 °) Montrer qu'il existe 18 trisections possibles du triangle $\widehat{ABC}$.

Chaque trisection du triangle $\widehat{ABC}$ mène, par la question **II. 7**°, à un triangle équilatéral $\widehat{\alpha\beta\gamma}$, qu'on appelle triangle de Morley de la trisection.

Partie III : Triangles de Morley intérieurs

On garde le cadre de la partie **II** mais on suppose désormais que le triangle $\widehat{ABC}$ est **direct**, *i.e.* que la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ de E est directe.

1 °) Montrer que $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ sont des bases directes de E.

La mesure d'un angle Δ de vecteurs (ou de rotation) de $\mathcal{E}$ est un élément de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Il existe donc un unique nombre réel δ de l'intervalle $]-\pi, \pi]$ tel que cette mesure soit $\delta \mod 2\pi$. On dira que ce nombre réel δ est la *mesure principale* de l'angle Δ.

2 °) Soit M un point de $\mathcal{E}$ distinct de A. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$ est une base directe de E ;

(ii) la mesure principale de l'angle de vecteurs $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}})$ appartient à $]0, \pi[$.

3 °) Soit M un point de $\mathcal{E}$ distinct de A. Notons μ et ν les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et notons θ_A, a_0 les mesures principales respectives des angles $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$. Prouver que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mu > 0$ et $\nu > 0$;

(ii) $0 < \theta_A < a_0$.

> On dit qu'un point M est *intérieur* au triangle $\widehat{ABC}$ s'il est barycentre à coefficients strictement positifs de A, B et C.

4 °) Soit M un point de $\mathcal{E}$ distinct de A et B. Notons θ_A, a_0, θ_B, b_0 les mesures principales respectives de $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}})$, $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$, $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BM}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})$. Établir que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) M est intérieur au triangle $\widehat{ABC}$;

(ii) $0 < \theta_A < a_0$ et $0 < \theta_B < b_0$.

5 °) On suppose que le triangle $\widehat{ABC}$ est acutangle, c'est-à-dire que les mesures principales a_0, b_0, c_0 de $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$, $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})$ appartiennent toutes à $]0, \frac{\pi}{2}[$. Montrer qu'il existe une et une seule trisection du triangle $\widehat{ABC}$ telle que le triangle de MORLEY associé $\widehat{\alpha\beta\gamma}$ ait ses sommets intérieurs au triangle $\widehat{ABC}$.

6 °) Si $a_0 = \frac{\pi}{2}$ ou $a_0 > \frac{\pi}{2}$, combien de trisections du triangle $\widehat{ABC}$ mènent-elles à un triangle de MORLEY associé $\widehat{\alpha\beta\gamma}$ de sommets intérieurs au triangle $\widehat{ABC}$?
