MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE
Liberté
Égalité
Fraternité

Rapport de jury

Concours : Agrégation externe spéciale

Section : Mathématiques

Session 2024

Rapport de jury présenté par : Claudine Picaronny
Présidente du jury

Table des matières

Introduction

La session 2024 est la huitième édition de ce concours spécial réservé aux titulaires d'un doctorat. Les exigences scientifiques de ce concours spécial sont les mêmes que celles qui régissent le concours externe standard, sans aucune concession quant aux connaissances mathématiques et leur maîtrise. Cependant, son format original et son public réservé donnent l'occasion de mettre en valeur la maturité liée à une expérience professionnelle et les qualités spécifiques résultant d'une pratique des mathématiques par la recherche. Ce concours permet ainsi de recruter des professeures et professeurs agrégés ayant un parcours professionnel déjà établi, une expérience de recherche, des compétences pluridisciplinaires, éventuellement marqués par la confrontation à un environnement international. Ce vécu est appelé à s'exprimer au concours et ne peut que rejaillir positivement sur la pratique enseignante. L'expérience montre que cette voie de recrutement est très ouverte et permet de valoriser — moyennant un indispensable effort de préparation — des candidates et candidats aux parcours et profils variés, incluant des titulaires d'une thèse dans une autre discipline que les mathématiques.

Ce rapport vise deux objectifs. D'une part il établit un bilan de la session 2024, notamment en présentant les données statistiques du concours et en discutant les éléments saillants des productions des candidats.

D'autre part il se veut un document *utile* pour les futurs candidates et candidats afin de les aider à se préparer au mieux pour les épreuves qui les attendent. Ainsi, il fournit :

— un corrigé commenté de l'épreuve écrite d'admissibilité, en indiquant quelques erreurs parmi les plus fréquentes et les défauts de rédaction observés ;

— des recommandations précises pour les épreuves orales d'admission.

Le jury invite les candidates et candidats de tous profils, ainsi que les centres de préparation et leurs intervenants, à en faire une lecture attentive et à bien tenir compte des prescriptions qui y sont faites. La consultation du rapport du concours standard, plus détaillé sur les attentes des épreuves d'admission peut s'avérer utile.

On trouve sur le site officiel de l'agrégation externe de mathématiques agreg.org nombre d'informations utiles : des archives (sujets d'écrit, textes de modélisation, rapports) et des renseignements pratiques concernant les sessions à venir. En particulier, les futurs candidates et candidats peuvent trouver sur ce site la `ClefAgreg` qui leur permettra de se familiariser avec l'environnement informatique qu'ils rencontreront pour l'épreuve de modélisation. Se préparer suffisamment tôt à cette épreuve permet d'en bien comprendre les attendus, mais aussi peut aider à renforcer les capacités de synthèse sur l'ensemble du programme. Enfin, le jury rappelle qu'une réunion publique, ouverte aux préparateurs, est traditionnellement organisée en début d'année universitaire sous l'égide des sociétés savantes de mathématiques pour évoquer le bilan et les perspectives du concours.

Le jury recommande aux candidates et candidats de se préoccuper suffisamment tôt des questions liées à la gestion de leur carrière auxquelles ils seront confrontés en cas de succès au concours. Les lauréates et lauréats de ce concours spécial sont considérés comme devant être immédiatement opérationnels et ne devraient donc pas être concernés par les procédures de report de stage. Notamment, les possibilités d'être nommé stagiaire en qualité d'ATER ou affecté dans l'enseignement supérieur sur un emploi de professeur du second degré (PRAG) ne sont pas offertes aux lauréates et lauréats du concours spécial (note de service n°. 2019-064 du 25 avril 2019, https://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?cid_bo=141354). Il est à noter que les reçus bénéficient d'une bonification d'ancienneté de deux ans au titre de la période de préparation du doctorat ; lorsque la période de préparation du doctorat a été accomplie sous contrat de travail, les services accomplis dans ce cadre sont pris en compte pour la part de leur durée excédant deux ans (article 6 du décret n°. 72-580 du 4 juillet 1972 relatif au statut particulier des professeurs agrégés de l'enseignement du second degré, modifié par le décret n°. 2016-656 du 20 mai 2016).

Chapitre 1

Déroulement du concours et statistiques

1.1 Déroulement du concours 2024

Le concours spécial docteur, création de la campagne de recrutement 2017, est un concours « jeune », instauré par le décret n°. 2016-656 du 20 mai 2016. En 2019, six disciplines étaient concernées par l'ouverture de postes à ce concours spécial : mathématiques, langues vivantes étrangères : anglais, lettres modernes , physique-chimie option chimie, physique-chimie option physique et sciences de la vie-sciences de la Terre et de l'Univers.

Les modalités des épreuves sont décrites par l'arrêté du 28 juin 2016, accessible sur le site

https://www.legifrance.gouv.fr/.

Le concours comprend une seule épreuve écrite d'admissibilité et trois épreuves orales d'admission : une épreuve de leçon de mathématiques qui couvre l'intégralité du programme (sans distinction des thèmes d'algèbre-géométrie et ceux d'analyse-probabilités), une épreuve de modélisation et une épreuve de mise en perspective didactique d'un dossier de recherche qui est spécifique à ce concours. Les candidates et les candidats ont le choix parmi trois options :

- probabilités et statistiques,
- calcul scientifique,
- algèbre et calcul formel,

qui ne diffèrent que par l'épreuve de modélisation.

Ce concours spécial est réservé aux titulaires d'un doctorat, le diplôme devant être acquis à la date de publication de la liste des admissibles. Les mères ou pères d'au moins trois enfants ainsi que les sportives et sportifs de haut niveau sont dispensés de cette condition de diplôme, mais ils seront bien sûr confrontés aux mêmes épreuves. En particulier candidater à ce concours n'a de sens que pour une personne qui, sans être forcément titulaire d'un doctorat, peut justifier d'un parcours et d'une expérience pouvant être mis en valeur dans l'épreuve sur dossier. Tout en rappelant que le référentiel des compétences professionnelles des métiers du professorat de l'éducation (arrêté du 1er Juillet 2013) indique que la maîtrise de la langue française est un attendu premier, il est important de souligner que ce concours est ouvert à tout ressortissant d'un État membre de l'Union européenne, d'un État faisant partie de l'accord sur l'Espace économique européen, de la principauté d'Andorre, de la Confédération suisse ou de la Principauté de Monaco. Ainsi, ce concours peut être une opportunité pour des docteurs ressortissants de ces pays, intéressés pour exercer en France, mais dont le parcours académique initial, par exemple effectué à l'étranger, ne donnait pas d'inclination particulière pour passer le concours de l'agrégation externe standard dans la lignée de leur cursus. Enfin, cette session le prouve encore, le format de l'épreuve permet d'attirer des candidates et candidats qui seraient titulaires d'une thèse dans une autre discipline : ils ont l'occasion d'expliquer comment des outils mathématiques sont intervenus au cours de leur expérience de recherche ou professionnelle, comment ils ont été exploités au service d'applications concrètes et comment cette expérience pourra enrichir leur pratique d'enseignant en mathématiques.

L'épreuve écrite d'admissibilité s'est déroulée le mercredi 28 février 2024. Les candidates et candidats sont libres de s'inscrire à la fois au concours standard et au concours spécial ; toutefois, les épreuves écrites ayant lieu au même moment, il leur faut déterminer finalement à quel concours ils souhaitent se présenter. Le jury conseille aux candidates et candidats d'effectuer ce choix en évaluant quelles épreuves leur permettent de mieux se mettre en valeur, en fonction de leur parcours et de leur préparation, toute autre considération, par exemple liée à la gestion des carrières, paraissant particulièrement hypothétique.

La liste des candidates et candidats admissibles a été publiée le 30 avril 2024. Les épreuves orales du concours spécial étaient organisées en parallèle de celles du concours standard de l'agrégation externe, du mercredi 26 juin au samedi 28 juin, à Strasbourg, au lycée Kléber. Le jury et les candidats y ont trouvé d'excellentes conditions de travail, et ont profité d'un accueil chaleureux et dévoué. Les jurys, les délibérations et les classements du concours spécial et du concours standard sont distincts. La liste d'admission a été publiée le vendredi 5 juillet 2024.

1.2 Commentaires généraux et statistiques sur la session 2024

1.2.1 Commentaires généraux

Le nombre d'inscrits au concours spécial s'élève à 164 et 55 candidates et candidats se sont présentés à l'épreuve écrite. À l'issue de la délibération d'écrit, 18 candidates et candidats ont été déclarés admissibles ; le premier admissible avait une note de 20/20 et le dernier une note de 5/20. Avec toutes les précautions d'usage sur la comparaison entre deux concours différents, le jury estime que toutess ces candidates et tous ces candidats auraient probablement eu leur place parmi les admissibles du concours standard et que les meilleures copies du concours spécial s'y seraient placées à un très bon, voire excellent, rang. À l'issue des épreuves orales, les délibérations du jury ont conduit à retenir les 6 candidates et candidats qui avaient franchi la note moyenne de 9,8/20 ; le premier du concours présente une moyenne de 17/20 et le premier candidat non admis a une moyenne de 8,7.

Le jury renouvelle sa principale recommandation qui consiste à s'assurer de bases solides et à faire preuve de la maîtrise de ces bases, que ce soit par une rédaction efficace et convaincante à l'écrit, par des leçons calibrées et soignées ou une présentation à l'épreuve de modélisation qui inspirent toute confiance quant à la solidité de ces bases. La consultation du rapport du concours standard confortera ces priorités.

Admissibilité. L'épreuve écrite, unique, se présente sous un format différent de celui du concours standard. Le site agreg.org présente les archives du concours afin que les futurs candidates et candidats puissent se familiariser avec ce format. Le sujet était constitué

- d'une série d'exercices, qui balaient plutôt le niveau L1-L3,
- de deux problèmes **au choix**, l'un plutôt orienté sur la partie algèbre-géométrie du programme, l'autre orienté sur la partie analyse-probabilités.

Cette formulation permet d'une part de tester les candidats sur les bases du programme, et d'autre part de leur donner l'occasion de s'exprimer au mieux sur ce qui pourrait être leur terrain de prédilection. L'en-tête du sujet invitait très clairement les candidats à répartir leur temps, dont au moins la moitié devait être dévolue au problème et au moins un tiers à la partie exercices. Le barème correspondait à une telle répartition de l'effort. Les candidats doivent convaincre d'une compétence suffisante sur l'ensemble du programme : si le problème invite les candidats à s'exprimer sur leurs thèmes de prédilection, les exercices préliminaires ont précisément la vocation de vérifier les connaissances de base sur un éventail large. Les candidats ne doivent pas se se focaliser sur les seuls exercices relevant du même thème que le problème choisi. Une telle stratégie est pénalisée.

Un tel format « exercices (imposés) + problème au choix », avec la même clef de répartition du temps et du barème, sera reconduit en 2025.

Admission. Bien que le concours comporte une épreuve sur dossier, impliquant ainsi une connaissance du parcours et du profil du candidat, le jury travaille de manière étanche : les commissions des épreuves de leçons et de modélisation ne reçoivent aucune indication sur les candidates et candidats (sujet de thèse, provenance, situation professionnelle...). Les commissions n'ont par ailleurs aucune information quant aux résultats à l'écrit ou aux autres épreuves orales avant la phase de délibération. Ces épreuves obéissent donc au même fonctionnement et aux mêmes critères d'évaluation que pour le concours standard.

Le programme Le concours externe de l'agrégation a pour vocation de recruter des professeures et professeurs agrégés destinés à exercer dans l'enseignement secondaire (lycées d'enseignement général et technologique et, exceptionnellement, collèges) ou dans l'enseignement supérieur (universités, instituts universitaires de technologie, grandes écoles, classes préparatoires aux grandes écoles, sections de techniciens supérieurs). Le jury estime donc que le niveau visé devrait permettre à la professeure ou au professeur agrégé d'intervenir sereinement et efficacement sur le créneau « bac−3/bac+3 » ; cet objectif calibre la conception du programme et les critères d'évaluation.

Le programme et la nature des épreuves, écrites et orales, font l'objet de publications sur le site officiel de ministère de l'Éducation nationale `http://www.devenirenseignant.gouv.fr`. Le programme 2025 est identique au programme 2024.

Le jury s'engage, bien sûr, à respecter le programme. Ce programme n'est pas exhaustif, il résulte d'un compromis et des résultats mathématiques « importants » manquent au programme. Il est tout à fait possible que des candidates et candidats aient connaissance de ces notions avancées, souhaitent en faire mention et proposer des excursions hors des limites du programme. Le jury saura s'adapter et apprécier de telles propositions. Toutefois, elles ne sont absolument pas nécessaires pour prétendre aux notes maximales.

1.2.2 Données statistiques diverses

Ce paragraphe regroupe quelques indications sur la répartition des candidates et candidats suivant l'académie, l'âge, le genre et la profession.

Répartition selon le genre On trouvait 25 % de femmes parmi les inscrits puis 20 % parmi les présents à l'épreuve d'admissibilité. 4 candidates sont admissibles sur 18 (soit 22 %), et deux candidates se sont présentées aux épreuves orales (15 %) et une seule est admise (17 % des admis) .
Le jury regrette les faibles pourcentages associés à la participation féminine à tous les niveaux du concours. C'est l'occasion de rappeler que les procédures de correction des épreuves écrites étant totalement anonymisées, il est difficile d'imaginer quel biais pourrait jouer à ce niveau.

Répartition selon l'âge La majeure partie des admissibles et des admis a moins de 40 ans.

Age	< 28	28 - 30	31- 40	41-50	>50
Inscrits	2	13	58	49	41
Présents	0	5	23	12	15
Admissibles	0	0	13	2	3
Admis	0	0	6	0	0

Répartition des candidats suivant l'âge aux différentes étapes du concours

Répartition selon l'académie aux différentes étapes du concours.

Libellé académie d'origine	Inscrits	Présents	admissibles	admis
LYON	9	3	1	
CRETEIL PARIS VERSAILLE	37	14	2	
NANCY-METZ	9	3	2	1
MONTPELLIER	5	2		
POITIERS	6	5		
BORAUX	6	2		
RENNES	1	1		
CLERMONT-FERRAND	3	1		
STRASBOURG	0	0		
MAYOTTE	2	1		
LA POLYNÉSIE FRANCAIS	2	1		
LILLE	7	4	3	1
NORMANDIE	4	1		
AIX MARSEILLE	13	5	1	
ORLÉANS-TOURS	2	1	1	1
GRENOBLE	11	5	5	3
LA GUALOUPE	1	1		
NICE	9	1	1	

Répartition selon la profession aux différentes étapes du concours Ces données sont issues des déclarations faites par les candidats lors de l'inscription et sont peu précises.

Profession	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
Cadres secteur privé convention collective	11	3	2	1
Certifié	49	16	4	1
Sans emploi	20	5	1	1
Contractuel 2nd degré	17	9	1	
Enseignant du supérieur	4	2		
Ens.stagiaire 2e deg. col/lyc	6	2		
Vacataire enseignant du sup.	5	1		
Professeur des écoles	1			
Salariés secteur tertiaire	5	2	2	
Personnel de la fonction publique	2	1	1	
Agrégé	3			
Personnel enseignant titulaire fonction publique	3	1	1	
Formateurs dans secteur privé	2			
Agent non titulaire fonction publique	4	2	2	2
Personnel enseignant non titulaire fonction publique	4	2	1	1
Contractuel enseignant supérieur	8	5	1	
Vacataire du 2nd degré	1			
Professeur associé 2nd degré	4			
Instituteur suppléant	1			
Maître contr.et agréé rem tit	3	1		
Professions libérales	2			
Salariés secteur industriel	1	1	1	
Maître auxiliaire	1			
PLP	3			
Agent admi.membre UE (hors France)	1			
Maître délégué	1	1		
Personnel administratif et technique MEN	1	1	1	

Domaines des doctorats. Les doctorats des candidats inscrits se répartissent sur des champs des mathématiques très variés ou relèvent d'autres disciplines (biologie,chimie, génie civil, génie éléctrique, génie industriel, informatique, mécanique, physique, sciences économiques, sciences de la vie, sciences de la terre). Les doctorats des admissibles sont pour moitié des doctorats de mathématiques. Les doctorats des admis sont pour moitié des doctorats de mathématiques.

Doctorat	Inscrits	Présents	admissibles	admis
Mathématiques	74	32	9	3
Sciences de la terre et univers	3	1	1	
Mécanique	3	1	1	0
Physique	29	7	2	1
Chimie	3	0		
Génie civil	3	0		
Sciences économiques	4	0		
Informatique	12	6	3	2
Autres	8	3	1	
Sciences sociales	1	0		
Génie industriel	1	0		
Génie électrique	4	0		
Biologie	1	1	1	
Génie chimique	1	0		
Sciences de la vie et de la santé	2	0		
Génie mécanique	2	1		

Chapitre 2

Épreuve écrite de mathématiques

2.1 Énoncé

Le sujet de l'épreuve écrite est disponible à l'URL

https://www.devenirenseignant.gouv.fr/sujets-et-rapports-des-jurys-agregation-2024-1356
ou sur le site

https://agreg.org.

2.2 Commentaires sur l'épreuve écrite d'admissibilité

- L'exercice 1 a été abordé par 75% des candidates et candidats.
- L'exercice 2 a été abordé par 80 % des candidates et candidats. C'est le plus investi et le mieux réussi.
- L'exercice 3 a été abordé par un peu plus de la moitié des candidates et candidats.
- L'exercice 4 a été abordé par un tiers des candidates et candidats.
- L'exercice 5 a été abordé par un tiers des candidates et candidats.
- Enfin, presque toutes les copies ont abordé au moins un problème, le problème d'algèbre et géométrie ayant été deux fois moins souvent choisi, mais mieux réussi, que celui d'analyse et probabilités.

2.3 Proposition de corrigé

Exercice I

1. Puisque M est annulé par le polynôme $X^n - 1$, simplement scindé sur $\mathbb{C}$, M est diagonalisable.
2. (a) D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $\chi_M(M) = 0$ et donc, par linéarité de la trace $\chi_M(0)\mathrm{Tr}(I_m) = 0$, ce qui donne, puisque $\mathrm{Tr}(I_m) \neq 0$, $(-1)^m \det(M) = 0$, i.e. 0 est valeur propre de M.

   (b) Puisque le spectre M est fini et contient 0, on dispose d'un polynôme d'interpolation de Lagrange de degré strictement inférieur au cardinal du spectre de M vérifiant les conditions de l'énoncé.

   (c) Puisque $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, M est semblable à une matrice triangulaire dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de M, comptées avec multiplicité, et donc

$P(M)$ est semble à une matrice triangulaire dont les éléments diagonaux sont les images par P de ces valeurs propres. On en déduit que la trace de $P(M)$ est égal au nombre de valeurs propres non nulles de M, ce qui est le résultat souhaité.

(d) Par linéarité de la trace on a aussi $\text{Tr}(P(M)) = P(0)\text{Tr}(I_m) = 0$ et donc 0 est de multiplicité m dans χ_M, i.e. $\chi_M = X^m$. Le théorème de CAYLEY-HAMILTON entraîne donc que M est nilpotent.

3. (a) D'après le théorème de LAGRANGE pour les groupes finis, un tel N est donné par le cardinal de G.

   (b) On en déduit que le spectre des éléments est inclus dans les racines N-ièmes de l'unité. Puisque $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, la trace est une combinaison entière des éléments du spectre, chaque coefficient étant égal à la multiplicité de la valeur propre. Ces coefficients prennent donc un nombre fini de valeurs, de même que les valeurs propres. On en conclut que T est fini.

4. (a) On note F le sous-espace vectoriel engendré par H. Puisque H engendre F, le théorème de la base incomplète permet d'extraire de H une base de F, ce qui est l'assertion.

   (b) **Première solution :** On voit que le but de la question 4 est de montrer que H est fini. Si l'on admet déjà ce résultat (une copie qui aurait cette démarche devrait écrire explicictement qu'elle fait cette hypothèse), alors, puisque H est fini, $F = H$ entraîne que F est fini, donc réduit à $\{0\}$. Comme H est formé de matrices inversibles, on en conclut que l'inclusion est nécessairement stricte.

   Deuxième solution : dans cette version, on ne suppose plus que H est fini. Le sous-espace vectoriel F est engendré par H. Par linéarité de la trace, l'ensemble $\tau_F = \{Tr(f), f \in F\}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de $\tau_H = \{Tr(g), g \in H\}$. Si T ne comportait que 0, alors, pour tout $g \in H$, on aurait $Tr(g^n) = 0$ pour tout n entier naturel, et donc, par la question 2, H serait constituée de matrices nilpotentes. Or, les matrices de H sont aussi diagonalisables, donc on aurait $H = \{0\}$, ce qui contredit que H est un sous-groupe de G. Donc, T n'est pas réduit à 0 et contient au moins un élément non nul θ. Les combinaisons linéaires complexes de θ montrent déjà que τ_F est un ensemble infini. Or, τ_H est fini par hypothèse. Donc, $H \neq F$.

   (c) Puisque g et h sont dans H et que H est un groupe, $h^{-1}g$ appartient à H et est donc diagonalisable par hypothèse. Il en résulte que x l'est aussi car une base propre pour x est donnée par une base propre pour $h^{-1}g$.

   (d) Par linéarité de la trace, on en déduit que pour tout f dans F, on a $\text{Tr}(fg) = \text{Tr}(fh)$. En appliquant ce résultat à fh^{-1}, qui est dans F également car $\text{Vect}(H)h^{-1} = \text{Vect}(Hh^{-1}) = \text{Vect}(H)$, il vient $\text{Tr}(fh^{-1}g) = \text{Tr}(f)$ ou encore $\text{Tr}(fx) = 0$. Puisque H est un groupe toutes les puissances (positives) de x appartiennent à F et en particulier il vient $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\text{Tr}(x^n) = 0$. Il résulte de la question 2, que x est nilpotent. Or, x est aussi diagonalisable par la question précédente, et par conséquent $x = 0$ (la seule matrice diagonale nilpotente étant la matrice nulle) ou encore $g = h$.

   (e) On en déduit que l'application $g \mapsto (\text{Tr}(M_i g))_{1 \leqslant i \leqslant r}$ est injective et donc que G est fini de cardinal inférieur à celui de T^r.

Exercice II

1. (a) En vertu du caractère $\mathcal{C}^2$ et par développement de TAYLOR à l'ordre 2 en 0, on a $u(t) = u(0) + \frac{1}{2}u''(0)t^2 + \text{o}(t^2)$ et donc la fonction $t \mapsto \frac{u(t)-u(0)}{t^2}$ admet un prolongement continu à $\mathbb{R}_+$. Comme u est borné, cette fonction est aussi un $\text{O}(1/t^2)$ en $+\infty$. Par critère de RIEMANN, elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit également que $t \mapsto \frac{u(t)-u(0)}{t}$ admet des limites

nulles en 0 et en $+\infty$. Une intégration par parties permet donc d'obtenir que l'intégrale considérée est convergente et égale à $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u(t)-u(0)}{t^2}\mathrm{d}t$.

(b) On applique la question précédente aux fonctions $1-\cos$ et $t \mapsto -\frac{1}{2}\cos(t^2)$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et bornées sur $\mathbb{R}$, de dérivées sin et $t \mapsto t\sin(t^2)$ s'annulant en 0.

(c) Un changement de variable ne changeant pas la nature de l'intégrale (ni l'intégrabilité) et puisque $x = t^2$ définit un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ sur lui-même, l'intégrale étudiée est convergente si et seulement si $\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^{3/2})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ converge. Soit la fonction donnée par $-\frac{1}{3}\cos(x^{3/2})$: cette fonction est bornée sur $\mathbb{R}$, développable en série entière en 0, de développement $-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}x^3+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{3(2n)!}x^{3n}+\cdots$. Cette série entière admet un rayon de convergence infini, par exemple par critère de d'Alembert. On en déduit que c'est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, de dérivée nulle en 0. La première question permet donc de conclure.

2. (a) La fonction inverse étant continue, décroissante et positive, il résulte du théorème de Maclaurin, dit de comparaison série-intégrale, que la suite $\displaystyle\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\ln(N)\right)$ est convergente, d'où $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} = \ln(N)+\mathrm{O}(1) \sim \ln(N)$.

(b) On a $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin(t)\mathrm{d}t = 2$ et donc, pour n dans $\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin(t)|\,\mathrm{d}t = 2$ et il vient, par croissance de l'intégrale, on a $\frac{2}{(n+1)\pi} \leqslant u_n \leqslant \frac{2}{n\pi}$. On conclut par théorème d'encadrement des équivalents.

(c) Par relation de Chasles, puis par sommation des relations de comparaison, il résulte de la question b) puis de la question a), $\displaystyle f(N\pi) = \sum_{n=0}^{N-1} u_n \sim \frac{2}{\pi}\ln(N-1)$ et donc $f(n\pi) \sim \frac{2}{\pi}\ln(n)$.

(d) Puisque l'intégrande est une fonction bornée, on a $f(x) - f(n\pi) = \mathrm{O}(|x-n\pi|)$ et en particulier $f(x) = f(\lfloor \frac{x}{\pi}\rfloor\pi)+\mathrm{O}(1)$. Le même argument avec la fonction inverse comme intégrande donne $\ln(x) \sim \ln(\lfloor\frac{x}{\pi}\rfloor\pi)$. On en déduit, puisque $\ln(\pi) = \mathrm{O}(1) = \mathrm{o}(\ln(x))$, $f(x) \sim \frac{2}{\pi}\ln(\lfloor\frac{x}{\pi}\rfloor\pi) \sim \frac{2}{\pi}\ln(x)$. Il en résulte que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et donc le sinus cardinal n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

3. (a) L'intégrande qui définit h est une fonction continue qui, au voisinage de $+\infty$, appartient à $\mathrm{O}(1/t^3)$. Par intégration des relations de comparaison et d'une fonction continue, h est continue et dans $\mathrm{O}(1/t^2)$. Il en résulte que h est intégrable au voisinage de l'infini.

(b) Par intégrations par parties successives, on a

$$g(x) = \frac{\cos(x)}{x} - \int_x^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t = \frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2}+2h(x)\ .$$

La fonction h est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après la question précédente. La fonction donnée par $\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2}$ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}_+$, donc y est localement intégrable. Au voisinage de l'infini on a $-\frac{\sin(x)}{x^2} = \mathrm{O}(1/x^2)$ et donc $-\frac{\sin(x)}{x^2}$ y est intégrable. On en déduit que g est d'intégrale convergente sur $\mathbb{R}_+$ (resp. y est intégrable) si et seulement si $\frac{\cos(x)}{x}$ est d'intégrale convergente en l'infini (resp. y est localement intégrable). Par intégration par parties, on a $\int\frac{\cos(x)}{x}\mathrm{d}x = \frac{\sin(x)}{x}+\int\frac{\sin(x)}{x^2}\mathrm{d}x$. Le premier terme du membre de droite a une limite en l'infini et l'intégrande du second est dans $\mathrm{O}(1/x^2)$ donc y est intégrable. Il en résulte que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ est convergente.

(c) Les arguments précédents montrent que g est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $\frac{\cos(x)}{x}$ est intégrable sur $[\frac{3\pi}{2}, +\infty[$. Par changement de variable, il est équivalent de demander si $\frac{\sin(x)}{x+\frac{3\pi}{2}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Or $\frac{\sin(x)}{x+\frac{3\pi}{2}} = \frac{\sin(x)}{x} + \mathrm{O}(1/x^2)$ et donc il résulte de la question 2.d que cette fonction n'est pas intégrable, donc g n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice III

Le but de ce théorème est de démontrer le théorème de Wald et d'en étudier une application.

1. Par définition S est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$. Pour ω dans Ω et x dans $\mathbb{R}$, l'événement $(S = x)$ est la réunion des événements de la forme $(T = r, X_1 = x_1, \ldots, X_r = x_r)$ avec r dans $\mathbb{N}^*$, $(x_1, \ldots, x_r)$ dans $\mathbb{R}^r$ et $x_1 + \cdots + x_r = x$. C'est donc une réunion d'éléments de $\mathcal{A}$ et appartient donc à la tribu $\mathcal{A}$. Il en résulte que S est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
2. (a) Puisque X, T et S sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, leurs fonctions génératrices sont définies sur $[0, 1]$ et à valeurs dans $[0, 1]$. Soit donc t dans $[0, 1]$.
   Par indépendance de $(X_k)_{k\geqslant 1}$ et d'après le lemme des coalitions, pour r dans $\mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{E}(t^{X_1+\cdots+X_r}) = \mathbb{E}(t^{X_1}\cdots t^{X_r}) = \mathbb{E}(t^{X_1})\cdots\mathbb{E}(t^{X_r}) = \mathbb{E}(t^X)^r$ par équidistribution, i.e. $\phi_{X_1+\cdots+X_r} = \phi_X^r$. D'après la formule de transfert et celle des probabilités totales, on a $\phi_S(t) = \sum_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{P}(S = x)t^x = \sum_{x\in\mathbb{R}}\sum_{r=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S = x \mid T = r)\mathbb{P}(T = r)t^n$. Or, pour x réel et r dans $\mathbb{N}^*$, on a $(S = x, T = r) = (X_1+\cdots+X_r = x, T = r)$ et donc, par indépendance mutuelle de T et des $(X_k)_{k\geqslant 1}$, $\mathbb{P}(S = x \mid T = r) = \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_r)$. Il vient, d'après le théorème de Fubini-Tonelli, $\phi_S(t) = \sum_{r=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T = r)\phi_{X_1+\cdots+X_r}(t)$, i.e. $\phi_S(t) = \sum_{r=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T = r)\phi_X^r(t) = \phi_T(\phi_X(t))$ et donc $\phi_S = \phi_T \circ \phi_X$.

   (b) Pour une variable aléatoire discrète réelle Y admettant un moment d'ordre 2, on a $\phi_Y(1) = 1$ et, en considérant les dérivées première et seconde comme des dérivées à gauche, $\mathbb{E}(Y) = \phi_Y'(1)$ et $\mathbb{V}(Y) = \phi_Y''(1) + \mathbb{E}(Y)(1 - \mathbb{E}(Y))$. Par dérivation des fonctions composées, on a donc $\phi_S'(1) = \phi_X'(1)\phi_T'(1)$, d'où $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(T)\mathbb{E}(X)$. Puis il vient $\phi_S''(1) = \phi_X''(1)\phi_T'(1) + \phi_X'(1)^2\phi_T''(1)$, donc $\phi_S''(1) = \mathbb{V}(X)\mathbb{E}(T)+\mathbb{E}(X)^2\mathbb{V}(T)-\mathbb{E}(T)\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(X)^2\mathbb{E}(T)^2$, i.e. $\mathbb{V}(S) = \mathbb{V}(X)\mathbb{E}(T) + \mathbb{E}(X)^2\mathbb{V}(T)$.
3. (a) L'événement $(T_x \leqslant b - a)$ contient l'événement $X_1 = X_2 = \cdots = X_{\max(b-x,x-a)}$. Il est donc de probabilité supérieure à $2^{-\max(b-x,x-a)}$ et donc a fortiori supérieure à $2^{-(b-a)}$. Le résultat demandé en résulte par passage au complémentaire.

   (b) Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on peut écrire, pour x dans $]a, b[$, par indépendance des $(X_k)_{k\geqslant 1}$, $\mathbb{P}(T_0 > (n + 1)(b - a), T_0 > n(b - a), S_{n(b-a)} = x) = \mathbb{P}(T_x > b - a)\mathbb{P}(T_0 > n(b - a), S_{n(b-a)} = x)$ et donc cette probabilité est inférieure $(1 - 2^{-(b-a)})\mathbb{P}(T_0 > n(b - a), S_{n(b-a)} = x)$. En sommant sur x, on obtient par formule des probabilités totales $\mathbb{P}(T_0 > (n + 1)(b - a)) \leqslant (1 - 2^{-(b-a)})\mathbb{P}(T_0 > n(b - a)$, ce qui permet de conclure par récurrence.

   (c) On pose $q = 1 - 2^{-(b-a)}$. On a donc $0 \leqslant q < 1$. Pour N dans $\mathbb{N}^*$, on pose $n = \lfloor \frac{N}{b-a} \rfloor$. On a alors $N \geqslant n(b - a)$ et donc $\mathbb{P}(T_0 > N) \leqslant \mathbb{P}(T_0 > n(b - a)) \leqslant q^n \leqslant q^{N/(b-a)}$. On en déduit que la série $\sum N\mathbb{P}(T_0 > N)$ est convergente, ce qui est équivalent au fait que T_0 admette un moment d'ordre 2. Puisque T_0 admet un moment d'ordre 2, il est presque sûrement fini.

   (d) Or, on a presque sûrement $T \in \mathbb{N}^*$ et $S_{T-1} \in]a, b[$, donc $S_T \in] - a - 1, b + 1[$. Comme on a affaire à des entiers, $S_T \in [a, b]$. Comme par définition $S_T \notin]a, b[$, on en déduit que S est presque sûrement à valeurs dans $\{a, b\}$. On a $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{V}(X) = 1$. La question 2.b) permet d'en déduire $\mathbb{E}(S) = 0$. En notant $p = \mathbb{P}(S = a)$, il vient $\mathbb{P}(S = b) = 1 - p$ et $\mathbb{E}(S) = b + p(a - b)$. On en tire $p = \frac{b}{b-a}$ et l'assertion s'ensuit.

(e) On a donc $\mathbb{V}(S) = \mathbb{E}(T)$ et $\mathbb{V}(S) = \frac{ab(a-b)}{b-a} = -ab$. d'où $\mathbb{E}(T) = -ab$.

Exercice IV

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de Gau-Lucas et d'en tirer des applications géométriques.

1. (a) En dérivant formellement un produit, on obtient $\dfrac{P'}{P} = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \frac{\alpha_j}{X - z_j}$ et on en déduit que cette écriture est la décomposition en éléments simples de P'/P par unicité d'icelle.

   (b) On a donc, en évaluant en ζ et en remarquant $\frac{1}{\zeta - z_j} = \frac{\overline{\zeta} - \overline{z_j}}{|\zeta - z_j|^2}$, $0 = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \frac{\alpha_j(\overline{\zeta} - \overline{z_j})}{|\zeta - z_j|^2}$ et donc, en prenant les complexes conjugués $\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{k} \frac{\alpha_j}{|\zeta - z_j|^2}\right)\zeta = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \frac{\alpha_j}{|\zeta - z_j|^2} z_j$. Comme les termes $\frac{\alpha_j}{|\zeta - z_j|^2}$ sont des réels strictement positifs, ceci exhibe ζ comme combinaison convexe de $z_1, \dots, z_k$.

2. Puisque la droite $i\mathbb{R}$ est convexe, la question précédente démontre que si $z_1, \dots, z_k$ sont imaginaires purs, alors toute racine de P' distincte de ceux-ci est dans $i\mathbb{R}$. Comme c'est aussi le cas des racines de P' communes à celles de P, on en déduit que toutes les racines de P' sont imaginaires pures.

3. (a) Par définition de l'enveloppe convexe $\mathcal{D}'$ est inclus dans tout convexe contenant toutes les racines de P'. Or $\mathcal{D}$ est convexe, contient toutes les racines de P' distinctes de celles de P et également les racines de P, donc celles communes à P et P'. Il en résulte $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$.

   (b) Le complémentaire d'un demi-plan étant également un demi-plan, il est convexe. Si donc le complémentaire de H contient toutes les racines de P', il contient $\mathcal{D}'$ par définition de l'enveloppe convexe. Par contraposée, H contient l'une des racines de P'. Soit z un complexe. Alors H contient l'une des racines de $(P - z)'$, donc rencontre l'enveloppe convexe des racines de $(P - z)'$, donc aussi celle des racines de $P - z$ d'après la question précédente. Son complémentaire, étant convexe, ne saurait contenir toutes les racines de $P - z$, i.e. l'une des racines de $P - z$ est dans H, i.e. z a un antécédent par P_H : P_H est surjectif.

4. L'ensemble des n-uplets de réels positifs de somme 1 est compact comme intersection du produit de compacts $[0,1]^n$ avec l'hyperplan affine fermé, car en dimension finie, d'équation $x_1 + \cdots + x_n = 1$. Par continuité de l'application linéaire en dimension finie $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 z_1 + \cdots + x_n z_n$, on en déduit que $\mathcal{D}$ est compact. Soit z n'appartenant pas à $\mathcal{D}$, d sa projection sur le convexe fermé $\mathcal{D}$ et H le demi-plan ouvert donné par $\{u \in \mathbb{R}^2 | \mathrm{Re}((u - d)\overline{(z - d)}) > 0\}$. Alors H ne contient aucun point de $\mathcal{D}$ et donc P_H ne prend pas la valeur 0. Il en résulte que H ne recontre pas $\mathcal{C}$. Comme H contient z, on en déduit $z \notin \mathcal{C}$. Par conséquent $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$.

Exercice V

1. (a) Raisonnons par l'absurde. Soit M est un majorant de g sur $[0,1[$, x dans $[0,1[$ et N dans $\mathbb{N}$, on a par positivité de (b_n), $M \geqslant g(x) \geqslant \displaystyle\sum_{n=0}^{N} b_n x^n$. Par passage à la limite à gauche en 1 dans l'inégalité $M \geqslant \displaystyle\sum_{n=0}^{N} b_n x^n$, on obtient $M \geqslant \displaystyle\sum_{n=0}^{N} b_n$. Comme la série $\sum b_n$ diverge, un tel M n'existe pas et donc g n'est pas majoré sur $[0,1[$. Par positivité de (b_n), il en résulte que g est une fonction croissante non majorée sur $[0,1[$. Il en résulte $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} g(x) = +\infty$.

(b) Soit N dans $\mathbb{N}$ tel que pour tout n entier supérieur à N on ait $\frac{a_n}{b_n} \geqslant A$. Par positivité de (b_n), il vient pour x dans $[0,1[$, $\sum_{n=N}^{+\infty} a_n x^n \geqslant A \sum_{n=N}^{+\infty} b_n x^n$ et donc $f(x) \geqslant A g(x) + \sum_{n<N} (a_n - A b_n) x^n$. La somme étant une fonction polynomiale de x, elle est définie et continue sur le compact $[0,1]$ et y est donc bornée. Soit B un majorant de sa valeur absolue sur $[0,1]$. On a donc $f(x) \geqslant A g(x) - B$ puis, par stricte positivité de g (car $g(x) \geqslant g(0) = b_0 > 0$ par hypothèse), $\frac{f(x)}{g(x)} \geqslant A - \frac{B}{g(x)}$. L'assertion résulte donc de la question précédente.

(c) Soit $\ell = \lim \frac{a_n}{b_n}$. Le cas $\ell = +\infty$ résulte directement de la question précédente. Le cas $\ell = -\infty$ résulte du précédent en l'appliquant à $(-a_n)$ et (b_n) et par linéarité de la limite. Supposons que ℓ fini. Soit $\varepsilon > 0$. Alors (a_n/b_n) est supérieur à $\ell - \varepsilon$ à partir d'un certain rang et donc, en appliquant ce qui précède, si x est assez proche de 1, alors $f(x)/g(x)$ est supérieur à $\ell - 2\varepsilon$. En appliquant ce raisonnement avec $(-a_n)$ et (b_n), dont le rapport tend vers $-\ell$, pour x assez proche de 1, $-f(x)/g(x)$ est supérieur à $-\ell - 2\varepsilon$, i.e. $f(x)/g(x)$ est inférieur à $\ell + 2\varepsilon$. On en déduit que, pour x assez proche de 1, $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \ell\right| \leqslant 2\varepsilon$, soit $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim \dfrac{a_n}{b_n}$.

(d) La série entière $\sum s_n x^n$ est par définition le produit de Cauchy entre les séries $\sum a_n x^n$ et $\sum x^n$. Comme ces deux séries ont un rayon de convergence de 1, on en déduit que $\sum s_n x^n$ converge absolument sur $]-1,1[$ et qu'on a, pour x dans cet intervalle $\sum_{n=0}^{+\infty} s_n x^n = \dfrac{f(x)}{1-x}$, ce qui est le résultat demandé. Pour la même raison on a $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) m_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n x^n \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ et il vient $f(x) = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) m_n x^n = \dfrac{\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) m_n x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n}$. En posant $b_n = n+1$ et $a_n = (n+1) m_n$, on a $b_n > 0$, $\sum b_n x^n$ admet 1 pour rayon de convergence et la série diverge si $x = 1$, $\sum (n+1) m_n$ est un produit de Cauchy de trois séries de rayons de convergence au moins égal à 1, donc son rayon de convergence est égal ou supérieur à 1. Enfin, si (m_n) converge, $\frac{(n+1) m_n}{n+1}$ aussi, et on peut appliquer la question précédente, ce qui donne exactement le résultat voulu.

2. (a) Puisque (a_n) ne tend pas vers 0, le rayon cherché est inférieur à 1. Puisque (a_n) est borné, il est plus grand que 1. Donc le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est 1.

(b) D'après la question 1.d), on peut écrire, pour x dans $]-1,1[$, $(1-x) f(x) = \dfrac{\sum_{n=0}^{+\infty} s_n x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n}$. Or, pour n et k entier, si $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$, on a $s_n = k$. Il en résulte $s_n = \lfloor \frac{\ln(n)}{\ln(2)} \rfloor$ et donc $s_n = \mathrm{o}(n+1)$. La question 1.c) permet donc de conclure $\lim\limits_{x \to 1^-} (1-x) f(x) = 0$.

(c) Soit t dans $[0,1[$, alors $\sum_{n \geqslant 2^p} a_n (tz)^n$ est la série $\sum_{n \geqslant p} t^{2^n}$. La question 1.a) permet de conclure que la somme de cette série tend vers $+\infty$ quand t tend vers 1 à gauche. On en déduit que S n'a pas de limite en z.

(d) Soit z dans le cercle unité. On dispose de t réel tel que $z = \mathrm{e}^{it}$. Par densité des nombres dyadiques dans $\mathbb{R}$ et continuité de l'exponentielle, dans tout voisinage ouvert de z on dispose donc d'une racine 2^p-ième de l'unité z_p pour un certain p. La question précédente permet d'affirmer que dans tout voisinage de z_p, on peut trouver un point en lequel S prend une valeur arbitrairement grande en module. C'est donc aussi le cas dans tout voisinage ouvert de z. On en conclut que S n'admet de limite en aucun point du cercle unité.

3. On s'intéresse à la somme de $\sum (-1)^n a_n x^n$ au voisinage de 1 à gauche. On note $s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$. Ainsi on a $s_0 = 1$, $s_1 = s_2 = s_3 = 0$, $s_4 = s_5 = \cdots = s_8 = 1$ et plus généralement, pour n et k entiers, si $(2k)^2 \leqslant n < (2k+1)^2$ alors $s_n = 1$ et si $(2k+1)^2 \leqslant k < (2(k+1))^2$ alors $s_n = 0$. On pose

$m_n = \frac{s_0+\cdots+s_n}{n+1}$. On remarque que la somme des carrés $\sum_{k=0}^{N} k^2$ vaut $\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$ et donc la somme des carrés des nombres pairs $\sum_{k=0}^{N}(2k)^2$ vaut $\frac{2N(N+1)(2N+1)}{3}$ et celle des carrés des nombres impairs $\sum_{k=0}^{N}(2k+1)^2$ vaut $\frac{(2N+1)(N+1)(4N+3)}{3} - \frac{2N(N+1)(2N+1)}{3}$, i.e. $\frac{(2N+1)(N+1)(2N+3)}{3}$. Par conséquent si $(2N)^2 \leqslant n < (2(N+1))^2$, alors $(n+1)m_n$ est compris entre $\frac{(2N-1)N(2N+1)}{3} - \frac{2N(N-1)(2N-1)}{3}$ et $\frac{(2N+1)(N+1)(2N+3)}{3} - \frac{2N(N+1)(2N+1)}{3}$, i.e. entre $(2N-1)N$ et $(2N+1)(N+1)$, de sorte que m_n est compris entre $\frac{N(2N-1)}{(2(N+1))^2}$ et $\frac{(N+1)(2N+1)}{(2N)^2}$. Par encadrement des limites, on en déduit $\lim m_n = \frac{1}{2}$. La question 1d) permet donc de conclure.

Problème d'algébre et géométrie

Partie A

1. L'application

$$\begin{aligned} S_n &\to \{(i_1,\ldots,i_n) \in [\![1,n]\!]^n \text{ t.q. pour tous } k,l, i_k \neq i_l\} \\ \sigma &\mapsto (\sigma(1),\ldots,\sigma(n)) \end{aligned} \tag{2.1}$$

   est une bijection. Par conséquent, S_n est de cardinal fini et son cardinal vaut précisément $n(n-1)\ldots 3.2.1 = n!$ (situation de tirage successifs sans remise en combinatoire).

2. On a $S_2 = \{Id, (1,2)\}$. Par ailleurs, si $n \geqslant 3$, S_n contient les transpositions $(1,3)$ et $(1,2)$, et, par conséquent, on a : $(1,2).(1,3) = (1,3,2)$ et $(1,3).(1,2) = (1,2,3)$. On en déduit que S_n n'est pas abélien.

3. (a) i. **Première méthode :** On rappelle que toute permutation se décompose en produit de cycles à supports disjoints. Or, on a :

$$(i_1,\ldots,i_k) = (i_1,i_2)(i_2,i_3)\ldots(i_{k-1},i_k)$$

   Deuxième méthode : On fait une récurrence descendante sur le nombre de points fixes de σ. Si σ a n points fixes, c'est l'identité et donc le produit de 0 transpositions. Supposons avoir montré que toute permutation ayant au moins k points fixes (avec $1 \leqslant k \leqslant n$) se décompose comme produit de transpositions. Alors, si σ a $k-1$ points fixes, on prend $i \neq j$ tels que $\sigma(i) = j$ et on remarque que $(i,j)\sigma$ fixe i ainsi que tous les points fixes de σ et a donc au moins k points fixes, ce qui permet de conclure par hypothèse de récurrence.

   ii. Le graphe est complet trivial au sens où chaque sommet est relié à tous les autres. Il est donc connexe.

   (b) i. On remarque que $(i,i+1)(i+1,k)(i,i+1) = (i,k)$, ce qui signifie que l'on peut obtenir toutes les transpositions comme produit d'éléments de $\mathcal{A}_2$. La question 3a) permet alors de conclure.

   ii. Les arêtes du graphe sont constituées de tous les $(i,i+1)$. Par conséquent, pour deux sommets d'indices i et k avec, par exemple, $i < k$, on peut les relier via le chemin

$$i \to i+1 \to i+2 \to \ldots \to k-1 \to k$$

   Le graphe est donc connexe.

(c) i. Soient i et j deux indices de sommet. On doit montrer que i et j sont reliés par un chemin dans le graphe. Comme $\mathcal{A}$ engendre S_n, on peut écrire (i,j) comme produit de transpositions de $\mathcal{A}$:

$$(i,j) = (u_0,u_1)\dots(u_{k-1},u_k)$$

On peut supposer de plus que cette décomposition est de longueur minimale. Cela implique que i ou j soit dans $\{u_0,u_1\}$. En effet, si ni i ni j n'est dans cet ensemble, alors comme (u_0,u_1) est à support disjoint de (i,j), il peut être éliminé de la décomposition dans le membre de droite, par unicité de la décomposition en cycles à supports disjoints, ce qui contredit alors la minimalitéde la décomposition. Pour la même raison de minimalitéet d'unicité de la décomposition en produit de cycles à supports disjoints, on doit avoir une intersection non vide entre $\{u_0,u_1\}$ et $\{u_2,u_3\}$
Supposons par exemple $i=u_0$, les autres cas se traitant de même. On peut alors relier les sommets i et j par le chemin

$$i = u_0 \to u_1 = u_2 \to u_3 = u_4 \to \dots \to u_{k-1} \to u_k$$

Donc le graphe est connexe.

ii. On suit l'indication :

$$\sigma(u_{r-1},u_r)\sigma^{-1} = (\sigma(u_{r-1}),\sigma(u_r)) = (u_0,u_r) = (u,v)$$

ce qui montre que l'on peut écrire n'importe quelle transposition (u,v) sous la forme d'un produit de transpositions de $\mathcal{A}$ sous l'hypothèse que l'on puisse relier u et v par un chemin tel que tous les sommets soient distincts entre eux. Ceci est toujours possible, par connexité du graphe et en choisissant un chemin de longueur minimale.

Partie B

4. (a) conséquence immédiate de l'observation suivante : $\tau_i\sigma_i = \tau_i\tau_i\tau_{i+1}\dots\tau_{n-1} = \sigma_{i+1}$.

(b) De même, on remarque que $\tau_i\sigma_{i+1} = \sigma_i$, ce qui implique le résultat voulu.

(c) **Premier cas : i+1<j.** Alors $\tau_i H_j = \tau_i\sigma_j H = \sigma_j\tau_i H = \sigma_j H = H_j$, où on a utilisé le fait que τ_i et σ_j sont à supports disjoints et donc commutent.
Deuxième cas : $j < i-1$**.** On commence par vérifier l'indication, qui provient directement de la relation $(\tau_i\tau_{i+1})^3 = 1$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\tau_i\sigma_j &= \tau_i\tau_j\dots\tau_{i-2}\tau_{i-1}\tau_i\tau_{i+1}\dots\tau_{n-1} && (2.2)\\
&= \tau_j\dots\tau_{i-2}\tau_i\tau_{i-1}\tau_i\tau_{i+1}\dots\tau_{n-1} \text{en utilisant le troisième axiome sur les } \tau_k && (2.3)\\
&= \tau_j\dots\tau_{i-2}\tau_{i-1}\tau_i\tau_{i-1}\tau_{i+1}\dots\tau_{n-1} \text{ grâce à l'indication} && (2.4)\\
&= \tau_j\dots\tau_{i-2}\tau_{i-1}\tau_i\tau_{i+1}\dots\tau_{n-1}\tau_{i-1} \text{ en utilisant le fait que } \tau_{i-1} \text{ commute avec les } \tau_{i+1},\dots,\tau_{n-1} && (2.5)\\
&= \sigma_j\tau_{i-1}
\end{aligned}$$

Et donc $\tau_i H_j = \tau_i\sigma_j H = \sigma_j\tau_{i-1}H = \sigma_j H = H_j$.

5. (a) i. Si $i=j-1$, alors il n'y a rien à montrer. Sinon, on écrit :

$$\sigma_i^{-1}\sigma_j = \tau_{n-1}\dots\tau_{i+1}\tau_i\tau_j\tau_{j+1}\dots\tau_{n-1} = \sigma_{i+1}^{-1}\sigma_j\tau_i$$

où on a utilisé le fait que, comme $i<j-1$, donc τ_i commute avec toutes les transpositions composant σ_j. On répète alors le processus par récurrence et on trouve que $\sigma_i^{-1}\sigma_j = \sigma_{j-1}^{-1}\sigma_j\tau_{j-2}\tau_{j-3}\dots\tau_i$ On remarque que $\tau_{j-2}\tau_{j-3}\dots\tau_i$ est dans H car tous les indices sont inférieurs ou égaux à $n-2$. Par ailleurs, $\sigma_{j-1}^{-1}\sigma_j$ est dans H par hypothèse.

Donc, $\sigma_i^{-1}\sigma_j$ est dans H.
De même,

$$\sigma_{j-1}^{-1}\sigma_j = \tau_{n-1}\dots\tau_j\tau_{j-1}\tau_j\tau_{j+1}\dots\tau_{n-1} \tag{2.6}$$
$$= \tau_{n-1}\dots\tau_{j+1}\tau_{j-1}\tau_j\tau_{j-1}\tau_{j+1}\dots\tau_{n-1} \text{ par la relation donnée dans l'indication du 4c} \tag{2.7}$$
$$= \tau_{j-1}\sigma_{j+1}^{-1}\sigma_j\tau_{j-1} \tag{2.8}$$
$$= \tau_{j-1}\sigma_{j-1}^{-1}\sigma_j\tau_{j-1}$$

Donc, comme τ_{j-1} et $\sigma_{j-1}^{-1}\sigma_j$ appartiennent à H, c'est aussi le cas de $\sigma_{j-1}^{-1}\sigma_j$.

ii. On remarque que :

$$\sigma_{k+1}^{-1}\sigma_k = \tau_{n-1}\dots\tau_{k+1}\tau_k\tau_{k+1}\dots\tau_{n-1} \tag{2.9}$$
$$= \tau_{n-1}\dots\tau_{k+2}\tau_k\tau_{k+1}\tau_k\tau_{k+2}\dots\tau_{n-1} \tag{2.10}$$
$$= \tau_k\sigma_{k+2}^{-1}\sigma_{k+1}\tau_k$$

On en déduit déjà, dans un premier temps que $\sigma_{n-1}^{-1}\sigma_{n-2} \in H$. En effet, soit c'est lui qui appartient à H par hypothèse. Sinon, c'est un certain $\sigma_{j+1}^{-1}\sigma_j$. Mais dans ce cas, en appliquant récursivement la relation que l'on vient de trouver, on en déduit que $\sigma_{n-1}^{-1}\sigma_{n-2} \in H$. Puis, par une récurrence descendante employant la même formule, on montre que $\sigma_k^{-1}\sigma_k \in H$, et ce pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$.

iii. Donc, en particulier, $\sigma_{n-1}^{-1}\sigma_{n-2} \in H$. Or, $\sigma_{n-2}^{-1}\sigma_{n-2} = \tau_{n-1}\tau_{n-2}\tau_{n-1} = \tau_{n-2}\tau_{n-1}\tau_{n-2}$. Or, τ_{n-2} est aussi dans H, on en déduit $\tau_{n-1} \in H$, ce qui implique $H = G$, ce qui cotnredit le fait que G ne soit pas engendré par un sous-ensemble strict de $\{\tau_1, \dots, \tau_{n-1}\}$.

(b) On a $H_i = H_j$ si et seulement si $\sigma_i H = \sigma_j H$ si et seulement si $H = \sigma_i^{-1}\sigma_j H$ s et seulement si $\sigma_i^{-1}\sigma_j \in H$. Les questions précédentes en montrent l'impossibilité.

6. On commence par remarquer que l'application $\eta : H_i \to H_j$ définie par $\eta(\mu) = \sigma_j\mu\sigma_i^{-1}$ est une bijection, de quoi il suit que H_i et H_j ont même cardinal. Par ailleurs, on montre que les $(H_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ forment une partition de G. Soit, en effet, $\sigma \in G$. On peut le décomposer de manière minimale sous la forme $\sigma = \tau_{i_1}\dots\tau_{i_r}$. Nous allons montrer que σ appartient à un H_l, $1 \leqslant l \leqslant n$. Pour cela, nous suivons l'algorithme suivant : $1 \in H_n = H$. Donc $\tau_{i_r} \in \tau_{i_r}H_n$, qui est lui-même un certain H_{j_r} en appliquant les règles démontrées en question 4. Puis, $\tau_{i_{r-1}}\tau_{i_r} \in \tau_{i_{r-1}}H_{j_r}$, qui est lui-même un certain $H_{j_{r-1}}$, toujours d'après ces règles. On continue de la sorte, et on trouve à la fin que σ est dans un certain H_{j_1}. Donc, la réunion des $(H_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ forme tout G. Supposons à présent que H_i et H_j soient non-disjoints pour un certain couple $i \neq j$. Alors, il existerait x et y dans H tels que $\sigma_i x = \sigma_j y$, c'est-à-dire $\sigma_i^{-1}\sigma_j = xy^{-1} \in H$, ce qui contredit le résultat de la question 5. On a donc que les $(H_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ forment une partition de G.
Il résulte de ce qui précède que $|G| = n|H|$. Or, H est définie de manière analogue à G, simplement avec $n-1$ générateurs plutôt que n. On peut donc utiliser le raisonnement de manière récursive et on trouve :
$$|G| = n \times (n-1) \times \dots 2 \times 1 = n!$$

7. Le groupe G agit sur l'ensemble G/H des classes à gauche modulo H de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \alpha : G \times G/H &\to G/H \\ (\sigma, \mu H) &\mapsto \sigma\mu H \end{aligned} \tag{2.11}$$

On en déduit un morphisme de groupe $G \to S(G/H) \simeq S_n$. En particulier, via ce morphisme, τ_i est envoyé sur $(i, i+1)$. Or, les transpositions du type $(i, i+1)$ engendrent S_n (cf question 3.b)) et donc le morphisme est surjectif. Cependant, $|G| = n! = |S_n|$ et donc le morphisme en question est en réalité une bijection. d'où le résultat.

8. (a) On prend pour τ_1 la symétrie d'axe (Ox), qui laisse A invariant et échange B et C, et pour τ_2 la symétrie dont l'axe est confondu avec la bisectrice de l'angle $B\hat{C}A$, qui laisse donc C invariant et échange A et B. Par définition d'une symétrie, on a immédiatement que $\tau_1^2 = \tau_2^2 = 1$. Par ailleurs, $\tau_1\tau_2$ est la rotation centrée en l'origine et d'angle $2\pi/3$. On a donc tout de suite que $(\tau_1\tau_2)^3 = 1$. De même, $\tau_2\tau_1$ est la rotation d'angle opposé et on a donc aussi $(\tau_2\tau_1)^3 = 1$.

   (b) On remarque que G tel que défini dans cette question coincide avec le groupe G 'etudié dans cette partie B en prenant $n = 3$. Par conséquent, $G = S_3$.

Partie C

9. On constate déjà que chaque ligne est croissante. En effet, quand on crée une nouvelle case pour y stocker X, c'est parce que la ligne ne contenait pas d'élément plus grand strictement que X, et lorsqu'on réaffecte une case, on remplace le y qui s'y trouvait par un X plus petit, ce qui assure que la séquence reste croissante à droite de cette case. Mais, par ailleurs, comme y était le plus petit entier de la ligne strictement supérieur à X, on est assuré que la partie de la ligne à gauche de la case ne soit constitué que d'entiers inférieurs à X (strictement car X ne se trouvait avant pas dans le tableau) et donc cela reste strictement croissant à droite. Au final, chaque ligne est strictement croissante après chaque opération de réaffectation ou d'adjonction d'une case.
   Montrons que chaque colonne est croissante (du haut vers le bas). Dans le cas de la réaffectation d'une case en $Y_I[l]$, on remarque que l'on avait avant $Y_I[l] = y < Y_{I+1}[l]$. après réaffectation, on a $Y_I[l] = X < y < Y_{I+1}[l]$, ce qui préserve la stricte croissante vers le bas à partir de la case $Y_I[l]$. Par ailleurs, si $I = 1$, il n'y a pas de case au-dessus de $Y_I[l]$ et il n'y a donc rien d'autre à vérifier. Sinon, on remarque que X provient de la réaffectation d'une case de la ligne $I-1$, disons $Y_{I-1}[l]$. Mais, comme, avant ces réaffectations, on avait $Y_{I-1}[l] < Y_I[l]$ et que la ligne $I-1$ devait être strictement croissante, on a forcément $m \geqslant l$. Toujours par croissance le long de la ligne I, on a alors $Y_{I-1}[l] < Y^a_{I-1}[m] = X = Y_I[l]$, où l'exposant a indique la valeur de la case avant les réaffectations.
   Tout cela assure qu'on ait toujours affaire à un Γ-tableau après exécution de l'algorithme.

10. Il suffit de montrer qu'à chaque étape les tableaux G_i et D_i sont des Γ-tableaux standards. Pour G_i, cela découle de la question 9), et en ce qui concerne D_i, c'est clair car, pour passer de D_{i-1} à D_i on insère l'entier i, qui est plus grand que tous les entiers contenus dans D_{i-1} et on l'insère toujours soit à la fin d'une ligne, soit comme unique case dans une nouvelle ligne.
    Pour ce qui suit, il fallait lire que m est le nombre de cases de la première ligne (et non colonne), c'est-à-dire qu'il représente le nombre de colonnes.

11. Il faut chercher à comprendre comment $\sigma(n)$ a été inséré dans le tableau G_σ. Supposons qu'il ait été inséré en r étapes :
    - Première ligne : $\sigma(n)$ remplace y_1
    - Deuxième ligne y_1 remplace y_2.
    - ...
    - r-ième ligne : y_{r-1} est inséré dans une case créee au bout de la ligne (si la ligne n'existait pas avant, on considère qu'on insère une case au bout d'une ligne vide).

    Donc, n est dans la dernière case de la ligne numéro r de D_σ. Or, y_{r-1} a été délogé de la ligne numéro $r-1$ par y_{r-2} qui a été inséré à sa place. L'endroit où se trouvait y_{r-1} dans la ligne numéro $r-1$ est caractérisé par le fait que, après que y_{r-2} ait pris sa place, tous les éléments à sa gauche sont strictement plus petits que y_{r-1} et tous les éléments à droite sont strictement plus grand. On voit donc, dans l'algorithme proposé, que au début $X = y_{r-1}$, puis, après la première itération, $X = y_{r-2}$, et ainsi de suite, jusqu'à arriver à la première ligne età ce moment-la, quand $I = 1$, on obtient $X = \sigma(n)$, car c'est lui qui avait délogé y_1.

12. Soit $\sigma \in S_n$ tel que $\gamma(\sigma) = (G, D)$. D'après la question précédente, on connait déjà de manière non ambiǵu la valeur de $\sigma(n)$. On va généraliser un peu l'algorithme qui permettait le calcul de

$c(G,D)$:
On suppose avoir trouvé $\sigma(n),\dots,\sigma(n-r)$ pour un certain $0 \leqslant r \leqslant n-1$.
On remarque que D possède tous les entiers de 1 à $n-r-1$. On suppose que l'entier $n-r-1$ se trouve à la i-ième ligne et j-ième colonne. On initialise par $I = i$ et $X = G_i[j]$. On supprime de G et de D la case à l'intersection des lignes i et j.
Tant que $I > 1$: soit y le plus grand élément $< X$ dans G_{I-1}. On écrit la valeur X dans la case qui était occupée par y et on affecte la valeur y à X : $X = y$.
On passe à la ligne précédente : $I = I - 1$.
A la fin de la boucle, on trouve une valeur, notée $c_{n-r-1}(G,D)$.
Si $r = 0$, on remarque que l'on suit exactement l'algorithme qui avait été donné pour la question 11, sauf que l'on modifie les tableaux, en modifiant les valeurs et en étant une case. Cela permet de s'assurer qu'après avoir trouvé $\sigma(n)$, par exemple, $\sigma(n)$ ne se trouve plsu dans G et n ne se trouve plsu dans D, tout en ayant encore des Γ-tableaux standards, et cela permet donc de réitérer le même processus pour en retirer els autres valeurs.
Dans la mesure où les valeurs $\sigma(n),\sigma(n-1),\dots,\sigma(2),\sigma(1)$ sont fixés par (G,D), on a l'unicité.

13. D'après 12), on a $n! = \sharp S_n = \sharp\mathcal{T}_n^{(2)}$. Puis, on remarque que $\mathcal{T}_n^{(2)} = \bigcup_{\lambda\in\mathcal{P}(n)} (T_\lambda)^2$.

14. On remarque déjà qu'une permutation peut s'écrire sous la forme $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n)\end{pmatrix}$.
On remarque cependant que l'on ne change pas l'information si l'on permute les colonnes, c'est-à-dire que la même permutation peut aussi s'écrire $\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n\end{pmatrix}$, du moment que $\{p_1,p_2,\dots,p_n\} = [\![1,n]\!]$ et $\sigma(p_i) = q_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$.
Soit $1 \leqslant i \leqslant n$, on définit la classe t du couple (p_i,q_i) de la façon suivante. Dans l'algorithme qui permet de construire le couple (G_σ,D_σ) lorsqu'on cherche à insèrer le couple (p_i,q_i), on commence par l'insèrer dans la première ligne, soit en insèrant une nouvelle case tout à droite, soit en substituant q_i dans une des cases à la valeur qui y était précédemment (et qui sera alors reporté sur la ligne suivante). Si t est le numéro de la case de la première ligne de G_σ où on a inseré q_i, alors on dit que $(p_,q_i)$ est de classe t.
On remarque que (p_i,q_i) est de classe 1 si et seulement si, pour tout j tel que $p_j < p_i$, on a $q_j > p_i$, c'est-à-dire que si l'on ordonne les p_l dans l'ordre croissant (comme on a l'habitude de le faire), alors q_i est le minimum de tous ceux qui sont à drotie. Par exemple, dans $\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 4\end{pmatrix}$, alors $(1,5)$ est de classe 1 car 5 est le minimum de lui-même ; $(2,2)$ est de classe 1 car 2 est le minimum de $\{5,2\}$, $(4,1)$ est de classe 1 car 1 est le minimum de $\{5,2,3,1\}$. On remarque également que, si l'on supprime dans l'expression de la permutation σ les colonnes correspondantes aux couples de classe 1, on obtient une nouvelle permutation, disons σ'. Alors, les couples de classe 1 de σ' sont les couples de classe 2 de σ. Ainsi, dans l'exemple de μ, on a $\mu' = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 4\end{pmatrix}$. Or, le seul couple de classe 1 de μ' est le couple $(3,3)$, qui est donc de classe 2 pour μ. On se rend compte que l'on peut continuer ainsi, et donc $(5,4)$ est de classe 1 pour $\begin{pmatrix} 5 \\ 4\end{pmatrix}$, donc de classe 2 pour μ', donc de classe 3 pour μ.
Montrons le lemme intermédiaire suivant : Soit une permutation $\sigma = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n\end{pmatrix}$. Soit $1 \leqslant i \leqslant n$. Alors, le couple (p_i,q_i) est de classe t si et seulement si t est la longueur de la plus grande séquence du type :

$$\begin{aligned} p_{k_1} < p_{k_2} < \dots < p_{k_r} = p_i \\ q_{k_1} < q_{k_2} < \dots < q_{k_r} = q_i \end{aligned} \tag{2.12}$$

On appelle une telle séquence une ϵ-séquence pour (p_i,q_i). On montre ce lemme par récurrence sur t. On a vu que $t = 1$ si et seulement si $q_i = \min\{q_l | 1 \leqslant l \leqslant n, p_l < q_i\}$. Il est donc clair que

cela ne se réalise que si la plus grande ϵ-séquence pour (p_i, q_i) est de longueur 1. Supposons à présent avoir montré le lemme pour tout $t \leqslant T$ pour un certain $1 \leqslant T \leqslant n-1$. Alors, (p_i, q_i) est de classe $T+1$ si et seulement si (p_i, q_i) est de classe T pour σ', qui est la permutation σ dans laquelle on a été les colonnes correspondant à des couples de classe 1. Donc, (p_i, q_i) est de classe $T+1$ pour σ si et seulement si la plus grande ϵ-séquence pour (p_i, q_i) dans σ' est de longueur T. Or, comme les éléments de classe 1 pour σ vérifient $q_i = \min\{q_l | 1 \leqslant l \leqslant n, p_l < q_i\}$, on peut toujours prolonger une ϵ-séquence de (p_i, q_i) pour σ' en une ϵ-séquence du même couple pour σ en ajoutant un élément (à savoir un élément de classe 1), mais pas en en ajoutant plus. Inversement, toute ϵ-séquence de (p_i, q_i) pour σ peut toujours se tronquer en une ϵ-séquence pour σ' en étant le couple initial (qui est donc forcément de classe 1...). Donc, la plus grande ϵ-séquence pour (p_i, q_i) dans σ' est de longueur T si et seulement si la plus grande ϵ-séquence pour (p_i, q_i) dans σ est de longueur $T+1$, ce qui conclut la preuve du lemme par récurrence.
Nous avons à présent tous les éléments pour conclure la preuve. Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ q_1 & q_2 & q_3 & \dots & q_n \end{pmatrix}$.
Alors, il est clair que $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & \dots & q_n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$. On remarque que la première ligne de σ^{-1} n'est plus ordonnée dans l'ordre croissant, mais cela n'est pas dérangeant pour en déterminer la classe. En réalité, comme la condition du lemme est symétrique en (p, q), on observe que (p, q) est de classe t pour σ si et seulement si (q, p) est de classe t pour σ^{-1}.
Il faut maintenant remarquer connaitre les classes de tous les éléments permet de retrouver les tableaux (G_σ, D_σ). En effet, si j'ordonne tous les éléments (p, q) de classe t pour σ de la façon suivante :

$$p_{i_1} < p_{i_2} < \dots < p_{i_s} \text{ et } q_{i_1} > q_{i_2} > \dots > q_{i_s}$$

alors on en déduit que dans la t-ième case de la première ligne de G_σ (resp. D_σ) on a q_{i_k} (resp. p_{i_k}). Cela détermine entièrement la première ligne. Si l'on ôte de σ tous les couples qui ont trouvé leur place dans la première ligne, on peut recommencer ce processus, qui détermine donc de manière unique la seconde ligne, et ainsi de suite. On voit donc que connaitre tous les éléments de toutes les classes permet de reconstruire de manière non ambiǵu (G_σ, D_σ). Or, dans la mesure où (p, q) est de classe t pour σ si et seulement si (q, p) est de classe t pour σ^{-1}, il en ressort que si $(G, D) = \gamma(\sigma)$, alors $\gamma(\sigma^{-1}) = (D, G)$.

15. D'après la question précédente, on en déduit que $\gamma(\sigma) = (G, G)$, pour un certain $G \in \mathcal{T}_n$, si et seulement si $\sigma = \sigma^{-1}$. Par conséquent, γ induit une bijection de l'ensemble des permutations involutives sur $\mathcal{T}_n$. Or, les permutations involutives sont exactement celles dont la décomposition en produit de cycle à supports disjoints ne contient que des transposition (car tout cycle de longueur $l \geqslant 3$ aura un ordre $l \geqslant 3$). Or, si on s'intéresse au nombre de permutation pouvait s'écrire comme produit de k transpositionsà supports disjoints $(1 \leqslant k \leqslant \lfloor n/2 \rfloor)$, on remarque que pour en construire une, on choisit déjà $2k$ entiers parmi les entiers de $[\![1, n]\!]$ (il y a $\binom{n}{2k}$ possibilités), puis on réorganise ces $2k$ entiers dans un certain ordre (il y a $(2k)!$ possibilités). On se rappelle cependant que l'ordre des deux entiers dans une transposition n'importe pas (2^k possibilités), de même que l'ordre dans lequel on multiplie les transpositions ($k!$ possibilités). Au total, on a :

$$\binom{n}{2k} \frac{(2k)!}{2^k k!} = \frac{n!}{2^k k! (n-2k)!}$$

Vu que l'on somme sur toutes les possibilités en terme de nombre de transpositions intervenant dans la décomposition en produit de cycles à supports disjoints, on a le résultat voulu.

Problème d'Analyse et probabilités

Partie A

1. Si $x = a$, on a directement $J_a^A(x) = 1$. Sinon on a $J_a^A(x) = \frac{e^{i(x-a)A} - e^{-i(x-a)A}}{2Ai(x-a)}$, de sorte qu'on a $|J_a^A(x)| \leqslant \frac{1}{A|x-a|} = o(1)$. Ainsi, la limite cherchée vaut 1 si $x = a$ et 0 sinon.

2. (a) Soit a dans $\mathbb{R}_+^*$, M un majorant en valeur absolue de f et $I =]a, +\infty[$. On a pour tout x dans I et tout t das $\mathbb{R}_+$, $|f(t)e^{-xt}| \leqslant Me^{-at}$. L'intégrande étant par ailleurs une fonction continue de t et de x, il résulte du théorème de convergence dominée que $\mathcal{L}_f$ est continu sur I et donc aussi sur la réunion de ces ouverts, puisque la continuité est une propriété locale. Ainsi $\mathcal{L}_f$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (b) Pour x et t dans $\mathbb{R}_+$, on a $|f(t)e^{-xt}| \leqslant |f(t)|$. De plus le membre de droite est continu en x et en t. Ainsi d'après le théorème de convergence dominée, une condition simple est donnée par l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}_+$.
   On remarque qu'il s'agit précisément d'une CNS.

   (c) L'intégrande est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. En reprenant les notations de la sous-question (a), pour tout entier k, tout x dans I et tout t dans $\mathbb{R}_+$, on a $\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k} f(t)e^{-xt}\right| \leqslant Mt^k e^{-at}$. Le théorème de convergence dominée permet de conclure que $\mathcal{L}_f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (d) Note : il y avait une coquille dans l'énoncé, et il eût fallu lire que l'on demandait une condition pour que $\mathcal{L}_f$ soit continue sur $\mathbb{R}_+$, et non sur tout $\mathbb{R}$.
   Les arguments des deux sous-questions précédentes permettent de dire que si, pour tout entier k inférieur à n, $t \mapsto t^k f(t)$ est intégrable, alors $\mathcal{L}_f$ est de classe $\mathcal{C}^n$. Comme on a affaire à des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ et puisque $t^k f(t) = o(t^{k+1} f(t))$ pour tout entier naturel k, on en déduit qu'une condition simple pour que $\mathcal{L}_f$ soit de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}_+$ est que $t \mapsto t^n f(t)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

3. La fonction sin est analytique sur $\mathbb{R}$ et on a ainsi pour t réel $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!}$. Cette expression montre, de même que pour sin, que f est analytique sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, comme f est analytique, donc continue, elle est localement bornée au voisinage de 0. Par ailleurs, *sin* étant borné par 1 sur $\mathbb{R}$, on a que f est bornée sur $]-\infty, -\alpha] \cup [\alpha, +\infty[$ pour tout $\alpha > 0$, et donc f est finalement bornée sur $\mathbb{R}$. Au final, f appartient à E.

4. D'après la question 2.c) on peut dériver $\mathcal{L}_f$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et le résultat est donné par le théorème de convergence dominée, i.e. $\mathcal{L}'_f(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt}dt$. En intégrant la fonction donnée par $-e^{(i-x)t}$ et en prenant la partie imaginaire, on obtient $\mathcal{L}'_f(x) = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{i-x}\right)$, soit $-\frac{1}{1+x^2}$. On en déduit que $\mathcal{L}_f$ est la fonction $-\arctan$ à une constante près. Encore par convergence dominée, puisque l'intégrande tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, il en va de même pour $\mathcal{L}_f$. Il en résulte $\mathcal{L}_f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$. Cette fonction est continue en 0 et y admet donc une limite, à savoir $\frac{\pi}{2}$.

5. (a) Par intégration par parties, on a $\int f(t)dt = \frac{1-\cos(t)}{t} + \int g(t)dt$. Le premier terme du second membre ayant des limites en 0 et $+\infty$, on en déduit que les intégrales convergent simultanément et sont égales en cas de convergence. Comme g est dans E, elle est intégrable localement sur $\mathbb{R}_+$. En $+\infty$, on a $g(t) = O(1/t^2)$ et donc g est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi les deux intégrales convergent et on a $\mathcal{L}_f(0) = \mathcal{L}_g(0)$.

   (b) On applique le résultat de 2.c). Le théorème de convergence dominée permet d'obtenir, pour x dans $\mathbb{R}_+$, $\mathcal{L}''_g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (1-\cos(t))e^{-xt}dt$. On vérifie qu'une primitive de l'intégrande est donnée par $\left(-\frac{1}{x} + \frac{x\cos(t)}{1+x^2} - \frac{\sin(t)}{1+x^2}\right)e^{-xt}$. On en déduit $\mathcal{L}''_g(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{x(1+x^2)}$.

(c) Par intégration, on en déduit qu'à une constante additive près, $\mathcal{L}'_g$ est donné par $\ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$. Comme en question 4, la constante est déterminée par le fait que la limite est nulle en l'infini et il vient $\mathcal{L}'_g(x) = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

(d) Une intégration par parties permet de conclure qu'à une constante additive près, $\mathcal{L}_g$ est donné par $x\ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) - \arctan(x)$, la constante étant choisie pour que la limite soit nulle en l'infini, comme à la question précédente. On écrit $y\ln\left(\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right) = y\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+y^{-2}}}\right) = -\frac{y}{2}\ln(1+y^{-2}) \sim -\frac{1}{2y}$. Il vient $\mathcal{L}_g(x) = x\ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$, pour x non nul et $\mathcal{L}_g(0) = \frac{\pi}{2}$.

(e) Si α est nul, l'intégrale vaut 0. Sinon un changement de variable $u = |\alpha|t$, la ramène à sa valeur pour $\alpha = \pm 1$. Par parité de l'intégrande, on peut étudier le cas $\alpha = 1$: elle vaut alors $2\mathcal{L}_f(0)$. D'après la question précédente et la sous-question a), on en déduit que l'intégrale cherchée vaut 0 si $\alpha = 0$ et π si $\alpha > 0$ et $-\pi$ sinon.

6. (a) L'intégrande étant une fonction continue de x et t et l'intégration ayant lieu sur un compact, $K^A_{a,b}$ est définie et continue sur tout compact donc sur $\mathbb{R}$, par convergence dominée et théorème de Weierstrass dit des bornes atteintes. La partie imaginaire est égale à $-\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-A}^{A}\dfrac{\cos((x-a)t)-\cos((x-b)t)}{t}\mathrm{d}t$. Par imparité de l'intégrande et symétrie de l'intervalle d'intégration, l'intégrale est nulle, i.e. $K^A_{a,b}$ est à valeurs réelles.

(b) On a donc $K^A_{a,b}(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-A}^{A}\dfrac{\sin((x-a)t)-\sin((x-b)t)}{t}\mathrm{d}t$. Par convergence des intégrales 'etudiées, la limite en $+\infty$ vaut $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\sin((x-a)t)-\sin((x-b)t)}{t}\mathrm{d}t$. La question 5 permet d'en déduire que $\lim_{A\to+\infty} K^A_{a,b}(x)$ vaut 1 sur $]a,b[$, $\frac{1}{2}$ en a et b, et 0 ailleurs.

(c) D'après l'expression trouvée dans la question précédente et par changement de variable, on obtient $2\pi K^A_{a,b}(x) = \displaystyle\int_{-|x-a|A}^{|x-a|A}\dfrac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t - \int_{-|x-b|A}^{|x-b|A}\dfrac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$. Puisque l'intégrale du sinus cardinal converge, elle admet une primitive F bornée sur $\mathbb{R}$, disons par m en valeur absolue. Alors $2\pi|K^A_{a,b}(x)| = |F(|x-a|A) - F(|x-b|A) - F(-|x-a|A) + F(-|x-b|A)| \leqslant 4m$ par inégalité triangulaire. L'assertion s'ensuit.

Partie B

1. Soit A dans $\mathbb{R}_+$. L'intégrande étant mesurable, borné, μ étant une mesure finie et $[-A;A]$ étant compact, on peut appliquer le théorème de Fubini-Lebesgue pour obtenir

$$\frac{1}{2A}\int_{-A}^{A} \mathrm{e}^{-iat}\phi_\mu(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} J^A_a(x)\mathrm{d}\mu(x)\ .$$

Par inégalité triangulaire la fonction J^A_a est majorée indépendamment de A par 1. Puisque μ est une mesure finie, le théorème de convergence dominée permet d'échanger limite et intégrale et le résultat découle donc de la question 1 de la partie A.

2. La question 6.c) de la partie A et la finitude de la mesure μ permettent d'appliquer le théorème de convergence dominée et donc d'échanger limite et intégrale et le résultat découle donc de la question 6.b) de la partie A.

3. Puisque ϕ_μ est dans L^1, il en va de même pour la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-iat}\phi_\mu(t)$ et donc au voisinage de l'infini pour A, on a $\displaystyle\int_{-A}^{A}\mathrm{e}^{-iat}\phi_\mu(t)\mathrm{d}t = \mathrm{O}(1)$ et donc $\dfrac{1}{2A}\displaystyle\int_{-A}^{A}\mathrm{e}^{-iat}\phi_\mu(t)\mathrm{d}t = \mathrm{o}(1)$. L'assertion résulte donc de la question 1.

4. (a) On a par définition et avec les arguments de la question 1 pour justifier l'interversion des deux intégrales, $\int_{-\infty}^{+\infty} K_{a,b}^A(x)\mathrm{d}\mu(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{-A}^{A} \frac{\mathrm{e}^{-iat}-\mathrm{e}^{-ibt}}{t}\phi_\mu(t)\mathrm{d}t$. L'intégrande étant dans $\mathrm{O}(|\phi_\mu|)$, indépendamment de A, on peut à nouveau échanger limite et intégrale pour obtenir $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} K_{a,b}^A(t)\mathrm{d}\mu(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{-iat}-\mathrm{e}^{-ibt}}{t}\phi_\mu(t)\mathrm{d}t$. En utilisant les deux questions précédentes il vient donc $\mu([a,b]) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_a^b \mathrm{e}^{-ixt}\phi_\mu(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$. L'intégrande étant borné par $|\phi_\mu(t)|$ et $[a,b]$ étant compact, on peut une nouvelle fois échanger les deux intégrales et le résultat en découle.

   (b) Par unicité de la fonction f_μ à un ensemble de mesure de LEBESGUE nulle près, on déduit de la question précédente qu'on a $f_\mu(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-ixt}\phi_\mu(t)\mathrm{d}t$.

Partie C

1. On a $\int_{\mathbb{C}} |z-\bar{z}|^2\mathrm{d}\mu(z) = \int_{\mathbb{C}}(z-\bar{z})(\bar{z}-z)\mathrm{d}\mu(z) = \eta(MM^*)+\eta(M^*M)-\eta(M^2)-\eta((M^*)^2)$. Par auto-adjonction de M cette quantité est nulle, autrement dit $\int_{\mathbb{C}}\mathrm{Im}(z)^2\mathrm{d}\mu(z) = 0$. Pour tout entier naturel n, en posant $x = 2^{-n}$, on a donc aussi $\int_{|\mathrm{Im}(z)|>x}\mathrm{Im}(z)^2\mathrm{d}\mu(z) = 0$, ce qui entraîne $\mu\left(\{z\in\mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}(z)| > 2^{-n}\}\right) = 0$. On conclut avec le théorème de continuité monotone qu'on a $\mu\left(\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}\right) = 0$ et donc μ est à support inclus dans $\mathbb{R}$.

2. (a) On note K_μ le support de μ et $K_{\mathbb{R}} = K_\mu\cap\mathbb{R}$. Ce dernier ensemble est compact puisque K_μ l'est et $\mathbb{R}$ est fermé. Si z est dans $\mathbb{C}\backslash K_{\mathbb{R}}$, alors sa distance à $K_{\mathbb{R}}$ est non nulle et on la note d_z. Il vient $\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{1}{z-t}\right|\mathrm{d}\mu(t) \leqslant \frac{1}{d_z}\mu(K_{\mathbb{R}}) < +\infty$. Puisque $\mathbb{C}$ est complet, on en déduit que $G_\mu(z)$ est bien défini.

   (b) Avec les notations précédentes, on note $M = \max_{t\in K_{\mathbb{R}}}|t|$. Pour z dans $\mathbb{C}$ vérifiant $|z| > M$, on a, pour tout t dans $K_{\mathbb{R}}$, $|t| < |z|$ et $\frac{1}{z-t} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t}{z}\right)^k$. Or, pour k dans $\mathbb{N}$, on a $\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{t}{z}\right|^k\mathrm{d}\mu(t) \leqslant \frac{M^k}{|z|^k}\mu(K_{\mathbb{R}}) \leqslant \frac{M^k}{|z|^k}$. La série $\sum\frac{M^k}{|z|^k}$ étant convergente, on peut intervertir série et intégrale pour obtenir $G_\mu(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^{k+1}}\int_{\mathbb{R}}t^k\mathrm{d}\mu(t)$. On en déduit, pour z complexe vérifiant $|z| < \frac{1}{M}$, $M_\mu(z) = \sum_{k=0}^{\infty}z^k\int_{\mathbb{R}}t^k\mathrm{d}\mu(t)$. Le résultat en découle puisqu'on obtient un rayon de convergence supérieur à $1/M$.

   (c) L'application $z\mapsto zM_\mu(z)$ est holomorphe sur un voisinage de l'origine, nulle en 0, de dérivée en 0 égale à $\mu(\mathbb{R})$. Cette quantité étant non nulle, sa différentielle en 0 est inversible au voisinage de l'origine et le théorème d'inversion locale fournit deux voisinages de 0, U et V, tels que $z\mapsto zM_\mu(z)$ soit un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de U sur V. Quitte à restreindre U et V, on peut supposer U inclus dans le domaine de définition de M_μ. On note ψ la réciproque de ce difféomorphisme et on pose $C_\mu = M_\mu\circ\psi$. Alors C_μ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et vérifie la propriété demandée.

   (d) D'après ce qui précéde, pour z au voisinage de l'origine, on a $M_\mu\left(\frac{z}{zR_\mu(z)+1}\right) = C_\mu(z)$ si $\frac{z}{zR_\mu(z)+1}M_\mu\left(\frac{z}{zR_\mu(z)+1}\right) = z$ ou encore $G_\mu\left(R_\mu(z)+\frac{1}{z}\right) = z$. La fonction R_μ existant et étant unique et la fonction $z \mapsto G_\mu(1/z) = zM_\mu(z)$ étant injective au voisinage de 0, cette équation définit R_μ et est donc l'équation recherchée.

3. Dans le cadre de la question, pour $|z|$ assez grand on a $G_\mu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\eta(M^k)}{z^{k+1}}$ et donc, en notant ν la loi de λM, $G_\nu(z) = \frac{1}{\lambda} G_\mu(z/\lambda)$. Il vient $\frac{1}{\lambda} G_\mu\left(\frac{1}{\lambda} R_{\lambda M}(z) + \frac{1}{\lambda z}\right) = z$ ou encore $G_\mu\left(\frac{1}{\lambda} R_{\lambda M}(z) + \frac{1}{\lambda z}\right) = \lambda z$, ce qui est aussi égal, par définition de R_M, à $G_\mu\left(R_M(\lambda z) + \frac{1}{\lambda z}\right)$. Par injectivité au voisinage de l'origine de $z \mapsto G_\mu(1/z)$, on en déduit $\frac{1}{\lambda} R_{\lambda M}(z) = R_M(\lambda z)$, i.e. $R_{\lambda M}(z) = \lambda R_M(\lambda z)$.
4. Avec les hypothèses faites et la question précédente, on obtient, pour tout entier naturel non nul n et pour tout complexe z au voisinage de l'origine, $R_{\frac{1}{\sqrt{n}}(M_1+\ldots+M_n)}(z) = \sqrt{n} R_\mu(\frac{1}{\sqrt{n}} z)$. Au voisinage de 0, on peut écrire $R_\mu(z) = a + bz + \mathrm{o}(z)$ de sorte qu'on a
$$(R_\mu(z) + \frac{1}{z})^{-1} = \frac{z}{1 + az + bz^2 + \mathrm{o}(z^2)} = z - az^2 + (a^2 - b)z^3 + \mathrm{o}(z^3)$$
Or, $G_\mu(R_\mu(z) + 1/z) = z$, et comme $G_\mu(z) = \frac{\eta(I_m)}{z} + \frac{\eta(M)}{z^2} + \frac{\eta(M^2)}{z^3} + o(\frac{1}{z^3})$, on a en remplaçant, dans l'expression de G_μ, les $1/(r_\mu(z) + 1)$ par son développement asymptotique :
$$z = \eta(\mathrm{I_m})z + (\eta(M) - a\eta(\mathrm{I_m}))z^2 + (\eta(M^2) - 2a\eta(M) + (a^2 - b)\eta(\mathrm{I_m}))z^3 + \mathrm{o}(z^3)\ .$$
Il en résulte $R_\mu(z) = z + \mathrm{o}(z)$ et donc $R_{\frac{1}{\sqrt{n}}(M_1+\ldots+M_n)}(z) = z + \mathrm{o}(1)$, ce qui est l'assertion demandée.
5. On se ramène au cas précédent en considérant $N_i = \lambda_i(M_i - \eta(M_i)\mathrm{I}_m)$, que l'on suppose libres, et en choisissant λ_i de sorte que $\eta(N_i^2) = 1$, i.e. $\lambda_i^2(\eta(M_i^2) - \eta(M_i)^2) = 1$. Autrement dit en posant $a = \eta(M_1)$ et $b = \eta(M_1^2) - m^2$, et $S_n = \frac{1}{\sqrt{nb}}(M_1 + \ldots + M_n - an)$, R_{S_n} converge simplement vers R_σ.
6. C'est un analogue du théorème central limite.

Chapitre 3

Épreuves orales

Note préliminaire. Les compétences techniques sont au cœur de l'épreuve de leçons de mathématiques et de l'épreuve de modélisation mathématique. La première consiste à construire une leçon sur un thème donné. La candidate ou l candidat doit proposer un plan argumenté précisant l'agencement et l'enchaînement des concepts clefs de la notion abordée, les illustrer par des exemples, en donner des applications et être en mesure de développer au tableau des résultats représentatifs de cette leçon. C'est à la candidate ou au candidat qu'il incombe de sélectionner de tels résultats représentatifs (au moins deux), d'expliquer ces choix, et d'en proposer le développement au jury, dans un temps imparti. Dans la seconde épreuve, la candidate ou le candidat doit mettre en valeur ses connaissances techniques à partir d'un texte d'environ six pages qui lui est fourni. Il s'agit alors de mettre des mathématiques en action dans un contexte applicatif. La candidate ou le candidat présente et discute, de manière structurée, les hypothèses qui conduisent à la description mathématique proposée dans le texte et explique comment les énoncés du programme s'appliquent dans le contexte qui y est décrit. Le propos doit, de plus, être illustré en exploitant l'outil informatique.

Le jury rappelle que s'écarter du programme n'est en aucun cas une exigence pour prétendre à des notes très satisfaisantes ; le jury encourage surtout les préparations et les candidates et candidats à se concentrer sur la maîtrise des bases.

3.1 Épreuve orale de mathématiques (Analyse-Probabilités & Algèbre-Géométrie)

Les thèmes des leçons proposées au concours docteurs sont une sélection de l'ensemble des leçons d'algèbre-géométrie et d'analyse-probabilités du concours standard. On trouvera en annexe la liste des leçons qui seront utilisées en 2024. Le format de cette épreuve de leçons, ainsi que ses attendus, sont en tous points identiques à ceux des épreuves d'Analyse-Probabilités et d'Algèbre-Géométrie du concours standard. Aussi, les candidats sont invités à se reporter aux indications fournies dans le rapport du concours standard pour cette épreuve.

Proposer un plan de leçon et réaliser le développement d'une démonstration précise et détaillée d'un résultat substantiel sélectionné dans le plan proposé, dans un temps limité, sans recours à des notes, constituent des exercices difficiles qui ne s'improvisent pas et auxquels les candidates et candidats doivent impérativement s'entraîner. Il est recommandé de s'y exercer au sein d'une préparation universitaire, où les candidates et candidats docteurs, forts d'une plus grande maturité scientifique, peuvent d'ailleurs jouer un rôle d'émulation très positif sur l'ensemble de la promotion. Le jury attire l'attention des candidates et candidats sur le fait que les tirages peuvent combiner deux leçons orientées analyse et probabilités ou deux leçons orientées algèbre et géométrie ou deux leçons prises dans chacun de ces champs. La candidate ou le candidat choisit laquelle de ces deux leçons elle ou il va exposer au jury. Le jury recommande une lecture minutieuse du rapport du concours standard, qui donne des indications détaillées sur les attendus de ces leçons. On y trouvera notamment une description des notions de base qui devraient constituer le cœur des leçons.

Il est toujours conseillé aux candidates et candidats de chercher à rassurer le jury quant à la maîtrise de ces bases plutôt que de tenter de l'éblouir par un exposé potentiellement inspiré de leurs thèmes de recherche mais débordant largement du programme. Le jury estime que le programme du concours contient un matériel technique suffisamment étoffé pour évaluer les capacités à remplir les missions du professeur agrégé. Les résultats contrastés sont surtout le reflet de niveaux de préparation hétérogènes.

3.2 Épreuve orale de modélisation (options A, B et C)

Pour cette épreuve, le jury renvoie là encore aux recommandations faites dans le rapport du concours standard. Le jury recommande d'éviter les écueils suivants :

— se lancer dans un hors sujet, caractérisé par une tentative de replacer le contenu d'une leçon au détriment de l'analyse du texte ;
— négliger l'illustration informatique, parfois par manque d'entraînement sur les logiciels du concours.

Les candidates et candidats docteurs peuvent tirer profit de leur recul scientifique dans cette épreuve qui nécessite des qualités de synthèse et une capacité à balayer le programme de manière transverse.

Le jury encourage les futurs candidates et candidats à bien se préparer à cette épreuve en s'exerçant sur les textes rendus publics et en se familiarisant avec l'environnement informatique du concours accessible sur le site agreg.org.

3.3 Épreuve orale de mise en perspective didactique d'un dossier recherche

Cette épreuve est spécifique au concours spécial ; sa matière est fournie par un document PDF de 12 pages maximum déposé par la candidate ou le candidat surson espace `Cyclades` dix jours avant le début des épreuves d'admission (en l'espèce la date butoir était donc le 8 juin à 23h59). Ce document consiste en un dossier scientifique présentant le parcours, les travaux de recherche et, le cas échéant, les activités d'enseignement et/ou de valorisation de la recherche. Il n'y a pas de format type puisque ce document a pour vocation de décrire l'expérience *personnelle* du candidat ; il doit surtout s'attacher à décrire le parcours de la candidate ou du candidat, la place qu'occupent les mathématiques dans les principales étapes de celui-ci et comment cette expérience, quelle qu'en soit la nature, sera réinvestie dans la pratique enseignante. La description de l'exploitation d'outils mathématiques au cours d'une expérience professionnelle, comme ingénieur par exemple, est tout à fait bienvenue. Candidates et candidats déjà enseignants peuvent aussi expliquer comment leur expérience de recherche s'exprime dans les classes.

Chaque dossier est confié au préalable à deux membres du jury, avec mission d'en être rapporteurs devant la commission d'interrogation. L'affectation des dossiers prend garde à ne pas confier cette part de l'évaluation à un expert du sujet de thèse de la candidate ou du candidat. L'appréciation du document fourni fait partie des éléments de la grille de notation. Les deux autres membres du jury sont réputés avoir un regard plus « candide » sur la présentation orale de ce dossier. Un débat préparatoire réunissait les membres de la commission avant les épreuves afin d'échanger sur les dossiers et d'organiser une interrogation personnalisée, adaptée aux profils de la candidate ou du candidat.

Les dossiers fournis sont pour la plupart soignés et de qualité, montrant un investissement incontestable des candidats pour mettre en valeur leur parcours. Le jury conseille aux candidates et candidats de penser dans un même élan le document écrit et la présentation orale, en ayant bien présent à l'esprit que le document fournit la base de la présentation et qu'il sera disponible tout au long de celle-ci. Le jury recommande aux candidates et candidats d'inclure dans leur dossier un minimum d'éléments biographiques (notamment en y faisant apparaître clairement leur nom) : des informations sur la mobilité géographique et thématique, le parcours académique et/ou professionnel, les évolutions après thèse... donnent du relief à la discussion. La bibliographie doit être vérifiable par le jury (articles de revues avec comité de lecture, livres vendus dans le commerce etc.). L'impossibilité de trouver de trace des articles ou livres mentionnés dans la bibliographie est sanctionnée.

De manière générale, la rédaction du dossier doit être guidée par une réflexion sur la question « En quoi une expérience dans la recherche peut-elle être un plus pour un enseignant ? ». La dimension de mise en perspective didactique du dossier occupe une place importante de son évaluation : on attend des candidats qu'ils mettent en lumière leurs savoirs, les méthodes et démarches présentes dans leurs travaux et qu'ils expliquent comment elles pourraient être réinvesties dans un enseignement sur l'éventail « lycée - L3 ». Le jury fait observer que la description d'une démarche de recherche et son explication didactique peuvent s'appuyer sur des sujets différents de ceux abordés durant la thèse, si la candidate ou le candidat juge un tel choix plus pertinent (cela peut être le cas pour des candidats ayant une expérience post-thèse assez longue). Davantage que les travaux proprement dits, c'est son expérience de recherche, son parcours qu'il convient de valoriser dans cette épreuve. En particulier, le jury recommande de ne pas s'appuyer sur des résultats obtenus personnellement mais dont on n'a plus la maîtrise. Les concepts utilisés doivent être introduits, et pouvoir être expliqués en détail.

L'objet de cette épreuve est que les candidates et candidats puissent faire preuve d'une véritable plus-value, les distinguant des candidats du concours standard.

Bien que cette demande puisse être légitime au regard des pratiques de la communauté mathématique, les textes régissant le concours interdisent l'exploitation de matériel auxiliaire : les candidates et candidats ne peuvent donc pas appuyer leur présentation sur un support projeté préparé à cette fin. Pour compenser en partie cette difficulté, le jury a décidé de projeter le document de 12 pages fourni par la candidate ou le candidat. en amont du concours. Il recommande donc vivement aux candidates et candidats de prendre en compte cette disposition, afin d'exploiter au mieux cette ressource pour leur exposé. Ce document peut notamment contenir des images ou des figures en illustrant le contenu, qui peuvent même être organisées sous forme d'animation à l'intérieur du fichier PDF. (Il doit bien s'agir d'images ou de figures sous forme d'animation ; cette option ne doit pas permettre d'ajouter du texte et de contourner ainsi la limitation imposée de 12 pages. Si une candidate ou un candidat utilise cette opportunité, il lui est conseillé de l'indiquer dans le document). Il est aussi possible d'insérer des liens hypertextes pour naviguer à l'intérieur du document. Il n'est toutefois pas permis d'exploiter des liens vers des sites web. De même, il n'est pas autorisé de se munir de son manuscrit de thèse, d'articles de recherche, ou, évidemment, de notes personnelles, ni pendant l'épreuve proprement dite, ni pendant la préparation ; seuls sont autorisés les mêmes documents que pour les autres épreuves, à savoir des livres dont la diffusion commerciale est avérée.

Il était rappelé en début de préparation que l'épreuve a pour objectif « d'apprécier l'aptitude de la candidate ou du candidat à rendre ses travaux accessibles à un public de non-spécialistes ». Typiquement il était recommandé de construire un discours à destination d'un auditoire de niveau au plus M2 de mathématiques ; l'épreuve n'est pas un séminaire réservé à un public de chercheurs sur le sujet de thèse de la candidate ou du candidat. Une grande attention avait été apportée à la composition des commissions pour justement éviter la présence d'experts des thèmes de recherche de la candidate ou du candidat. L'aptitude à se faire comprendre par des non-spécialistes, à la fois dans le dossier écrit et durant la prestation orale, la capacité à s'adapter à des questions de niveaux variés, occupent une part très substantielle de la grille de notation.

L'arrêté du 28 juin 2016 stipule que la candidate ou le candidat doit, lors de cette épreuve, répondre « [...] à une question [...] communiquée par le jury au début de l'heure de préparation ». Elle ou il reçoit donc une question spécifique l'invitant à développer sa réflexion sur la dimension didactique qui pourrait être donnée à son expérience de recherche et à expliquer comment cette expérience pourrait rejaillir dans ses fonctions d'enseignant. Lors de cette session, la question portait sur la proposition d'une ou plusieurs activités en classe autour des thématiques suivantes :

— proposer une illustration ou animation graphique, un dessin ou un objet permettant d'introduire une notion mathématique ;
— proposer une activité instaurant une situation de recherche en classe ;
— proposer une activité introduisant une problématique de modélisation.

Dans les trois cas, il était demandé de préciser à quel niveau était destiné la proposition lycée, ou bien L1 ou L2 non spécialiste.

Le jury souligne qu' il n'y a pas de réponse « type » attendue. Néanmoins, le jury apprécie sa pertinence et attend une description assez précise et concrète de la séance qui pourrait être proposée à des élèves ou des étudiants, avec des exemples et des exercices le cas échéant. Les mathématiques mises en oeuvre et l'identification des enjeux didactiques sont des éléments qu'il convient de bien expliciter. Certaines candidates et certains candidats ont fait cet effort de réfléchir à leur séance de cours ou TD et ont décrit en détail la séquence, en mettant bien en avant une démarche, bâtie sur une question, un calcul, une simulation, et conduisant à des déductions. Si ces propositions ont été plus ou moins pertinentes, avec un niveau plus ou moins bien identifié/adapté, elles ont toujours été valorisées par rapport aux affirmations laconiques « cette notion pourrait être présentée à des étudiants de L1-L2 », « telle partie pourrait être comprise par des étudiants de L1-L2 »... Le dialogue s'est systématiquement attaché à clarifier les modalités de mise en œuvre pratique et concrète de la séquence proposée.

L'épreuve proprement dite comprend deux parties distinctes. Dans un premier temps, durant 30 minutes, la candidate ou le candidat organise librement la présentation de son dossier (durant au moins 20 minutes) et la réponse à la question posée (durant au moins 5 minutes). La suite de l'interrogation est consacrée à un dialogue avec le jury. Ce dialogue, personnalisé suivant le parcoursde la candidate ou du candidat, explore divers aspects du dossier. On peut y distinguer

— des questions en lien direct avec la question posée pour la préparation de l'épreuve. L'objectif est ici de discuter du contenu mathématique de la démarche proposée et de sa mise en perspective didactique.
— des questions sur les mathématiques, les démarches et les méthodes présentées par la candidate ou le candidat lors de son exposé ou présents dans son dossier. Il ne s'agit pas de questions spécialisées d'experts, et encore moins de questions « pièges ». En particulier, pour des docteurs ayant soutenu leur thèse dans d'autres disciplines que les mathématiques, ces questions visent à mettre en relief les aspects mathématiques qui peuvent être en rapport avec leurs travaux de leur recherche. Le but est de tester la capacité à expliquer des points élémentaires des travaux de recherche et de discuter des possibilités de réinvestir les démarches utilisées ou les savoir-faire acquis dans un enseignement de niveau lycée, ou L1-L2.
— le jury peut proposer un exercice niveau lycée (ou L1 mais en restant dans des domaines très classiques) dans un domaine disjoint de celui de la thèse en demandant de le « faire vivre » dans une classe. Ces questions sortent les candidats de leur zone de confort en les faisant réfléchir à des questions en lien avec le programme du secondaire qui ne sont pas reliées à leur domaine de recherche. Il n'est pas attendu de résolution complète des exercices proposés lors de l'oral. Le jury attend une réflexion et une mise en oeuvre d'une possible stratégie, à commencer le plus souvent par une modélisation du problème.
— enfin, le jury pose des questions plus ouvertes dont le thème général peut se résumer à évaluer l'apport d'une expérience dans la recherche pour un enseignant.

Ces questions, dont le niveau est généralement assez élémentaire, arrivent au débotté durant la discussion. La capacité à rebondir pour resituer la question dans le cadre de l'expérience de recherche et/ou d'une réflexion à mener en classe, à reformuler des notions pour les rendre accessibles à un public non averti sont particulièrement évaluées dans cette phase de l'épreuve.

Cette épreuve permet de faire ressortir un véritable signal, discriminant et pertinent quant à l'objectif de recrutement d'enseignants et de valorisation d'une expérience de recherche. Elle joue pleinement son rôle dans la sélection des candidates et candidats. L'épreuve permet à des profils variés, issus d'autres disciplines ou dont la thèse est ancienne, d'exprimer des qualités et une motivation pour les carrières d'enseignants en mathématiques. Pour tirer plein profit de leur expérience et bien mettre en valeur leur parcours, les candidates et candidats doivent préparer cette épreuve spécifique avec soin. Une prestation improvisée, purement descriptive des résultats doctoraux, sans réflexion de mise en perspective et sans anticipation de la discussion, ne conduira qu'à un résultat médiocre.

Chapitre 4

La bibliothèque de l'agrégation

Pendant la préparation à l'épreuve de leçon, les candidates et les candidats ont accès à la bibliothéque du concours. . Pendant la préparation à l'épreuve de modélisation, les candidates et les candidats disposent d'une bibliothèque numérique. La liste des livres disponibles de ces deux bibliothéques peuvent être consultées dans le rapport de l'agrégation externe.

Chapitre 5

Liste des leçons de mathématiques pour le concours spécial 2025

Leçons de mathématiques pour le concours spécial docteurs 2025

101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

120 Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

121 Nombres premiers. Applications.

123 Corps finis. Applications.

141 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

142 PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.

148 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

149 Déterminant. Exemples et applications.

151 Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

155 Exponentielle de matrices. Applications.

156 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

157 Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

159 Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

162 Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

171 Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

181 Convexité dans $\mathbf{R}^n$. Applications en algèbre et en géométrie.

190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

203 Utilisation de la notion de compacité.

208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

213 Espaces de Hilbert. Exemples d'applications.

214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Illustrations en analyse et en géométrie.

215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

218 Formules de TAYLOR. Exemples et applications.

219 Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

220 Illustrer par des exemples la théorie des équations différentielles ordinaires.

223 Suites réelles complexes. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

228 Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

234 Fonctions et espaces de fonctions LEBESGUE-intégrables.

235 Problèmes d'interversion de symboles en analyse.

236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

241 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

245 Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbf{C}$. Exemples et applications.

246 Séries de FOURIER. Exemples et applications.

250 Transformation de FOURIER. Applications.

262 Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.

266 Utilisation de la notion d'indépendance en probabilités.