MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE
Liberté
Égalité
Fraternité

Concours de recrutement du second degré
Rapport de jury

Concours : Agrégation externe

Section : Mathématiques

Session 2023

Rapport de jury présenté par : Claudine Picaronny
Présidente du jury

Table des matières

1 Introduction **4**

2 Déroulement du concours et statistiques **5**

2.1 Déroulement du concours . . . 5

2.1.1 Les épreuves et le calendrier 2023 . . . 5

2.1.2 le programme . . . 6

2.1.3 Après la réussite au concours, la carrière d'enseignant . . . 6

2.2 Commentaires généraux et statistiques sur la session 2023 . . . 6

2.2.1 Commentaires généraux . . . 6

2.2.2 Données statistiques diverses . . . 11

3 Épreuves d'admissibilité **18**

3.1 Énoncés . . . 18

3.2 Rapport sur l'épreuve écrite de mathématiques générales . . . 18

3.2.1 Présentation du sujet . . . 18

3.2.2 Commentaires du jury . . . 19

3.2.3 Éléments de solution . . . 21

3.3 Rapport sur l'épreuve écrite d'analyse et probabilités . . . 42

3.3.1 Présentation du sujet. . . . 42

3.3.2 Correction de l'épreuve écrite d'Analyse et Probabilités . . . 45

4 Épreuves orales de leçons **75**

4.1 Liste des leçons. . . . 75

4.2 Présentation des épreuves . . . 77

4.2.1 Première partie : présentation de la leçon . . . 79

4.2.2 Deuxième partie : le développement . . . 81

4.2.3 Troisième partie : questions et dialogue . . . 83

4.3 Épreuve orale d'algèbre et géométrie . . . 83

4.4 Épreuve orale d'analyse et probabilités . . . 97

5 Épreuves orales de modélisation **108**

5.1 Présentation des épreuves de Modélisation . . . 108

5.1.1 Textes . . . 108

5.1.2 Période de préparation . . . 109
5.1.3 Période d'interrogation . . . 109
5.2 Recommandations du jury communes aux trois options . . . 111
5.2.1 Organisation de l'exposé . . . 111
5.2.2 Contenu de l'exposé . . . 111
5.2.3 Illustration informatique . . . 112
5.3 Option A : Probabilités et Statistiques . . . 112
5.3.1 Généralités . . . 112
5.3.2 Recommandations spécifiques . . . 113
5.3.3 Mise en œuvre informatique . . . 114
5.4 Option B : Calcul scientifique . . . 115
5.4.1 Généralités . . . 115
5.4.2 Recommandations spécifiques . . . 115
5.4.3 Mise en œuvre informatique . . . 117
5.5 Option C : Algèbre et Calcul formel . . . 117
5.5.1 Généralités . . . 117
5.5.2 Recommandations spécifiques . . . 117
5.5.3 Mise en œuvre informatique . . . 118

6 La bibliothèque de l'agrégation 120
6.1 Liste des livres disponibles . . . 120
6.2 Bibliothèque numérique . . . 155

Chapitre 1

Introduction

Le rapport de jury répond à deux objectifs : le premier est d'établir un compte-rendu de la session passé, le second est de préparer la prochaine session. Aussi, les lectrices et lecteurs y trouveront

- un bilan de la session 2023 qui restitue, au travers de quelques statistiques, la physionomie d'ensemble des candidates et candidats et des admises et admis, en termes de profils et de performances.
- une description de l'esprit dans lequel le jury entend aborder le concours de l'agrégation externe de mathématiques et la manière dont il conçoit les épreuves.
- une description et un commentaire détaillé de chacune des épreuves, discutant les réalisations de l'année et détaillant les attentes du jury.

Ce rapport peut être vu comme un guide pratique ; il se veut utile aux futurs candidates et candidats afin de les aider à se préparer au mieux pour les épreuves qui les attendent. S'il mentionne des lacunes et défauts constatés sur lesquels des efforts spécifiques mériteraient d'être faits, il cherche surtout à faire comprendre la nature des attentes, avec l'intention d'accompagner la préparation au concours.

Le jury considère que ce rapport est précis et détaillé quant à ses attentes et l'engage dans son évaluation. Le jury recommande donc aux candidates et candidats de tous profils, ainsi qu'aux centres de préparation et à leurs intervenants, d'en faire une lecture attentive et de bien tenir compte des prescriptions qui y sont faites.

Le site officiel de l'agrégation externe de mathématiques est accessible à l'adresse `agreg.org`. Il est régulièrement mis à jour en fonction de l'actualité du concours. Les visiteurs y trouveront des conseils, des liens pertinents, des archives (notamment les sujets d'écrits et leurs corrigés) et des renseignements pratiques concernant la session à venir. En particulier, les futurs candidates et candidats peuvent trouver sur ce site la `ClefAgreg` qui leur permettra de se familiariser avec l'environnement informatique qu'ils rencontreront pour l'épreuve de modélisation. Cette épreuve, sur texte et où la production d'illustrations informatiques est attendue, est assez spécifique ; s'y préparer suffisamment tôt permet de bien appréhender ses spécificités et aide nécessairement à renforcer les capacités de synthèse sur l'ensemble du programme. De plus, il est aussi possible d'y consulter une série de vidéos, réalisée par le jury, qui détaille le déroulement des épreuves de leçons et en précise les attentes.

Enfin, le jury rappelle qu'une réunion est traditionnellement organisée en début d'année universitaire sous l'égide des sociétés savantes de mathématiques et d'informatique (Société Mathématique de France, Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles, Société Informatique de France) pour évoquer le bilan et les perspectives du concours. Cette réunion est publique, universitaires intervenant en préparation de tous horizons y sont bienvenus.

Chapitre 2

Déroulement du concours et statistiques

2.1 Déroulement du concours

2.1.1 Les épreuves et le calendrier 2023

Le concours comprend deux épreuves écrites d'admissibilité — une composition de mathématiques générales et une composition d'analyse-probabilités — et trois épreuves orales d'admission : algèbre et géométrie , analyse et probabilités , modélisation. Les candidates et candidats ont eu le choix parmi trois options :

— probabilités et statistiques,
— calcul scientifique,
— algèbre et calcul formel.

Elles ne diffèrent que par l'épreuve de modélisation.

Les épreuves écrites de l'agrégation externe de mathématiques 2023 se sont déroulées

- le jeudi 16 mars 2023 pour l'épreuve de mathématiques générales,
- le vendredi 17 mars 2023 pour l'épreuve d'analyse et probabilités.

La liste d'admissibilité a été publiée le jeudi 11 mai 2023. Le concours fait l'objet de conventions internationales qui lient la France, le Maroc et la Tunisie : les sujets d'écrit servent aussi pour l'admissibilité aux agrégations de mathématiques en Tunisie et au Maroc. La délibération du jury d'admissibilité est ainsi menée conjointement avec les présidents des agrégations marocaine et tunisienne.

Les épreuves d'admission se sont déroulées du lundi 19 juin au mardi 4 juillet 2023. La liste d'admission a été publiée le mercredi 5 juillet 2023. Le déroulement et l'organisation d'un concours qui soumet plus de 700 candidates et candidats admissibles à trois épreuves orales, avec des options variées, une infrastructure informatique complexe, est une mécanique de précision, astreinte de surcroît à des exigences exceptionnelles de rigueur et d'égalité de traitement. Sa réussite repose sur l'engagement des équipes de l'établissement et du rectorat qui en ont la charge. L'organisation du concours au lycée Kléber dans l'académie de Strasbourg s'est faite avec la meilleure volonté et le dévouement de tous : le personnel du lycée Kléber, qui a accueilli les épreuves orales, et le personnel du rectorat de l'académie de Strasbourg ont offert au jury et aux candidates et candidats des conditions de travail excellentes et ont assuré une organisation performante, avec beaucoup de gentillesse et de patience. Ce rapport est l'occasion de transmettre à Monsieur le Recteur, Monsieur le Proviseur et Monsieur le Secrétaire Général du lycée Kléber, le personnel de la DEC, et tous les appariteurs les plus chaleureux remerciements du jury et relaie les nombreux messages de reconnaissance exprimés par les candidates et candidats pour la qualité de l'accueil qu'ils ont reçus.

2.1.2 le programme

Le concours externe de l'agrégation a pour vocation de recruter des professeures et professeurs agrégés destinés à exercer dans l'enseignement secondaire (lycées d'enseignement général et technologique et, exceptionnellement, collèges) ou dans l'enseignement supérieur (universités, instituts universitaires de technologie, grandes écoles, classes préparatoires aux grandes écoles, sections de techniciens supérieurs). Le jury estime donc que le niveau visé devrait permettre à la professeure agrégée et au professeur agrégé d'intervenir sereinement et efficacement sur le créneau « bac−3/bac+3 » ; cet objectif calibre la conception du programme et les critères d'évaluation.

Le programme et la nature des épreuves, écrites et orales, font l'objet de publications sur le site officiel de ministère de l'Éducation nationale http://www.devenirenseignant.gouv.fr.

Le programme 2024 est légèrement modifié par rapport au programme 2023.

Le jury s'engage, bien sûr, à respecter le programme. Ce programme n'est pas exhaustif, il résulte d'un compromis et des résultats mathématiques « importants »manquent au programme. Il est tout à fait possible que des candidates ou candidats aient connaissance de ces notions avancées, souhaitent en faire mention et proposer des excursions hors des limites du programme. Le jury saura s'adapter et apprécier de telles propositions. Toutefois, elles ne sont absolument pas nécessaires pour prétendre aux notes maximales.

2.1.3 Après la réussite au concours, la carrière d'enseignant

Le jury conseille aux candidates et candidats de se préoccuper suffisamment tôt des questions liées à la gestion de leur carrière auxquelles ils seront confrontés en cas de succès au concours.

Le site https://agreg.org procure des informations complémentaires sur les textes de référence concernant les modalités d'affectation et d'organisation de l'année de stage et sur le statut des doctorants ou des docteurs agrégés qui suscite des questions fréquentes et demande une vigilance particulière.

Tout en étant pleinement conscient des enjeux de couverture des besoins d'enseignement, le jury recommande qu'une attitude positive soit réservée aux demandes de report ou de détachement de jeunes docteures et docteurs ou de doctorantes et doctorants en fin de thèse.

Des dispositions restrictives, dont la motivation à très court terme peut se comprendre, obèrent les perspectives des doctorants agrégés et sont susceptibles de gravement perturber le fonctionnement et l'attractivité des formations de l'enseignement supérieur en mathématiques, avec des conséquences qui peuvent s'avérer néfastes à plus long terme. Comme la préparation au concours de l'agrégation joue, traditionnellement, un rôle structurant majeur sur l'ensemble de ces formations, on peut craindre un impact négatif sur les parcours conduisant vers la recherche en mathématiques, domaine où le pays excelle au tout meilleur niveau international, tout comme sur l'attractivité du concours.

2.2 Commentaires généraux et statistiques sur la session 2023

2.2.1 Commentaires généraux

Le nombre de postes ouverts est relativement stable depuis pluiseurs années. En 2023, il est de 385. Le recrutement externe est par ailleurs complété par un concours externe spécial, réservé à des candidates et candidats titulaires d'un doctorat. Quinze postes étaient ouverts à ce titre. Ce concours indépendant, mais dont les épreuves sont menées concomitamment à celle du concours standard, fait l'objet d'un rapport spécifique.

Année	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023
Concours externe	391	395	457	467	457	381	391	387	383	364	385
Concours spécial					15	16	16	16	16	16	15

Nombre de postes ouverts

Le nombre de candidates et candidats « étudiants », auxquels ce concours devrait prioritairement s'adresser et qui a drastiquement diminué dans les vingt dernières années est en légère augmentation depuis quatre ans. Sans rien enlever aux mérites et aux qualités des candidates et candidats relevant d'autres catégories, la faiblesse du nombre d'étudiantes et d'étudiants attirés par ce concours reste une source d'inquiétude pour la communauté éducative.

Parmi les 2499 inscrits sur le concours français, seuls 1384 ont participé à au moins une des deux épreuves écrites et 1327 ont été présents aux deux épreuves écrites.

Admissibilité

Le jury a déclaré admissibles 737 candidates et candidats à l'issue des deux épreuves d'admissibilité (Mathématiques générales et Analyse-Probabilités). Les deux premiers admissibles a une moyenne de 19,25/20 et le dernier une moyenne de 5/20 pour les deux épreuves écrites. Ce volume et ce seuil sont semblables à ceux des années passées.

Le ratio admissibles/postes de l'ordre de 0,5 laisse la possibilité de pourvoir les postes ouverts au concours. La décision finale s'apprécie sur l'ensemble du concours ; tous les candidates et candidats admissibles doivent tenter de profiter pleinement de cette possibilité. Un score modeste à l'écrit peut être compensé par des qualités techniques et pédagogiques constatées pendant les épreuves orales. Certains candidates ou candidats parmi les plus mal classés des épreuves écrites tirent profit de cette opportunité : parmi les reçus, environ 60 candidates ou candidats avait une moyenne d'écrit inférieure à 8/20 et 21 candidates ou candidats reçus étaient dans le premier quartile aux épreuves d'admissibilité.

Enfin, l'admissibilité au concours et les examens universitaires relèvent de processus d'évaluation distincts. Les Universités, garantes de la qualité de leurs diplômes ne jugent pas opportun de délivrer le M2 à une fraction des candidates et candidats admissibles.

La conception des sujets est guidée par la volonté de valoriser les candidats ayant investi dans une préparation sérieuse. Chacun des sujets propose des questions qu'on pourrait qualifier de « classiques », très certainement proches d'exercices qu'un titulaire de M2 a forcément traités durant sa formation universitaire. Les deux sujets, de conceptions indépendantes, ont conduit à des prestations qui manifestent les mêmes traits saillants et qui doivent faire l'objet d'une attention particulière dans les préparations :

— Le jury accorde une attention particulière à la qualité de la rédaction (présentation, orthographe, clarté de l'expression...) Un item spécifique du barème valorise cette compétence.
— Le jury accorde une attention particulière à la qualité de l'argumentation. Il valorise la maîtrise des techniques usuelles de raisonnement (par exemple, la formalisation des raisonnements par récurrence ou par contraposée). Les erreurs de logique grossières sont pénalisées.
— Une forte proportion de candidates et candidats a manqué de méthodes pour une rédaction efficace. Plus que la technicité, c'est davantage le volume abordé qui les a départagés.

Les deux épreuves écrites ont donné des résultats très homogènes ; moyennes et écarts-types des présents sur les épreuves écrites sont résumés dans ce tableau

	Moy. admissibles	Ecart-type admissibles
MG	7,75	3,68
AP	7,75	3,57

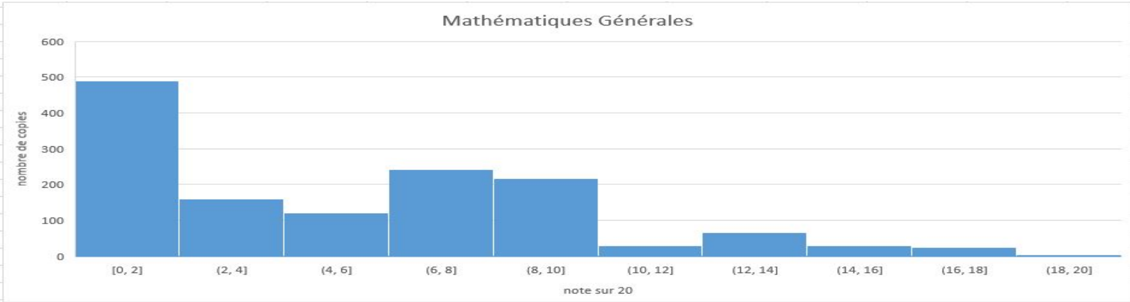


FIGURE 2.1 – *Répartition des notes de l'épreuve écrite de mathématiques générales de l'agrégation française*

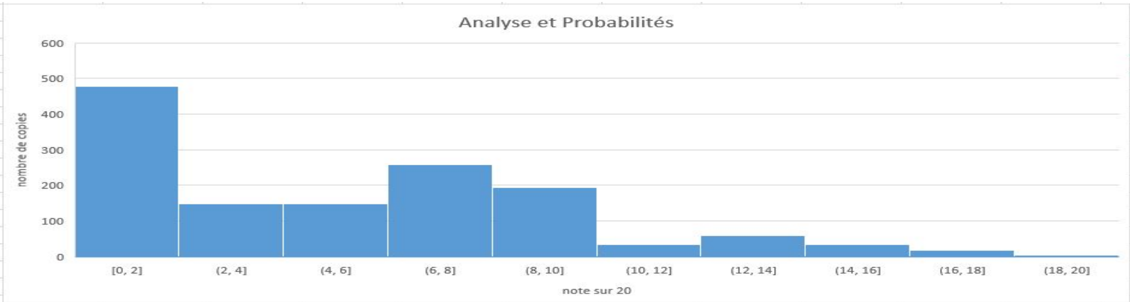


FIGURE 2.2 – *Répartition des notes de l'épreuve écrite d'analyse et probabilités de de l'agrégation française*

Oraux

Convocations. La procédure de convocation aux épreuves d'admission s'effectue en deux temps. Tout d'abord, les candidates et candidats admissibles reçoivent une convocation — dite « convocation administrative »— par mail. Cette convocation indique les trois jours de passage prévus pour leurs épreuves d'admission, mais n'en précise pas les horaires. Pour connaître les horaires précis d'interrogation, les candidates et candidats doivent ensuite se connecter sur le site sécurisé de l'agrégation de mathématiques, en indiquant leur numéro de candidat : cette procédure a pour objectif de s'assurer de la volonté de participer aux épreuves et attribue alors les horaires de passage. L'application a été fermée, comme les années passées, quelques jours avant le début des oraux. Les candidates et candidats qui n'avaient pas ainsi édité leurs horaires devaient, par défaut, se présenter à 6h30 le premier jour de leur convocation sur les lieux du concours, sous peine d'être déclarés non présents. En raison de l'augmentation du nombre de candidates et candidats admissibles qui récupèrent leur convocation puis renoncent à se présenter aux épreuves orales, le jury réfléchit à une autre procédure pour la session 2024.

Fraude. Le jury a devoir de vigilance aux risques de fraude. En particulier, tout moyen de communication ou tout support de stockage de données (téléphone, montre connectée, clef USB...) est strictement interdit lors des épreuves, écrites et orales, sous peine d'exclusion du concours. Tous les documents personnels type fiche résumé, plan préparé, notes de cours manuscrites ou dactylographiées, livres comportant des ajoûts manuscrits significatifs etc. sont aussi prohibés[1]. Les livres apportés par les candidates et candidats ne doivent pas être annotés.

Conditions de passage des oraux. Lors des passages des candidats, le jury ne dispose d'aucune information particulière : les notes d'écrit, les notes obtenues aux oraux précédents, le statut ou la profession,

1. Pour les épreuves orales, un dispositif de consigne, aux risques et périls des déposants, est assuré à l'accueil des candidates et candidats et leur permet de déposer tout matériel de communication ou de stockage de données. La possession d'un tel matériel dans les salles de préparation peut conduire à l'exclusion du concours ou à l'interdiction d'assister aux épreuves.

etc. demeurent inconnus des commissions d'évaluation. Le jury note selon les mêmes critères, avec une grille stricte commune à toutes les commissions, toutes les personnes à partir de leur seule prestation. Des comparaisons statistiques sont faits très régulièrement pour guider l'harmonisation entre les commissions et la présidence du concours veille sur ces indicateurs. En outre, des réunions régulières entre les différentes commissions permettent d'échanger sur la notation et de rester vigilant pour réduire les éventuels écarts dans l'évaluation. Le jury a la volonté d'accueillir les candidates et candidats de manière positive et bienveillante et cherche à valoriser toutes leurs connaissances, leur travail de préparation et les aspects positifs de leurs prestations.

Auditeurs. Les oraux 2023 ont été accessibles aux auditeurs de façon contingentée. Le jury rappelle que les épreuves d'admission d'un concours ont un caractère public. Ce principe général s'applique évidemment au concours de l'agrégation de mathématiques et les candidates et candidats ne peuvent s'opposer à la présence d'auditeurs (ce qui serait quelque peu paradoxal pour des candidats à des fonctions d'enseignant). Le jury incite très fortement les futurs candidates et candidats et les préparateurs à venir assister aux épreuves et à s'appuyer sur cette expérience pour se préparer au mieux aux épreuves ; c'est un investissement qui ne peut être que bénéfique. Une attitude et une tenue correctes sont exigées des visiteuses et visiteurs. En particulier, les téléphones portables doivent être éteints. L'accès aux salles d'interrogation pourrait ne pas être autorisé à une auditrice ou un auditeur dont la tenue serait estimée inappropriée ou le comportement susceptible de perturber l'interrogation.

Résultats.

À l'issue des épreuves orales, 345 candidates et candidats ont été déclarés admis ; le premier admis a eu une moyenne de 19,75/20, le dernier admis une moyenne de 8,1/20.

Ce résultat est la marque de la stabilité du concours : la barre d'admission est inchangée depuis 2015 et le nombre de lauréats varie peu depuis la session 2016 ; Compte tenu du relativement faible nombre de candidates et candidats issus des préparations universitaires, le jury se réjouit de cette stabilité, qui ne fait pas de concession à la qualité des reçus.

Le jury rappelle qu'un concours n'est pas un examen : le but n'est pas de valider des connaissances. Les notes attribuées ne sont pas des jugements de valeur sur les candidates et candidats et n'ont aucun caractère « absolu » ; il ne s'agit que de discriminer au mieux une population donnée dans un contexte donné et à un instant donné. Toute la plage de notes de 0 à 20 est utilisée. Il en résulte que des candidates ou candidats peuvent recevoir des notes très basses ; elles ne sont que le reflet d'une prestation dans ce contexte particulier. Elles n'enlèvent rien à l'estime que le jury porte aux efforts de leur préparation et ne préjugent en rien de leurs qualités humaines ou professionnelles.

Le jury insiste sur l'importance de passer toutes les épreuves. Tous les ans, on déplore l'abandon de candidates et candidats qui étaient en position d'être reçus. Le stress, les sentiments de frustration à l'issue d'une interrogation et la fatigue ne peuvent être négligés. Mais ils ne doivent pas prendre le pas sur l'engagement dans le concours ; le jury encourage les candidates et candidats à se présenter aux épreuves suivantes et à s'investir jusqu'au terme du concours.

Les moyennes et écarts-types des présents à l'oral sur les différentes épreuves sont résumés dans les tableaux ci-dessous :

	Oral Alg-G	Oral Ana-P	Oral Mod	Ecrit MG	Ecrit AP
moyenne	9,25	9,75	8,5	9,75	8,5
écart-type	4,8	4,8	4,7	3,2	3,3

Moyennes et écarts-types des candidats présents à l'ensemble des épreuves

	Oral Alg-G	Oral Ana-P	Oral Mod	Ecrit MG	Ecrit AP
moyenne	12,75	12,75	11,75	10,25	10,25
écart-type	3,9	3,9	4,1	3,1	2,6

Moyennes et écarts-types des candidats admis

Ces données offrent l'occasion de rappeler le conseil de ne négliger aucune des épreuves. Les épreuves de leçons et l'épreuve de modélisation mettent en valeur des qualités, techniques et pédagogiques, différentes. L'épreuve de modélisation, avec un temps d'exposé « libre »conséquent, donne beaucoup d'autonomie à la candidate ou au candidat. Elle requiert des capacités de synthèse importantes puisque les textes font appel à des notions présentes dans l'ensemble du programme et mettent les énoncés « en situation ». De plus, il est souvent valorisant de savoir illustrer sur ordinateur un propos mathématique et des candidates et candidats en tirent parti pour produire des prestations originales et scientifiquement profondes. Mais, cette compétence ne s'improvise pas ; elle réclame un minimum de préparation en amont du concours. De manière générale, les épreuves orales demandent une certaine pratique et la manifestation d'un certain recul scientifique, qui ne peuvent résulter que d'un travail préparatoire de fond. Il est sûrement profitable de s'exercer au concours dans son ensemble tout au long de l'année, une partie des exercices proposés à l'écrit se rapprochant d'ailleurs de questions posées à l'oral et le recul gagné dans la préparation à l'oral ne pouvant être que bénéfique aux prestations écrites.

On résume dans le tableau ci-dessous l'évolution des barres d'admission depuis 2008 :

Année	Nombre de postes attribués	Barre d'admission (/20)
2023	345	8,1
2022	338	8,1
2021	327	8,1
2020	325	
2019	308	8,1
2018	315	8,1
2017	305	8,1
2016	304	8,1
2015	274	8,1
2014	275	8,48
2013	323	7,95
2012	308	8,1
2011	288	9,33
2010	263	9,8
2009	252	10,15
2008	252	10,1

Le recrutement de professeurs agrégés de mathématiques obéit à des critères de qualités scientifiques et pédagogiques, afin que les personnels recrutés soient en mesure de répondre efficacement aux missions actuellement données aux agrégés qui sont de pouvoir exercer sur l'ensemble du créneau « bac−3/bac+3 ». Pour cette session, le minimum requis correspond à un score total de 162/400. Il correspond à la barre retenue sur les cinq dernières années. Le nombre de reçus est en légère augmentation qu'on pourrait corréler avec celle du nombre de candidats étudiants. Cette stabilité du concours est encourageante et montre, avec les très bonnes prestations de la tête du concours, le maintien du niveau des formations universitaires. Le tableau suivant donne une indication sur la répartition des notes. On observera aussi que 233 candidats ont une moyenne supérieure ou égale à 10/20.

Rang	Moyenne
1	19,75
1-10	19,75-17,85
10-50	17,85-15,30
50-100	15,30-12,95
100-200	12,95–10,55

Réussir le concours de l'agrégation externe requiert un minimum de préparation et cette stabilité repose d'abord sur l'engagement et la qualité des formations universitaires. L'impossibilité de pourvoir les postes témoigne de l'insuffisance préoccupante d'une population étudiante souhaitant s'orienter vers l'enseignement des mathématiques. Cette faiblesse du vivier résulte de la combinaison d'une réduction des effectifs inscrits en L3 de mathématiques, et de la diversification des débouchés des études universitaires en mathématiques, qui dépassent largement le seul emploi académique puisque trois diplômés d'un Master en mathématiques sur quatre travaillent dans le secteur privé (Source : Étude de l'impact socio-économique des mathématiques en France, étude menée en 2015 par CMI).

Dans cette configuration particulière, le concours externe peut offrir une opportunité de promotion pour des professeures et professeurs certifiés. Déplorer la faiblesse du vivier de candidats étudiants n'empêche pas le jury d'être particulièrement respectueux des efforts des enseignants en poste dans le secondaire qui se confrontent à ce concours. Ils forment, avec les étudiants, la catégorie la plus importante parmi les inscrits et représentent environ 20% des admissibles, dont un grand nombre lauréat de l'agrégation interne.

Le jury n'a nul doute que l'immense majorité de ces certifiés est certainement constituée d'excellents enseignants de mathématiques, même si les résultats obtenus à ce concours leur semblent parfois ne pas être à la hauteur de leur investissement. Il est clair pour le jury que l'on ne peut pas être admissible et se présenter aux épreuves orales de ce concours sans avoir acquis des compétences techniques qui dépassent largement celles de la pratique professionnelle de l'enseignant certifié. Cependant, le niveau d'exigence technique du concours leur laisse le concours difficile d'accès. Le jury souhaite accueillir chaleureusement ces collègues méritants et, même si les résultats sont en-deçà de leurs espoirs, leur renouvelle tous ses encouragements. Le volume de plus de 1000 enseignants inscrits à un concours aussi exigeant est significatif d'une réelle volonté de progression, qui mériterait d'être soutenue par un nombre accru de congés formation.

Depuis quelques années, le jury annonce à l'avance les leçons qui seront proposées aux candidats lors de la session à venir. Ainsi on trouvera en annexe de ce présent rapport la liste des leçons pour la session 2023. Cette pratique s'inscrit dans la logique d'aider les candidats à bien se préparer et à ne leur tendre aucun piège. Le jury rappelle que tous les couplages sont *a priori* possibles et qu'il veille scrupuleusement à ce que l'apparition des intitulés de leçons soit équiprobable dans l'ensemble des sujets proposés. En modélisation, la conception et la sélection des textes proposés rend tout aussi hasardeuse toute stratégie d'impasse sur une partie du programme des options.

2.2.2 Données statistiques diverses

Les tableaux et graphiques suivants présentent un bilan statistique du concours, selon le statut des candidats, leur diplôme, leur genre, leur origine géographique, leur âge. Ces statistiques portent sur les candidats qui peuvent être admis au concours et n'incluent pas les étudiants marocains et tunisiens.

Effectifs détaillés. On observe une diminution du nombre des inscrits qui passe sous la barre des 2500, mais le nombre de candidates et candidats présents à l'écrit reste relativement stable, tout comme le nombre de candidates et candidats étudiants et celui de élèves normaliens. Le jury rappelle son attachement à la justification historique commune aux Écoles Normales Supérieures, et le contrat implicite de leurs élèves qui était, en contrepartie de leur statut et de leur rémunération, de passer l'agrégation (source : Rapport public de la Cour des comptes 2012). Leur participation contribue au rôle structurant du concours sur les formations universitaires en mathématiques et à l'excellence de la discipline au niveau international. Le jury souhaite donc que les responsables d'études des Écoles Normales Supérieures restent conscients de ces enjeux et encouragent les élèves à se préparer et à passer le concours.

Ce tableau résume l'évolution des effectifs :

Année	Inscrits	Présents	Etudiants présents	ENS présents	Postes à pourvoir	Présents par poste
2023	2499	1337	360	61	385	3,5
2022	2858	1411	379	82	364	3,9
2021	2823	1363	348	68	383	3,6
2020	2710	1409	344	93	387	3,6
2019	2787	1628	309	92	391	4,2
2018	3285	1545	352	89	381	4,1
2017	3582	1668	374	86	457	3,6
2016	3525	1841	364	78	467	3,9
2015	3252	1841	326	89	457	4
2014	3001	1546	371	72	395	3,9
2013	2673	1393	420	81	391	3,6
2012	2673	1163	379	82	308	3,8
2011	2500	1124	445	62	288	3,9
2010	2332	1177	474	106	263	4,5
2009	2351	1384	585	116	252	5,5
2008	2491	1579	659	119	252	6,3
2007	2801	1722	800	106	290	5,9
2006	2849	1853	800	129	290	6,4
2005	2560	1644	795	105	388	4,2
2004	2333	1470	735	76	321	4,6
2003	2217	1463	657	93	360	4,1
2002	2343	1584	753	95	320	5
2001	2663	1828	857	105	310	5,9

Professions et Diplômes.

	Inscrits	Présents	Admissibles	Présents Oraux	Admis
Accompagnant des élèves en situation de han	2	2	1	0	0
Agent admi.membre UE (hors France)	2	0	0	0	0
Agent non titulaire de la fonction territoriale	1	0	0	0	0
Agent non titulaire fonction hospitalière	2	2	1	0	0
Agent non titulaire fonction publique	2	0	0	0	0
Agrégé	21	6	3	1	1
Artisans / commercants	3	1	0	0	0
Assistant d'éducation	14	6	2	0	0
Cadres secteur privé convention collective	93	28	15	10	4
Certifié	924	445	144	73	9
Contractuel 2nd degré	94	34	12	6	1
Contractuel apprentissage(CFA)	2	1	1	1	0
Contractuel enseignant supérieur	15	5	1	1	1
Contractuel formation continue	1	0	0	0	0
Elève d'une ENS	64	61	61	61	61
Emploi avenir prof.2nd d.publique	3	0	0	0	0
Emploi avenir prof.école publique	1	0	0	0	0
Ens.stagiaire 2e deg. col/lyc	73	34	15	13	0
Enseignant du supérieur	12	6	1	1	0
Enseignant non titulaire établissement scolair	4	0	0	0	0
Etud.hors inspe (prépa cned)	7	4	3	2	1
Etud.hors inspe (prépa mo.univ)	382	360	302	279	204
Etud.hors inspe (sans prépa)	99	71	55	48	31
Etudiant en inspe en 1ere année	4	2	1	1	0
Etudiant en inspe en 2eme année	48	33	11	8	4
Fonctionnaire stagiaire de la fonction publiqu	10	6	2	2	1
Formateurs dans secteur privé	12	6	2	0	0
Instituteur	3	0	0	0	0
Instituteur suppléant	1	0	0	0	0
Maître auxiliaire	14	3	0	0	0
Maître contr.et agréé rem tit	51	26	15	7	1
Maître délégué	4	0	0	0	0
Militaire	2	1	0	0	0
PEPS	1	0	0	0	0
Personnel administratif et technique MEN	2	0	0	0	0
Personnel de la fonction hospitalière	2	1	0	0	0
Personnel de la fonction publique	16	5	3	0	0
Personnel enseignant titulaire fonction publiq	30	10	5	2	0
PLP	52	23	4	3	0
Professeur associé 2nd degré	87	30	13	8	2
Professeur des écoles	27	2	1	0	0
Professions libérales	22	8	2	1	0
Salariés secteur industriel	11	2	1	1	1
Salariés secteur tertiaire	24	8	5	2	1
Sans emploi	235	89	54	40	21
Vacataire du 2nd degré	11	4	0	0	0
Vacataire enseignant du sup.	8	2	1	1	1
Vacataire formation continue	1	0	0	0	0

Résultat du concours par catégories professionnelles [2]

2. Les catégories professionnelles et les catégories par diplômes listées correspondent aux déclarations des candidats

Outre la présence notable d'enseignants certifiés, déjà évoquée, on remarque l'attractivité du concours auprès de titulaires d'un diplôme d'ingénieur ou issus d'une grande école. Cette donnée confirme les observations du concours docteurs, et un phénomène qui s'inscrit tant dans le cadre de projets de reconversion professionelle, que d'une orientation en fin de formation.

Diplômes	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
Admis échelle rémunération certifié P	21	7	3	0
Admis échelle rémunération professeu	3	0	0	0
Autre Master	910	618	449	273
CPE Titulaire - Ancien Titulaire	2	0	0	0
Diplôme classe niveau 7	8	4	3	0
Diplôme d'ingénieur (BAC+5)	331	149	70	24
Diplôme Grande Ecole (BAC+5)	99	49	25	2
Diplôme PostSecondaire 5 ANS ou +	51	28	14	1
Dispense accordée au titre de : Parent	54	34	11	3
Doctorat	133	40	25	9
Enseignant titulaire -ancien titulaire ca	362	169	67	2
Grade Master	158	67	39	24
Master MEEF	366	162	31	7

Répartition selon le genre. Les enjeux de parité font partie des préoccupations du jury, qui comprend 44% de femmes, au delà des taux observés dans les différents corps dont sont issus les membres du jury. La correction des épreuves écrites se fait de manière totalement dématérialisée et le jury ne dispose d'absolument aucune information sur les candidats : il n'a accès au moment de l'admissibilité qu'aux copies repérées par un numéro. Il est donc difficile d'imaginer quelle mesure pourrait permettre d'identifier et corriger un éventuel biais, pour autant qu'il y en ait un dans cette étape du concours. À l'oral, des processus de veille sont mis en place et le jury est en permanence vigilant sur ses pratiques afin de ne pas introduire de biais dans l'évaluation.

Néanmoins, la répartition hommes/femmes reste déséquilibrée et malheuresement en régression par rapport à l'année 2022. Initialement, la proportion de femmes est de 27% des inscrits et 28% des présents aux deux épreuves écrites; mais les femmes ne représentent plus que 20% des admissibles et 19% des candidats ayant dépassé la barre d'admission. Cette année, on trouve une femme parmi les 10 premiers et 5 parmi les 50 premiers.

	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
Hommes	1814	945	589	278
Femmes	685	367	148	67
% Femmes	27.41%	27.97%	20.08%	19.42%

lors de l'inscription : elles ne font l'objet d'aucune vérification et doivent être considérées avec prudence.

Répartition selon l'âge. Le tableau de répartition des candidates et candidats suivant l'âge indique que l'essentiel des admises et admis agrégation externe se regroupe dans la tranche 22-28 ans.

Âge	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
20	1	0	0	0
21	2	2	2	2
22	61	54	47	37
23	237	218	181	130
24	187	155	113	78
25	153	103	62	32
26	117	58	31	8
27	96	48	23	11
28	101	50	25	10
29	63	27	11	7
30	75	31	14	5
31	59	25	8	3
32	70	29	7	3
33	63	28	10	1
34	49	14	6	1
35	50	19	6	2
36	51	12	8	2
37	71	29	12	2
38	37	13	5	1
39	39	11	4	1
40	34	14	3	1
41	60	26	14	1
42	45	16	4	0
43	57	20	6	0
44	53	26	14	1
45	61	28	12	0
46	52	16	5	0
47	43	22	9	1
48	51	22	11	2
49	58	24	12	0
50	66	32	11	1
51	50	27	13	1
52	46	27	9	0
53	40	17	6	0
54	34	19	8	0
55	24	10	6	0
56	29	9	5	0
57	23	7	2	1
58	17	4	0	0
59	18	9	3	0
60	14	9	3	0
61	12	5	3	0
62	9	2	1	0
63	5	3	2	0
64	3	1	0	0
65	5	4	0	0
66	4	2	0	0
67	3	0	0	0
68	1	0	0	0
69	0	0	0	0

Tableau de répartition des candidats en fonction de l'âge

Répartition selon l'académie. Le tableau de répartition des candidates et candidats par académie montre une forte concentration sur les centres Paris-Créteil-Versailles, Rennes et Lyon. Hormis ces académies, sièges d'Écoles Normales Supérieures, on relèvera le très bon taux de réussite (admis/présents) de l'académie de Besançon, ainsi que ceux des académies de Grenoble, Toulouse, Clermont-Ferrand et Strasbourg.

Académie d'origine	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
ACADÉMIE D'AIX MARSEILLE	90	49	21	8
ACADÉMIE D'AMIENS	44	25	12	5
BESANCON	34	27	22	15
BORDEAUX	76	47	30	12
CLERMONT-FERRAND	41	25	17	7
CORSE	2	1	0	0
DIJON	26	16	10	5
GRENOBLE	80	50	35	21
LA GUADELOUPE	19	8	2	0
LA GUYANE	9	1	0	0
LA MARTINIQUE	15	5	2	0
LA NOUVELLE CALÉDONIE	10	4	2	0
LA POLYNÉSIE FRANCAISE	13	6	2	0
LA RÉUNION	64	28	7	0
LILLE	131	76	33	8
LIMOGES	19	11	0	0
LYON	140	102	65	41
MAYOTTE	18	10	0	0
MONTPELLIER	81	41	19	7
NANCY-METZ	71	45	22	8
NANTES	100	57	32	11
NICE	69	23	13	4
NORMANDIE	89	50	25	11
PARIS	160	20	6	0
POITIERS	48	19	8	0
REIMS	30	21	9	5
RENNES	110	77	58	45
STRASBOURG	84	52	34	14
TOULOUSE	105	60	39	19
WALLIS ET FUTUNA	2	0	0	0
ACADÉMIE D'ORLÉANS-TOURS	53	28	13	3
SIEC - ACADÉMIES DE CRETEIL PAF	666	343	199	96

FIGURE 2.3 – *Tableau de répartition par académie*

Les sociétés savantes collectent des informations sur les volumes horaires consacrés aux préparations selon les universités ; ces données révèlent de très grandes disparités (en rapport avec le nombre d'étudiants et le nombre d'options préparées), avec un nombre d'heures annuelles consacrées à la préparation au concours qui varie de 300 à plus de 1200 ! À ces différences de volume horaire s'ajoute la faiblesse des effectifs présents dans certaines préparations, alors que l'émulation et le travail en groupe jouent souvent un rôle important dans le succès des formations. À cet égard, l'incorporation dans les préparations de candidats du concours spécial réservé aux docteurs, qui ont en général une plus grande maturité scientifique, pourrait être un stimulant efficace.

Les préparations doivent étudier l'évolution sur plusieurs années de leur taux de réussite au concours, certains résultats pouvant être purement conjoncturels. La mise au point d'un programme de préparation est un processus dynamique, exigeant, qui se fait en lien étroit avec l'élaboration des maquettes des formations et qui réclame de suivre les évolutions du concours. Le jury rappelle aussi aux candidates et candidats comme aux universitaires préparateurs que les épreuves orales sont publiques et que venir assister à des interrogations permet certainement de mieux appréhender les attendus et les difficultés des épreuves.

Chapitre 3

Épreuves d'admissibilité

3.1 Énoncés

Les sujets des deux épreuves écrites sont disponibles à l'URL https://www.devenirenseignant.gouv.fr/les-sujets-des-epreuves-d-admissibilite-et-les-rapports-des-jurys-des-concours-de-l-agregation-de-3 ou sur le site https://agreg.org.

3.2 Rapport sur l'épreuve écrite de mathématiques générales

3.2.1 Présentation du sujet

Le problème était centré sur l'algèbre linéaire, avec le thème des endomorphismes nilpotents pour fil conducteur. Les deux premiers exercices le complétaient en abordant brièvement la théorie des groupes et l'arithmétique. Les quelques paragraphes suivants proposent un survol du problème.

Notons $\mathscr{N}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices nilpotentes de taille $n \times n$ à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$. La réduction de Jordan classifie les orbites du groupe général linéaire $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ agissant par conjugaison sur $\mathscr{N}_n(\mathbb{K})$. Bien connue d'un grand nombre de candidates et candidats, elle est présentée dans la partie III.

Une autre situation favorable consiste à regarder l'action du groupe orthogonal $\mathbf{O}_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K}) \mid {}^tM = M^{-1}\}$ sur l'ensemble $\mathscr{N}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{K})$ des matrices nilpotentes symétriques. Le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ est ici banal : les matrices symétriques réelles étant diagonalisables, l'ensemble $\mathscr{N}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{R})$ est réduit à la matrice nulle. Mais les choses deviennent intéressantes lorsque $\mathbb{K}$ est un corps algébriquement clos de caractéristique différente de 2, par exemple $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: il existe alors une bijection naturelle entre l'ensemble des orbites de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ agissant sur $\mathscr{N}_n(\mathbb{K})$ et l'ensemble des orbites de $\mathbf{O}_n(\mathbb{K})$ agissant sur $\mathscr{N}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{K})$. Ce résultat classique – il apparaît dans le livre *The Theory of Matrices* de F. R. Gantmacher (Chelsea, New York, 1959) – est présenté dans la partie IV.

Il peut également paraître légitime d'étudier l'action de $\mathbf{O}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathscr{N}_n(\mathbb{K})$ tout entier. Cette question s'avère difficile, mais est abordable lorsqu'on se place sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et qu'on se restreint aux endomorphismes nilpotents d'indice au plus 2 et de rang r fixé. Elle se ramène en effet (voir la partie II du problème) à l'étude de l'action du groupe $\mathbf{O}_r(\mathbb{R}) \times \mathbf{O}_{n-r}(\mathbb{R})$ par multiplication à gauche et à droite sur l'ensemble $\mathscr{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$ des matrices de taille $r \times (n-r)$ à coefficients réels, pour laquelle les orbites sont classifiées par la décomposition en valeurs singulières. Bien que cette dernière soit au programme du concours, il nous a paru souhaitable d'en rappeler l'énoncé et une démonstration dans la partie I. Soulignons ici la très grande utilité de la décomposition en valeurs singulières dans les applications des mathématiques, notamment grâce à l'existence d'algorithmes de calcul performants, et notons à nouveau l'influence de Camille Jordan, qui en fut l'un des inventeurs à la fin du XIX$^{\mathrm{e}}$ siècle.

La partie V, sensiblement plus difficile que les parties I à IV, aborde un problème bien différent : compter les sous-espaces stables d'un endomorphisme nilpotent, le corps $\mathbb{K}$ étant supposé fini. Plus précisément, on se donne trois partitions λ, μ et ν, et on démontre l'existence d'un polynôme $G^{\lambda}_{\mu,\nu}(X)$ ayant la propriété suivante : si $\mathbb{K}$ est un corps fini, si u est un endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, et si le type de Jordan de u est λ, alors $G^{\lambda}_{\mu,\nu}(|\mathbb{K}|)$ est le nombre de sous-espaces vectoriels F de E, stables par u, tels que les endomorphismes (nécessairement nilpotents) induits par u sur F et E/F aient pour type de Jordan μ et ν, respectivement. Ces polynômes $G^{\lambda}_{\mu,\nu}(X)$ sont appelés polynômes de Hall et jouent un rôle important dans la construction par J. A. Green de la table des caractères des groupes $\mathbf{GL}_n(\mathbb{F}_q)$. La preuve présentée est due à A. V. Zelevinsky et se trouve dans le livre *Symmetric Functions and Hall Polynomials* de I. G. Macdonald (Oxford University Press, Oxford, 1995). Notons que la majoration du degré de $G^{\lambda}_{\mu,\nu}(X)$ donnée dans la question 30 est en fait une égalité et que le coefficient dominant de ce polynôme est connu.

3.2.2 Commentaires du jury

Du côté positif, le jury salue les efforts des candidates et candidats. Les notations utilisées sont généralement proprement introduites avant d'être utilisées et les objets sont souvent quantifiés. Les candidates et candidats qui s'affranchissent de cette contrainte sont rapidement découverts. De même, la plupart des candidates et candidats utilisent les symboles logiques $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ avec parcimonie et à bon escient, et pas comme substitut au mot « donc ».

Du côté négatif, le jury observe qu'un grand nombre de candidates et candidats ne maîtrisent pas des concepts et résultats élémentaires. Un diagnostic détaillé est proposé ci-après. Par ailleurs, beaucoup d'erreurs auraient pu être évitées si leurs auteurs s'étaient assurés de la qualité de leur réponse plutôt que se précipiter vers la question suivante : le peu de temps gagné est parfois chèrement payé.

Exercice 1

Plus de la moitié des candidates et candidats n'ont pas su apporter d'élément de réponse correct à la question 1 de cet exercice. La définition de l'ordre d'un élément est connue de la plupart des candidates et candidats, mais l'usage concret de cette notion n'est pas maîtrisé : il était par exemple fréquent de lire dans les copies qu'un groupe cyclique d'ordre n contient un unique élément d'ordre n. De nombreux candidates et candidats ont préféré utiliser une notation multiplicative, alors que l'énoncé précisait qu'on regardait le groupe additif $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$. Ces candidates et candidats se retrouvèrent rapidement dans une situation confuse : notant x un générateur, ils ne savaient plus bien s'ils devaient examiner x^k modulo n ou k modulo n. Signalons enfin qu'il n'est pas vrai que si d divise n, alors le groupe $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ est inclus dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: dans cette situation, seul est naturel l'homomorphisme (surjectif) d'anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ déduit de l'inclusion $n\mathbb{Z} \subset d\mathbb{Z}$.

Dans la question 2 a), la majorité des candidates et candidats n'ont pas vu le cas particulier $q = 1$, y compris ceux qui ont écrit correctement la congruence à tester $2q - 1 \equiv 1 \pmod{4q}$.

La question 2 b) n'a généralement pas été réussie : seules 40% des copies l'abordant obtiennent la moitié ou plus des points que le barème lui attribuait.

Exercice 2

Un quart des candidates et candidats n'ont eu aucun point sur la première question, soit qu'ils n'ont pas essayé de la traiter, soit que leur réponse était fausse ou donnée sans justification. Plusieurs candidates et candidats ont trouvé un ensemble infini de solutions, d'autres ont avancé l'argument que x^2 et y^2 sont positifs quand x et y appartiennent à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Le jury a par ailleurs constaté la présence d'erreurs de calcul ou de raisonnement dans la majorité des copies ayant abordé la question 3.

Exercice 3

Les candidates et candidats ont suivi deux stratégies pour la question 1 : une approche en coordonnées ou l'utilisation du théorème de Riesz. Dans le premier cas, le correcteur vérifiait le calcul, notamment en regardant si le candidat avait choisi d'utiliser des bases orthonormées de E et F. Dans le second, le correcteur contrôlait la place du quantificateur sur x dans la rédaction. Une erreur souvent relevée dans les copies les plus fragiles était de croire que le z cherché devait être l'antécédent de y par u.

La question 2 a été souvent correctement traitée. Une maladresse fréquemment observée dans les copies était de redémontrer l'unicité de u^* sans voir qu'elle découlait de la question 1. A contrario, concernant la linéarité, une fois établie l'égalité $(u^*(y_1 + y_2), x)_E = (u^*(y_1) + u^*(y_2), x)_E$ pour tout $x \in E$ et tout $(y_1, y_2) \in F^2$, il était maladroit d'invoquer l'unicité de *l'application* u^* pour conclure à l'égalité $u^*(y_1 + y_2) = u^*(y_1) + u^*(y_2)$.

Problème

Dans l'ensemble, les trois premières questions du problème ont été réussies par les candidates et candidats.

Dans la question 1, l'inclusion $\ker u \subset \ker(u^* \circ u)$ a posé davantage de difficultés que la réciproque : partant d'un vecteur $x \in \ker u$, certains candidates ou candidats ont écrit $((u^* \circ u)(x), x)_E = (u(x), u(x))_F = 0$, et en ont déduit l'égalité $(u^* \circ u)(x) = 0$ en invoquant la non-dégénérescence du produit scalaire. Cet argument n'est pas correct.

Dans la question 2, plusieurs candidates ou candidats ont écrit « *le* vecteur propre de $u^* \circ u$ pour la valeur propre λ », oubliant qu'il n'y a pas unicité. Par ailleurs, beaucoup de candidates ou candidats se sont contentés d'écrire les inégalités $\lambda(x, x)_E = (u(x), u(x))_F \geqslant 0$ et $(x, x)_E \geqslant 0$ pour justifier la positivité de λ, sans préciser qu'en fait $(x, x)_E$ est *strictement* positif. Sur une question aussi facile, le jury distingue les candidats par la précision de leur rédaction.

Les questions 4 à 6 ont permis aux candidates et candidats soigneux de mettre en valeur leurs qualités.

La principale difficulté de la question 4 était de justifier l'égalité des dimensions de E_λ et F_λ. Elle a donné lieu à un nombre élevé d'erreurs sérieuses. Ainsi certains candidats ont affirmé que la seule existence de l'application linéaire $u_\lambda : E_\lambda \to F_\lambda$ suffisait à garantir l'inégalité $\dim E_\lambda \leqslant \dim F_\lambda$. D'autres ont commencé par observer que u_λ était injective, puis ont écrit qu'« injectif implique bijectif en dimension finie », et ont alors cru licite d'affirmer que u_λ était un isomorphisme pour conclure à l'égalité des dimensions.

Il n'était pas possible de proposer une réponse viable à la question 5 sans utiliser le théorème spectral. Pour autant, les candidates et candidats ayant pensé à celui-ci n'ont pas toujours produit un raisonnement pleinement satisfaisant : partant d'une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que

$$(u^* \circ u)(e_i) = \begin{cases} \lambda_i e_i & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant r, \\ 0 & \text{si } r+1 \leqslant i \leqslant n, \end{cases}$$

et posant $f_i = u(e_i)/\sqrt{\lambda_i}$ pour $i \in [\![1, r]\!]$, on peut compléter $(f_1, \dots, f_r)$ en une base de F, qu'on orthonormalise ensuite à l'aide du procédé de Gram–Schmidt. Cependant appliquer le procédé de Gram–Schmidt modifie potentiellement les vecteurs f_1, ..., f_r, et la relation $u(e_i) = \sqrt{\lambda_i} f_i$ n'est alors plus assurée. Certains candidates ou candidats n'ont pas vu la difficulté. D'autres ont cherché à justifier que la famille $(f_1, \dots, f_r)$ était orthonormale – et restait donc inchangée par le procédé de Gram–Schmidt – en invoquant seulement le caractère isométrique de $u_\lambda/\sqrt{\lambda}$, oubliant qu'on a ici affaire non pas à une isométrie, mais à plusieurs (une par valeur propre), assemblées d'une façon bien spécifique. En fin de compte, seuls 15% des candidates et candidats ont eu la moitié ou plus des points que le barème attribuait à cette question.

La question 6 a) a été semblablement mal réussie. Il ne s'agissait pourtant que de passer du cadre vectoriel au cadre matriciel. Beaucoup de candidates ou candidats ont annoncé considérer « l'endomorphisme $u : E \to F$ canoniquement associé à la matrice M » sans préciser leurs notations : des espaces euclidiens E et F étaient bien définis dans l'énoncé, mais pour les utiliser il était nécessaire de les munir de bases orthonormées (rappelons qu'un espace vectoriel abstrait n'a pas de base canonique). Par ailleurs, peu ont pensé à justifier que le rang r de M coïncidait avec le nombre r introduit dans la question 5.

Les réponses descandidates et candidats à la question 7 étaient souvent insuffisamment justifiées. Par exemple, on pouvait utiliser un procédé d'orthonormalisation pour produire la base désirée, mais il fallait alors donner un argument expliquant pourquoi la construction proposée fonctionnait. On pouvait à cet endroit citer sans preuve le fait que si le procédé de Gram–Schmidt produit la base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ à partir de la base $(e'_1, \ldots, e'_n)$, alors pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, les sous-espaces vectoriels engendrés par les deux familles $(e_1, \ldots, e_i)$ et $(e'_1, \ldots, e'_i)$ sont égaux.

Les questions 9 et 10 ont été peu et mal traitées. Ainsi seule une petite moitié des candidates et candidats ont abordé la question 9 a), et seulement 40% parmi eux ont eu la moitié ou plus des points que le barème attribuait à cette question.

À l'opposé, les trois quarts des candidates et candidats ont abordé la question 11, souvent avec succès. Rappelons qu'au niveau de l'agrégation, une récurrence est préférable à l'usage de points de suspension. Signalons également une erreur relevée dans un nombre significatif de copies : étant donnés un corps $\mathbb{K}$, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, un scalaire λ et un vecteur x de E, l'implication $\lambda x = 0 \Rightarrow (\lambda = 0 \text{ ou } x = 0)$ n'est pas conséquence de l'intégrité de $\mathbb{K}$.

Dans la question 12 a) apparaissait la notion de somme directe de plusieurs sous-espaces vectoriels. La majorité des candidats ne la maîtrisent pas : près de 80% des candidates et candidats ayant abordé cette question ne peuvent écrire de façon correcte l'objectif de leur démonstration, et essaient de bricoler avec les intersections deux à deux des sous-espaces ou d'introduire des scalaires. Cependant l'associativité de la somme directe est connue et utilisée avec conviction dans les questions suivantes.

Une minorité de candidates et candidats ont abordé la partie IV du problème. Les tout meilleurs en sont venus à bout et ont pu effleurer la partie V.

3.2.3 Éléments de solution

Exercice 1

1. Soit n un entier strictement positif. Notons $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'homomorphisme quotient. La correspondance $H \mapsto g^{-1}(H)$ établit une bijection de l'ensemble des sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sur l'ensemble des sous-groupes de $\mathbb{Z}$ contenant $n\mathbb{Z}$, la bijection réciproque étant $K \mapsto g(K)$.

Un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ s'écrit de façon unique sous la forme $m\mathbb{Z}$ avec $m \geqslant 0$. Or $m\mathbb{Z}$ contient $n\mathbb{Z}$ si et seulement si m divise n. L'application $m \mapsto g(m\mathbb{Z})$ est donc une bijection de l'ensemble des diviseurs positifs de n sur l'ensemble des sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Avec ces notations, on observe maintenant que le sous-groupe $g(m\mathbb{Z})$ est d'ordre $d = n/m$. En effet, $g(m\mathbb{Z})$ est l'image de l'homomorphisme de groupes $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ défini par $f(x) = g(mx)$ pour $x \in \mathbb{Z}$. Comme le noyau de f est

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid mx \text{ est multiple de } n\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ est multiple de } d\} = d\mathbb{Z},$$

l'image de f est un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, et donc est d'ordre d.

En rassemblant les éléments précédents : si d est un diviseur positif de n, alors $g(m\mathbb{Z})$ avec $m = n/d$ est l'unique sous-groupe d'ordre d de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

2. Soit q un entier naturel impair.

a) Un calcul direct montre que

$$(2q-1)^2 \equiv (2q+1)^2 \equiv 1 \pmod{4q}.$$

Par conséquent les classes modulo $4q$ de $2q-1$ et $2q+1$ appartiennent bien au groupe G des éléments inversibles de cet anneau, et leur ordre dans G divise 2. Comme $q \geqslant 1$, nous avons $1 < 2q+1 < 4q$ dans $\mathbb{Z}$, donc $2q+1 \not\equiv 1 \pmod{4q}$: la classe modulo $4q$ de $2q+1$ ne peut pas être d'ordre 1 dans G, donc est d'ordre 2 dans G.

Il en est de même pour la classe modulo $4q$ de $2q-1$, sauf dans un cas : si $q = 1$, alors cette classe est l'élément neutre de G donc est d'ordre 1.

b) Si $q = 1$, alors $G = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^*$ contient deux éléments (les classes modulo 4 de 1 et 3), donc est cyclique.

Si $q > 1$, alors les classes de $2q-1$ et $2q+1$ sont deux éléments distincts d'ordre 2 de G. Ainsi G contient au moins deux sous-groupes d'ordre 2 et n'est donc pas cyclique d'après la question 1.

Exercice 2

1. Dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, on a $\overline{0}^2 = \overline{0}$ et $\overline{1}^2 = \overline{2}^2 = \overline{1}$. Or dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ la somme de deux éléments appartenant à $\{\overline{0}, \overline{1}\}$ n'est nulle que si ces éléments sont tous les deux nuls. Par conséquent, pour $(x, y) \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$, l'équation $x^2 + y^2 = 0$ n'est satisfaite que si $x^2 = y^2 = \overline{0}$, c'est-à-dire $x = y = \overline{0}$. Réciproquement, $x = y = \overline{0}$ fournit une solution de l'équation.

Conclusion : l'ensemble des couples $(x, y) \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ tels que $x^2 + y^2 = 0$ est le singleton $\{(\overline{0}, \overline{0})\}$.

2. Supposons que $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ vérifie $x^2 - 5y^2 = 33$. Les classes $\overline{x}$ et $\overline{y}$ de x et y dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ vérifient alors $\overline{x}^2 - 5\overline{y}^2 = \overline{33}$, c'est-à-dire $\overline{x}^2 + \overline{y}^2 = 0$. D'après la question a), on a donc nécessairement $\overline{x} = \overline{y} = \overline{0}$, donc x et y sont tous deux multiples de 3, donc x^2 et y^2 sont tous deux multiples de 9, ce qui est incompatible avec l'équation $x^2 - 5y^2 = 33$.

Conclusion : l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $x^2 - 5y^2 = 33$ est l'ensemble vide.

3. Nous allons démontrer que l'équation $x^2 - 5y^2 = 33$ n'a pas de solution rationnelle.

Raisonnant par l'absurde, nous supposons l'existence d'un couple $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$ solution de cette équation. Réduisant x et y au même dénominateur, nous écrivons $x = a/c$ et $y = b/c$, avec a, b, c entiers et $c > 0$. Quitte à diviser ces trois entiers par leur PGCD, nous pouvons les supposer premiers entre eux dans leur ensemble.

L'équation s'écrit maintenant $a^2 - 5b^2 = 33c^2$. Le même argument que dans la question b) démontre que a et b sont tous deux multiples de 3. Il s'ensuit que $33c^2$ est multiple de 9, donc que 3 divise $11c^2$, et donc (par le lemme d'Euclide) que 3 divise c. Ainsi a, b et c sont tous les trois multiples de 3. Il ne sont donc pas premiers entre eux dans leur ensemble, ce qui contredit les choix effectués durant la construction.

Conclusion : l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$ tels que $x^2 - 5y^2 = 33$ est l'ensemble vide.

Exercice 3

1. Pour chaque $v \in E$, l'application

$$E \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (v, x)_E$$

est une forme linéaire sur E, qu'on note $(v, .)_E$. L'application $v \mapsto (v, .)_E$ est alors un isomorphisme de l'espace vectoriel E sur son dual E^* (théorème de Riesz en dimension finie).

Prenons $y \in F$. L'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto (y, u(x))_F$ est la composée de l'application linéaire $u : E \to F$ et de la forme linéaire $(y, .)_F : F \to \mathbb{R}$, donc est une forme linéaire sur E. Soit z l'antécédent de cette forme linéaire par l'isomorphisme de l'alinéa précédent. Par construction, z est l'unique élement de E tel que

$$(z, x)_E = (y, u(x))_F$$

pour tout $x \in E$.

2. Avec les notations de la question 1, u^* doit être définie comme étant l'application $y \mapsto z$, pour chaque élément $y \in F$. La clause d'unicité dans la question 1 garantit à la fois la légitimité de cette définition et l'unicité de u^*.

Il nous reste à justifier la linéarité de cette application u^*. Soit $(y, y') \in F^2$ et soit $x \in E$. En sommant membre à membre les trois égalités

$$(u^*(y), x)_E = (y, u(x))_F, \quad (u^*(y'), x)_E = (y', u(x))_F$$

et

$$-(u^*(y + y'), x)_E = -(y + y', u(x))_F$$

et en utilisant la bilinéarité des produits scalaires, nous obtenons

$$(u^*(y) + u^*(y') - u^*(y + y'), x)_E = (y + y' - (y + y'), u(x))_F = (0, u(x))_F = 0.$$

Cette égalité est valable pour tout $x \in E$. L'injectivité de l'application $v \mapsto (v, .)_E$ garantit alors que $u^*(y + y') = u^*(y) + u^*(y')$, égalité qui vaut pour tout $(y, y') \in F^2$. Un raisonnement similaire établit l'égalité $u^*(\lambda y) = \lambda u^*(y)$ pour tout $(\lambda, y) \in \mathbb{R} \times F$.

Problème

1. La linéarité de u^* (exercice 3) entraîne l'égalité $u^*(0) = 0$. Par suite, si un vecteur $x \in E$ satisfait $u(x) = 0$, alors

$$(u^* \circ u)(x) = u^*(u(x)) = u^*(0) = 0.$$

Réciproquement, si $x \in E$ vérifie $(u^* \circ u)(x) = 0$, alors

$$(u(x), u(x))_F = ((u^* \circ u)(x), x)_E = 0,$$

ce qui implique $u(x) = 0$ puisque le produit scalaire $(\ ,\ )_F$ est défini positif.

Les deux conditions $x \in \ker u$ et $x \in \ker(u^* \circ u)$ sont donc équivalentes, autrement dit $\ker u = \ker(u^* \circ u)$.

2. Soit λ une valeur propre de $u^* \circ u$. Il existe alors un vecteur non nul x dans E tel que $(u^* \circ u)(x) = \lambda x$, et il vient

$$\lambda(x, x)_E = (\lambda x, x)_E = ((u^* \circ u)(x), x)_E = (u(x), u(x))_F \geqslant 0.$$

Comme $(x, x)_E > 0$, nous obtenons $\lambda \geqslant 0$.

La preuve pour $u \circ u^*$ est analogue : si μ est une valeur propre de $u \circ u^*$, alors il existe un vecteur non nul y dans F tel que $(u \circ u^*)(y) = \mu y$. Des inégalités

$$\mu(y, y)_F = (y, \mu y)_F = (y, (u \circ u^*)(y))_F = (u^*(y), u^*(y))_E \geqslant 0$$

et $(y, y)_F > 0$, nous déduisons $\mu \geqslant 0$.

3. Soit $x \in E_\lambda$, c'est-à-dire $(u^* \circ u)(x) = \lambda x$. Alors

$$(u \circ u^*)(u(x)) = u(u^*(u(x))) = u((u^* \circ u)(x)) = u(\lambda x) = \lambda u(x)$$

(en utilisant la définition de E_λ et la linéarité de u), et ainsi $u(x) \in F_\lambda$.

Ceci prouve l'inclusion $u(E_\lambda) \subset F_\lambda$. La vérification de $u^*(F_\lambda) \subset E_\lambda$ est analogue.

4. Dorénavant, nous indiquons le produit scalaire simplement par $(\, , \,)$, sans préciser l'espace euclidien auquel il se rapporte. Comme de coutume, nous notons $\|x\| = (x,x)^{1/2}$ la norme d'un vecteur x.

Si $x \in E_\lambda$, alors $\|u(x)\|^2 = \lambda \|x\|^2$ d'après le calcul de la question 2. Comme $\lambda > 0$, nous pouvons considérer l'application linéaire $u_\lambda/\sqrt{\lambda} : E_\lambda \to F_\lambda$. Elle préserve les distances, puisque pour tout couple (y,z) d'éléments de E_λ,

$$\left\| \frac{u_\lambda}{\sqrt{\lambda}}(y) - \frac{u_\lambda}{\sqrt{\lambda}}(z) \right\| = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \|u(y) - u(z)\| = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \|u(y-z)\| = \|y - z\|.$$

La question 3 permet de considérer l'application linéaire $u_\lambda^* : F_\lambda \to E_\lambda$ obtenue en restreignant u^* à la source et au but. (On peut vérifier que u_λ^* est l'application linéaire adjointe de u_λ : la notation u_λ^* n'est donc pas ambiguë.) Des égalités $u_\lambda^* \circ u_\lambda = \lambda \, \mathrm{id}_{E_\lambda}$ et $u_\lambda \circ u_\lambda^* = \lambda \, \mathrm{id}_{F_\lambda}$, réécrites sous la forme

$$(u_\lambda^*/\sqrt{\lambda}) \circ (u_\lambda/\sqrt{\lambda}) = \mathrm{id}_{E_\lambda} \quad \text{et} \quad (u_\lambda/\sqrt{\lambda}) \circ (u_\lambda^*/\sqrt{\lambda}) = \mathrm{id}_{F_\lambda},$$

on déduit que $u_\lambda/\sqrt{\lambda}$ est bijective, de réciproque $u_\lambda^*/\sqrt{\lambda}$. Les deux espaces vectoriels E_λ et F_λ sont donc isomorphes, et en particulier ont même dimension.

En conclusion, l'application $u_\lambda/\sqrt{\lambda}$ est une bijection de E_λ sur F_λ qui préserve les distances, c'est-à-dire une isométrie.

5. L'endomorphisme $u^* \circ u$ étant autoadjoint, il peut être diagonalisé dans une base orthonormée. Dit autrement, il existe une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E formée de vecteurs propres de $u^* \circ u$. Quitte à renuméroter ces vecteurs, on peut supposer que les $n - r$ derniers sont propres pour la valeur propre zéro, et que pour $i \in [\![1, r]\!]$, le vecteur e_i est propre pour la valeur propre λ_i.

Pour $i \in [\![1, r]\!]$, définissons $f_i = u(e_i)/\sqrt{\lambda_i}$. Alors, pour i et j dans $[\![1, r]\!]$, on a

$$(f_i, f_j) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} (u(e_i), u(e_j)) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} ((u^* \circ u)(e_i), e_j) = \sqrt{\frac{\lambda_i}{\lambda_j}} (e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi $(f_1, \ldots, f_r)$ est une famille orthonormée de vecteurs de F. Soit G le sous-espace vectoriel qu'elle engendre (c'est l'image de u, mais nous n'avons pas besoin de le savoir), et soit $(f_{r+1}, \ldots, f_m)$ une base orthonormée de l'orthogonal de G. Alors $(f_1, \ldots, f_m)$ est une base orthonormée de F.

Par ailleurs, si $i \in [\![r+1, n]\!]$, alors e_i appartient à $\ker(u^* \circ u)$, et donc $u(e_i) = 0$ d'après la question 1. On constate alors que, par construction, les bases $(e_1, \ldots, e_n)$ de E et $(f_1, \ldots, f_m)$ de F satisfont à la propriété demandée.

Autre solution : on peut appliquer le théorème spectral aux endomorphismes auto-adjoints $u^* \circ u$ de E et $u \circ u^*$ de F pour obtenir les décompositions en sommes directes orthogonales

$$E = E_{\mu_1} \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} E_{\mu_p} \overset{\perp}{\oplus} E_0 \quad \text{et} \quad F = F_{\mu_1} \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} F_{\mu_p} \overset{\perp}{\oplus} F_0,$$

où μ_1, ..., μ_p sont les valeurs propres non nulles de ces endomorphismes (ce sont les mêmes d'après la question 4). On peut alors choisir une base orthonormée de chaque espace E_{μ_j} et la transporter dans F_{μ_j} par l'isométrie $u_{\mu_j}/\sqrt{\mu_j}$, puis compléter cette donnée par celle de bases orthonormées de E_0 et F_0. On obtient alors par concaténation des bases orthonormées de E et F. Comme $E_0 = \ker u$ (question 1), ces bases satisfont aux conditions requises, quitte à effectuer une permutation pour les adapter à l'énumération λ_1, ..., λ_r choisie.

6.

a) Soient E et F deux espaces euclidiens de dimension n et m, respectivement, munis de bases orthonormées $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ et $(\eta_1, \ldots, \eta_m)$. Soit $u : E \to F$ l'application linéaire ayant M pour matrice dans ces bases ; elle est de même rang que M, à savoir r.

Soient λ_1, ..., λ_s les valeurs propres strictement positives de $u^* \circ u$, répétées selon leurs multiplicités, et rangées en ordre décroissant. La question 5 établit l'existence de bases orthonormées $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(f_1, \ldots, f_m)$ de E et F, respectivement, telles que

$$u(e_i) = \begin{cases} \sqrt{\lambda_i}\, f_i & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant s, \\ 0 & \text{si } s+1 \leqslant i \leqslant n. \end{cases}$$

L'image de u est le sous-espace vectoriel engendré par la famille libre $(f_1, \ldots, f_s)$; ainsi u est de rang s, et donc $r = s$. On définit $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ pour $i \in [\![1, r]\!]$. La matrice D de l'énoncé est alors la matrice de u dans les bases $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(f_1, \ldots, f_m)$.

Soit P la matrice carrée d'ordre m dont les vecteurs colonnes sont les coordonnées des vecteurs f_i dans la base $(\eta_1, \ldots, \eta_m)$. Alors les vecteurs colonnes de P sont deux à deux orthogonaux et de norme 1 dans $\mathbb{R}^m$, muni de sa structure euclidienne habituelle ; autrement dit $P \in \mathbf{O}_m(\mathbb{R})$. De même, soit Q la matrice carrée d'ordre n dont les vecteurs colonnes sont les coordonnées des vecteurs ε_i dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$; alors $Q \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$.

La relation $M = PDQ$ demandée par l'énoncé n'est autre que la formule reliant les matrices d'une application linéaire lors d'un changement de base.

b) On se place à présent dans le cas particulier $m = n = r$. Alors D est une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont strictement positifs. Il s'ensuit que $Q^{-1}DQ$ est une matrice symétrique (puisque ${}^tQ = Q^{-1}$) définie positive (puisque ses valeurs propres sont toutes strictement positives). Par conséquent, la factorisation $M = (PQ)(Q^{-1}DQ)$ est la décomposition polaire de M. L'unicité de la décomposition polaire garantit ainsi que le produit PQ ne dépend que de M, et pas de la factorisation $M = PDQ$ utilisée.

7. Muni de la restriction du produit scalaire de E, $\operatorname{im} u$ est un espace euclidien de dimension r, et admet donc une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_r)$. Choisissons de même une base orthonormée $(e_{r+1}, \ldots, e_n)$ de l'orthogonal de $\operatorname{im} u$ dans E. Alors $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E qui satisfait à la condition de l'énoncé.

8. L'égalité $u^2 = 0$ implique l'inclusion $\operatorname{im} u \subset \ker u$. En utilisant le théorème du rang, on obtient

$$r = \dim \operatorname{im} u \leqslant \dim \ker u = \dim E - \dim \operatorname{im} u = n - r,$$

d'où $2r \leqslant n$.

9.

a) Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n muni d'une base orthonormée $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$. Soit $u : E \to E$ l'endomorphisme de E ayant M pour matrice dans cette base ; il est de rang r. La question 7 nous donne une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que $(e_1, \ldots, e_r)$ soit une base de $\operatorname{im} u$. Soit P la matrice d'ordre n dont les vecteurs colonnes sont les coordonnées des vecteurs ε_1, ..., ε_n dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$. Alors $P \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ et la matrice de u dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est PMP^{-1}.

L'inclusion $\operatorname{im} u \subset \ker u$, établie dans la question 8, montre que $u(e_i) = 0$ pour chaque $i \in [\![1, r]\!]$, donc les r premières colonnes de PMP^{-1} sont nulles. De plus, comme l'image de u est le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs e_1, ..., e_r, les $n - r$ dernières lignes de PMP^{-1} ne comportent que des zéros. Ainsi PMP^{-1} a la forme voulue

$$PMP^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right).$$

b) L'endomorphisme u est de rang r, donc la matrice PMP^{-1} est de rang r, et la matrice B est également de rang r. Appliqué à la matrice B, le résultat de la question 6 a) fournit une suite décroissante $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ de réels strictement positifs et deux matrices orthogonales $R \in \mathbf{O}_r(\mathbb{R})$ et $S \in \mathbf{O}_{n-r}(\mathbb{R})$ telles que $B = RDS$, où $D = (d_{i,j})$ est la matrice à r lignes et $n - r$ colonnes donnée par

$$d_{i,j} = \begin{cases} \sigma_i & \text{si } 1 \leqslant i = j \leqslant r, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} PMP^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & RDS \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) &= \left(\begin{array}{c|c} R & 0 \\ \hline 0 & S^{-1} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & D \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} R^{-1} & 0 \\ \hline 0 & S \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} R & 0 \\ \hline 0 & S^{-1} \end{array}\right) K_{r,\sigma} \left(\begin{array}{c|c} R^{-1} & 0 \\ \hline 0 & S \end{array}\right). \end{aligned}$$

Notant

$$Q = \left(\begin{array}{c|c} R^{-1} & 0 \\ \hline 0 & S \end{array}\right) P,$$

nous obtenons alors $QMQ^{-1} = K_{r,\sigma}$.

Il reste à justifier que Q est une matrice orthogonale. Comme R et S sont des matrices orthogonales, on peut écrire

$${}^t\left(\begin{array}{c|c} R^{-1} & 0 \\ \hline 0 & S \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} {}^tR^{-1} & 0 \\ \hline 0 & {}^tS \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} R & 0 \\ \hline 0 & S^{-1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} R^{-1} & 0 \\ \hline 0 & S \end{array}\right)^{-1}.$$

Ainsi $\left(\begin{array}{c|c} R^{-1} & 0 \\ \hline 0 & S \end{array}\right)$ est une matrice orthogonale. Par suite Q est bien orthogonale, car produit de deux matrices orthogonales.

10. La question 9 b) établit que chaque orbite de l'action de $\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathscr{E}_n(\mathbb{R})$ contient au moins une matrice $K_{r,\sigma}$. Il reste ainsi à démontrer que si deux matrices $K_{r,\sigma}$ et $K_{r',\sigma'}$ appartiennent à la même orbite, alors $(r, \sigma) = (r', \sigma')$.

On considère donc deux couples de paramètres (r, σ) et (r', σ') pour lesquels il existe une matrice $Q \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $K_{r',\sigma'} = QK_{r,\sigma}Q^{-1}$. Les matrices $K_{r,\sigma}$ et $K_{r',\sigma'}$ sont alors semblables, a fortiori équivalentes, et ont donc même rang : ainsi $r = r'$. Le calcul

$${}^tK_{r',\sigma'}K_{r',\sigma'} = {}^t\big(QK_{r,\sigma}Q^{-1}\big)\big(QK_{r,\sigma}Q^{-1}\big) = Q\,{}^tK_{r,\sigma}\,{}^tQQ\,K_{r,\sigma}\,Q^{-1} = Q\big({}^tK_{r,\sigma}K_{r,\sigma}\big)Q^{-1}$$

montre ensuite que les matrices ${}^tK_{r',\sigma'}K_{r',\sigma'}$ et ${}^tK_{r,\sigma}K_{r,\sigma}$ sont semblables. Ces deux matrices ont donc mêmes valeurs propres. Or l'énoncé observe qu'elles sont diagonales : à permutation près, leurs valeurs diagonales sont donc identiques, et ainsi (après suppression des zéros) les deux suites $(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_r^2)$ et $((\sigma_1')^2, (\sigma_2')^2, \dots, (\sigma_r')^2)$ sont égales à permutation près. Comme σ et σ' sont, par convention, des suites décroissantes de réels positifs, on obtient $\sigma = \sigma'$. L'égalité $(r, \sigma) = (r', \sigma')$ que nous voulions établir a donc bien lieu.

11.

a) Comme $u^i(x) = 0$ dès que $i \geqslant h$, le sous-espace vectoriel $\langle x \rangle_u$ est engendré par la famille $(x, u(x), \dots, u^{h-1}(x))$.

Supposons que cette famille soit linéairement dépendante et considérons une relation de dépendance linéaire non banale

$$a_0 x + a_1 u(x) + \dots + a_{h-1} u^{h-1}(x) = 0,$$

où a_0, a_1, ..., a_{h-1} sont des éléments de $\mathbb{K}$ non tous nuls. Soit $i \in [\![0, h-1]\!]$ le plus petit indice tel que $a_i \neq 0$. Appliquant u^{h-1-i} à la relation de dépendance linéaire, on obtient $a_i u^{h-1}(x) = 0$, et comme a_i est inversible dans $\mathbb{K}$, ceci entraîne $u^{h-1}(x) = 0$, ce qui est absurde.

Cette contradiction établit que la famille $(x, u(x), \ldots, u^{h-1}(x))$ est linéairement indépendante. Comme elle engendre $\langle x \rangle_u$, c'est une base de cet espace.

b) Soit y un élément de $\langle x \rangle_u \cap \ker u$. Nous pouvons écrire y en coordonnées dans la base de la question a) :

$$y = a_0 x + a_1 u(x) + \cdots + a_{h-1} u^{h-1}(x)$$

avec $(a_0, a_1, \ldots, a_{h-1}) \in \mathbb{K}^h$. (On note ici que $h \geqslant 1$ puisque $x \neq 0$.) Utilisant la linéarité de u puis l'égalité $u^h(x) = 0$, on calcule alors

$$0 = u(y) = \sum_{0 \leqslant i \leqslant h-1} a_i u^{i+1}(x) = \sum_{0 \leqslant i \leqslant h-2} a_i u^{i+1}(x).$$

Puisque $(u(x), \ldots, u^{h-1}(x))$ est une famille libre, on obtient $a_0 = \cdots = a_{h-2} = 0$, puis $y = a_{h-1} u^{h-1}(x)$.

Ainsi $\langle x \rangle_u \cap \ker u$ est inclus dans la droite vectorielle engendrée par le vecteur non nul $u^{h-1}(x)$. L'inclusion réciproque étant évidente, il y a égalité.

12.

a) Nous adoptons les notations de l'énoncé.

Commençons par prouver l'indication. Soit $i \in [\![1, m]\!]$ et soit $x \in \langle y_i \rangle_u$. Notant h la hauteur de y_i, nous pouvons exprimer x comme combinaison linéaire des vecteurs $u^k(y_i)$:

$$x = a_0 y_i + a_1 u(y_i) + \cdots + a_{h-1} u^{h-1}(y_i)$$

avec $(a_0, a_1, \ldots, a_{h-1}) \in \mathbb{K}^h$. Appliquant u, nous obtenons

$$u(x) = u\left(\sum_{j=0}^{h-1} a_j u^j(y_i)\right) = \sum_{j=0}^{h-1} a_j u^{j+1}(y_i) = \sum_{j=0}^{h-1} a_j u^j(z_i),$$

ce qui établit que $u(x) \in \langle z_i \rangle_u$. Nous avons donc bien $u(\langle y_i \rangle_u) \subset \langle z_i \rangle_u$.

Revenant à la question posée, considérons un m-uplet $(x_1, \ldots, x_m) \in \langle y_1 \rangle_u \times \cdots \times \langle y_m \rangle_u$ tel que $x_1 + \cdots + x_m = 0$. Nous devons prouver que tous les x_i sont nuls.

Pour chaque $i \in [\![1, m]\!]$, le vecteur $u(x_i)$ appartient à $\langle z_i \rangle_u$. De l'égalité $u(x_1) + \cdots + u(x_m) = 0$ et du fait que la somme $\langle z_1 \rangle_u + \cdots + \langle z_m \rangle_u$ est directe, nous déduisons que chaque $u(x_i)$ est nul. Ainsi $x_i \in \langle y_i \rangle_u \cap \ker u$.

Soit $h_i \geqslant 1$ la hauteur de z_i. Alors y_i est de hauteur $h_i + 1$; d'après la question 11 b), la droite $\langle y_i \rangle_u \cap \ker u$ est ainsi engendrée par le vecteur $u^{h_i}(y_i) = u^{h_i - 1}(z_i)$. Par suite, x_i est colinéaire à $u^{h_i-1}(z_i)$, et en particulier appartient à $\langle z_i \rangle_u$. Reprenant notre égalité $x_1 + \cdots + x_m = 0$ et notre somme directe $\langle z_1 \rangle_u \oplus \cdots \oplus \langle z_m \rangle_u$, nous obtenons maintenant que chaque x_i est nul, ce qu'il fallait établir.

b) On observe que pour chaque $i \in [\![1, m]\!]$ et chaque entier $j \geqslant 0$, le vecteur $u^j(z_i) = u(u^j(y_i))$ appartient au sous-espace vectoriel $u(\langle y_i \rangle_u)$. Ainsi $\langle z_i \rangle_u \subset u(\langle y_i \rangle_u) \subset u(F)$, et donc $\operatorname{im} u = \langle z_1 \rangle_u + \cdots + \langle z_m \rangle_u$ est inclus dans $u(F)$. L'inclusion réciproque est évidente, d'où l'égalité demandée.

c) Puisque $G \subset \ker u$, on a $F \cap G = F \cap (\ker u) \cap G = (F \cap \ker u) \cap G$, et cette intersection est réduite au vecteur nul de par la construction de G. La somme $F + G$ est donc directe.

Par ailleurs, pour tout $x \in E$, le vecteur $u(x)$ appartient à $\operatorname{im} u = u(F)$, donc il existe $w \in F$ tel que $u(x) = u(w)$. Certainement $x - w$ appartient à $\ker u$, donc s'écrit $x' + w'$ avec $x' \in G$ et $w' \in F \cap \ker u$. On a alors $x = (w + w') + x'$ avec $w + w' \in F$ et $x' \in G$. Tout élément de E appartient donc à $F + G$.

En conclusion, $E = F \oplus G$.

d) Choisissons une base $(x_{m+1}, \dots, x_\ell)$ de G. Comme $u(x_i) = 0$ pour chaque $i \in [\![m+1, \ell]\!]$, on a $G = \langle x_{m+1}\rangle_u \oplus \cdots \oplus \langle x_\ell \rangle_u$. Pour $i \in [\![1, m]\!]$, on pose $x_i = y_i$. Utilisant les questions a) et c), on obtient alors
$$E = F \oplus G = \langle x_1\rangle_u \oplus \cdots \oplus \langle x_m\rangle_u \oplus \langle x_{m+1}\rangle_u \oplus \cdots \oplus \langle x_\ell\rangle_u,$$
comme désiré.

13. Soit (H_n) l'énoncé suivant : « Pour tout espace vectoriel E de dimension au plus n et tout endomorphisme nilpotent u de E, il existe une suite finie $(x_1, \dots, x_\ell)$ d'éléments non nuls de E telle que $E = \langle x_1\rangle_u \oplus \cdots \oplus \langle x_\ell\rangle_u$. »

L'énoncé (H_0) est vrai : il suffit de prendre $\ell = 0$.

Supposons que (H_n) est vrai et démontrons (H_{n+1}). Soit E un espace vectoriel de dimension au plus $n+1$, muni d'un endomorphisme nilpotent u. Si $\dim E = 0$, on prend $\ell = 0$. Sinon, on note que u ne peut pas être surjectif (sinon u^i serait surjectif pour tout $i \geqslant 0$, alors que u^i est nul pour i assez grand). L'image de u est donc un espace vectoriel de dimension au plus n, stable par u. On peut donc appliquer (H_n) à $\operatorname{im} u$ muni de la restriction de u : il existe une suite finie $(z_1, \dots, z_m)$ d'éléments non nuls de $\operatorname{im} u$ telle que $\operatorname{im} u = \langle z_1\rangle_u \oplus \cdots \oplus \langle z_m\rangle_u$. La construction étudiée dans la question 12 permet alors de construire une suite finie $(x_1, \dots, x_\ell)$ d'éléments non nuls de E telle que $E = \langle x_1\rangle_u \oplus \cdots \oplus \langle x_\ell\rangle_u$, ce qui établit la propriété voulue.

L'initialisation et l'hérédité sont ainsi prouvées, et donc l'énoncé (H_n) est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

14.

a) Notons ℓ la longueur de la partition λ.

Supposons que (E, u) est de type λ. Soit $(x_1, \dots, x_\ell)$ une suite d'éléments de E telle que chaque x_i est de longueur λ_i et $E = \langle x_1\rangle_u \oplus \cdots \oplus \langle x_\ell\rangle_u$. D'après la question 11 a), on peut munir chaque sous-espace $\langle x_i\rangle_u$ de la base $(x_i, u(x_i), \dots, u^{\lambda_i - 1}(x_i))$, et par construction la matrice dans cette base de la restriction de u à $\langle x_i\rangle_u$ est $\widetilde{J}_{\lambda_i}$. Ainsi
$$\big((x_1, u(x_1), \dots, u^{\lambda_1 - 1}(x_1), \dots, x_\ell, u(x_\ell), \dots, u^{\lambda_\ell - 1}(x_\ell)\big)$$
est une base de E et la matrice de u dans cette base est J_λ.

Réciproquement, partons d'une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E dans laquelle u a J_λ pour matrice. Pour $i \in [\![1, \ell]\!]$, on pose
$$x_i = e_{\lambda_1 + \cdots + \lambda_{i-1} + 1}.$$
Alors pour tout $j \in [\![1, \lambda_i]\!]$, on a $u^{j-1}(x_i) = e_{\lambda_1 + \cdots + \lambda_{i-1} + j}$ et $u^{\lambda_i}(x_i) = 0$. Ceci prouve que x_i est de hauteur λ_i et que $\langle x_i\rangle_u$ est le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(e_{\lambda_1 + \cdots + \lambda_{i-1} + 1}, \dots, e_{\lambda_1 + \cdots + \lambda_{i-1} + \lambda_i})$. On en déduit que $E = \langle x_1\rangle_u \oplus \cdots \oplus \langle x_\ell\rangle_u$, puis que (E, u) est de type λ.

b) Soit $x \in E$ non nul, de hauteur $h \geqslant 1$. D'après la question 11 a), l'espace $\langle x\rangle_u$ admet pour base $(x, u(x), \dots, u^{h-1}(x))$.

Si $i \in [\![0, h]\!]$, alors le noyau de la restriction de u^i à $\langle x\rangle_u$ est le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $u^{h-i}(x)$, ..., $u^{h-1}(x)$: en effet ces vecteurs sont bien envoyés sur zéro par u^i, tandis que les autres vecteurs de la base sont envoyés sur $u^i(x)$, ..., $u^{h-1}(x)$, lesquels forment une famille libre. Le noyau de la restriction de u^i à $\langle x\rangle_u$ est donc de dimension i.

En revanche si $i > h$, alors le noyau de la restriction de u^i à $\langle x\rangle_u$ est $\langle x\rangle_u$ tout entier, donc est de dimension h. Regroupant les deux cas, nous trouvons que pour tout entier $i \geqslant 0$, le noyau de la restriction de u^i à $\langle x\rangle_u$ est de dimension $\min(h, i)$.

Soit λ une partition de longueur ℓ. Supposons que (E, u) soit de type λ et choisissons une décomposition
$$E = \langle x_1\rangle_u \oplus \cdots \oplus \langle x_\ell\rangle_u \qquad (*)$$

avec x_j de hauteur λ_j pour tout $j \in [\![1, \ell]\!]$. Alors pour chaque entier $i \geqslant 0$,

$$\ker u^i = \left(\ker u^i \cap \langle x_1 \rangle_u\right) \oplus \cdots \oplus \left(\ker u^i \cap \langle x_\ell \rangle_u\right).$$

En effet, étant donnée une famille $(y_1, \dots, y_\ell) \in \langle x_1 \rangle_u \times \cdots \times \langle x_\ell \rangle_u$, la somme $y_1 + \cdots + y_\ell$ appartient au noyau de u^i si et seulement si $u^i(y_1) + \cdots + u^i(y_\ell) = 0$. Vu la somme directe $(*)$, ceci a lieu si et seulement si tous les termes $u^i(y_j)$ de la somme sont nuls, donc si et seulement si $(y_1, \dots, y_\ell) \in \left(\ker u^i \cap \langle x_1 \rangle_u\right) \times \cdots \times \left(\ker u^i \cap \langle x_\ell \rangle_u\right)$.
Il vient ainsi

$$\dim(\ker u^i) = \sum_{j=1}^{\ell} \dim\left(\ker u^i \cap \langle x_j \rangle_u\right) = \sum_{j=1}^{\ell} \min(\lambda_j, i).$$

Pour $i \geqslant 1$, nous calculons alors

$$\dim(\ker u^i) - \dim(\ker u^{i-1}) = \sum_{j=1}^{\ell} (\min(\lambda_j, i) - \min(\lambda_j, i-1)).$$

Dans la dernière somme, le terme $\min(\lambda_j, i) - \min(\lambda_j, i-1)$ vaut un si $i \leqslant \lambda_j$ et zéro sinon. Comme le nombre de parts de λ supérieures ou égales à i est égal à λ'_i, nous obtenons :

$$\dim(\ker u^i) - \dim(\ker u^{i-1}) = \lambda'_i.$$

c) Si (E, u) est à la fois de type λ et de type μ, alors pour tout entier $i \geqslant 1$, on a $\lambda'_i = \dim(\ker u^i) - \dim(\ker u^{i-1}) = \mu'_i$, et donc $\lambda' = \mu'$. Ceci entraîne que

$$\lambda = (\lambda')' = (\mu')' = \mu.$$

15.

a) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente. Soit E un espace vectoriel de dimension n muni d'une base et soit u l'endomorphisme de E ayant M comme matrice dans cette base. D'après la question 13, il existe un entier naturel ℓ et une suite $(x_1, x_2, \dots, x_\ell)$ d'éléments de E telles que $E = \langle x_1 \rangle_u \oplus \langle x_2 \rangle_u \oplus \cdots \oplus \langle x_\ell \rangle_u$. Quitte à permuter les x_i, on peut supposer que la suite λ formée des hauteurs des x_i est décroissante. Alors λ est une partition de n et (E, u) est de type λ. D'après la question 14 a), il existe une base de E dans laquelle u admet J_λ pour matrice. Ainsi M et J_λ sont l'une et l'autre des matrices de u, dans deux bases différentes : M est donc semblable à J_λ.
Conservons ces notations et examinons l'unicité. Soit μ une partition de n telle que M soit semblable à J_μ. Alors il existe une base de E dans laquelle u admet J_μ pour matrice. La question 14 a) nous dit maintenant que (E, u) est de type μ, et la question 14 c) affirme ensuite que $\mu = \lambda$.

b) La partie II considérait un espace vectoriel E de dimension n muni d'un endomorphisme u de rang r tel $u^2 = 0$. Dans cette situation, on a $\dim \ker u^i = n$ pour $i \geqslant 2$ et $\dim \ker u = n - r$ (d'après le théorème du rang).
Soit λ le type de u. La question 14 b) donne alors pour la partition conjuguée de λ : $\lambda'_1 = n - r$, $\lambda'_2 = r$, et $\lambda'_i = 0$ pour $i \geqslant 3$. Calculant la conjuguée de la partition $\lambda' = (n - r, r)$, on obtient

$$\lambda = (\underbrace{2, \dots, 2}_{r}, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-2r}).$$

Cette partition ne dépend que de r et pas de σ.

c) Soit E un espace vectoriel et u un endomorphisme nilpotent de E. Pour tout scalaire non nul a, l'endomorphisme au est nilpotent, et l'on a $\dim(\ker u^i) = \dim(\ker(au)^i)$ pour chaque entier $i \geqslant 1$. La question 14 b) montre alors que u et au ont même type.

Reprenant le raisonnement adopté dans la question a), on traduit ce résultat en termes de matrices de la façon suivante : deux matrices nilpotentes proportionnelles sont semblables à une même matrice J_λ, donc sont semblables.

16.

a) Soit ℓ la longueur de λ et soit P la matrice diagonale par blocs, avec comme blocs diagonaux $\widetilde{P}_{\lambda_1}$, $\widetilde{P}_{\lambda_2}$, ..., $\widetilde{P}_{\lambda_\ell}$. Cette matrice est symétrique puisque chacun des blocs diagonaux l'est. Les égalités $PJ_\lambda P^{-1} = {}^t(J_\lambda)$ et $P^2 = I_n$ s'obtiennent par un calcul par blocs à partir des formules $\widetilde{P}_d\widetilde{J}_d\big(\widetilde{P}_d\big)^{-1} = {}^t\big(\widetilde{J}_d\big)$ et $\big(\widetilde{P}_d\big)^2 = I_d$ données dans l'énoncé.

b) Soit i une racine carrée de -1 dans $\mathbb{K}$ (une telle racine existe puisque $\mathbb{K}$ est algébriquement clos) et soit a une racine carrée de $1/2i$ (la caractéristique de $\mathbb{K}$ est différente de 2). Posons $b = ia$; alors $a^2 + b^2 = 0$ et $2ab = 1$. La matrice symétrique $Q = aI_n + bP$ vérifie ${}^tQQ = Q^2 = P$; en particulier Q est inversible puisque P l'est.

On peut alors calculer

$$ {}^t\big(QJ_\lambda Q^{-1}\big) = {}^tQ^{-1}\,{}^t(J_\lambda)\,{}^tQ = {}^tQ^{-1}\big(PJ_\lambda P^{-1}\big){}^tQ = \big({}^tQ^{-1}\,P\big)J_\lambda\big(P^{-1}\,{}^tQ\big) = QJ_\lambda Q^{-1}, $$

et ainsi la matrice $QJ_\lambda Q^{-1}$ est symétrique.

17.

a) Adoptons les notations de l'énoncé. Soit β_1, ..., β_m les éléments distincts présents dans la suite $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Soit γ_1, ..., γ_m des racines carrées de β_1, ..., β_m dans le corps algébriquement clos $\mathbb{K}$. On peut alors considérer le polynôme d'interpolation de Lagrange

$$ f(X) = \sum_{i=1}^{m} \left(\gamma_i \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} \frac{X - \beta_j}{\beta_i - \beta_j} \right). $$

Pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, on a $f(\beta_i) = \gamma_i$, et donc $f(\beta_i)^2 = \gamma_i^2 = \beta_i$. Par conséquent, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $f(\alpha_i)^2 = \alpha_i$.

Soit $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible. La conjugaison par P étant un automorphisme de l'algèbre $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, elle commute à l'évaluation des polynômes, autrement dit $g(PMP^{-1}) = Pg(M)P^{-1}$ pour tout polynôme $g(X) \in \mathbb{K}[X]$ et toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. En particulier, si un polynôme $g(X)$ annule une matrice M, alors il annule toutes les matrices semblables à M.

Soit Δ la matrice diagonale ayant α_1, ..., α_n comme coefficients diagonaux. Comme le polynôme $f(X)^2 - X$ annule chaque α_i, il annule Δ. Par hypothèse, D et Δ sont semblables. Il s'ensuit que $f(X)^2 - X$ annule D, autrement dit que $f(D)^2 = D$.

b) Supposant $n \geqslant 2$, on calcule modulo X^n :

$$ \begin{aligned} \Phi(X)^2 &= \left(1 - 2\sum_{k=0}^{n-2} C_k X^{k+1}\right)^2 \\ &= 1 - 4\sum_{k=0}^{n-2} C_k X^{k+1} + 4\left(\sum_{k=0}^{n-2} C_k X^{k+1}\right)^2 \\ &= 1 - 4\sum_{k=0}^{n-2} C_k X^{k+1} + 4\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{n-2} C_iC_j X^{i+j+2} \\ &\equiv 1 - 4C_0X - 4\sum_{k=0}^{n-3} C_{k+1}X^{k+2} + 4\sum_{(i,j)\in T} C_iC_jX^{i+j+2} \end{aligned} $$

où

$$\begin{aligned} T &= \left\{(i,j) \in [\![0, n-2]\!]^2 \mid i+j \leqslant n-3\right\} \\ &= \left\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid i+j \leqslant n-3\right\}. \end{aligned}$$

(La dernière égalité n'est valable que modulo X^n, car on a tronqué la somme double en omettant les termes comprenant une puissance de X d'exposant supérieur ou égal à n.) Ceci nous donne

$$\Phi(X)^2 \equiv 1 - 4C_0X - 4\sum_{k=0}^{n-3}\left(C_{k+1} - \sum_{\substack{i\geqslant 0,\, j\geqslant 0\\ i+j=k}} C_iC_j\right)X^{k+2} \pmod{X^n},$$

et en utilisant la définition de la suite (C_k), nous obtenons

$$\Phi(X)^2 \equiv 1 - 4X \pmod{X^n},$$

qui vaut aussi pour $n = 1$.

Remarque : les C_k sont les nombres de Catalan.

c) On peut prendre l'image de $\Phi(X)$ dans $\mathbb{K}[X]$. Comme $\mathbb{K}$ est de caractéristique différente de 2, on peut substituer $-X/4$ à X et voir que le polynôme $1 + X - \Phi(-X/4)^2$ est un multiple de X^n. Or X^n est un polynôme annulateur de toutes les matrices nilpotentes dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Par conséquent, $1 + X - \Phi(-X/4)^2$ est aussi un polynôme annulateur de ces matrices. Autrement dit, $\Phi(-N/4)^2 = I_n + N$ pour chaque matrice nilpotente N.

Le polynôme $g(X) = \Phi(-X/4)$ convient donc.

18.

a) Comme $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, chaque matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ possède une décomposition de Jordan $P = D + N$, avec D diagonalisable, N nilpotente, et D et N des polynômes en P.

Supposons à présent que P est inversible. On peut alors considérer $P^{-1}N$: c'est une matrice nilpotente car N est nilpotente et P et N commutent. Il s'ensuit que $I_n - P^{-1}N$ est inversible (d'inverse $\sum_{k=0}^{n-1}(P^{-1}N)^k$), et ainsi $D = P(I_n - P^{-1}N)$ est inversible.

L'algèbre $\mathbb{K}[P]$ des polynômes en P est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, donc est de dimension finie. Comme D est un polynôme en P, la multiplication à gauche par D est un endomorphisme $m \in \mathrm{End}(\mathbb{K}[P])$. Comme D est une matrice inversible, elle n'est pas un diviseur de zéro dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et a fortiori m est injectif. Alors m est bijectif, et l'antécédent de I_n par m est l'inverse de D. Ceci prouve que D^{-1} appartient à $\mathbb{K}[P]$: il existe un polynôme $j(X) \in \mathbb{K}[X]$ tel que $D^{-1} = j(P)$.

b) Écrivons $P = D(I_n + D^{-1}N)$, avec donc D diagonalisable et $D^{-1}N$ nilpotente. La question 17 a) permet de trouver un polynôme $f(X) \in \mathbb{K}[X]$ tel que $f(D)^2 = D$. La question 17 c) donne un polynôme $g(X)$ tel que $I_n + D^{-1}N = g(D^{-1}N)^2$. Comme D et $D^{-1}N$ commutent, $f(D)$ et $g(D^{-1}N)$ commutent. Ainsi

$$P = D(I_n + D^{-1}N) = f(D)^2 g(D^{-1}N)^2 = (f(D)g(D^{-1}N))^2,$$

ce qui conduit à choisir $R = f(D)g(D^{-1}N)$.

Par ailleurs, nous disposons de polynômes $h(X)$ et $j(X)$ tels que $D = h(P)$, $N = P - h(P)$ et $D^{-1} = j(P)$. Alors R est l'évaluation en P du polynôme

$$f(h(X))\, g(j(X)(X - h(X))).$$

c) Soit $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$. La matrice ${}^tPP$ est inversible, car produit de deux matrices inversibles. D'après la question b), il existe donc une matrice inversible S telle que $S^2 = {}^tPP$, et l'on peut même choisir S parmi les polynômes en ${}^tPP$, ce qui permet d'avoir S symétrique. Posant $Q = PS^{-1}$, on calcule alors
$${}^tQQ = {}^t(S^{-1})\,{}^tPPS^{-1} = ({}^tS)^{-1}S^2S^{-1} = I_n,$$
et ainsi $Q \in \mathbf{O}_n(\mathbb{K})$.

19. Sous les hypothèses de l'énoncé, il existe une matrice $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = PAP^{-1}$. En transposant, nous obtenons ${}^tA = {}^tP\,{}^tB\,{}^tP^{-1}$. Comme A et B sont symétriques, nous avons alors

$$A = {}^tP\,B\,{}^tP^{-1} = {}^tP\,(PAP^{-1})\,{}^tP^{-1} = ({}^tPP)A({}^tPP)^{-1},$$

c'est-à-dire A commute avec ${}^tPP$. Grâce à la question 18 c), nous pouvons écrire $P = QS$, avec $Q \in \mathbf{O}_n(\mathbb{K})$ et S polynôme en ${}^tPP$. Alors A et S commutent, et ainsi

$$B = PAP^{-1} = QSAS^{-1}Q^{-1} = QAQ^{-1},$$

comme demandé.

20. Soit $(P, M) \in \mathbf{O}_n(\mathbb{K}) \times \mathscr{N}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{K})$. Alors la matrice $P \cdot M = PMP^{-1}$ est semblable à M, donc est nilpotente. Elle est également symétrique, car les égalités ${}^tM = M$ et ${}^tP = P^{-1}$ impliquent que ${}^t(P \cdot M) = {}^t(PMP^{-1}) = {}^tP^{-1}\,{}^tM\,{}^tP = PMP^{-1} = P \cdot M$. En conclusion, $P \cdot M \in \mathscr{N}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{K})$.

21. Soit $\mathscr{O}$ une $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$-orbite dans $\mathscr{N}_n(\mathbb{K})$. Elle contient une matrice de la forme J_λ pour une certaine partition λ de n (question 15 a)). L'existence d'une matrice symétrique semblable à J_λ (question 16 b)) implique que $\mathscr{O} \cap \mathscr{N}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{K})$ n'est pas vide.

L'intersection $\mathscr{O} \cap \mathscr{N}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{K})$ est manifestement stable sous l'action de $\mathbf{O}_n(\mathbb{K})$, donc est une union de $\mathbf{O}_n(\mathbb{K})$-orbites. Cependant, si A et B sont deux matrices dans $\mathscr{O} \cap \mathscr{N}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{K})$, alors elles sont symétriques et semblables, donc il existe $Q \in \mathbf{O}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = Q \cdot A$ (question 19), et ainsi A et B appartiennent à une même $\mathbf{O}_n(\mathbb{K})$-orbite.

Les deux alinéas précédents prouvent que si $\mathscr{O}$ une $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$-orbite dans $\mathscr{N}_n(\mathbb{K})$, alors $\mathscr{O}' = \mathscr{O} \cap \mathscr{N}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{K})$ est une $\mathbf{O}_n(\mathbb{K})$-orbite dans $\mathscr{N}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{K})$.

L'application $\mathscr{O} \mapsto \mathscr{O}'$ est donc bien définie. Elle est injective car deux $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$-orbites distinctes sont disjointes. Elle est également surjective : n'importe quelle $\mathbf{O}_n(\mathbb{K})$-orbite $\mathscr{O}'$ dans $\mathscr{N}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{K})$ est incluse dans une $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$-orbite $\mathscr{O}$ dans $\mathscr{N}_n(\mathbb{K})$, et l'inclusion $\mathscr{O}' \subset \mathscr{O} \cap \mathscr{N}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{K})$ que l'on obtient alors est une égalité, vu que deux orbites sont disjointes ou égales. Notre application est donc bijective.

22.

a) On suppose que $\mathbb{K}$ est de caractéristique 2. Notant que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est sa propre inverse, on vérifie alors banalement que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1},$$

ce qui démontre que les deux matrices de l'énoncé sont semblables dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$.

(Alternativement, on pouvait observer que ces deux matrices sont nilpotentes et de carré non nul. La classification de la partie III implique alors qu'elles sont semblables à $J_{(3)}$.)

b) On suppose que $\mathbb{K}$ est un corps algébriquement clos de caractéristique 2. Les deux matrices de la question a) sont symétriques et semblables. Si le résultat de la question 19 était encore valable sur $\mathbb{K}$, il existerait une matrice une matrice $Q \in \mathbf{O}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$Q \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} Q.$$

Écrivant $Q = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, cette équation se traduit par

$$b = h = a + d + g = c + f + i, \; e = a + g = c + i, \; a + c = g + i = b + e + h, \; d + f = b + h.$$

Substituant $b = h$ dans la pénultième équation et tenant compte de la caractéristique de $\mathbb{K}$, on obtient $e = a + c = g + i$. Comparant avec $e = a + g = c + i$, on en déduit que $a = i$ et $c = g$. On note aussi que $d + f = b + h = 0$, donc que $d = f$. De $b = a + d + g$, on déduit $a = b + c + d$ et ainsi $e = a + c = b + d$. Bref $Q = \begin{pmatrix} b+c+d & b & c \\ d & b+d & d \\ c & b & b+c+d \end{pmatrix}$ et un calcul banal donne alors

$${}^tQQ = \begin{pmatrix} b^2 & b^2+d^2 & d^2 \\ b^2+d^2 & b^2+d^2 & b^2+d^2 \\ d^2 & b^2+d^2 & b^2 \end{pmatrix}.$$

Cette dernière matrice ne peut pas être I_3, puisque la deuxième ligne est proportionnelle à $(1, 1, 1)$. Ce contre-exemple montre que le résultat de la question 19 n'est plus valable en caractéristique 2.

23.

a) Pour chaque entier $i \geqslant 0$, on a $\ker(u|_F)^i = F \cap \ker u^i$. Si $i \geqslant 1$, alors l'application composée

$$F \cap \ker u^i \to \ker u^i \to \ker u^i / \ker u^{i-1}$$

a pour noyau $F \cap \ker u^{i-1}$. En factorisant, on obtient une application linéaire injective

$$\ker(u|_F)^i / \ker(u|_F)^{i-1} \to \ker u^i / \ker u^{i-1},$$

et la question 14 b) donne alors $\mu'_i \leqslant \lambda'_i$. Ceci prouve que $\mu' \subset \lambda'$: le diagramme de Ferrers de μ' est inclus dans celui de λ'. En prenant l'image par la réflexion par rapport à la bissectrice du premier quadrant, on en déduit que $\mu \subset \lambda$.

b) Commençons par une observation : pour chaque entier $i \geqslant 1$, le théorème du rang donne

$$\dim E = \dim \ker u^i + \dim \operatorname{im} u^i = \dim \ker u^{i-1} + \dim \operatorname{im} u^{i-1} \;;$$

en combinant avec la question 14 b), on obtient

$$\lambda'_i = \dim \operatorname{im} u^{i-1} - \dim \operatorname{im} u^i.$$

Pour chaque entier $i \geqslant 0$, on a $\operatorname{im}(u|_{E/F})^i = (F + \operatorname{im} u^i)/F$. Si $i \geqslant 1$, alors l'application composée

$$\operatorname{im} u^{i-1} \to E \to E/(F + \operatorname{im} u^i)$$

a pour image $(F + \operatorname{im} u^{i-1})/(F + \operatorname{im} u^i)$ et son noyau contient $\operatorname{im} u^i$. En factorisant, on obtient une application linéaire surjective

$$\operatorname{im} u^{i-1} / \operatorname{im} u^i \to \operatorname{im}(u|_{E/F})^{i-1} / \operatorname{im}(u|_{E/F})^i.$$

Notre observation initiale donne alors $\lambda'_i \geqslant \nu'_i$. On obtient ainsi $\nu' \subset \lambda'$, puis $\nu \subset \lambda$.

Il est également possible de répondre à cette question b) en utilisant la dualité de la façon suivante. D'après la question 14 a), il existe une base de E dans laquelle u a pour matrice J_λ. Dans la base duale de E^*, l'endomorphisme ${}^t u$ admet alors pour matrice ${}^t(J_\lambda)$. Or la matrice J_λ est semblable à sa transposée d'après la question 9 a) (le raisonnement qui établit ce résultat n'utilise pas les hypothèses sur $\mathbb{K}$ faites au début de la partie III). Il existe donc une base de E^* dans laquelle la matrice de ${}^t u$ est J_λ, ce qui prouve que $(E^*, {}^t u)$ est de type λ. De même, $((E/F)^*, {}^t(u|_{E/F}))$ est de type ν. Considérons maintenant la surjection canonique $p : E \to E/F$. L'endomorphisme induit $u|_{E/F}$ est défini par la relation $(u|_{E/F}) \circ p = p \circ u$. La transposée de p est une application linéaire injective et son image est l'orthogonal $F^\perp$ de F dans E^* ; elle induit donc un isomorphisme d'espaces vectoriels $j : (E/F)^* \to F^\perp$. De plus, $F^\perp$ est stable par ${}^t u$. L'égalité ${}^t p \circ {}^t(u|_{E/F}) = {}^t u \circ {}^t p$ se réécrit alors $j \circ {}^t(u|_{E/F}) = ({}^t u)|_{F^\perp} \circ j$, ce qui montre qu'à l'instar de $((E/F)^*, {}^t(u|_{E/F}))$, le couple $(F^\perp, ({}^t u)|_{F^\perp})$ est de type ν. La question a), appliquée à l'espace $(E^*, {}^t u)$ et au sous-espace $F^\perp$, nous donne alors $\nu \subset \lambda$.

24. On pose $E = \mathbb{K}^5$ et on appelle u l'endomorphisme de E ayant J_λ pour matrice dans la base canonique. Comme $\lambda' = (2,2,1)$, on a $\dim(\ker u) = 2$ et $\dim(\ker u^2) = 4$ d'après la question 14 b).

Examinons pour commencer les sous-espaces vectoriels F de E stables par u tels que $(F, u|_F)$ soit de type μ. Cette condition requiert que $F \subset \ker u^2$ et $\dim(\ker u|_F) = 2$. Ainsi $\ker u|_F = F \cap \ker u$ et $\ker u$ doivent être deux espaces vectoriels de même dimension : il est donc nécessaire que $F \supset \ker u$. La donnée de F est alors équivalente à celle de la droite $F/(\ker u)$ du plan vectoriel $(\ker u^2)/(\ker u)$.

Nous voulons également imposer que $(E/F, u|_{E/F})$ soit de type ν, autrement dit exclure que $(E/F, u|_{E/F})$ soit de type $(1,1)$. (L'espace E/F étant de dimension 2, le type de $(E/F, u|_{E/F})$ appartient à $\mathscr{P}_2 = \{(2),(1,1)\}$.) Nous observons ici que $(E/F, u|_{E/F})$ est de type $(1,1)$ si et seulement si $u|_{E/F} = 0$, donc si et seulement si $\operatorname{im} u \subset F$, c'est-à-dire $F = \operatorname{im} u$ (puisque F et $\operatorname{im} u$ sont tous deux de dimension 3).

Les arguments qui précèdent montrent que $\mathscr{G}^\lambda_{\mu,\nu}(\mathbb{K})$ est en bijection avec l'ensemble des droites du plan vectoriel $(\ker u^2)/(\ker u)$ privé du point $(\operatorname{im} u)/(\ker u)$. Or, un plan vectoriel sur un corps fini à q éléments contient exactement $q+1$ droites. Ôtant un point, on trouve :

$$\left|\mathscr{G}^\lambda_{\mu,\nu}(\mathbb{F}_q)\right| = q.$$

(D'autres modes de raisonnement et d'autres rédactions sont possibles pour résoudre cette question.)

25.

a) Soit ℓ la longueur de λ et soit $(x_1, \ldots, x_\ell)$ une suite d'éléments de E telle que chaque x_i soit de hauteur λ_i et E soit la somme directe $\langle x_1\rangle_u \oplus \cdots \oplus \langle x_\ell\rangle_u$. Alors $\operatorname{im} u$ est la somme directe $\langle u(x_1)\rangle_u \oplus \cdots \oplus \langle u(x_\ell)\rangle_u$ et chaque $u(x_i)$ est de hauteur $\lambda_i - 1$. Supprimant de cette somme directe les sous-espaces $\langle u(x_i)\rangle_u$ pour lesquels $u(x_i) = 0$, c'est-à-dire $\lambda_i = 1$, on obtient une décomposition de $\operatorname{im} u$ en somme directe de sous-espaces cycliques. On lit alors le type de $(\operatorname{im} u, u|_{\operatorname{im} u})$: c'est la partition $(\lambda_1 - 1, \lambda_2 - 1, \ldots, \lambda_\ell - 1)$, les derniers termes de cette suite pouvant être nuls.

b) Soit λ° le type de $(\operatorname{im} u, u|_{\operatorname{im} u})$. D'après la question a), son diagramme de Ferrers s'obtient en supprimant la dernière case de chacune des lignes du diagramme de λ.

L'hypothèse $u|_{E/F} = 0$ est équivalente à l'inclusion $\operatorname{im} u \subset F$. Si elle a lieu, alors le type μ de $(F, u|_F)$ vérifie $\lambda^\circ \subset \mu \subset \lambda$ (question 23 a)). Ceci signifie que le diagramme de μ s'obtient en retirant la dernière case de certaines lignes du diagramme de λ.

c) La question 14 b) nous donne

$$\dim(\ker u^i) = \lambda'_1 + \cdots + \lambda'_i.$$

Notons à nouveau λ° le type de $(\operatorname{im} u, u|_{\operatorname{im} u})$; alors, toujours d'après la question 14 b)

$$\dim \ker(u|_{\operatorname{im} u})^i = (\lambda^\circ)'_1 + \cdots + (\lambda^\circ)'_i.$$

La question a) affirme que $(\lambda^\circ)'$ s'obtient à partir de λ' en supprimant la première part λ'_1. La dernière égalité se réécrit donc

$$\dim(\operatorname{im} u \cap \ker u^i) = \lambda'_2 + \cdots + \lambda'_{i+1}.$$

Par soustraction, nous obtenons

$$\begin{aligned}\lambda'_1 - \lambda'_{i+1} &= \dim(\ker u^i) - \dim(\operatorname{im} u \cap \ker u^i)\\ &= \dim(\operatorname{im} u + \ker u^i) - \dim(\operatorname{im} u)\\ &= \dim((\operatorname{im} u + \ker u^i)/\operatorname{im} u).\end{aligned}$$

d) Soit i un entier positif ou nul. Comme $\operatorname{im} u \subset F$, on a

$$F \cap (\operatorname{im} u + \ker u^i) = \operatorname{im} u + (F \cap \ker u^i),$$

d'où

$$\begin{aligned}\dim(F \cap (\operatorname{im} u + \ker u^i)) &= \dim(\operatorname{im} u) + \dim(F \cap \ker u^i) - \dim(\operatorname{im} u \cap \ker u^i)\\ &= \dim(\operatorname{im} u) + \dim \ker(u|_F)^i - \dim \ker(u|_{\operatorname{im} u})^i.\end{aligned}$$

Notant encore λ° le type de $(\operatorname{im} u, u|_{\operatorname{im} u})$, la question 14 b) donne alors

$$\dim(F \cap (\operatorname{im} u + \ker u^i)) - \dim(F \cap (\operatorname{im} u + \ker u^{i-1})) = \mu'_i - (\lambda^\circ)'_i$$

pour tout $i \geqslant 1$. Vu la question a), ceci se réécrit

$$\mu'_i = \lambda'_{i+1} + \dim(F \cap (\operatorname{im} u + \ker u^i)) - \dim(F \cap (\operatorname{im} u + \ker u^{i-1})).$$

26.

a) Considérons l'application linéaire naturelle $F \cap E_i \to E_i \to E_i/E_{i-1}$. Son noyau est $F \cap E_{i-1}$. En factorisant, on obtient donc une application linéaire injective

$$(F \cap E_i)/(F \cap E_{i-1}) \to E_i/E_{i-1}.$$

Par conséquent, la dimension de $(F \cap E_i)/(F \cap E_{i-1})$ est inférieure ou égale à celle de E_i/E_{i-1}, donc vaut 0 ou 1, ce qu'il fallait démontrer.

b) Nous allons prouver le résultat par récurrence sur $d = |I|$.

Si $d = 0$, alors $I = \varnothing$, le seul sous-espace vectoriel $F \in \mathscr{C}_I$ est le sous-espace nul, la seule famille de vecteurs I-échelonnée réduite est la famille vide, et l'énoncé est banalement vrai.

Considérons maintenant un entier $d \geqslant 1$ et supposons le résultat vrai pour $d-1$. Soit $I \subset [\![1, n]\!]$ de cardinal d et soit $F \in \mathscr{C}_I$. Appelons i_d le plus grand élément de I ; ainsi F est inclus dans E_{i_d} mais pas dans E_{i_d-1}. Posons $I' = I \backslash \{i_d\}$ et $F' = F \cap E_{i_d-1}$. Alors $F' \in \mathscr{C}_{I'}$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une unique base I'-échelonnée réduite $(w_1, \ldots, w_{d-1})$ de F'.

D'après la question a), F' est un hyperplan de F. Prenons un élément x de $F \backslash F'$. D'une part, $(w_1, \ldots, w_{d-1}, x)$ est une base de F ; d'autre part, $x \in E_{i_d} \backslash E_{i_d-1}$, donc x est combinaison linéaire de v_1, ..., v_{i_d} mais pas de v_1, ..., v_{i_d-1}, d'où $v^*_{i_d}(x) \neq 0$. Posons

$$w_d = \frac{1}{v^*_{i_d}(x)}\left(x - \sum_{k=1}^{d-1} v^*_{i_k}(x) w_k\right).$$

Alors $(w_1, \ldots, w_d)$ est une base de F.

Pour chaque $k \in [\![1, d-1]\!]$, le vecteur w_k appartient à F', donc à E_{i_d-1} ; par conséquent $v_{i_d}^*(w_k) = 0$. Un calcul immédiat montre alors que $v_{i_d}^*(w_d) = 1$. Soit $j \in I$ strictement inférieur à i_d ; pour $k \in [\![1, d-1]\!]$, on a alors

$$v_j^*(w_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i_k, \\ 0 & \text{sinon ;} \end{cases}$$

et ainsi $v_j^*(w_d) = 0$. Enfin, soit $j > i_d$; de $w_d \in F$ et $F \subset E_{i_d}$, nous déduisons alors $v_j^*(w_d) = 0$. Tout ceci montre que $(w_1, \ldots, w_d)$ est une base I-échelonnée réduite de F.

Il nous reste à justifier la clause d'unicité. Supposons que $(w'_1, \ldots, w'_d)$ soit une base I-échelonnée réduite de F. Pour chaque $k \in [\![1, d]\!]$, le vecteur w'_k appartient à E_{i_k}, car $v_j^*(w_k) = 0$ pour tout $j > i_k$. Les vecteurs w'_1, ..., w'_{d-1} appartiennent ainsi tous à $F' = F \cap E_{i_d-1}$. Comme ils sont linéairement indépendants, ils forment une base de F', et cette base est manifestement I'-échelonnée réduite. L'unicité dans l'hypothèse de récurrence donne alors l'égalité $(w'_1, \ldots, w'_{d-1}) = (w_1, \ldots, w_{d-1})$. Développons w'_d sur la base $(w_1, \ldots, w_{d-1}, w_d)$:

$$w'_d = a_1 w_1 + \cdots + a_d w_d$$

avec $(a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{K}^d$. En évaluant $v_{i_k}^*$ sur les deux membres de cette égalité, on obtient $a_k = 0$ pour chaque $k \in [\![1, d-1]\!]$. En évaluant $v_{i_d}^*$, on obtient $a_d = 1$. Ainsi $w'_d = w_d$ et il y a bien unicité.

L'énoncé demandé est ainsi prouvé par récurrence.

c) Soit $\mathscr{R}_I$ l'ensemble des familles I-échelonnées réduites de vecteurs de E. On définit une application $b : \mathscr{C}_I \to \mathscr{R}_I$ de la façon suivante : si $F \in \mathscr{C}_I$, alors $b(F)$ est l'unique base I-échelonnée réduite de F. Ainsi F est le sous-espace vectoriel engendré par $b(F)$. La donnée de $b(F)$ détermine donc F, et ainsi b est injective.

Prouvons que b est surjective. Soit i_1, ..., i_d les éléments de I, énumérés dans l'ordre croissant. Prenons $(w_1, \ldots, w_d) \in \mathscr{R}_I$, appelons F le sous-espace vectoriel que cette famille engendre, et posons

$$J = \{i \in [\![1, n]\!] \mid F \cap E_{i-1} \neq F \cap E_i\},$$

de sorte que $F \in \mathscr{C}_J$. Pour chaque $k \in [\![1, d]\!]$, le vecteur w_k appartient à $F \cap E_{i_k}$ (car $v_j^*(w_k) = 0$ pour tout $j > i_k$) mais pas à E_{i_k-1}, donc $i_k \in J$. Nous voyons donc que $I \subset J$, puis que

$$|I| \leqslant |J| = \dim F \leqslant d = |I|.$$

Les deux inégalités sont alors des égalités, d'où $I = J$ et $\dim F = d$, c'est-à-dire $F \in \mathscr{C}_I$ et $(w_1, \ldots, w_d)$ est une base de F. Ainsi $(w_1, \ldots, w_d) = b(F)$ appartient à l'image de b. Conclusion : b est bien surjective.

d) Reprenons les notations de la question c) ; en particulier $d = |I|$. Pour déterminer le cardinal de $\mathscr{C}_I$, il nous suffit de compter les éléments $(w_1, \ldots, w_d)$ de $\mathscr{R}_I$. Pour chaque $k \in [\![1, d]\!]$, les contraintes imposent à w_k d'être de la forme

$$v_{i_k} + \sum_{\substack{1 \leqslant j < i_k \\ j \notin I}} a_{k,j} v_j$$

avec $a_{k,j} \in \mathbb{K}$. Il y a alors q choix pour chaque $a_{k,j}$, donc q^{i_k-k} choix possibles pour w_k. Les vecteurs w_1, ..., w_d pouvant être choisis indépendamment les uns des autres, nous obtenons

$$|\mathscr{C}_I| = |\mathscr{R}_I| = \prod_{k=1}^{d} q^{i_k-k} = q^{n(I)}, \ \text{avec } n(I) = \sum_{i \in I} i - \frac{|I|(|I|+1)}{2}.$$

27.

a) On pose $\varepsilon_0 = 0$ et, pour $i \in [\![1, r]\!]$, on pose $\varepsilon_i = e_1 + \cdots + e_i$. On pose $n = \varepsilon_r = e_1 + \cdots + e_r$. On note $\mathscr{I}$ l'ensemble des parties I de $[\![1, n]\!]$ telles que, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$,

$$\big|\{j \in I \mid \varepsilon_{i-1} < j \leqslant \varepsilon_i\}\big| = f_i.$$

Soit $\mathbb{K}$ un corps et soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une suite croissante $(E_0, \ldots, E_r)$ de sous-espaces tels que $E_0 = \{0\}$, $E_r = E$ et $e_i = \dim E_i/E_{i-1}$ pour $i \in [\![1, r]\!]$. Ainsi E est de dimension n et chaque E_i est de dimension ε_i. On peut construire une suite $(E'_0, \ldots, E'_n)$ strictement croissante de sous-espaces vectoriels de E telle que $E_i = E'_{\varepsilon_i}$ pour chaque $i \in [\![1, r]\!]$ (autrement dit, on peut raffiner le drapeau partiel $(E_0, \ldots, E_r)$ en un drapeau complet $(E'_0, \ldots, E'_n)$). On peut alors considérer les ensembles $\mathscr{C}_I$ de la question 26 relativement à la suite $(E'_0, \ldots, E'_n)$.

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Pour chaque $i \in [\![1, r]\!]$, on a alors

$$\dim(F \cap E_i)/(F \cap E_{i-1}) = \dim(F \cap E'_{\varepsilon_i})/(F \cap E'_{\varepsilon_{i-1}}) = \sum_{j=\varepsilon_{i-1}+1}^{\varepsilon_i} \dim(F \cap E'_j)/(F \cap E'_{j-1}).$$

En particulier, pour $F \in \mathscr{C}_I$, l'égalité $\dim(F \cap E_i)/(F \cap E_{i-1}) = f_i$ a lieu pour chaque $i \in [\![1, r]\!]$ si et seulement si $I \in \mathscr{I}$. Ainsi, l'ensemble des sous-espaces vectoriels F de E tels que $\dim(F \cap E_i)/(F \cap E_{i-1}) = f_i$ pour chaque $i \in [\![1, r]\!]$ est l'union disjointe des $\mathscr{C}_I$ pour $I \in \mathscr{I}$.

Reprenant la notation $n(I)$ introduite dans la question 26 d), nous voyons alors que le polynôme $A_{e,f}(X) = \sum_{I \in \mathscr{I}} X^{n(I)}$ (à coefficients entiers naturels) convient.

b) Le degré du polynôme $A_{e,f}(X)$ est le maximum des $n(I)$ pour $I \in \mathscr{I}$. Ce maximum est atteint pour $I_{\max} = \bigcup_{i=1}^r [\![\varepsilon_i - f_i + 1, \varepsilon_i]\!]$. Notant $k = f_1 + \cdots + f_r$, nous calculons

$$\begin{aligned}
n(I_{\max}) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{f_i} (\varepsilon_i - j + 1) - \frac{k(k+1)}{2} \\
&= \sum_{i=1}^r \varepsilon_i f_i - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{f_i} (j-1) - k/2 - k^2/2 \\
&= \sum_{i=1}^r \varepsilon_i f_i - \sum_{i=1}^r f_i(f_i - 1)/2 - \sum_{i=1}^r f_i/2 - k^2/2 \\
&= \sum_{j=1}^r \varepsilon_j f_j - \sum_{i=1}^r f_i^2/2 - k^2/2 \\
&= \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^j e_i f_j - \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant r} f_i f_j \\
&= \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant r} (e_i - f_i) f_j.
\end{aligned}$$

Le degré de $A_{e,f}(X)$ est ainsi égal à cette dernière expression, ce qu'il fallait démontrer.

28.

a) On pose $n = |\lambda|$, on note E l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$, on appelle u l'endomorphisme nilpotent de E ayant J_λ pour matrice dans la base canonique, et on note λ° le type de $(\operatorname{im} u, u|_{\operatorname{im} u})$; ainsi $(\lambda^\circ)'_i = \lambda'_{i+1}$ pour chaque $i \geqslant 1$ (question 25 a)).

Pour qu'il existe un sous-espace vectoriel F de codimension k, stable par u, tel que $u|_{E/F} = 0$ et $(F, u|_F)$ soit de type μ, il est nécessaire que $k = |\lambda| - |\mu|$ et $\lambda^\circ \subset \mu \subset \lambda$. Dans la suite de la question, nous supposerons être dans ce cas – si on ne l'est pas, il convient de prendre $B^\lambda_{\mu,(k)}(X) = 0$.

Pour $i \geqslant 1$, posons $e_i = \lambda'_i - \lambda'_{i+1}$ et $f_i = \mu'_i - \lambda'_{i+1}$. Prenons r supérieur à l'indice de nilpotence de u, de sorte que $e_i = f_i = 0$ pour $i > r$. Les deux suites $e = (e_1, \dots, e_r)$ et $f = (f_1, \dots, f_r)$ vérifient les hypothèses de la question 27.

Nous munissons l'espace vectoriel $\widetilde{E} = E/\operatorname{im} u$ de la suite croissante $(\widetilde{E}_0, \dots, \widetilde{E}_r)$ de sous-espaces vectoriels, où $\widetilde{E}_i = (\operatorname{im} u + \ker u^i)/\operatorname{im} u$ pour $i \geqslant 0$. D'après la question 25 c) (dont le résultat vaut aussi pour $i = 0$),

$$\begin{aligned}\dim(\widetilde{E}_i/\widetilde{E}_{i-1}) &= \dim((\operatorname{im} u + \ker u^i)/\operatorname{im} u) - \dim((\operatorname{im} u + \ker u^{i-1})/\operatorname{im} u)\\ &= (\lambda'_1 - \lambda'_{i+1}) - (\lambda'_1 - \lambda'_i)\\ &= e_i\end{aligned}$$

pour chaque $i \geqslant 1$.

D'après la question 25 d), un sous-espace F de E est stable par u et vérifie $u|_{E/F} = 0$ et $(F, u|_F)$ est de type μ si et seulement si F contient $\operatorname{im} u$ et

$$\dim(F \cap (\operatorname{im} u + \ker u^i)) - \dim(F \cap (\operatorname{im} u + \ker u^{i-1})) = \mu'_i - \lambda'_{i+1} \tag{†}$$

pour chaque $i \geqslant 1$. Choisir un sous-espace F contenant $\operatorname{im} u$ équivaut à choisir le sous-espace $\widetilde{F} = F/\operatorname{im} u$ de $\widetilde{E}$, et l'équation (†) se traduit par

$$\dim(\widetilde{F} \cap \widetilde{E}_i) - \dim(\widetilde{F} \cap \widetilde{E}_{i-1}) = \mu'_i - \lambda'_{i+1} = f_i$$

pour chaque $i \geqslant 1$.

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$, le nombre de sous-espaces vectoriels $\widetilde{F}$ vérifiant ces conditions est égal à $A_{e,f}(q)$. Le polynôme $B^{\lambda}_{\mu,(k)}(X) = A_{e,f}(X)$ répond donc à la question posée.

b) On procède par récurrence sur la longueur ℓ de κ, la question précédente réglant le cas $\ell = 1$.

On suppose désormais $\ell \geqslant 2$. On pose $k = \kappa_1$ et $\kappa^* = (\kappa_2, \kappa_3, \dots)$; notamment κ^* est une partition de longueur $\ell - 1$ et par récurrence nous pouvons supposer que $B^{\nu}_{\mu,\kappa^*}(X)$ existe. On pose à nouveau $n = |\lambda|$, on note E l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$, et on appelle u l'endomorphisme nilpotent de E dont la matrice dans la base canonique est J_λ.

Nous partitionnons $\mathscr{B}^{\lambda}_{\mu,\kappa}(\mathbb{K})$ selon le type de $(F_1, u|_{F_1})$: pour chaque partition ν de $n-k$, nous définissons $\mathscr{B}^{\lambda}_{\mu,\kappa}(\nu, \mathbb{K})$ comme étant l'ensemble des $(F_0, \dots, F_\ell) \in \mathscr{B}^{\lambda}_{\mu,\kappa}(\mathbb{K})$ tels que $(F_1, u|_{F_1})$ soit de type ν et nous considérons l'application

$$t : \mathscr{B}^{\lambda}_{\mu,\kappa}(\nu, \mathbb{K}) \to \mathscr{B}^{\lambda}_{\nu,(k)}(\mathbb{K}), \quad (F_0, F_1, \dots, F_\ell) \mapsto (F_0, F_1).$$

Fixons ν. Soit F un sous-espace de E stable par u tel que $u|_{E/F} = 0$ et $(F, u|_F)$ soit de type ν. L'application $(E, F_1, F_2, \dots, F_\ell) \mapsto (F_1, F_2, \dots, F_\ell)$ identifie la préimage $t^{-1}(\{(E,F)\})$ de $\{(E,F)\}$ par t à l'ensemble des suites décroissantes $(F_1, F_2, \dots, F_\ell)$ de sous-espaces vectoriels de F stables par u telles que $F_1 = F$, $(F_\ell, u|_{F_\ell})$ soit de type μ, et pour chaque $i \in [\![2, \ell]\!]$, $\dim F_{i-1}/F_i = \kappa_i$ et $u|_{F_{i-1}/F_i} = 0$.

Par construction, il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels $f : F \to \mathbb{K}^{n-k}$ tel que $f \circ (u|_F) \circ f^{-1}$ ait J_ν pour matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}^{n-k}$. Le transport par f^{-1} définit alors une bijection de $\mathscr{B}^{\nu}_{\mu,\kappa^*}(\mathbb{K})$ sur $t^{-1}(\{(E,F)\})$. Ainsi, dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$, le cardinal de $t^{-1}(\{(E,F)\})$ est égal à $B^{\nu}_{\mu,\kappa^*}(q)$.

D'après le principe des bergers, le cardinal de $\mathscr{B}^{\lambda}_{\mu,\kappa}(\nu, \mathbb{F}_q)$ est le produit du cardinal de $\mathscr{B}^{\lambda}_{\nu,(k)}(\mathbb{F}_q)$ par $B^{\nu}_{\mu,\kappa^*}(q)$. On en déduit l'égalité

$$\left|\mathscr{B}^{\lambda}_{\mu,\kappa}(\mathbb{F}_q)\right| = \sum_{\substack{\nu \in \mathscr{P} \\ |\nu| = n-k}} \left|\mathscr{B}^{\lambda}_{\mu,\kappa}(\nu, \mathbb{F}_q)\right| = \sum_{\substack{\nu \in \mathscr{P} \\ |\nu| = n-k}} \left|\mathscr{B}^{\lambda}_{\nu,(k)}(\mathbb{F}_q)\right| B^{\nu}_{\mu,\kappa^*}(q),$$

et il suffit donc de définir
$$B^\lambda_{\mu,\kappa}(X) = \sum_{\nu\in\mathscr{P}} B^\lambda_{\nu,(k)}(X)\, B^\nu_{\mu,\kappa^*}(X)$$
pour répondre à la question.

Détricotant la récurrence, nous obtenons la formule
$$B^\lambda_{\mu,\kappa}(X) = \sum_{(\nu_1,\ldots,\nu_{\ell-1})\in\mathscr{P}^{\ell-1}} B^\lambda_{\nu_1,(\kappa_1)}(X)\, B^{\nu_1}_{\nu_2,(\kappa_2)}(X)\ \cdots\ B^{\nu_{\ell-1}}_{\mu,(\kappa_\ell)}(X)$$
qui montre que notre polynôme $B^\lambda_{\mu,\kappa}(X)$ est bien à coefficients entiers positifs.

c) Nous adoptons les notations de l'énoncé et notons ℓ la longueur de κ.

Supposons que $B^\nu_{\varnothing,\kappa}(X) \neq 0$. Alors pour des raisons de dimension $|\kappa| = |\nu'|$. De plus, il existe une puissance q d'un nombre premier telle que $B^\nu_{\varnothing,\kappa}(q) \neq 0$. Prenons $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ et considérons un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie et un endomorphisme nilpotent u de E tels que (E,u) soit de type ν. Par hypothèse, il existe une suite décroissante $(F_0,\ldots,F_\ell)$ de sous-espaces vectoriels de E stables par u telle que $F_0 = E$, $F_\ell = \{0\}$, et pour chaque $i \in [\![1,\ell]\!]$, $\dim F_{i-1}/F_i = \kappa_i$ et $u|_{F_{i-1}/F_i} = 0$. Ces conditions imposent que $\operatorname{im} u^i \subset F_i$. Or
$$\dim(E/F_i) = \kappa_1 + \cdots + \kappa_i \ \text{ et }\ \dim(E/\operatorname{im} u^i) = \dim(\ker u^i) = \nu'_1 + \cdots + \nu'_i$$
d'après la question 14 b). On en déduit que
$$\kappa_1 + \cdots + \kappa_i \leqslant \nu'_1 + \cdots + \nu'_i,$$
et ceci est vrai pour tout $i \in [\![1,\ell]\!]$, et même pour tout $i \geqslant 1$ puisque κ est de longueur ℓ. Ainsi nécessairement $\kappa \leqslant \nu'$.

Supposons maintenant que $\kappa = \nu'$. Alors chaque inclusion $\operatorname{im} u^i \subset F_i$ est une égalité, ce qui signifie que la seule possibilité pour $(F_0,F_1,\ldots,F_\ell)$ est la suite des images itérées $(E, \operatorname{im} u, \ldots, \operatorname{im} u^\ell)$. Celle-ci remplissant les conditions exigées, nous avons $B^\nu_{\varnothing,\kappa}(q) = 1$. Ceci étant vrai pour tout q, nous concluons que si $\kappa = \nu'$, alors $B^\nu_{\varnothing,\kappa}(X) = 1$.

d) Commençons par le cas où κ n'a qu'une seule part, égale à k. Pour que $B^\lambda_{\mu,(k)}(X)$ ne soit pas nul, il est nécessaire que
$$\lambda^\circ \subset \mu \subset \lambda \ \text{ et }\ k = |\lambda| - |\mu| = |\lambda'| - |\mu'| = \sum_{i\geqslant 1}(\lambda'_i - \mu'_i),$$
où λ° est le type de $(\operatorname{im} u, u|_{\operatorname{im} u})$. Pour $i \geqslant 1$, posons $e_i = \lambda'_i - \lambda'_{i+1}$ et $f_i = \mu'_i - \lambda'_{i+1}$. Les questions 27 et 28 a) nous donnent l'expression suivante :
$$\deg B^\lambda_{\mu,(k)}(X) = \deg A_{e,f}(X) = \sum_{1\leqslant i\leqslant j}(e_i - f_i)f_j = \sum_{1\leqslant i\leqslant j}(\lambda'_i - \mu'_i)(\mu'_j - \lambda'_{j+1})$$

(cette somme ne comporte qu'un nombre fini de termes non nuls). Calculons maintenant :

$$
\begin{aligned}
&d(\lambda) - d(\mu) - d(\kappa') \\
&\quad = \sum_{i\geqslant 1} \frac{\lambda_i'(\lambda_i'-1) - \mu_i'(\mu_i'-1)}{2} - \frac{k(k-1)}{2} \\
&\quad = \frac{1}{2}\sum_{i\geqslant 1}\Big((\lambda_i')^2 - \lambda_i' - (\mu_i')^2 + \mu_i'\Big) - \frac{1}{2}\left(\sum_{i\geqslant 1}\lambda_i' - \sum_{i\geqslant 1}\mu_i'\right)^2 + \frac{k}{2} \\
&\quad = \frac{1}{2}\sum_{i\geqslant 1}\Big((\lambda_i')^2 - (\mu_i')^2\Big) - \frac{1}{2}\left(\sum_{i\geqslant 1}\lambda_i'\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\sum_{i\geqslant 1}\mu_i'\right)^2 + \left(\sum_{i\geqslant 1}\lambda_i'\right)\left(\sum_{i\geqslant 1}\mu_i'\right) \\
&\quad = -\sum_{1\leqslant i<j}\lambda_i'\lambda_j' - \sum_{1\leqslant i\leqslant j}\mu_i'\mu_j' + \sum_{1\leqslant i\leqslant j}\lambda_i'\mu_j' + \sum_{1\leqslant i<j}\mu_i'\lambda_j' \\
&\quad = \sum_{1\leqslant i\leqslant j}\left(-\lambda_i'\lambda_{j+1}' - \mu_i'\mu_j' + \lambda_i'\mu_j' + \mu_i'\lambda_{j+1}'\right) \\
&\quad = \sum_{1\leqslant i\leqslant j}(\lambda_i' - \mu_i')(\mu_j' - \lambda_{j+1}').
\end{aligned}
$$

On obtient ainsi $\deg B^{\lambda}_{\mu,(k)}(X) = d(\lambda) - d(\mu) - d(\kappa')$, comme désiré.
Dans le cas général où κ est de longueur ℓ, on écrit

$$
\begin{aligned}
\deg B^{\lambda}_{\mu,\kappa}(X) &= \deg\left(\sum_{(\nu_1,\dots,\nu_{\ell-1})\in\mathscr{P}^{\ell-1}} B^{\lambda}_{\nu_1,(\kappa_1)}(X)\; B^{\nu_1}_{\nu_2,(\kappa_2)}(X)\;\cdots\; B^{\nu_{\ell-1}}_{\mu,(\kappa_\ell)}(X)\right) \\
&= \max_{(\nu_1,\dots,\nu_{\ell-1})\in\mathscr{P}^{\ell-1}}\Big(\deg B^{\lambda}_{\nu_1,(\kappa_1)}(X) + \cdots + \deg B^{\nu_{\ell-1}}_{\mu,(\kappa_\ell)}(X)\Big).
\end{aligned}
$$

(La dernière égalité devrait en principe n'être qu'une majoration, cependant aucune annulation des termes de plus haut degré n'est à redouter ici, puisque tous les termes de la somme sont des polynômes à coefficients positifs.) Substituant l'expression obtenue précédemment pour le cas particulier où κ n'a qu'une seule part, on parvient à

$$
\begin{aligned}
\deg B^{\lambda}_{\mu,\kappa}(X) &= d(\lambda) - d(\mu) - \frac{\kappa_1(\kappa_1-1)}{2} - \frac{\kappa_2(\kappa_2-1)}{2} - \cdots - \frac{\kappa_\ell(\kappa_\ell-1)}{2} \\
&= d(\lambda) - d(\mu) - d(\kappa').
\end{aligned}
$$

29. Nous commençons par définir des polynômes $C_{\nu,\kappa}(X)$ à coefficients entiers, nuls si $|\nu| \neq |\kappa|$, et tels que pour tous $(\nu,\kappa)\in\mathscr{P}^2$

$$
\sum_{\rho\in\mathscr{P}} B^{\nu}_{\varnothing,\rho}(X)\; C_{\rho,\kappa}(X) = \sum_{\rho\in\mathscr{P}} C_{\nu,\rho}(X)\; B^{\rho}_{\varnothing,\kappa}(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } \nu = \kappa, \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases} \tag{‡}
$$

À cette fin, prenons un entier naturel n et énumérons les éléments de $\mathscr{P}_n$ de façon que si $\lambda \leqslant \mu$, alors λ apparaisse dans la liste avant μ. La matrice $(B^{\nu'}_{\varnothing,\kappa}(X))_{(\nu,\kappa)\in(\mathscr{P}_n)^2}$, à coefficients dans $\mathbb{Z}[X]$, est alors triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale, d'après la question 28 c). Elle est donc inversible et son inverse est à coefficients dans $\mathbb{Z}[X]$. Pour $(\nu,\kappa)\in(\mathscr{P}_n)^2$, nous définissons alors $C_{\nu,\kappa}(X)$ comme le coefficient d'indice (ν,κ') dans cette matrice inverse.

Soit $(\lambda,\mu,\kappa)\in\mathscr{P}^3$ tel que $|\lambda| = |\mu| + |\kappa|$ et soit ℓ la longueur de κ. Soit $\mathbb{K}$ un corps. Nous partitionnons $\mathscr{B}^{\lambda}_{\mu,\kappa}(\mathbb{K})$ selon le type de $(E/F_\ell, u|_{E/F_\ell})$: pour chaque $\nu\in\mathscr{P}$, nous définissons $\mathscr{F}^{\lambda}_{\mu,\kappa}(\nu,\mathbb{K})$ comme étant l'ensemble des $(F_0, \dots, F_\ell) \in \mathscr{B}^\lambda_{\mu,\kappa}(\mathbb{K})$ tels que $(E/F_\ell, u|_{E/F_\ell})$ soit de type ν et nous considérons l'application

$$s : \mathscr{F}^\lambda_{\mu,\kappa}(\nu, \mathbb{K}) \to \mathscr{G}^\lambda_{\mu,\nu}(\mathbb{K}), \quad (F_0, F_1, \dots, F_\ell) \mapsto F_\ell.$$

Fixons une partition ν telle que $\mathscr{G}^\lambda_{\mu,\nu}(\mathbb{K}) \neq \varnothing$; cela impose $|\nu| = |\kappa|$. Soit $F \in \mathscr{G}^\lambda_{\mu,\nu}(\mathbb{K})$. La préimage $s^{-1}(\{F\})$ de $\{F\}$ par s est l'ensemble des suites décroissantes $(F_0, F_1, \dots, F_\ell)$ de sous-espaces vectoriels de E stables par u telles que $F_0 = E$, $F_\ell = F$, et pour chaque $i \in [\![1, \ell]\!]$, $\dim F_{i-1}/F_i = \kappa_i$ et $u|_{F_{i-1}/F_i} = 0$.

Posons $\widetilde{E} = E/F$. Il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels $f : \widetilde{E} \to \mathbb{K}^{|\nu|}$ tel que $f \circ (u|_{\widetilde{E}}) \circ f^{-1}$ ait J_ν pour matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}^{|\nu|}$. Le transport par f^{-1} définit alors une bijection de $\mathscr{B}^\nu_{\varnothing,\kappa}(\mathbb{K})$ sur l'ensemble des suites décroissantes $(\widetilde{F}_0, \widetilde{F}_1, \dots, \widetilde{F}_\ell)$ de sous-espaces vectoriels de $\widetilde{E}$ stables par $u|_{\widetilde{E}}$ telles que $\widetilde{F}_0 = \widetilde{E}$, $\widetilde{F}_\ell = \{0\}$, et pour chaque $i \in [\![1, \ell]\!]$, $\dim \widetilde{F}_{i-1}/\widetilde{F}_i = \kappa_i$ et $u|_{\widetilde{F}_{i-1}/\widetilde{F}_i} = 0$.

On voit ainsi que $s^{-1}(\{F\})$ est en bijection avec $\mathscr{B}^\nu_{\varnothing,\kappa}(\mathbb{K})$. Nous en déduisons, dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$, que le cardinal de $s^{-1}(\{F\})$ est égal à $B^\nu_{\varnothing,\kappa}(q)$. D'après le principe des bergers, le cardinal de $\mathscr{F}^\lambda_{\mu,\kappa}(\nu, \mathbb{F}_q)$ est le produit du cardinal de $\mathscr{G}^\lambda_{\mu,\nu}(\mathbb{F}_q)$ par $B^\nu_{\varnothing,\kappa}(q)$, et donc

$$B^\lambda_{\mu,\kappa}(q) = \left|\mathscr{B}^\lambda_{\mu,\kappa}(q)\right| = \sum_{\nu \in \mathscr{P}} \left|\mathscr{F}^\lambda_{\mu,\kappa}(\nu, \mathbb{F}_q)\right| = \sum_{\nu \in \mathscr{P}} \left|\mathscr{G}^\lambda_{\mu,\nu}(\mathbb{F}_q)\right| B^\nu_{\varnothing,\kappa}(q).$$

Utilisant l'identité (‡), il vient

$$\sum_{\rho \in \mathscr{P}} B^\lambda_{\mu,\rho}(q)\ C_{\rho,\nu}(q) = \sum_{(\rho,\sigma) \in \mathscr{P}^2} \left|\mathscr{G}^\lambda_{\mu,\sigma}(\mathbb{F}_q)\right| B^\sigma_{\varnothing,\rho}(q)\ C_{\rho,\nu}(q) = \left|\mathscr{G}^\lambda_{\mu,\nu}(\mathbb{F}_q)\right|$$

et il suffit donc de définir le polynôme à coefficients entiers

$$G^\lambda_{\mu,\nu}(X) = \sum_{\rho \in \mathscr{P}} B^\lambda_{\mu,\rho}(X)\ C_{\rho,\nu}(X)$$

pour répondre à la question.

30. La matrice $(C_{\nu,\kappa'}(X))_{(\nu,\kappa) \in (\mathscr{P}_n)^2}$ est l'inverse de la matrice $(B^{\nu'}_{\varnothing,\kappa}(X))_{(\nu,\kappa) \in (\mathscr{P}_n)^2}$. Ces deux matrices sont triangulaires inférieures avec des 1 sur la diagonale. Nous allons prouver l'énoncé suivant : si $C_{\nu,\kappa'}(X) \neq 0$, alors $\nu \geqslant \kappa$ et $\deg C_{\nu,\kappa'}(X) \leqslant d(\nu') - d(\kappa')$.

Nous raisonnons par récurrence forte sur $N(\kappa) = \left|\{\sigma \in \mathscr{P}_n \mid \sigma \geqslant \kappa\}\right|$. Supposons que $C_{\nu,\kappa'}(X) \neq 0$. Le cas $\nu = \kappa$ est banal puisqu'alors $C_{\nu,\kappa'}(X) = 1$. Nous nous plaçons donc dans le cas $\nu \neq \kappa$ et rappelons la relation (‡) :

$$\sum_{\rho \in \mathscr{P}_n} C_{\nu,\rho'}(X)\ B^{\rho'}_{\varnothing,\kappa}(X) = 0.$$

Prenant en compte le résultat de la question 28 c), nous obtenons

$$C_{\nu,\kappa'}(X) = -\sum_{\substack{\rho \in \mathscr{P}_n \\ \rho > \kappa}} C_{\nu,\rho'}(X)\ B^{\rho'}_{\varnothing,\kappa}(X).$$

Pour chaque terme de la somme à droite, on a $N(\rho) < N(\kappa)$, ce qui permet d'utiliser l'hypothèse de récurrence. Ainsi :

— Le membre de gauche n'étant pas nul par hypothèse, un terme de la somme à droite doit être non nul : il existe donc un $\rho > \kappa$ tel que $C_{\nu,\rho'}(X) \neq 0$. L'hypothèse de récurrence nous donne $\nu \geqslant \rho$, d'où $\nu > \kappa$.

— Pour chaque $\rho > \kappa$, l'hypothèse de récurrence et la question 28 d) nous donnent

$$\deg\Big(C_{\nu,\rho'}(X)\; B^{\rho'}_{\varnothing,\kappa}(X)\Big) \leqslant d(\nu') - d(\rho') + \deg B^{\rho'}_{\varnothing,\kappa}(X) = d(\nu') - d(\kappa').$$

Nous en déduisons que $\deg C_{\nu,\kappa'}(X) \leqslant d(\nu') - d(\kappa')$.

Pour conclure, il suffit de combiner nos deux estimations

$$\deg B^{\lambda}_{\mu,\kappa}(X) = d(\lambda) - d(\mu) - d(\kappa') \text{ et } \deg C_{\nu,\kappa'}(X) \leqslant d(\nu') - d(\kappa')$$

avec la définition

$$G^{\lambda}_{\mu,\nu}(X) = \sum_{\rho\in\mathscr{P}} B^{\lambda}_{\mu,\rho}(X)\; C_{\rho,\nu}(X).$$

3.3 Rapport sur l'épreuve écrite d'analyse et probabilités

3.3.1 Présentation du sujet.

Le point de départ est la factorisation eulérienne la plus connue :

$$\forall z \in \mathbf{C} \qquad \sin(z) = z \prod_{k\in\mathbf{N}^\star}\left(1 - \frac{z^2}{(k\pi)^2}\right) = z \prod_{k\in\mathbf{N}^\star}\left(1 - \frac{z}{k\pi}\right)\left(1 + \frac{z}{k\pi}\right).$$

Cette formule fut montrée par Euler dans le but d'obtenir la formule $\sum\limits_{k\in\mathbf{N}^\star} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (résolution de ce qui fut appelé problème de Bâle). Cette formule est la généralisation de la factorisation d'un polynôme complexe en produit de polynômes de degré 1. La partie **II** du sujet propose une nouvelle preuve de la formule précédente [1] par passage à la limite, pour $n \to +\infty$, de la formule explicite

$$\sin(z) = z \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{z^2}{(\pi k)^2}\right) \times \frac{1}{2W_{2n}} \int_{-1}^{1} e^{-izx} \cos^{2n}\left(\frac{\pi}{2}x\right) \mathrm{d}x$$

où $(W_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite d'intégrales de type Wallis étudiées dans la partie **I**.

La partie **III** adapte l'idée initiale de Euler pour calculer les valeurs de la fonction ζ sur $2\mathbf{N}^\star$ en exploitant la formule explicite précédente.

Bien que cela ne soit pas abordé dans le sujet, ajoutons quelques commentaires historiques. Depuis l'avènement de la théorie des fonctions holomorphes, il est apparu que ce type de factorisation (factorisation à la Weierstrass) est satisfait pour des fonctions holomorphes ayant une croissance de type exponentiel (cela induit automatiquement un certain comportement des zéros de la fonction via la formule de Jensen). Les factorisations les plus connues sont

$$\forall z \in \mathbf{C} \qquad \sin(\pi z) = \pi z \prod_{n\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}}\left(1 - \frac{z}{n}\right)\mathrm{e}^{\frac{z}{n}} \tag{3.1}$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\mathrm{e}^{\gamma z} \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)\mathrm{e}^{-\frac{z}{n}}$$

où Γ et γ sont respectivement la fonction et la constante d'Euler (voir par exemple [Schwartz, page 412]). Le théorème qui permet de telles factorisations est généralement attribué à Weierstrass (voir [Rudin, théorème 15.9]) ou à Hadamard, voir [Saks-Zygmund, page 332], même si c'est le cadre méromorphe auquel le nom de Hadamard reste attaché.

1. certainement pas la plus courte, voir par exemple [MVT] pour des arguments expéditifs

En parallèle des factorisations eulériennes, se sont développés les premiers théorèmes de Paley-Wiener (début XXème siècle). La transformée de Fourier d'une fonction à support compact $[-a, a]$ est donnée par

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-a}^{a} e^{-ix\xi} f(x)dx$$

et s'avère être holomorphe par rapport à la variable ξ (par exemple si $f \in L^1$) et vérifie une estimation sous-exponentielle :

$$|\widehat{f}(\xi)| \leqslant e^{a|\operatorname{Im}(\xi)|} \int_{-a}^{a} |f(x)|dx.$$

C'est le cadre L^2 qui apparut (dans un premier temps) le plus satisfaisant et qui permet de caractériser les transformées de Fourier de fonctions L^2 à support compact. On consultera [Rudin, Théorème 19.3]. La théorie des distributions tempérées développée par Schwartz montre bien plus tard que le théorème de Paley-Wiener est conséquence de deux théorèmes :

- le théorème de Plancherel (la transformée de Fourier réalise un isomorphisme de L^2 sur lui-même),
- le théorème de Paley-Wiener-Schwartz qui décrit l'espace des transformées de Fourier des distributions à support compact (voir [Hörmander, Theorem 7.3.1]).

Ces aspects sont étudiés dans les parties **IV** et **V** (théorème de Paley-Wiener sur les fonctions $\mathbf{C}^\infty$ à support compact) et dans les parties **VI** et **VII** (dans le cadre des distributions tempérées à support compact). Les questions finales (dans le cadre distributionnel) simplifient légèrement les arguments de [Hörmander, Theorem 7.3.1] lorsqu'il s'agit de prouver que la transformée de Fourier d'une distribution à support compact est effectivement une vraie fonction (et non une distribution tempérée générale), de façon précise on utilise des sommes de Riemann généralisées pour approcher des intégrales sur $\mathbf{R}$ (voir à partir de la question 36.a).

Quelques références bibliographiques :

[Hörmander], Lars Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators III pseudo-differential operators* (1994)

[MTV], Jacques Moisan-Nicolas Tosel-André Vernotte, *Analyse : Suite et séries de fonctions* (1992)

[Rudin], Walter Rudin, *Analyse réelle et complexe* (1998)

[Saks-Zygmund], Stanislaw Saks and Antoni Zygmund, *Analytic functions* (1952)

[Schwartz], Laurent Schwartz, *Analyse IV* (1993)

Remarques générales sur les copies et quelques questions.

Le sujet, divisé en sept parties, est très long et il n'était pas du tout attendu que chaque candidat aborde la totalité du sujet ! L'objectif traditionnel est de trouver un compromis entre un large spectre de connaissances à tester et une progressivité dans le sujet. Ainsi, les très bonnes copies ont abordé les cinq premières parties. Seule une minorité (moins de 10%) des copies sont allés jusqu'à la partie **VI** et une dizaine de copies ont abordé la partie **VII**. Dans la grande majorité (environ 2/3 des copies), les trois premières parties ont été abordées.

Faisons à présent quelques commentaires détaillés sur les quatre premières parties.

La partie **I** est élémentaire et ne nécessite, hormis des arguments d'analyse standard, que la connaissance des formules de Taylor et du théorème de la convergence dominée. Cette partie doit pouvoir être traitée (au moins partiellement) par tout candidat au concours de l'agrégation. Voici quelques écueils remarqués :

- les formules de Taylor sont régulièrement énoncées de manière erronée (question 1b) ;
- la notation de Landau $\sim$ n'est parfois pas comprise (notamment pour la question 2). Par exemple, l'équivalent $\cos(t) \underset{t\to 0}{\sim} 1 - \frac{t^2}{2}$ est vrai mais le terme quadratique ne présente aucun

intérêt car l'équivalent $\cos(t) \underset{t\to 0}{\sim} 1 + t^{2023}$ est tout aussi vrai ! Le symbole $\sim$ n'accorde de l'importance qu'au terme principal contrairement au développement limité $\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3)$;
- pour montrer la stricte positivité d'une intégrale (question 3), l'argument attendu est presque systématiquement le même dans ce type de situation : la fonction sous le signe $\int$ est continue, positive et non identiquement nulle. D'excellentes copies ont donné des preuves plus expéditives dans le cas particulier de l'énoncé :

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-(\pi x)^2/8}\mathrm{d}x \geqslant \int_1^2 x^\alpha e^{-(\pi x)^2/8}\mathrm{d}x \geqslant 1^\alpha e^{-(2\pi)^2/8} > 0,$$

cette question se reproduit à l'identique à la question 5 où l'on demande de vérifier qu'une intégrale de type Wallis, en l'occurrence W_n est, strictement positive. Certaines copies ont dépensé beaucoup d'énergie pour montrer la stricte positivité de W_n par récurrence sur n ;
- les hypothèses d'un théorème d'inversion $\lim \int = \int \lim$ doivent être clairement énumérées et vérifiées au besoin. En l'occurrence la question 4 devait a priori être traitée avec le théorème de la convergence dominée dont la validation des hypothèses a été préparée par les questions précédentes.

La partie **II** fait appel aux connaissances/compétences suivantes : aboutir un calcul (parfois avec pas mal de notations comme dans la question 5), effectuer une récurrence (question 8), majorer une intégrale (question 9a) ou encore (plus délicat) maîtriser la notion de convergence uniforme (pour des fonctions définies sur $\mathbf{R}$ ou sur des parties de $\mathbf{C}$). Voici quelques difficultés rencontrées :
- un calcul de dérivée d'une fonction définie comme composée de fonctions usuelles doit être effectué sans erreur (en l'occurrence la dérivée ρ_n'' a parfois posé des difficultés à la question 6) ;
- certaines copies confondent les inégalités strictes $>$ et larges $\geqslant$ voire contiennent des inégalités entre nombres complexes (question 7.a). S'agissant des nombres complexes, l'égalité $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$ pour tout $z \in \mathbf{C}$ est souvent utile ;
- voici une difficulté trop souvent rencontrée et déjà signalée dans un rapport précédent : lorsque l'on veut justifier l'existence d'une intégrale impropre $\int_{\mathbf{R}} f_n(x)\mathrm{d}x$ (comme à la question 7.a), il est totalement illégitime d'essayer de montrer l'inégalité triangulaire

$$\left|\int_{\mathbf{R}} f_n(x)\right| \leqslant \int_{\mathbf{R}} |f_n(x)|\mathrm{d}x$$

puisque justement l'intégrale $\int_{\mathbf{R}} f_n(x)\mathrm{d}x$ n'a pas encore de sens. La bonne démarche est d'abord de justifier l'intégrabilité de f_n, c'est-à-dire la finitude de $\int_{\mathbf{R}} |f_n(x)|\mathrm{d}x$. Puis, si l'on en a besoin, alors l'inégalité triangulaire ci-dessus est une conséquence de l'intégrabilité de f_n ;
- beaucoup de copies ont justifié (sans démonstration) la formule algébrique demandée à la question 7.b à partir des propriétés de la transformation de Fourier appliquée à la relation différentielle de la question 6. Comme la transformation de Fourier dépend de la variable complexe (donc a priori non standard), il était plutôt attendu de refaire une preuve par intégration par parties ou de traiter le cas de la variable réel à étendre ensuite par principe du prolongement holomorphe ;
- parfois la convergence uniforme est confondue avec la convergence simple (questions 9.c, 9.d et 10). De plus, rappelons que la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbf{R}$ n'implique pas la convergence uniforme sur $\mathbf{R}$ (question 10) ;
- s'agissant de la question 10, il s'agit d'une question plus ou moins classique : si (P_n) est une suite de polynômes vérifiant $\deg(P_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ alors (P_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbf{R}$. On peut largement s'en sortir sans connaître cet exercice et traiter la question directement dans le cas particulier de l'énoncé (voir corrigé ci-après).

La partie **II**, assez courte, fait essentiellement appel aux connaissances/compétences suivantes : développement limités/développement en série entière, dérivation ou holomorphie sous $\int$, interversion $\sum\int = \int\sum$ et interversion $\sum\sum = \sum\sum$ (dans le cas positif). Faisons deux remarques sur les copies :

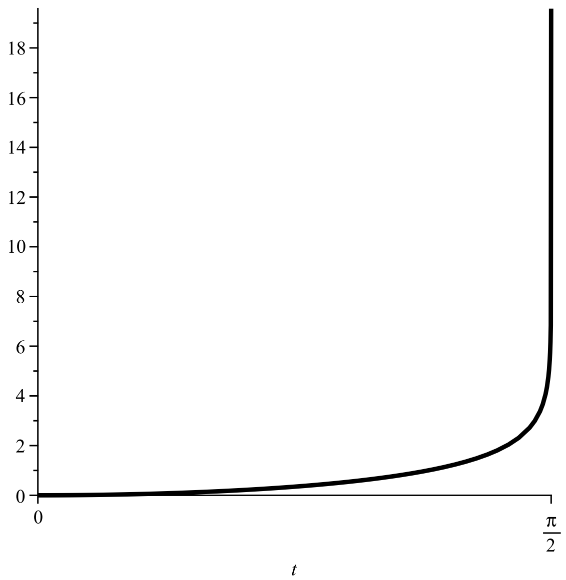
- dans la question 12, on demande de montrer que la fonction $\widehat{\rho_n}$ ne s'annule pas sur $]-\pi, \pi[$ sachant que l'on a l'identité $\sin(\xi) = P_n(\xi)\widehat{\rho_n}(\xi)$. Un nombre très important de copies ont assuré que la fonction sin ne s'annule pas sur $]-\pi, \pi[$;
- dans la question 13.b, l'interversion $\sum\int = \int\sum$ est peu justifiée de manière complète. De façon générale, on conseille de lister de façon très claire les hypothèses à valider dans un théorème d'interversion.

La partie IV sert de prétexte à manipuler les espaces de fonctions qui vont intervenir par la suite. Bien que plus courte, elle fait appel à des concepts moins élémentaires (bien que attendus comme maîtrisés par des agrégés) : définition d'une norme, continuité d'une application linéaire, représentation intégrale des coefficients d'une fonction développable en série entière (c'est l'indication de la question 22). Dans cette partie, signalons seulement que le principe des zéros isolés (ou de l'unicité d'un prolongement holomorphe) nécessite la connexité du domaine. Même si cette hypothèse de connexité est souvent évidente, elle doit être rappelée (questions 19 et 20.b).

Nous ne commentons pas les dernières parties qui furent assez peu traitées et dont le niveau est sensiblement plus élevé.

3.3.2 Correction de l'épreuve écrite d'Analyse et Probabilités

1.a)



1.b) Méthode avec une formule de Taylor. Étant donné la présence du terme t^2, nous sommes invités à tenter une formule à l'ordre 2 : la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ à valeurs réelles si bien que la formule de Taylor-Lagrange s'écrit

$$\exists \theta_t \in]0, t[\qquad f(t) = f(0) + tf'(0) + \frac{t^2}{2} f''(\theta_t).$$

Or on a $f(0) = 0$, puis $f'(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$, donc $f'(0) = 0$ et $f''(t) = \frac{1}{\cos^2(t)} \geqslant 1$. Si bien que $f(t) \geqslant \frac{t^2}{2}$.

Méthode par prolongement continu. Plus intuitif mais plus technique à rédiger que la précédente approche. On distingue selon que $t \in [0,1]$ ou $t \in]1, \frac{\pi}{2}]$. Dans le second cas, on a par décroissance de cos :

$$\forall t \in \left]1, \frac{\pi}{2}\right[\qquad -\ln(\cos(t)) \geqslant -\ln(\cos(1)) > 0 \qquad \text{car } \cos(1) \in]0,1[.$$

Si bien que l'on a

$$-\ln(\cos(t)) \geqslant \frac{-\ln(\cos(1))}{t^2} \times t^2 \geqslant M_1 t^2 \qquad \text{avec} \qquad M_1 = -\frac{4}{\pi^2}\ln(\cos(1)) > 0.$$

Traitons la zone $t \in]0,1]$: on a le développement limité $\ln(\cos(t)) = \ln(1 - t^2/2 + o(t^2)) = -\frac{t^2}{2} + o(t^2)$ en $t = 0$. Cela implique $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\ln(\cos(t))}{t^2} = \frac{-1}{2} < 0$. Introduisons la fonction $g : [0,1] \to \mathbf{R}$ par

$$g(0) = \frac{1}{2} \qquad \forall t \in]0,1] \qquad g(t) = -\frac{\ln(\cos(t))}{t^2}.$$

Par ce qui précède, g est continue sur $[0,1]$ et est strictement positive. Par conséquent, son minimum que l'on note M_2 est strictement positif.

Si on note $M = \min(M_1, M_2)$, on a bien obtenu $-\ln(\cos(t)) \geqslant Mt^2$.

Troisième méthode. (variante de la première : on effectue une double intégration au lieu d'appliquer une formule de Taylor). Posons $f(t) = -\ln(\cos(t))$ si bien que $f'(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$ et $f''(t) = \frac{1}{\cos^2(t)}$. On a $f''(t) \geqslant 1$. Par intégration entre 0 et t et sachant que $f'(0) = 0$, on a $f'(t) \geqslant t$ et une nouvelle intégration donne $f(t) \geqslant \frac{t^2}{2}$.

Quatrième méthode. On a

$$-\ln(\cos(t)) = \int_0^t \frac{\sin(u)}{\cos(u)}\mathrm{d}u \geqslant \int_0^t \sin(u)\mathrm{d}u.$$

Or l'inégalité de concavité $\sin(u) \geqslant \frac{2}{\pi}u$ est bien connue pour tout $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On a donc

$$-\ln(\cos(t)) \geqslant \int_0^t \frac{2}{\pi}u\mathrm{d}u = \frac{t^2}{\pi}.$$

2. Pour n assez grand, on a $\frac{y}{\sqrt{n}} \in]0, \frac{\pi}{2}[$ si bien que $\cos(y/\sqrt{n}) > 0$. On peut passer au logarithme et effectuer un développement limité :

$$n \ln \cos(y/\sqrt{n}) = n \ln\left(1 - \frac{y^2}{2n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-y^2}{2}.$$

On notera que $\frac{-y^2}{2} \neq 0$. L'équivalent précédent est indépendant de n, c'est donc une limite et l'on peut composer par l'exponentielle la limite pour obtenir

$$\lim_{n\to+\infty} \cos^n\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right) = e^{-y^2/2}.$$

3. La fonction $h : x \in [0,+\infty[\mapsto x^\alpha e^{-(\pi x)^2/8}$ est continue. Donc le seul problème d'intégration se situe en $+\infty$. Or, par croissances comparées, on a $x^\alpha e^{-(\pi x)^2/8} = \mathcal{O}(1/x^2)$ au voisinage de $+\infty$. Comme la fonction comparée $\frac{1}{x^2}$ est positive et intégrable au voisinage de $+\infty$, on obtient l'intégrabilité de h.

Comme $h \geqslant 0$ on a $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$. Voici trois arguments pour la stricte positivité :

- comme h est continue, positive et n'est pas identiquement nulle, son intégrale $I(\alpha)$ est strictement positive ;

- comme h est mesurable et positive, on déduit que la nullité de son intégrale implique que $h(x) = 0$ pour presque tout $x \geqslant 0$ (au sens de la théorie de Lebesgue). Cela est clairement faux puisque $h(x) > 0$ pour tout $x > 0$. Ainsi, l'intégrale de h est strictement positive ;
- on peut directement minorer par des arguments de positivité et monotonie :

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-(\pi x)^2/8} \mathrm{d}x \geqslant \int_1^2 x^\alpha e^{-(\pi x)^2/8} \mathrm{d}x \geqslant 1^\alpha e^{-(2\pi)^2/8} = e^{-\pi^2/2} > 0.$$

4. Il s'agit d'appliquer convenablement le théorème de la convergence dominée en exploitant les deux questions précédentes. Posons

$$g_n(x) = \begin{cases} x^\alpha \cos^n\left(\frac{\pi x}{2\sqrt{n}}\right) & \text{si } x \in]0, \sqrt{n}], \\ 0 & \text{si } x > \sqrt{n}. \end{cases}$$

L'intégrale étudiée est $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(x)\mathrm{d}x$ où les fonctions g_n sont manifestement positives et mesurables (et mêmes continues) sur $]0, +\infty[$. Validons les hypothèses du théorème de la convergence dominée :

• pour tout $x > 0$ fixé, pour n assez grand, on a $x \in]0, \sqrt{n}[$ et donc $g_n(x) = x^\alpha \cos^n\left(\frac{\pi x}{2\sqrt{n}}\right)$. La question précédente assure donc que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = x^\alpha e^{-(\pi x)^2/8}$;

• utilisons la première question pour obtenir une domination intégrable :

$$0 \leqslant g_n(x) = x^\alpha \exp\left(n \ln\left(\cos\left(\frac{\pi x}{2\sqrt{n}}\right)\right)\right) \leqslant x^\alpha \exp\left(-M\frac{\pi^2 x^2}{4}\right)$$

qui est bien intégrable (par exemple car $\mathcal{O}(1/x^2)$ en $+\infty$).

Le théorème de la convergence dominée montre donc que l'on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} g_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-(\pi x)^2/8} \mathrm{d}x = I(\alpha).$$

5. Le nombre $W_n = \displaystyle\int_0^1 \cos^n\left(\frac{\pi x}{2}\right)\mathrm{d}x$ est strictement positif par le même argument employé à la question 3 : intégrale d'une fonction continue positive et non identiquement nulle.

Étudions $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha \cos^n\left(\frac{\pi x}{2}\right) \mathrm{d}x$. Vu la question précédente, il est naturel d'effectuer un changement de variable. Cette intégrale est en fait égale à

$$\int_0^1 x^\alpha \cos^n\left(\frac{\pi x}{2}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{n^{(1+\alpha)/2}} \int_0^{\sqrt{n}} x^\alpha \cos^n\left(\frac{\pi x}{2\sqrt{n}}\right) \mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{I(\alpha)}{n^{(1+\alpha)/2}}.$$

En spécialisant pour $\alpha = 0$, on reconnaît W_n, on obtient finalement par division

$$\frac{1}{W_n} \int_0^1 x^\alpha \cos^n\left(\frac{\pi x}{2}\right) \mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{I(\alpha) n^{1/2}}{I(0) n^{(1+\alpha)/2}} = \frac{I(\alpha)}{I(0) n^{\alpha/2}}.$$

6. On calcule ρ_n'' :

$$\rho_n'(x) = \frac{1}{2W_{2n}} 2n \times \left(-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)\cos^{2n-1}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \tag{3.2}$$

$$= \frac{-n\pi}{2W_{2n}}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos^{2n-1}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \tag{3.3}$$

$$\rho_n''(x) = \frac{-n\pi^2}{4W_{2n}}\cos^{2n}\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \frac{n\pi^2}{4W_{2n}}\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \times (2n-1)\cos^{2n-2}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \tag{3.4}$$

$$\rho_n''(x) = \frac{-n\pi^2}{4W_{2n}}\cos^{2n}\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \frac{n\pi^2}{4W_{2n}}\left(1-\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) \times (2n-1)\cos^{2n-2}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \tag{3.5}$$

$$\frac{1}{n\pi^2}\rho_n''(x) = \frac{1}{4W_{2n}}\left(-2n\cos^{2n}\left(\frac{\pi x}{2}\right) + (2n-1)\cos^{2n-2}\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) \tag{3.6}$$

$$\frac{1}{(n\pi)^2}\rho_n''(x) = -\rho_n(x) + \frac{2n-1}{4nW_{2n}}\cos^{2n-2}\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

Finalement, on trouve

$$\rho_n(x) + \frac{1}{(n\pi)^2}\rho_n''(x) = \underbrace{\frac{2n-1}{2n}\frac{W_{2n-2}}{W_{2n}}}_{=\beta_n}\rho_{n-1}(x).$$

7.a) On a $\rho_n(z) = \int_{-1}^{1} e^{-izx}\rho_n(x)\mathrm{d}x$. Or la fonction $x \mapsto e^{-izx}\rho_n(x)$ est continue donc intégrable sur tout segment. La majoration est triviale :

$$\forall \xi \in \mathbf{R} \qquad |\widehat{\rho_n}(\xi)| \leqslant \int_{-1}^{1}\rho_n(x)\mathrm{d}x = 1.$$

7.b) On multiplie la formule précédente par e^{-izx} et l'on intègre sur $]-1,1[$:

$$\int_{-1}^{1} e^{-izx}\rho_n(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{(\pi n)^2}\int_{-1}^{1} e^{-izx}\rho_n''(x)\mathrm{d}x = \beta_n\int_{-1}^{1} e^{-izx}\rho_{n-1}(x)\mathrm{d}x. \tag{3.7}$$

Il s'agit de travailler sur l'intégrale faisant intervenir ρ_n''. L'idée est de faire une (double) intégration par parties pour se ramener à $e^{-izx}\rho_n(x)$:

$$\int_{-1}^{1} e^{-izx}\rho_n''(x)\mathrm{d}x = \left[e^{-izx}\rho_n'(x)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} -ize^{-izx}\rho_n'(x)\mathrm{d}x.$$

D'après le calcul de ρ_n' fait à la question précédente, le crochet s'annule car $n \geqslant 1$. On peut alors continuer une seconde intégration par parties :

$$\int_{-1}^{1} e^{-izx}\rho_n''(x)\mathrm{d}x = iz\int_{-1}^{1} e^{-izx}\rho_n'(x)\mathrm{d}x \tag{3.8}$$

$$= iz\left[e^{-izx}\rho_n(x)\right]_{-1}^{1} - iz\int_{-1}^{1} -ize^{-izx}\rho_n(x)\mathrm{d}x \tag{3.9}$$

$$= 0 - z^2\int_{-1}^{1} e^{-izx}\rho_n(x)\mathrm{d}x.$$

En injectant cette formule dans (3.7), on obtient la conclusion (et se rappelant que ρ_n est à support dans $[-1,1]$, ce qui permet d'écrire les intégrales sur $\mathbf{R}$).

7.c) Pour $z = 0$, on obtient $1 \times \int_{\mathbf{R}}\rho_n(x)\mathrm{d}x = \beta_n\int_{\mathbf{R}}\rho_{n-1}(x)\mathrm{d}x$, c'est-à-dire $1 = \beta_n$.

Remarque : vu la formule $\beta_n = \frac{2n-1}{2n}\frac{W_{2n-2}}{W_{2n}}$, on retrouve une formule de récurrence qui relie les intégrales de Wallis.

8. Il s'agit évidemment de faire une récurrence sur $n \in \mathbf{N}^\star$: notons $H(n)$ l'assertion selon laquelle la formule est valide au rang n.

• preuve de $H(1)$: on veut montrer la formule

$$\sin(z) = z\left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right)\int_{\mathbf{R}} e^{-izx}\rho_1(x)\mathrm{d}x.$$

D'après les deux précédentes questions, il suffit de prouver

$$\sin(z) = z\int_{-1}^{1} e^{-izx}\rho_0(x)\mathrm{d}x.$$

Or $\rho_0(x) = \frac{1}{2W_0} = \frac{1}{2}$ sur $]-1,1[$. On a donc pour $z \neq 0$:

$$\int_{-1}^{1} e^{-izx}\frac{1}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{-iz}e^{-izx}\right]_{-1}^{1} = \frac{e^{-iz}-e^{iz}}{-2iz} = \frac{\sin(z)}{z}.$$

Cela résout la question pour $z \neq 0$. La formule est par ailleurs triviale pour $z = 0$.

• $H(n) \Rightarrow H(n+1)$. On part de la formule

$$\sin(z) = P_n(z)\widehat{\rho_n}(z). \tag{3.10}$$

On veut démontrer que le membre droit est aussi égal à la même formule en remplaçant n par $n+1$. Or la question précédente assure que

$$\widehat{\rho_n}(z) = \left(1 - \frac{z^2}{(\pi(n+1))^2}\right)\widehat{\rho_{n+1}}(z).$$

En injectant cette formule dans (3.10), on reconnaît $P_{n+1}(z)\widehat{\rho_{n+1}}(z)$ et l'on conclut.

9.a) Un développement en série entière et une inégalité triangulaire donnent :

$$|e^{izx}-1| = \left|\sum_{k\geqslant 1}\frac{(izx)^k}{k!}\right| \leqslant \sum_{k\geqslant 1}\frac{|z|^k|x|^k}{k!} \leqslant |x|\sum_{k\geqslant 1}\frac{|z|^k}{k!} = |x|(e^{|z|}-1).$$

9.b) On majore

$$\begin{aligned}
|\widehat{\rho}_n(z) - 1| &= \left|\int_{\mathbf{R}} e^{-izx}\rho_n(x)\mathrm{d}x - 1\right| && (3.11)\\
&= \left|\int_{-1}^{1}(e^{-izx}-1)\rho_n(x)\mathrm{d}x\right| && (3.12)\\
&\leqslant \int_{-1}^{1}|e^{izx}-1|\rho_n(x)\mathrm{d}x && (3.13)\\
&\leqslant \int_{-1}^{1}|x|(e^{|z|}-1)\rho_n(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

On finit avec un argument par parité :

$$(e^{|z|}-1)\int_{-1}^{1}|x|\rho_n(x)\mathrm{d}x = 2(e^{|z|}-1)\int_{0}^{1}x\rho_n(x)\mathrm{d}x.$$

9.c) Vu la question précédente, il suffit de prouver que l'on a

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{|z|\leqslant K} 2(e^{|z|}-1)\int_0^1 x\rho_n(x)\mathrm{d}x = 0$$

ou encore

$$2(e^K-1)\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x\rho_n(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Vu la définition de ρ_n et la question 5, on a

$$2\int_0^1 x\rho_n(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{W_{2n}}\int_0^1 x\cos^{2n}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{I(1)}{I(0)\sqrt{2n}} \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

9.d) Formellement (sans interrogation sur la légitimité du quotient), on a $P_n(z) = \frac{\sin(z)}{\widehat{\rho_n}(z)}$. Il est donc très raisonnable de conjecturer que (P_n) converge uniformément sur tout compact vers la fonction sin. Voici deux méthodes différentes selon que l'on attaque le terme $\sin(z)$ ou le terme $P_n(z)$.

Méthode 1. D'après l'avant-dernière question, on a pour tout $z \in \mathbf{C}$:

$$|\sin(z) - P_n(z)| = |\widehat{\rho_n}(z) - 1| \times |P_n(z)| \leqslant 2|P_n(z)|(e^{|z|}-1)\int_0^1 x\rho_n(x)\mathrm{d}x.$$

Pour appliquer la même argumentation que celle de la question précédente, il suffirait de majorer $|P_n(z)|$ indépendamment de n :

$$|P_n(z)| \leqslant |z|\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{|z|^2}{(\pi k)^2}\right).$$

La majoration d'un produit de termes qui tend vers 1 se traite classiquement avec l'inégalité de convexité $1+t\leqslant e^t$ valide pour tout $t\in\mathbf{R}$. Si bien que l'on arrive à

$$|P_n(z)| \leqslant |z|\exp\left(\frac{|z|^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^2}\right).$$

La série de Riemann $\sum\frac{1}{k^2}$ est convergente, on note S sa somme (la valeur exacte n'a pas d'importance), si bien que l'on a

$$|P_n(z)| \leqslant |z|e^{\frac{S|z|^2}{\pi^2}}.$$

On a donc pour tout $z\in\mathbf{C}$

$$|\sin(z) - P_n(z)| \leqslant 2(e^{|z|}-1)|z|e^{\frac{S|z|^2}{\pi^2}}\int_0^1 x\rho_n(x)\mathrm{d}x.$$

On peut alors reprendre exactement le même argument que celui de la question précédente en remplaçant $2(e^K-1)$ par $2(e^K-1)Ke^{\frac{SK^2}{\pi^2}}$.

Méthode 2. Pourvu que $\widehat{\rho_n}(z)\neq 0$, on écrit que

$$|\sin(z)-P_n(z)| = |\sin(z)|\left|1-\frac{1}{\widehat{\rho_n}(z)}\right| = |\sin(z)|\left|\frac{1-\widehat{\rho_n}(z)}{\widehat{\rho_n}(z)}\right|.$$

Or la question 9.c montre que $(\widehat{\rho_n})$ converge uniformément vers 1 sur le disque fermé $\{z\in\mathbf{C}, |z|\leqslant K\}$. Par conséquent, si n est assez grand, on a $\sup_{z\in K}|\widehat{\rho_n}(z)-1|\leqslant\frac{1}{3}$ et donc

$$\inf_{z\in K}|\widehat{\rho_n}(z)| \geqslant \frac{2}{3}.$$

Posons alors $M = \sup_{|z| \leqslant K} |\sin(z)|$. On obtient pour n assez grand

$$\sup_{z \in K} |\sin(z) - P_n(z)| \leqslant \frac{3M}{2} \sup_{z \in K} |\widehat{\rho_n}(z) - 1| \xrightarrow{n \to +\infty} 0.$$

10. Voici deux méthodes. La réponse est NON.

Méthode 1. En effet, (P_n) est une suite de fonctions polynomiales. Si elle convergeait uniformément sur $\mathbf{R}$ vers une fonction f, alors on aurait

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in \mathbf{R}} |P_n(x) - f(x)| = 0.$$

Et en particulier, en majorant $|P_n(x) - P_{n+1}(x)| \leqslant |P_n(x) - f(x)| + |P_{n+1}(x) - f(x)|$:

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in \mathbf{R}} |P_n(x) - P_{n+1}(x)| = 0.$$

Or $\deg(P_n) = 1 + 2n$ et $\deg(P_{n+1}) = 1 + 2(n+1) = 3 + 2n$. Comme P_n et P_{n+1} sont de degrés différents, on a $\deg(P_n - P_{n+1}) = \max(\deg(P_n), \deg(P_{n+1})) = 3 + 2n$ et donc forcément

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |P_n(x) - P_{n+1}(x)| = +\infty.$$

Contradiction.

Méthode 2. La question précédente montre que la seule limite uniforme possible est la fonction sin. Il suffit donc de prouver que $\sup_{z \in \mathbf{R}} |P_n(z) - \sin(z)|$ ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$. Or P_n est un polynôme de degré $1 + 2n$, donc la fonction polynomiale $x \in \mathbf{R} \mapsto P_n(x)$ n'est pas bornée. Il existe donc $x_n \in \mathbf{R}$ tel que $|P_n(x_n)| > 2$. Cela implique

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |P_n(x) - \sin(x)| \geqslant |P_n(x_n) - \sin(x_n)| > 2 - 1 = 1.$$

Il n'y a donc pas convergence uniforme vers sin.

Méthode 3 (directe). Comme avec la méthode précédente, on va prouver que $\sup_{z \in \mathbf{R}} |P_n(z) - \sin(z)|$ ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$. On écrit

$$\sup_{z \in \mathbf{R}} |P_n(z) - \sin(z)| \geqslant \sup_{\ell \in \mathbf{N}} |P_n(\ell\pi)|.$$

Si on choisit ℓ suffisamment grand de sorte que $\frac{\ell^2}{n^2} > 1$ (c'est-à-dire $\ell > n$) alors on a

$$|P_n(\ell\pi)| = \ell\pi \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\ell^2}{k^2} - 1 \right) \geqslant \ell\pi \left(\frac{\ell^2}{n^2} - 1 \right)^n.$$

Un choix sympathique est $\ell = 2n$ si bien que

$$|P_n(2n\pi)| \geqslant 2n\pi \times 3^n \xrightarrow{n \to +\infty} +\infty.$$

Un choix encore plus simple serait $\ell = n!$ si bien que

$$|P_n(n!\pi)| = n!\pi \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{n!^2}{k^2} - 1 \right) \in \pi\mathbf{N}^\star.$$

Donc $|P_n(n!\pi) - \sin(n!\pi)|$ ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$.

11.a) Supposons que la suite de fonctions $(\widehat{\rho_n})$ soit uniformément bornée sur A. D'après les questions 7b et 7c, on a pour tout $z \in \mathbf{C}\backslash\pi\mathbf{Z}$

$$|\widehat{\rho_n}(z)| = |\widehat{\rho_{n-1}}(z)| \times \frac{1}{\left|1 - \frac{z^2}{(\pi n)^2}\right|} \leqslant \frac{C}{\left|1 - \frac{z^2}{(\pi n)^2}\right|}.$$

Par continuité, l'inégalité précédente est valide pour tout $z \in \mathbf{C}\backslash\{\pi n\}$. Si l'on fait parcourir $z \in A$ avec $|z| \to +\infty$ (remarquons que l'on évite le point fixe πn), alors $\left|1 - \frac{z^2}{(\pi n)^2}\right|$ tend vers $+\infty$. Finalement, on obtient $\lim\limits_{\substack{|z|\to+\infty \\ z\in A}} |\widehat{\rho_n}(z)| = 0$.

11.b) En particulier, si $(\widehat{\rho_n})$ convergeait uniformément sur A, alors la seule limite uniforme possible serait la fonction constante égale à 1 (en effet, la question 9.c assure en particulier que la limite simple de $(\widehat{\rho_n})$ est la fonction constante égale à 1). Supposons donc que $(\widehat{\rho_n})$ converge uniformément vers 1 :

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{z\in A} |1 - \widehat{\rho_n}| = 0.$$

L'inégalité $|\widehat{\rho_n}| \leqslant 1 + |1 - \widehat{\rho_n}|$ montrerait que $(\widehat{\rho_n})$ est uniformément bornée sur A. D'après la question précédente, on a $\lim\limits_{\substack{|z|\to+\infty \\ z\in A}} |\widehat{\rho_n}(z)| = 0$ pour tout $n \geqslant 2$. Cela implique clairement que la borne supérieure $\sup\limits_{z\in A} |1 - \widehat{\rho_n}|$ serait supérieure ou égale à 1. Contradiction.

Remarque : voici comment voir les choses avec un peu plus de hauteur. Les fonctions $\widehat{\rho_n}$ définies sur A appartiennent à l'ensemble, qu'on note abusivement $c_0(A)$, des fonctions de A qui ont une limite nulle en l'infini (dans A). Il est connu que $c_0(A)$ est un fermé de $\ell^\infty(A)$ (espace des fonctions bornées sur A). Donc vu que $(\widehat{\rho_n})$ ne peut tendre que vers 1 (car la convergence uniforme implique la convergence simple), on a une contradiction manifeste car $1 \notin c_0(A)$.

12. Supposons par l'absurde que $\widehat{\rho_n}$ s'annule en un point $\xi \in]-\pi, \pi[$. La formule de factorisation montre alors que $\sin(\xi) = 0$. Forcément $\xi = 0$. Or $\widehat{\rho_n}(0) = \displaystyle\int_{\mathbf{R}} \rho_n(x)\mathrm{d}x = 1 \neq 0$.

13.a) On développe :

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\xi^2}{(k\pi)^2}\right) = 1 - \frac{\xi^2}{\pi^2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right) + \mathcal{O}(\xi^4).$$

En multipliant par ξ, on trouve immédiatement :

$$a_0 = 0 \qquad b_n = 1 \qquad c_n = 0 \qquad d_n = \frac{-1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}.$$

13.b) On peut s'en sortir en utilisant le théorème de régularité $\mathcal{C}^3$ sous le signe $\int$, mais il est plus simple d'obtenir directement un développement en série entière (comme suggéré dans l'indication). On souhaite montrer l'interversion :

$$\widehat{\rho}_n(\xi) = \int_{-1}^{1} e^{-ix\xi}\rho_n(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\sum_{\ell\in\mathbf{N}} \frac{(-ix\xi)^\ell}{\ell!}\rho_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{\ell\in\mathbf{N}} \xi^\ell \int_{-1}^{1} \frac{(-ix)^\ell}{\ell!}\rho_n(x)\mathrm{d}x.$$

Pour cela, il suffit d'invoquer la continuité des fonctions $x \mapsto \frac{(-ix)^\ell}{\ell!}\rho_n(x)$, la compacité de $[-1,1]$ et enfin la convergence normale (et donc uniforme) :

$$\sum_{\ell\in\mathbf{N}} \sup_{x\in[-1,1]} \left|\frac{(-ix\xi)^\ell}{\ell!}\rho_n(x)\right| = \underbrace{\left(\sup_{x\in[-1,1]} \rho_n(x)\right)}_{\text{est fini}} \times \underbrace{\sum_{\ell\in\mathbf{N}} \frac{|\xi|^\ell}{\ell!}}_{\text{est fini et vaut } e^{|\xi|}}.$$

On a donc obtenu que ρ_n est développable en série entière (de rayon infini car l'interversion est valide pour tout $\xi \in \mathbf{R}$). Le développement limité à l'ordre 3 est

$$\widehat{\rho_n}(\xi) = \underbrace{\int_{-1}^{1} \rho_n(x)\mathrm{d}x}_{=1} - i\xi \int_{-1}^{1} x\rho_n(x)\mathrm{d}x - \frac{\xi^2}{2}\int_{-1}^{1} x^2\rho_n(x)\mathrm{d}x + \frac{i\xi^3}{6}\int_{-1}^{1} x^3\rho_n(x)\mathrm{d}x + o(\xi^3).$$

les coefficients de ξ et ξ^3 valent 0 par imparité. De même par parité, le coefficient de ξ^2 est $-\displaystyle\int_0^1 x^2\rho_n(x)\mathrm{d}x$.

13.c) On a au voisinage de $\xi = 0$:

$$\begin{aligned} P_n(\xi)\widehat{\rho_n}(\xi) &= \xi\left(1 - \frac{\xi^2}{\pi^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right) + \xi^2\varepsilon_n(\xi)\right)\left(1 - \xi^2\int_0^1 x^2\rho_n(x)\mathrm{d}(x) + \xi^3\sigma_n(\xi)\right) \qquad (3.14)\\ &= \xi\left(1 - \xi^2\left(\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} + \int_0^1 x^2\rho_n(x)\mathrm{d}x\right) + o(\xi^2)\right). \end{aligned}$$

Or nous sommes censés retrouver le développement limité de $\sin(\xi) = \xi - \frac{\xi^3}{6} + o(\xi^4)$. Par unicité des coefficients d'un développement limité, on a

$$\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} + \int_0^1 x^2\rho_n(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{6}.$$

D'après la question 5 avec $\alpha = 2$, on peut conclure que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Remarque : on peut tester la cohérence de cette formule en examinant le reste

$$\int_0^1 x^2\rho_n(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi^2}\sum_{k>n}\frac{1}{k^2}.$$

La question 5 montre que le membre gauche équivaut à $\frac{I(2)}{I(0)n}$. Cela est bien cohérent avec l'équivalent classique des restes de séries de Riemann.

14. Il s'agit de prendre la « dérivée logarithmique » de la formule de factorisation du sinus : si on considère n fonctions dérivables $f_1, \dots, f_n$ qui ne s'annulent pas sur un ouvert, alors on a

$$\frac{(f_1\dots f_n)'}{f_1\dots f_n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{f_k'}{f_k}.$$

Dans le cas de la factorisation du sinus $\sin(\xi) = \widehat{\rho_n}(\xi)\xi\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{\xi^2}{(k\pi)^2}\right)$, cela donne

$$\forall \xi \in]-\pi, \pi[\setminus\{0\} \qquad \frac{\cos(\xi)}{\sin(\xi)} = \frac{1}{\xi} + \frac{\widehat{\rho_n}'(\xi)}{\widehat{\rho_n}(\xi)} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{-2\xi}{(\pi k)^2}}{1 - \frac{\xi^2}{(\pi k)^2}}.$$

Il s'agit maintenant de développer la série géométrique $\frac{1}{1-\frac{\xi^2}{(\pi k)^2}}$ de raison $\frac{\xi^2}{(\pi k)^2} \in [0, 1[$:

$$\frac{\cos(\xi)}{\sin(\xi)} = \frac{1}{\xi} + \frac{\widehat{\rho_n}'(\xi)}{\widehat{\rho_n}(\xi)} + \sum_{k=1}^{n}\frac{-2\xi}{(\pi k)^2}\Big(\sum_{\ell=0}^{+\infty}\Big(\frac{\xi^2}{(\pi k)^2}\Big)^{\ell}\Big).$$

Comme la somme finie $\sum\limits_{k=1}^{n}$ commute avec la somme infinie $\sum\limits_{\ell=1}^{+\infty}$, on retrouve la formule de l'énoncé :

$$\frac{\cos(\xi)}{\sin(\xi)} = \frac{1}{\xi} + \frac{\widehat{\rho_n}'(\xi)}{\widehat{\rho_n}(\xi)} - 2\xi \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2\ell}}{\pi^{2(\ell+1)}} \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{2(\ell+1)}} \Big).$$

15. L'idée est de trouver une justification pour faire tendre $n \to +\infty$ afin de retrouver $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2\ell}}$.

Dans un premier temps, on affirme que l'on a

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2\ell}}{\pi^{2(\ell+1)}} \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{2(\ell+1)}} \Big) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2\ell}}{\pi^{2(\ell+1)}} \Big(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2(\ell+1)}} \Big). \tag{3.15}$$

Première preuve pour (3.15)**.** En effet, il suffit de remarquer que la somme de gauche vaut

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2\ell}}{\pi^{2(\ell+1)}} \times \frac{1}{k^{2(\ell+1)}}.$$

Comme tous les termes sont positifs, la limite pour $n \to +\infty$ est exactement la double somme

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2\ell}}{\pi^{2(\ell+1)}} \times \frac{1}{k^{2(\ell+1)}}.$$

Or la version discrète du théorème de Fubini-Tonelli assure qu'en présence de termes positifs, les deux symboles sommes peuvent être intervertis, ce qui donne (3.15).

Seconde preuve pour (3.15)**.** Par soustraction, il s'agit de prouver

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2\ell}}{\pi^{2(\ell+1)}} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2(\ell+1)}} = 0.$$

On peut soit invoquer la version discrète du théorème de la convergence dominée (en interprétant la somme $\sum\limits_{\ell=0}^{+\infty}$ comme une intégrale par rapport à une mesure discrète) soit majorer directement $\frac{1}{k^{2(\ell+1)}} \leqslant \frac{1}{k^2}$:

$$0 \leqslant \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2\ell}}{\pi^{2(\ell+1)}} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2(\ell+1)}} \leqslant \Big(\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2\ell}}{\pi^{2(\ell+1)}} \Big) \Big(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \Big) = \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{1-\frac{\xi^2}{\pi^2}} \Big(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \Big)$$

où le majorant tend clairement vers 0 quand $n \to +\infty$ en tant que multiple d'un reste d'une série convergente.

Dans un second temps, on doit étudier, à ξ fixé, la limite de $\frac{\widehat{\rho_n}'(\xi)}{\widehat{\rho_n}(\xi)}$ pour $n \to +\infty$. Le dénominateur tend vers 1 d'après la question 9.c Pour le numérateur, deux arguments sont possibles (voir fin de la réponse). Admettons donc un moment que $\widehat{\rho_n}'(\xi) \to 0$.

On obtient alors la formule suivante

$$\forall \xi \in]-\pi,\pi[\setminus\{0\} \qquad \frac{\cos(\xi)}{\sin(\xi)} - \frac{1}{\xi} = -2\xi \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2\ell}}{\pi^{2(\ell+1)}} \Big(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2(\ell+1)}} \Big).$$

En multipliant par ξ, on obtient la conclusion :

$$\forall \xi \in]-\pi,\pi[\setminus\{0\} \qquad \frac{\xi\cos(\xi)}{\sin(\xi)} = 1 - 2\xi^2 \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2\ell}}{\pi^{2(\ell+1)}} \Big(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2(\ell+1)}} \Big).$$

Méthode 1 pour $\lim_{n\to+\infty} \widehat{\rho_n}'(\xi) = 0$. Si l'on a géré la question 13 avec un théorème de dérivation sous $\int$, alors on a

$$\widehat{\rho_n}'(\xi) = -i \int_{\mathbf{R}} e^{-ix\xi} x\rho_n(x)\mathrm{d}x.$$

On peut de nouveau faire appel à la question 5 pour faire tendre $n \to +\infty$:

$$|\widehat{\rho_n}'(\xi)| \leqslant \int_{-1}^{1} |x|\rho_n(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x\rho_n(x)\mathrm{d}x \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

Méthode 2 pour $\lim_{n\to+\infty} \widehat{\rho_n}'(\xi) = 0$. Si l'on a géré la question 13 par holomorphie : comme la suite de fonctions holomorphes (ρ_n) converge uniformément sur tout compact de $\mathbf{C}$ vers 1 (question 9c), on sait que la suite des dérivées converge uniformément sur tout compact de $\mathbf{C}$ vers $1' = 0$.

16. La série de droite est une série entière qui converge pour tout $\xi \in]-\pi,\pi[\setminus\{0\}$ par construction et également en $\xi = 0$ (avec somme finale valant 1). Il s'agit donc d'une série entière de rayon supérieur ou égal à π. Examinons la fonction du membre gauche $\xi \in]-\pi,\pi[\setminus\{0\} \mapsto \frac{\xi\cos(\xi)}{\sin(\xi)}$. D'après ce qui précède, cette fonction est la restriction d'une fonction développable en série entière en 0 de rayon au moins π. Autrement dit, la fonction du membre gauche se prolonge holomorphiquement au voisinage de 0. La question se reformule alors ainsi : il s'agit de prouver que les coefficients du développement en série entière de $\frac{\xi\cos(\xi)}{\sin(\xi)}$ en 0 sont rationnels.

Méthode 1. Or cette fonction s'écrit $\frac{f(\xi)}{g(\xi)}$ avec $f(\xi) = \cos(\xi)$ et $g(\xi) = \frac{\sin(\xi)}{\xi}$ (qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ vu le développement en série entière de sin). Les coefficients de Taylor en 0 de $\frac{f}{g}$ sont, à coefficient rationnel multiplicatif près, les dérivées en 0 de $\frac{f}{g}$. Ces derniers nombres ne font intervenir que des quotients, produits, sommes et différences des dérivées en 0 de f et g. Or les coefficients de Taylor de f et g en 0 sont rationnels. Cela prouve bien le résultat voulu.

Méthode 2. Fixons un entier $L \gg 1$ et lançons-nous dans le développement en série entière de $\frac{\xi\cos(\xi)}{\sin(\xi)}$ en l'origine à l'ordre $2L$. On écrit

$$\begin{aligned}\frac{\xi\cos(\xi)}{\sin(\xi)} &= \frac{\xi\sum_{\ell=0}^{L}(-1)^\ell\frac{\xi^{2\ell}}{(2\ell)!} + o(\xi^{2L+1})}{\sum_{\ell=0}^{L}(-1)^\ell\frac{\xi^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!} + o(\xi^{2L+1})} = \frac{\sum_{\ell=0}^{L}(-1)^\ell\frac{\xi^{2\ell}}{(2\ell)!} + o(\xi^{2L})}{\sum_{\ell=0}^{L}(-1)^\ell\frac{\xi^{2\ell}}{(2\ell+1)!} + o(\xi^{2L})}\\ &= \frac{\sum_{\ell=0}^{L}(-1)^\ell\frac{\xi^{2\ell}}{(2\ell)!} + o(\xi^{2L})}{1-\xi^2Q_L(\xi)+o(\xi^{2L})}\end{aligned} \tag{3.16}$$

où $Q_L(\xi)$ est une expression polynomiale de degré $2L-2$ (à coefficients rationnels). Or on peut composer les développement limités comme suit grâce au binôme de Newton

$$\forall k \in \mathbf{N}^\star \qquad (\xi^2Q_L(\xi) + o(\xi^{2L}))^k = \xi^{2k}Q_L(\xi)^k + o(\xi^{2L})$$

puis par inversion :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-\xi^2Q_L(\xi)+o(\xi^{2L})} &= 1 + \sum_{k=1}^{L}(\xi^2Q_L(\xi) + o(\xi^{2L}))^k + o\Big((\xi^2Q_L(\xi) + o(\xi^{2L}))^L\Big)\\ &= 1 + \xi^2Q_L(\xi) + \cdots + \xi^{2L}Q_L(\xi)^{2L} + o(\xi^{2L}).\end{aligned} \tag{3.17}$$

Par produit de deux développements limités via la formule (3.16), on obtient la conclusion.

17. Il n'y a aucune difficulté à vérifier la définition d'une norme. Le seul point à ne pas négliger est de justifier que $\sup_{x\in\mathbf{R}} |f^{(k)}(x)|$ est fini pour tout $f \in \mathcal{D}^n(\mathbf{R})$. Comme f est à support dans $[-1, 1]$, la borne supérieure se ramène au compact $[-1, 1]$ et la finitude découle de la continuité de $f^{(k)}$ (vu que $k \leqslant n$).

18. Comme $f \mapsto f^{(n)}$ est linéaire, la continuité découle de l'inégalité de continuité suivante :

$$\|f^{(n)}\|_{\mathcal{D}^0(\mathbf{R})} = \sup_{x\in\mathbf{R}} |f^{(n)}(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \sup_{x\in\mathbf{R}} |f^{(k)}(x)| = \|f\|_{\mathcal{D}^n(\mathbf{R})}.$$

19. La surjectivité est évidente par définition de $\mathcal{H}^N(\mathbf{R})$. Quant à l'injectivité, elle découle du principe des zéros isolés (vu que $\mathbf{C}$ est connexe) : si F et G sont deux fonctions holomorphes ayant la même restriction à $\mathbf{R}$, alors l'ensemble des zéros de la fonction holomorphe $F - G$ a un point d'accumulation (n'importe quel nombre réel) donc $F - G$ est la fonction nulle.

Remarque : par linéarité évidente, on aurait pu montrer que le noyau est réduit à $\{0\}$ par le même argument de principe des zéros isolés.

20.a) Pour l'holomorphie, cela découle des opérations usuelles admissibles sur les fonctions holomorphes (produits de fonctions holomorphes, quotients de deux fonctions holomorphes dont celle du dénominateur ne s'annule pas).

20.b) L'unicité d'un prolongement holomorphe est claire car $\mathbf{C}\backslash\pi\mathbf{Z}$ est une partie ayant des points d'accumulation (en l'occurrence tout élément de $\mathbf{C}\backslash\pi\mathbf{Z}$) et l'on peut donc de nouveau utiliser le principe des zéros isolés. On aurait aussi pu invoquer la densité de $\mathbf{C}\backslash\pi\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{C}$ et le fait que deux fonctions holomorphes, donc continues, qui coïncident sur un ensemble dense sont forcément égales.

La difficulté est l'existence d'un tel prolongement. Voici quelques méthodes

Méthode 1.

— l'holomorphie sur $\mathbf{C}\backslash\{0, \pm\pi, \ldots, \pm n\pi\}$ est immédiate d'après la formule de $F_n(z)$ et la stabilité par produit et inverse de fonctions holomorphes (ne s'annulant pas) ;

— fixons $\ell \in \{0, \pi, \ldots, n\pi\}$ et étudions l'holomorphie en $\ell\pi$ en écrivant

$$F_n(z) = \frac{1}{z \displaystyle\prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k\neq \ell}} \left(1 - \frac{z^2}{(k\pi)^2}\right)} \times \frac{1}{1 + \frac{z}{\ell\pi}} \times \frac{\sin(z)}{1 - \frac{z}{\ell\pi}},$$

seul le dernier terme pose problème pour l'holomorphie (les autres étant des inverses de fonctions polynomiales ne s'annulant pas en $\ell\pi$). Par holomorphie de l'opération de translation $z \mapsto z + \ell\pi$, cela revient à étudier l'holomorphie en $z = 0$ de

$$\frac{\sin(z + \ell\pi)}{1 - \frac{z+\ell\pi}{\ell\pi}} = -\ell\pi(-1)^{\ell} \frac{\sin(z)}{z}.$$

Cela découle alors du développement en série entière $\frac{\sin(z)}{z} = \sum_{k\geqslant 0} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+1)!}$ de rayon $+\infty$ (car identique à celui de la fonction sin en 0) ;

— les points $-\pi, \ldots, -n\pi$ se traitent de même par imparité.

Méthode 1bis. On simplifie légèrement la méthode 1 grâce à un argument de la plupart des cours d'analyse complexe : la fonction F_n est holomorphe sur $\mathbf{C}\backslash\{0, \pm\pi, \ldots, \pm\pi n\}$, puis en chaque point restant $\ell\pi$, on constate que la limite $\lim_{z\to\ell\pi} F_n$ est finie car on a l'équivalent $\sin(z) = (-1)^{\ell} \sin(z - \ell\pi) \sim (-1)^{\ell}(z - \ell\pi)$. Autrement dit, la multiplicité de $z - \ell\pi$ dans le numérateur est supérieure ou égale (en fait égale !) à celle du dénominateur $P_n(z)$. D'après les résultats sur les fonctions holomorphes (conséquence du théorème de Morera par exemple ou de la classification des singularités isolées), on sait que F_n admet un prolongement holomorphe sur $\mathbf{C}$.

Méthode 2. D'après la question 8, on a la représentation intégrale

$$\forall z \in \mathbf{C}\backslash\pi\mathbf{Z} \qquad F_n(z) = \int_{-1}^{1} e^{-izx}\rho_n(x)\mathrm{d}x.$$

Comme le second membre ne pose aucun problème de définition sur $\mathbf{C}$, il suffit de justifier que ce dernier est holomorphe. On peut soit invoquer la preuve faite à la question 13.b qui donne un développement en série entière de rayon $+\infty$, soit appliquer le théorème d'holomorphie sous $\int$:

— mesurabilité en x de $e^{-izx}\rho_n(x)$ évidente ;
— holomorphie de $e^{-izx}\rho_n(x)$ en z évidente ;
— domination : pour tout compact $K \subset \mathbf{C}$ et tout $x \in [-1,1]$ on a

$$\sup_{z\in K}|e^{-izx}\rho_n(x)| \leqslant \underbrace{\sup_{z\in K} e^{|\operatorname{Im}(z)|}}_{\text{fini}} \rho_n(x) \in L^1(-1,1).$$

20.c) Concernant l'estimation d'appartenance à $\mathcal{H}^N(\mathbf{R})$, on doit étudier la finitude

$$\sup_{z\in\mathbf{C}}(1+|z|)^N e^{-|\operatorname{Im}(z)|}|F_n(z)| < +\infty. \tag{3.18}$$

• Supposons $F_n \in \mathcal{H}^N(\mathbf{R})$. En se restreignant à $z \in \mathbf{R}$, on a

$$\sup_{z\in\mathbf{R}}(1+|z|)^N \frac{|\sin(z)|}{|P_n(z)|} < +\infty.$$

En testant z de la forme $z = \frac{\pi}{2} + \pi a$ avec $a \in \mathbf{N}^\star$, on a aussi (en tenant compte que $\deg P_n = 2n+1$)

$$\sup_{a\in\mathbf{N}^\star}\left(1+\left|\frac{\pi}{2}+\pi a\right|\right)^N \frac{1}{|\frac{\pi}{2}+\pi a|^{1+2n}} < \infty.$$

on voit que forcément $N \leqslant 1+2n$.

• Réciproquement, on suppose $N \leqslant 1+2n$ et l'on va montrer que $F_n \in \mathcal{H}^N(\mathbf{R})$ (c'est-à-dire (3.18)).

Cas 1. si $|z| \leqslant (n+1)\pi$, alors par continuité de F_n et compacité d'un disque fermé, on a

$$\sup_{|z|\leqslant(n+1)\pi}(1+|z|)^N e^{-|\operatorname{Im}(z)|}F_n(z)| < +\infty.$$

Cas 2. si $|z| \geqslant (n+1)\pi$ alors les dénominateurs ne s'annulent pas et

$$(1+|z|)^N \frac{|\sin(z)|}{|P_n(z)|} \leqslant \frac{(1+|z|)^{1+2n}}{|P_n(z)|}|\sin(z)|.$$

La fonction $z \mapsto \frac{(1+|z|)^{1+2n}}{|P_n(z)|}$ est continue (car le dénominateur ne s'annule pas sur le domaine restreint par l'inégalité $|z| \geqslant (n+1)\pi$) et tend vers une constante pour $|z| \to +\infty$ car $P_n(z) \sim cz^{2n+1}$. Elle est donc bornée. On a ainsi obtenu

$$(1+|z|)^N \frac{|\sin(z)|}{|P_n(z)|} \leqslant C|\sin(z)|.$$

Ce qui se contrôle par un multiple de $|e^{iz}| + |e^{-iz}| = e^{-\operatorname{Im}(z)} + e^{\operatorname{Im}(z)} \leqslant 2e^{|\operatorname{Im}(z)|}$.

21. Comme la dérivée d'une fonction holomorphe F est aussi holomorphe, la seule difficulté est de prouver que F' appartient à $\mathcal{H}^N(\mathbf{R})$ et que l'on a la continuité de l'application linéaire. Autrement dit, il s'agit de prouver une estimation de la forme $\|F'\|_{\mathcal{H}^N(\mathbf{R})} \leqslant C\|F\|_{\mathcal{H}^N(\mathbf{R})}$. Cela nécessite de majorer $|F'(z)|$. Comme F est holomorphe, on peut développer F en série entière autour de z :

$$\forall h \in \mathbf{C} \qquad F(z+h) = \sum_{k\in\mathbf{N}} \frac{F^{(k)}(z)}{k!} h^k \tag{3.19}$$

$$\forall \theta \in \mathbf{R} \qquad e^{-i\theta} F\left(z + \frac{1}{2}e^{i\theta}\right) = e^{-i\theta}F(z) + \frac{F'(z)}{2} + \sum_{k\geqslant 2} \frac{F^{(k)}(z)}{k!2^k} e^{i(k-1)\theta}.$$

On sait que ce développement en série entière converge uniformément sur tout compact, en particulier sur $\{h \in \mathbf{C}, \quad |h| = \frac{1}{2}\}$. On peut donc intervertir $\sum\int$ et $\int\sum$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\theta} F\left(z + \frac{1}{2}e^{i\theta}\right) \mathrm{d}\theta = 0 + F'(z) + \sum_{k\geqslant 2} 0 = F'(z).$$

On peut maintenant utiliser la condition $F \in \mathcal{H}^N(\mathbf{R})$:

$$\begin{aligned} |F'(z)| &\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|F\left(z + \frac{1}{2}e^{i\theta}\right)\right| \mathrm{d}\theta \\ &\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} C\left(1 + \left|z + \frac{1}{2}e^{i\theta}\right|\right)^{-N} e^{|\operatorname{Im}(z+\frac{1}{2}e^{i\theta})|}\mathrm{d}\theta. \end{aligned} \tag{3.20}$$

La partie exponentielle est facile à gérer : $|\operatorname{Im}(z + \frac{1}{2}e^{i\theta})| \leqslant |\operatorname{Im}(z)| + \frac{1}{2}$, donc

$$e^{|\operatorname{Im}(z+\frac{1}{2}e^{i\theta})|} \leqslant e^{|\operatorname{Im}(z)|+\frac{1}{2}} = Ce^{|\operatorname{Im}(z)|}.$$

Si $N < 0$ alors la puissance en N se majore grâce aux estimations suivantes :

$$1 + \left|z + \frac{1}{2}e^{i\theta}\right| \leqslant \frac{3}{2} + |z| \leqslant \frac{3}{2}(1 + |z|).$$

Si $N \geqslant 0$ alors il vaut mieux exploiter ceci (d'où l'intérêt de travailler avec une constante $\frac{1}{2} < 1$)

$$1 + \left|z + \frac{1}{2}e^{i\theta}\right| \geqslant 1 + |z| - \frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{2}(1 + |z|).$$

Quel que soit le signe de N, on obtient $|F'(z)| \leqslant C'(1 + |z|)^N e^{|\operatorname{Im}(z)|}$.

22. Continuité de la première application. Pour tout $f \in \mathcal{D}^0(\mathbf{R})$ on veut d'abord vérifier que $\widehat{f} \in \mathcal{H}^0(\mathbf{R})$. On écrit

$$\forall \xi \in \mathbf{R} \qquad \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} e^{-ix\xi} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} e^{-ix\xi} f(x)\mathrm{d}x.$$

Le candidat naturel élément de $\mathcal{H}^0(\mathbf{R})$ (ou plutôt $\mathcal{H}^0(\mathbf{C})$) est défini de la sorte : pour tout $z \in \mathbf{C}$, on pose

$$F(z) = \int_{-1}^{1} e^{-ixz} f(x)\mathrm{d}x. \tag{3.21}$$

Deux méthodes pour montrer l'holomorphie de F :

- théorème d'holomorphie sous $\int$.
- développer $e^{-ixz} = \sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{(-ixz)^n}{n!}$ en série entière qui converge normalement pour $x \in [-1, 1]$ (car de rayon $+\infty$). Cela permet de faire une interversion $\sum\int = \int\sum$ et de constater que $F(z)$ est développable en série entière pour tout $z \in \mathbf{C}$, donc son rayon est $+\infty$ et F est holomorphe sur $\mathbf{C}$.

Il reste à montrer l'inégalité d'appartenance à $\mathcal{H}^0(\mathbf{R})$:

$$|F(z)| \leqslant \int_{-1}^{1} |e^{-ixz} f(x)| \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} e^{x\,\mathrm{Im}(z)} |f(x)| \mathrm{d}x \leqslant 2e^{|\,\mathrm{Im}(z)|} \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|. \tag{3.22}$$

C'est-à-dire

$$\|\widehat{f}\|_{\mathcal{H}^0(\mathbf{R})} \leqslant 2\|f\|_{\mathcal{D}^0(\mathbf{R})}.$$

Comme $f \mapsto \widehat{f}$ est linéaire, cela donne la continuité voulue.

Continuité de la seconde application. Par composition avec la première, il suffit de justifier la continuité de $f \mapsto f'$ de $\mathcal{D}^1(\mathbf{R})$ dans $\mathcal{D}^0(\mathbf{R})$. Cela a fait l'objet de la question 18.

23.a) En remarquant l'inclusion $\mathcal{D}^1(\mathbf{R}) \subset \mathcal{D}^0(\mathbf{R})$, on a d'après la question précédente $\widehat{f} \in \mathcal{H}^0(\mathbf{R})$ et donc $\widehat{f}$ est prolongeable holomorphiquement sur $\mathbf{C}$ comme dans la question précédente via la formule (3.21) : on notera alors

$$\forall z \in \mathbf{C} \qquad \widehat{f}(z) = \int_{-1}^{1} e^{-ixz} f(x) \mathrm{d}x.$$

Il en est de même pour $f' \in \mathcal{D}^0(\mathbf{R})$ et l'expression analogue de $\widehat{f'}(z)$. Une intégration par partie donne

$$iz\widehat{f}(z) = \left[-e^{-ixz} f(x)\right]_{x=-1}^{1} + \int_{-1}^{1} e^{-ixz} f'(x) dx = 0 + \widehat{f'}(z)$$

car le crochet est nul par définition des espaces $\mathcal{D}^n(\mathbf{R})$ (la fonction f est à support dans $[-1,1]$).

Remarque : par holomorphie et principe des zéros isolés, il aurait suffi de prouver la formule pour $z \in \mathbf{R}$ (mais cela ne raccourcit pas la rédaction sauf à utiliser les propriétés de la transformée de Fourier relatives au transfert de la dérivation en multiplication).

23.b) D'après la caractérisation de la continuité des applications linéaires, on doit prouver qu'il existe une constante $C > 0$ (dépendant uniquement de n) telle que

$$\forall f \in \mathcal{D}^n(\mathbf{R}) \qquad \|\widehat{f}\|_{\mathcal{H}^n(\mathbf{R})} \leqslant C\|f\|_{\mathcal{D}^n(\mathbf{R})}.$$

ce qui s'écrit

$$\forall z \in \mathbf{C} \qquad (1+|z|)^n |\widehat{f}(z)| \leqslant Ce^{|\,\mathrm{Im}(z)|} \sum_{k=0}^{n} \sup_{x\in\mathbf{R}} |f^{(k)}(x)|. \tag{3.23}$$

Par récurrence immédiate, on a $(iz)^n \widehat{f}(z) = \widehat{f^{(n)}}(z)$ et donc $|z|^n |\widehat{f}(z)| = |\widehat{f^{(n)}}(z)|$.

Méthode directe. La formule du binôme de Newton permet d'écrire

$$(1+|z|)^n |\widehat{f}(z)| = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} |z|^k |\widehat{f}(z)| = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} |\widehat{f^{(k)}}(z)|.$$

Grâce à (3.22), on peut majorer

$$(1+|z|)^n |\widehat{f}(z)| \leqslant 2e^{|\,\mathrm{Im}(z)|} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \sup_{x\in[-1,1]} |f^{(k)}(x)|$$

ce qui prouve aisément (3.23) en considérant $C = 2 \max\limits_{0\leqslant k\leqslant n} \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Méthode indirecte. Par ailleurs, on vérifie qu'il existe une constante $C' > 0$ (indépendante de z) telle que $(1+|z|)^n \leqslant C'(1+|z|^n)$:

— de façon implicite par équivalence de la norme $\|\cdot\|_1$ et de la norme $\|\cdot\|_n$ dans $\mathbf{R}^2$;

— de façon explicite en écrivant $1+|z| \leqslant 2\max(1,|z|) \leqslant 2(1+|z|^n)^{1/n}$ et donc $C' = 2^n$ convient.
Vu l'inégalité (3.23) que l'on souhaite prouver, il suffit donc de trouver une constante $C'' > 0$ telle que

$$\forall z \in \mathbf{C} \qquad |\widehat{f}(z)| + |\widehat{f^{(n)}}(z)| \leqslant C'' e^{|\operatorname{Im}(z)|} \sum_{k=0}^{n} \sup_{x\in\mathbf{R}} |f^{(k)}(x)|.$$

La constante $C'' = 4$ convient d'après (3.22) et l'appartenance triviale $f^{(n)} \in \mathcal{D}^0(\mathbf{R})$.

24.a) La série de fonctions $\sum \frac{1}{2^k}\cos(4^k\pi x)$ converge normalement sur $[-1,1]$ car

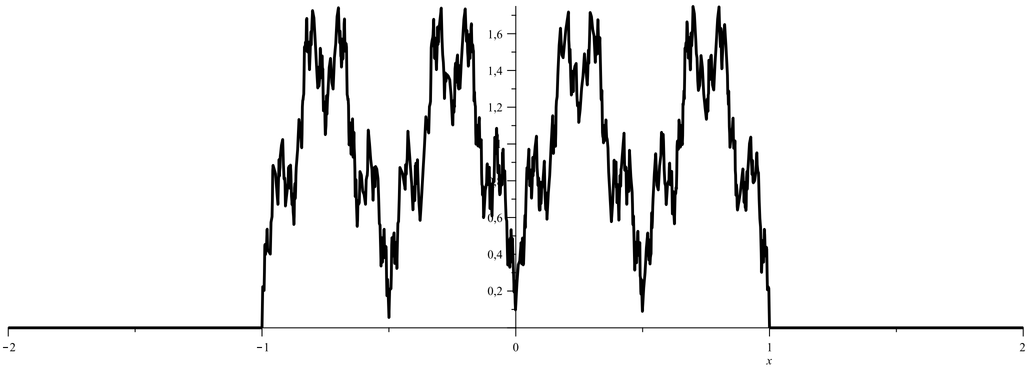
$$\sup_{x\in[-1,1]} |\frac{1}{2^k}\cos(4^k\pi x)| \leqslant \frac{1}{2^k} \quad \text{est le terme d'une série géométrique convergente}$$

Comme chaque fonction $x \mapsto \frac{1}{2^k}\cos(4^k\pi x)$ est continue, en déduit que la fonction ψ de l'énoncé est continue sur $[-1,1]$ et vérifie

$$\psi(1) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 0.$$

La continuité de ψ sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ est également évidente (car fonction identiquement nulle). Il reste à vérifier la continuité en $x=1$ et $x=-1$. Notons que la vérification en $x=1$ suffit puisque ψ est manifestement paire. Or de ce qui précède, ψ est continue à gauche et à droite en $x=1$. Donc ψ est continue en $x=1$.

Voici un aperçu de la courbe (non attendu lors de la correction) :



24.b) Par convergence normale sur $[-1,1]$, on a pour tout $\xi \in \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned}\widehat{\psi}(\xi) &= \int_{-1}^{1} e^{-ix\xi}\psi(x)\mathrm{d}x \qquad (3.24)\\ &= \int_{-1}^{1} e^{-ix\xi}\mathrm{d}x - \sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{2^k}\int_{-1}^{1} e^{-ix\xi}\cos(4^k\pi x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Pour $\xi = 4^\ell\pi$, le premier terme vaut

$$\int_{-1}^{1} e^{-ix\xi}\mathrm{d}x = \frac{e^{-i\xi}-e^{i\xi}}{-i\xi} = \frac{1-1}{-i\xi} = 0.$$

Examinons les autres intégrales qui s'avèrent être également des moyennes de fonctions trigonométriques 2-périodiques :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} e^{-ix\xi}\cos(4^k\pi x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-ix(4^\ell+4^k)\pi}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-ix(4^\ell-4^k)\pi}\mathrm{d}x \qquad (3.25)\\ &= 0 + \delta_{k,\ell}.\end{aligned}$$

Autrement dit, on a $\widehat{\psi}(4^\ell \pi) = \frac{-1}{2^\ell}$.

24.c) Si l'on avait $\widehat{\psi} \in \mathcal{H}^1(\mathbf{R})$, alors on aurait une estimation de la forme $|\widehat{\psi}(4^\ell \pi)| \leqslant \frac{C}{1+4^\ell \pi}$ ce qui est impossible ici en examinant $\lim\limits_{\ell \to +\infty} 2^\ell \widehat{\psi}(4^\ell \pi)$ qui serait à la fois nulle et non nulle.

25.a) Comme F est holomorphe sur $\mathbf{C}$, elle est également continue et de même pour la fonction positive $\xi \mapsto |F(\xi + i\eta)|$ qui s'avère finalement mesurable. Pour montrer que son intégrale sur $\mathbf{R}$ est finie, on commence par utiliser la définition de $\mathcal{H}^N(\mathbf{R})$ avec $C = \|F\|_{\mathcal{H}^N(\mathbf{R})}$:

$$\forall \xi \in \mathbf{R} \qquad |F(\xi + i\eta)| \leqslant C(1 + |\xi + i\eta|)^{-N} e^{|\eta|}.$$

Or $|\xi + i\eta| = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \geqslant |\xi|$, donc $|F(\xi + i\eta)| \leqslant \frac{Ce^{|\eta|}}{(1+|\xi|)^N}$. Comme η est fixé et que $N \geqslant 2$, une comparaison par une intégrale convergente de Riemann donne

$$\int_{\mathbf{R}} |F(\xi + i\eta)| \mathrm{d}\xi \leqslant \|F\|_{\mathcal{H}^N(\mathbf{R})} e^{|\eta|} \underbrace{\int_{\mathbf{R}} \frac{\mathrm{d}\xi}{(1 + |\xi|)^2}}_{=2}.$$

Donc $M = 2$ convient parfaitement.

25.b) Méthode 1 : La formule équivaut à dire que $\eta \mapsto e^{-x\eta} \int_{\mathbf{R}} e^{ix\xi} F(\xi + i\eta) \mathrm{d}\xi$ est constante (car égale à sa valeur en $\eta = 0$). Il est donc naturel de tenter de prouver que sa dérivée par rapport à η est nulle (puisque η parcourt un intervalle). La difficulté réside dans la dérivation de l'intégrale à paramètre η : on veut prouver

$$\frac{d}{d\eta} \int_{\mathbf{R}} e^{ix\xi} F(\xi + i\eta) \mathrm{d}\xi = \int_{\mathbf{R}} e^{ix\xi} iF'(\xi + i\eta) \mathrm{d}\xi. \tag{3.26}$$

Étape 1. Montrons que (3.26) implique la nullité de la dérivée de $\eta \mapsto e^{-x\eta} \int_{\mathbf{R}} e^{ix\xi} F(\xi + i\eta) \mathrm{d}\xi$. On a en effet

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\eta} \Big(e^{-x\eta} \int_{\mathbf{R}} e^{ix\xi} F(\xi + i\eta) \mathrm{d}\xi \Big) &= \int_{\mathbf{R}} -xe^{-x\eta} e^{ix\xi} F(\xi + i\eta) + e^{-x\eta} e^{ix\xi} iF'(\xi + i\eta) \mathrm{d}\xi \qquad (3.27) \\ &= e^{-x\eta} \int_{\mathbf{R}} -xF(\xi + i\eta) e^{ix\xi} + iF'(\xi + i\eta) e^{ix\xi} \mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

Il faudrait justifier l'intégrabilité de $F(\xi + i\eta)e^{ix\xi}$ et de $F'(\xi + i\eta)e^{ix\xi}$ sur $\mathbf{R}$ (par rapport à ξ). Cela découle des questions 25a et Q21. On a donc

$$\frac{d}{d\eta} \Big(e^{-x\eta} \int_{\mathbf{R}} e^{ix\xi} F(\xi + i\eta) \mathrm{d}\xi \Big) = \lim_{K \to +\infty} e^{-x\eta} \int_{-K}^{K} -xF(\xi + i\eta) e^{ix\xi} + iF'(\xi + i\eta) e^{ix\xi} \mathrm{d}\xi$$

et l'on peut intégrer en $e^{-x\eta} \big[iF(\xi + i\eta) e^{ix\xi} \big]_{\xi=-K}^{K}$ qui tend vers 0 si $K \to +\infty$ grâce à la domination $|F(\pm K + i\eta)| \leqslant \frac{Ce^{|\eta|}}{(1+|K+i\eta|)^2}$ (car $F \in \mathcal{H}^2(\mathbf{C})$).

Étape 2. Montrons (3.26). Appliquons le théorème de dérivation sous le signe $\int$:

i) pour tout η, la fonction $\xi \mapsto\mapsto e^{ix\xi} F(\xi + i\eta)$ est mesurable (par continuité) et intégrable en ξ. En effet, on a montré à la question précédente grâce à l'appartenance $F \in \mathcal{H}^2(\mathbf{C})$:

$$|e^{ix\xi} F(\xi + i\eta)| = |F(\xi + i\eta)| \leqslant \frac{Ce^\eta}{(1 + |\xi|)^2} \qquad \text{intégrable par rapport à } \xi; \tag{3.28}$$

ii) pour tout ξ, la fonction $\eta \in \mathbf{R} \mapsto e^{ix\xi} F(\xi + i\eta)$ est dérivable par rapport à η et sa dérivée vaut $e^{ix\xi} iF'(\xi + i\eta)$;

iii) on a besoin d'une domination intégrable de $|e^{ix\xi}iF'(\xi+i\eta)| = |F'(\xi+i\eta)|$ par rapport à ξ (uniforme en η). Or cela découle de l'appartenance $F' \in \mathcal{H}^2(\mathbf{C})$ et donc conduit à une borne similaire $\frac{C'e^{\eta}}{(1+|\xi|)^2}$. Cette borne n'est pas uniforme en $\eta \in \mathbf{R}$ mais l'est si on suppose que η se situe dans un intervalle compact.

Ainsi, on vient d'obtenir la dérivabilité sur tout intervalle compact de $\mathbf{R}$, donc la dérivabilité sur $\mathbf{R}$.

Méthode 2. Le théorème de Cauchy ou le théorème des résidus (mais sans pôle...) assure que l'intégrale sur le contour rectangle est nulle :

$$\begin{aligned} 0 = &\int_{-K}^{K} e^{ix\xi}F(\xi)\mathrm{d}\xi + i\int_0^{\eta} e^{ix(K+i\xi)}F(K+i\xi)\mathrm{d}\xi \\ &- \int_{-K}^{K} e^{ix(\xi+i\eta)}F(\xi+i\eta)\mathrm{d}\xi - i\int_0^{\eta} e^{ix(-K+i\xi)}F(-K+i\xi)\mathrm{d}\xi. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Examinons ce qui se passe pour $K \to +\infty$:

$$\begin{aligned} \int_{-K}^{K} e^{ix\xi}F(\xi)\mathrm{d}\xi &\xrightarrow[K\to+\infty]{} \int_{\mathbf{R}} e^{ix\xi}F(\xi)\mathrm{d}\xi, \\ \int_{-K}^{K} e^{ix(\xi+i\eta)}F(\xi+i\eta)\mathrm{d}\xi &\xrightarrow[K\to+\infty]{} e^{-\eta x}\int_{\mathbf{R}} e^{ix\xi}F(\xi+i\eta)\mathrm{d}\xi. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Notons que l'intégrabilité est assurée grâce à la question précédente. Il reste à prouver que les deux termes manquants tendent vers 0. On va de nouveau utiliser (3.28) (découlant de l'appartenance $F \in \mathcal{H}^2(\mathbf{C})$) selon le signe de η :

$$\begin{aligned} \left|\int_0^{\eta} e^{ix(K+i\xi)}F(K+i\xi)\mathrm{d}\xi\right| &\leqslant C\left|\int_0^{\eta} e^{-x\xi}\frac{e^{\xi}}{(1+K)^2}\mathrm{d}\xi\right| \\ &\leqslant C\frac{\max(1,e^{(1-x)\eta})|\eta|}{(1+K)^2} \xrightarrow[K\to+\infty]{} 0. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Le terme manquant faisant intervenir $F(-K+i\xi)$ se traite de même.

25.c) Soit $x \in \mathbf{R}$ tel que $|x| > 1$. D'après les deux questions précédentes, on a pour tout $\eta \in \mathbf{R}$ grâce à l'inégalité triangulaire et l'égalité $|e^{ix\xi}| = 1$:

$$\begin{aligned} \left|\int_{\mathbf{R}} e^{ix\xi}F(\xi)\mathrm{d}\xi\right| &\leqslant e^{-x\eta}\int_{\mathbf{R}} |e^{ix\xi}F(\xi+i\eta)|\mathrm{d}\xi \\ &\leqslant M\|F\|_{\mathcal{H}^N(\mathbf{R})} \times e^{-x\eta+|\eta|}. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Quitte à faire tendre η vers $+\infty$ ou $-\infty$ selon que $x > 1$ ou $x < -1$, on trouve une limite nulle pour le majorant.

25.d) D'après la question précédente, f est à support dans $[-1,1]$. Comme $F \in \mathcal{H}^N(\mathbf{R})$, on a la majoration

$$\forall \xi \in \mathbf{R} \qquad |F(\xi)| \leqslant \frac{C}{(1+|\xi|)^N}$$

avec $N \geqslant 2$. On va exploiter cette inégalité pour montrer que $f \in \mathcal{D}^{N-2}(\mathbf{R})$.

Par définition de $\mathcal{D}^{N-2}(\mathbf{R})$, il reste à montrer que f est de classe $\mathcal{C}^{N-2}$ (la condition de support étant déjà remarquée). Il nous suffit d'appliquer un théorème de dérivation sous $\int$:

- pour tout x, la fonction $\xi \mapsto e^{ix\xi}F(\xi)$ est mesurable,
- pour tout ξ, la fonction $x \mapsto e^{ix\xi}F(\xi)$ est de classe $\mathcal{C}^{N-2}$ et sa k-ième dérivée est $x \mapsto e^{ix\xi}(i\xi)^kF(\xi)$,

- il nous reste à obtenir une domination de chacune des dérivées (avec $k \leqslant N-2$) :

$$|e^{ix\xi}(i\xi)^k F(\xi)| = |\xi^k F(\xi)| \leqslant C\frac{|\xi|^k}{(1+|\xi|)^N} \in L^1(\mathbf{R}).$$

Pour montrer l'égalité $\widehat{f} = F$, on fait appel à la formule d'inversion : on remarque que $\widehat{F}(x) = 2\pi f(-x)$ d'après la définition f, ce qui implique que $\widehat{F} \in L^1(\mathbf{R})$ et on peut donc appliquer la formule d'inversion (vu que F est continue et appartient à $L^1(\mathbf{R})$ car $N \geqslant 2$) :

$$\underbrace{F(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} e^{i\xi x}\widehat{F}(x)\mathrm{d}x}_{\text{formule d'inversion}} = \underbrace{\int_{\mathbf{R}} e^{i\xi x} f(-x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} e^{-i\xi x} f(x)\mathrm{d}x}_{\text{changement de variables}} = \widehat{f}(\xi).$$

On aurait pu également invoquer l'injectivité de la transformée de Fourier : montrer $\widehat{f} = F$ revient à prouver $\widehat{\widehat{f}} = \widehat{F}$ et l'on retombe sur les mêmes calculs.

26. Voici les points à vérifier :

- Les ensembles de départ et d'arrivée sont cohérents avec la transformée de Fourier. D'une part, toute fonction $f \in \mathcal{D}^\infty(\mathbf{R})$ est intégrable, donc $\widehat{f}$ est bien définie. D'autre part, f appartient à chaque $\mathcal{D}^n(\mathbf{R})$ (avec $n \in \mathbf{N}$) donc $\widehat{f}$ appartient à chaque $\mathcal{H}^n(\mathbf{R})$ (voir la question 23.b). Vu la définition de $\mathcal{H}^\infty(\mathbf{R})$, on doit aussi vérifier que $\widehat{f} \in \mathcal{H}^N(\mathbf{R})$ pour $N < 0$, or il est clair que $\mathcal{H}^0(\mathbf{R}) \subset \mathcal{H}^N(\mathbf{R})$ pour $N < 0$. Donc l'ensemble d'arrivée est adéquat.
- Vérifions l'injectivité de la transformée de Fourier entre $\mathcal{D}^\infty(\mathbf{R})$ et $\mathcal{H}^\infty(\mathbf{R})$. Cela découle de l'injectivité de la transformée de Fourier initialement définie en tant qu'application $L^1(\mathbf{R}) \to L^\infty(\mathbf{R})$ et de l'inclusion évidente $\mathcal{D}^\infty(\mathbf{R}) \subset L^1(\mathbf{R})$. On peut aussi invoquer (mais c'est en fait la même chose) la formule d'inversion admise dans l'énoncé.
- Vérifions la surjectivité. Soit $F \in \mathcal{H}^\infty(\mathbf{R})$ (en particulier $F \in \mathcal{H}^2(\mathbf{R})$). D'après la question précédente, il existe $f \in \mathcal{D}^0(\mathbf{R})$ tel que $F = \widehat{f}$. Nous devons maintenant montrer que $f \in \mathcal{D}^\infty(\mathbf{R})$. Fixons $n \in \mathbf{N}$ et remarquons que $F \in \mathcal{H}^{n+2}(\mathbf{R})$. D'après la question précédente, il existe $g \in \mathcal{D}^n(\mathbf{R})$ tel que $F = \widehat{g}$. Ainsi, $\widehat{f} = \widehat{g}$. Par injectivité de la transformée de Fourier, cela donne $f = g$. Autrement dit $f \in \mathcal{D}^n(\mathbf{R})$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

27.a) On peut proposer 3 méthodes pour obtenir la régularité $\mathcal{C}^{2n-1}$. Clairement ρ_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$. Il reste à étudier ρ_n au voisinage de 1 et de -1. Par parité, il suffit de traiter le cas $x = 1$.

Méthode 1. On peut invoquer le théorème de prolongement $\mathcal{C}^{2n-1}$: si une fonction g est de classe $\mathcal{C}^{2n-1}$ sur $]0,1[\cup]1,2[$ et si les fonctions $g, g', \ldots, g^{(2n-1)}$ admettent une limite en 1, alors g est la restriction d'une fonction de classe $\mathcal{C}^{2n-1}$ sur $]0,2[$.

Pour appliquer correctement ce théorème à $g = \rho_n$, il faut préciser les deux points suivants :

i) pour tout $k \in \{0,1,\ldots,2n-1\}$, la limite $\lim\limits_{x\to 1} g^{(k)}(x)$ existe. En effet, c'est trivial pour $x > 1$ avec limite nulle. Pour $x < 1$, on remarque que g est par définition la restriction sur $[-1,1]$ de la fonction

$$w : x \mapsto \frac{1}{2W_{2n}}\cos^{2n}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

(qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$), donc la limite $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} g^{(k)}(x)$ existe et vaut $w^{(k)}(1)$. Pour que la limite $\lim\limits_{x\to 1} g^{(k)}(x)$ existe, il faut et il suffit que la limite à gauche et à droite coïncident. C'est-à-dire $w^{(k)}(1) = 0$.

Or on peut récupérer la k-ième dérivée en 1 grâce au coefficient de $\frac{(x-1)^{k+1}}{(k+1)!}$ dans le développement limité en $x = 1$:

$$\cos^{2n}\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \left(0 - (x-1)\frac{\pi}{2} + o(x-1)\right)^{2n} = \frac{(-\pi)^{2n}}{2^{2n}}(x-1)^{2n}(1+o(1))^{2n}.$$

Or le binôme de Newton donne $(1+o(1))^{2n} = 1+o(1)$. Ainsi, au voisinage de 1.

$$\cos^{2n}\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \frac{(-\pi)^{2n}}{2^{2n}}(x-1)^{2n} + o(x-1)^{2n}. \tag{3.33}$$

Le coefficient de $\frac{(x-1)^k}{(k)!}$ est nul (car $k \leqslant 2n-1$). Cela achève de prouver que $w^{(k)}(1) = 0$.

ii) Le théorème de prolongement $\mathcal{C}^{2n-1}$ montre ainsi que g est la restriction d'une fonction de classe $\mathcal{C}^{2n-1}$ sur $]0,2[$. Or cette fonction prolongée et g sont continues sur $]0,2[$ et coïncident sur $]0,1[\cup]1,2[$, elles sont donc égales. Ainsi g est bien de classe $\mathcal{C}^{2n-1}$ sur $]0,2[$.

Méthode 2 . Pour tout $k \in \{0,\ldots,2n-1\}$, posons l'hypothèse de récurrence $H(k) =$ « ρ_n est de classe $\mathcal{C}^k$ et $\rho_n^{(k)}(1) = 0$ ».

Montrons $H(0)$. C'est clair car ρ_n est continue à gauche et à droite en 1 et $\rho_n(1) = 0$.

Montrons $H(k) \Rightarrow H(k+1)$ avec $k \in \{0,\ldots,2n-2\}$. Ainsi, ρ_n est supposée de classe $\mathcal{C}^k$. Pour conclure, on doit montrer $\rho_n^{(k)}$ est dérivable en 1 (on sait que $\rho_n^{(k)}$ est dérivable sur un voisinage privé de 1) et que $\rho_n^{(k+1)}$ est continue en 1. On veut prouver que la limite suivante existe

$$\lim_{x\to 1} \frac{\rho_n^{(k)}(x) - \rho_n^{(k)}(1)}{x-1}.$$

Comme $\rho_n^{(k)}(1) = 0$ par récurrence, cela revient à étudier $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\rho_n^{(k)}(x)}{x-1}$. Il suffit d'examiner limite à gauche et limite à droite. À droite, on a clairement $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{\rho_n^{(k)}(x)}{x-1} = 0$. Pour la limite à gauche, on remarque que la fonction $x \mapsto \cos^{2n}(\pi x/2)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{\rho_n^{(k)}(x)}{x-1} = w^{(k+1)}(1) \qquad \text{avec} \qquad w(x) = \frac{1}{2W_{2n}}\cos^{2n}(\pi x/2).$$

Or le D.L. (3.33) montre que cette $(k+1)$ème dérivée est nulle (car $k+1 \leqslant 2n-1$). Ainsi, $\rho_n^{(k)}$ est dérivable en 1 et $g^{(k+1)}(1) = 0$.

Il reste à justifier que $\rho_n^{(k+1)}$ est continue en 1. De nouveau, vu que g est identiquement nulle sur $]1,+\infty[$, il est clair que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \rho_n^{(k+1)}(x) = 0$. S'agissant de la limite à gauche, on utilise encore que $x \mapsto \cos^{2n}(\pi x/2)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc la limite à gauche $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \rho_n^{(k+1)}(x)$ est nulle car la dérivée $(k+1)$ème en 1 de $\cos^{2n}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ est nulle.

Méthode 3 en invoquant les parties II et III. D'après la partie II, on a la formule

$$\forall \xi \in \mathbf{C}\backslash\{0,\pm\pi,\ldots,\pm n\pi\} \qquad \frac{\sin(\xi)}{P_n(\xi)} = \widehat{\rho_n}(\xi).$$

D'après la partie III, les singularités à gauche sont artificielles vu que $\widehat{\rho_n}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (voir la question 13.b). De plus, l'expression du membre gauche prouve que $\widehat{\rho_n}(\xi) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\xi|^{1+2n}}\right)$ pour $\xi \to \pm\infty$ dans $\mathbf{R}$. Comme $n \geqslant 1$, cela implique que $\widehat{\rho_n}$ est une fonction intégrable sur $\mathbf{R}$. On peut donc faire appel à la formule d'inversion admise dans l'énoncé :

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad \rho_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} e^{ix\xi}\widehat{\rho_n}(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

On veut montrer que ρ_n est de classe $\mathcal{C}^{2n-1}$ en appliquant le théorème $\mathcal{C}^{2n-1}$ sous $\int$:

— la régularité $\mathcal{C}^{2n-1}$ en x de $e^{ix\xi}\widehat{\rho_n}(\xi)$ est claire,

- la mesurabilité en $\xi \in \mathbf{R}$ de $e^{ix\xi}\widehat{\rho_n}(\xi)$ est claire,
- il reste à dominer la fonction et ses $2n-1$ premières dérivées (indépendamment de x) : pour tout $k \in \{0, \ldots, 2n-1\}$ on a

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k} e^{ix\xi}\widehat{\rho_n}(\xi)\right| = \left|e^{ix\xi}(i\xi)^k\widehat{\rho_n}(\xi)\right| \tag{3.34}$$

$$= \left|\xi^k\widehat{\rho_n}(\xi)\right| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{(1+|\xi|)^{1+2n-k}}\right) \tag{3.35}$$

$$= \mathcal{O}\left(\frac{1}{(1+|\xi|)^2}\right) \in L^1(\mathbf{R}).$$

27.b) On veut justifier que ρ_n n'est pas de classe $\mathcal{C}^{2n}$. Si ρ_n était de classe $\mathcal{C}^{2n}$ alors les deux limites suivantes seraient égales :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \rho_n^{(2n)}(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \rho_n^{(2n)}(x).$$

La seconde est trivialement nulle tandis que la première vaut $\frac{(-\pi)^{2n}(2n)!}{2^{2n}\times 2W_{2n}} \neq 0$ d'après (3.33). Contradiction.

27.c) Vu l'agencement des questions et le choix des lettres de l'énoncé (questions 25d, 27a et 27b), on a envie de trouver un contre-exemple pour $N-1 = 2n$ avec $F = \widehat{\rho_n}$. D'une part, on a $F = F_n \in \mathcal{H}^N(\mathbf{R})$ (d'après les questions 20.c et 8). D'autre part, la fonction $f = \rho_n$ vérifie $F = \widehat{f}$ et c'est la seule par injectivité de la transformée de Fourier. On a $f \notin \mathcal{D}^{N-1}(\mathbf{R})$ d'après la question précédente.

28.a) La fonction $\delta_a : \mathcal{S}(\mathbf{R}) \to \mathbf{C}$ est linéaire et vérifie tout simplement $|\delta_a(\varphi)| = |\varphi(a)| \leqslant \sup_{x\in\mathbf{R}} |\varphi(x)|$. Donc $\delta_a \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$. Tout compact qui contient $\{a\}$ va convenir. De façon précise, montrons que $A = \{a\}$ est le plus petit fermé vérifiant $\mathrm{Supp}(\delta_a) \subset A$:

• Déjà, on a bien $\mathrm{Supp}(\delta_a) \subset \{a\}$. C'est évident car si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ est à support dans l'ouvert $\{a\}^c$, alors $\varphi(a) = 0$ (sinon a appartiendrait au support de φ).

• Réciproquement, soit A un fermé tel que $\mathrm{Supp}(\delta_a) \subset A$. On veut montrer que $\{a\} \subset A$. Dans le cas contraire, on aurait $a \notin A$. Par définition d'un ouvert et de l'appartenance $a \in A^c$, on déduit qu'il existe un intervalle $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ disjoint de A. On sait qu'il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$ à support dans $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ (donc inclus dans A^c) et vérifiant $\varphi(a) = 1$. Cela contredit la définition de l'inclusion $\mathrm{Supp}(\delta_a) \subset A$ qui devrait impliquer $\varphi(a) = 0$.

28.b) Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, on écrit

$$\langle \widehat{\delta_a}, \varphi\rangle := \langle \delta_a, \widehat{\varphi}\rangle = \widehat{\varphi}(a) = \int_{\mathbf{R}} e^{-iax}\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Il est clair que $f(x) = e^{-iax}$ convient. On a $\widehat{\delta_a} = T_f$. Remarquons déjà que f admet un prolongement holomorphe sur $\mathbf{C}$: $z \mapsto e^{-iaz}$. Donc le problème est la vérification des estimations d'appartenance à $\mathcal{H}^{-\infty}(\mathbf{R})$:

• on suppose $f \in \mathcal{H}^{-\infty}(\mathbf{R})$, c'est-à-dire

$$\exists N \in \mathbf{Z} \qquad \forall z \in \mathbf{C} \qquad |e^{-iaz}| \leqslant C(1+|z|)^{-N} e^{|\operatorname{Im}(z)|}$$

ou encore $e^{a\operatorname{Im}(z)} \leqslant C(1+|z|)^{-N}e^{|\operatorname{Im}(z)|}$. Faisons parcourir z sous la forme $z = it$ avec $t \to \pm\infty$:

$$(1+|t|)^N e^{at-|t|} \leqslant C.$$

On devrait trouver une direction (selon le signe de a) dans laquelle l'exponentielle l'emportera : quitte à remplacer t par $\mathrm{sgn}(a)t$ avec $t \to +\infty$, on a

$$\forall t \geqslant 0 \qquad (1+t)^N e^{|a|t-t} \leqslant C.$$

Si $|a| > 1$ alors, par croissances comparées, l'exponentielle l'emportera : $\lim_{t\to+\infty}(1+t)^N e^{|a|t-t} = +\infty$. Donc $|a| \leqslant 1$.

- Réciproquement si $a \in [-1,1]$ alors $|e^{iaz}| = e^{-a\,\mathrm{Im}(z)} \leqslant e^{|\,\mathrm{Im}(z)|}$. Donc $f \in \mathcal{H}^0(\mathbf{R})$ et a fortiori $f \in \mathcal{H}^{-\infty}(\mathbf{R})$.

29. Par définition, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ on a $T_F(\varphi) = \int_{\mathbf{R}} F(\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi$. Justifions que la fonction $F\varphi$ est intégrable. Elle est continue, ce qui prouve que le problème d'intégrabilité a lieu en $\pm\infty$. On utilise alors l'information $F \in \mathcal{H}^{-\infty}(\mathbf{R})$ pour majorer

$$\exists N \in \mathbf{Z} \qquad \forall \xi \in \mathbf{R} \qquad |F(\xi)\varphi(\xi)| \leqslant C(1+|\xi|)^{-N}|\varphi(\xi)|.$$

Comme φ appartient à l'espace de Schwartz, on a une majoration de la forme $|\varphi(\xi)| \leqslant \frac{C_k}{(1+|\xi|)^k}$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. Si l'on choisit k assez grand de sorte que $k+N \geqslant 2$ alors on obtient une majoration de la forme

$$|F(\xi)\varphi(\xi)| \leqslant \frac{C}{(1+|\xi|)^2} \in L^1(\mathbf{R}).$$

Cela prouve l'intégrabilité recherchée si bien que T_F est bien définie.

On choisit $k = 2+|N|$ (pour être sûr d'avoir $k+N \geqslant 2$ quel que soit le signe de $N \in \mathbf{Z}$). La preuve précédente montre de plus que l'on a

$$|\langle T_F, \varphi\rangle| \leqslant C \underbrace{\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{(1+|\xi|)^2}}_{\text{fini}} \times \sup_{\xi\in\mathbf{R}} (1+|\xi|)^{2+|N|}|\varphi(\xi)|.$$

Or on a $(1+|\xi|)^{2+|N|} \leqslant C'(1+|\xi|^{2+|N|})$ (argument vu en Q25b). Cela implique une estimation de continuité de T_F en tant que distribution tempérée :

$$|\langle T_F, \varphi\rangle| \leqslant C'' \max_{\substack{k\in\mathbf{N}\\ k\leqslant 2+|N|}} \sup_{\xi\in\mathbf{R}} |\xi|^k|\varphi(\xi)|.$$

30.a) L'inégalité de l'indication est facile : $|x| \leqslant |x-y|+|y|$ puis

$$|x-y| \leqslant (|x-y|^k+|y|^k)^{1/k} \qquad \text{et} \qquad |y| \leqslant (|x-y|^k+|y|^k)^{1/k}.$$

Par sommation, on obtient le majorant escompté $2(|x-y|^k+|y|^k)^{1/k}$.

Pour l'argument par convexité, on invoque la convexité de $t \mapsto t^k$ (on obtiendrait même une meilleure constante) :

$$\begin{aligned} |x|^k \leqslant (|x-y|+|y|)^k &= 2^k\left(\frac{|x-y|+|y|}{2}\right)^k \\ &\leqslant \frac{2^k}{2}(|x-y|^k+|y|^k). \end{aligned} \tag{3.36}$$

Les deux points à justifier sont que $\varphi \star u_n$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ et que l'on a une estimation de continuité pour U_n. Le premier point a été rappelé et admis dans la page de rappel relative à la théorie des distributions. Montrons donc l'estimation de continuité de U_n. L'estimation de continuité de T nous permet d'écrire pour une certaine constante $C>0$ et un entier $N \in \mathbf{N}$:

$$|\langle U_n, \varphi\rangle| = |\langle T, \varphi\star u_n\rangle| \leqslant C \sum_{\substack{(k,\ell)\in\mathbf{N}^2\\ \max(k,\ell)\leqslant N}} \sup_{x\in\mathbf{R}} |x^k(\varphi\star u_n)^{(\ell)}(x)|.$$

Par ailleurs, la formule de convolution $(\varphi \star u_n)^{(\ell)} = \varphi^\ell \star u_n$ est bien connue. On écrit ensuite (grâce à la définition du produit de convolution et à l'indication et la notation $C_{k,\ell}(\varphi) = \sup\limits_{x\in\mathbf{R}} |x^k\varphi^{(\ell)}(x)|$) :

$$
\begin{aligned}
|x|^k|(\varphi^\ell \star u_n)(x)| &= |x|^k \left|\int_{\mathbf{R}} \varphi^{(\ell)}(x-y)u_n(y)\mathrm{d}y\right| &(3.37)\\
&\leqslant 2^k \int_{\mathbf{R}} |x-y|^k|\varphi^{(\ell)}(x-y)|u_n(y)\mathrm{d}y &(3.38)\\
&\quad +2^k \int_{\mathbf{R}} |y|^k|\varphi^{(\ell)}(x-y)|u_n(y)\mathrm{d}y &(3.39)\\
&\leqslant 2^k C_{k,\ell}(\varphi)\int_{\mathbf{R}} u_n(y)\mathrm{d}y + 2^k C_{0,\ell}(\varphi)\int_{\mathbf{R}} |y|^k u_n(y)\mathrm{d}y &(3.40)\\
&\leqslant 2^k C_{k,\ell}(\varphi)\times 1 + 2^k C_{0,\ell}(\varphi)\times \frac{1}{n^k}\underbrace{\int_{\mathbf{R}} u_n(y)\mathrm{d}y}_{=1}.
\end{aligned}
$$

En combinant toutes ces inégalités, cela donne une majoration de $|\langle U_n,\varphi\rangle|$ en fonction de $\max\limits_{\max(k,\ell)\leqslant N} C_{k,\ell}(\varphi)$.

30.b) Par définition de la transformée de Fourier d'une distribution tempérée, on a

$$\langle \widehat{U_n},\varphi\rangle = \langle U_n,\widehat{\varphi}\rangle = \langle T,\widehat{\varphi}\star u_n\rangle.$$

On souhaite faire intervenir F via la relation $T_F = \widehat{T}$. Pour exploiter également la définition de la transformée de Fourier de T, on a manifestement besoin d'écrire $\widehat{\varphi}\star u_n$ comme une transformée de Fourier d'un élément de $\mathcal{S}(\mathbf{R})$. Or la transformée de Fourier transforme (modulo perte multiplicative d'une constante) produit de convolution en produit usuel. Il suffit donc d'écrire u_n comme une transformée de Fourier. La formule d'inversion s'écrit $u_n(-x) = \frac{1}{2\pi}\widehat{\widehat{u_n}}(x)$ mais comme u_n est paire cela donne $u_n = \frac{1}{2\pi}\widehat{\widehat{u_n}}$.
On vérifie que l'on a (grâce aux rappels admis) :

$$\widehat{\varphi}\star u_n = \widehat{\varphi}\star\frac{1}{2\pi}\widehat{\widehat{u_n}} = \widehat{\varphi\widehat{u_n}}.$$

On peut alors continuer le calcul

$$\langle \widehat{U_n},\varphi\rangle = \langle T,\widehat{\varphi\widehat{u_n}}\rangle = \langle \widehat{T},\varphi\widehat{u_n}\rangle = \langle T_F,\varphi\widehat{u_n}\rangle = \int_{\mathbf{R}} F(\xi)\varphi(\xi)\widehat{u_n}(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Enfin, partant de $u_n(x) = nu(nx)$, un changement de variable linéaire donne $\widehat{u_n}(\xi) = \widehat{u}(\frac{\xi}{n})$.

30.c) Afin d'exploiter la question 26, examinons comment $\Psi_n(\xi) = F(\xi)\widehat{u}(\xi/n)$ peut être prolongé holomorphiquement sur $\mathbf{C}$:

• la fonction F appartient à $\mathcal{H}^{-\infty}(\mathbf{R})$ donc admet un prolongement holomorphe (que l'on note encore F) vérifiant $|F(z)| \leqslant C(1+|z|)^{-N}e^{|\operatorname{Im}(z)|}$ pour tout $z\in\mathbf{C}$ et pour un certain $N\in\mathbf{Z}$ fixé ;

• la fonction u appartient à $\mathcal{D}^\infty(\mathbf{R})$ si bien que $\widehat{u}$ admet un prolongement holomorphe sur $\mathbf{C}$ (que l'on note encore $\widehat{u}$) vérifiant (voir la question 26) :

$$\forall N'\in\mathbf{N}\qquad \forall z\in\mathbf{C}\qquad |\widehat{u}(z)| \leqslant C_{N'}(1+|z|)^{-N'}e^{|\operatorname{Im}(z)|}.$$

On déduit que Ψ_n admet un prolongement holomorphe sur $\mathbf{C}$ vérifiant

$$\exists N\in\mathbf{Z}\quad \forall N'\in\mathbf{N}\qquad \forall z\in\mathbf{C}\qquad |\Psi_n(z)| \leqslant C_{N,N'}(1+|z|)^{-N-N'}e^{(1+\frac{1}{n})|\operatorname{Im}(z)|}.$$

Comme N est fixé et que N' est arbitraire, cela se reformule

$$\forall N'' \in \mathbf{N} \qquad \forall z \in \mathbf{C} \qquad |\Psi_n(z)| \leqslant C_{N''}(1+|z|)^{-N''} e^{(1+\frac{1}{n})|\operatorname{Im}(z)|}.$$

Quitte à diviser z par $1+\frac{1}{n}$ et changer $C_{N''}$, on a une estimation de la forme

$$\forall N'' \in \mathbf{N} \qquad \forall z \in \mathbf{C} \qquad \left|\Psi_n\Big(\frac{z}{1+\frac{1}{n}}\Big)\right| \leqslant C_{N''}(1+|z|)^{-N''} e^{|\operatorname{Im}(z)|}.$$

De nouveau, la question 26 assure l'existence d'une fonction $g_n \in \mathcal{D}^\infty(\mathbf{R})$ telle que

$$\forall \xi \in \mathbf{R} \qquad \Psi_n\Big(\frac{\xi}{1+\frac{1}{n}}\Big) = \widehat{g_n}(\xi)$$

ou encore

$$\forall \xi \in \mathbf{R} \qquad \Psi_n(\xi) = \widehat{g_n}\Big(\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\xi\Big).$$

30.d) Par injectivité de la transformée de Fourier, il suffit de justifier l'existence de f_n telle que $\widehat{U_n} = \widehat{T_{f_n}}$. Or $\widehat{U_n} = T_{\Psi_n}$ et $\widehat{T_{f_n}} = T_{\widehat{f_n}}$. Par conséquent, il suffit d'avoir $\Psi_n = \widehat{f_n}$. D'après la question précédente, il suffit d'avoir

$$\forall \xi \in \mathbf{R} \qquad \widehat{g_n}\Big(\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\xi\Big) = \widehat{f_n}(\xi).$$

Un changement de variable linéaire montre aisément que $f_n(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} g_n\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}x\right)$ convient (fonction qui est manifestement de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support dans $[-(1+\frac{1}{n}), 1+\frac{1}{n}]$).

31.a) Comme $\varphi^{(\ell+1)} \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, on a une estimation de la forme $|\varphi^{(\ell+1)}(t)| \leqslant \frac{C}{(1+|t|)^k}$. Cela implique que pour tout $x \in \mathbf{R}$ et $t \in [x-1, x+1]$

$$|\varphi^{(\ell+1)}(t)| \leqslant \frac{C}{(1+\min(|x-1|,|x+1|))^k}.$$

On pourra conclure directement si l'on prouve une minoration de la forme

$$1+|x| \leqslant C'(1+\min(|x-1|,|x+1|)).$$

Argument 1. La fonction $x \in \mathbf{R} \mapsto \frac{1+|x|}{1+\min(|x-1|,|x+1|)}$ est continue et tend manifestement vers 1 en $\pm\infty$. Elle est donc bornée.

Argument 2. On pourrait également découper en trois zones :

$$\begin{aligned} x \in [-2,2] \qquad &\Rightarrow \qquad 1+|x| \leqslant 3 \leqslant 3(1+\min(|x-1|,|x+1|)) \\ x > 2 \qquad &\Rightarrow \qquad 1+|x| = 1+x \leqslant \frac{3}{2}x = \frac{3}{2}(1+\min(|x-1|,|x+1|)) \end{aligned} \tag{3.41}$$

la zone $x < -2$ se traite de même.

31.b) Il suffit de comprendre le cas $\ell = 0$ car $(\varphi \star u_n)^{(\ell)} = \varphi^{(\ell)} \star u_n$ et que $\varphi^{(\ell)} \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$. On suppose désormais $\ell = 0$. Comme $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} u_n(y)\mathrm{d}y = 1$ et que u_n est à support dans $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$, on a

$$\begin{aligned} x^k(\varphi \star u_n)(x) - x^k\varphi(x) &= x^k \int_{\mathbf{R}} (\varphi(x-y) - \varphi(x))u_n(y)\mathrm{d}y \\ |x^k(\varphi \star u_n)(x) - x^k\varphi(x)| &\leqslant |x|^k \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |(\varphi(x-y) - \varphi(x)|u_n(y)\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{3.42}$$

L'inégalité des accroissements finis autorise à majorer $|(\varphi(x-y)-\varphi(x)|$ par $|y| \sup_{t\in[x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n}]} |\varphi'(t)|$ ou encore grâce à la question précédente

$$|x^k(\varphi \star u_n)(x) - x^k\varphi(x)| \leqslant C\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |y|u_n(y)\mathrm{d}y.$$

avec C indépendant de n et x. Le dernier majorant est lui-même majoré par $\frac{C}{n}\int_{\mathbf{R}} u_n(y)dy = \frac{C}{n}$ qui est indépendant de x et tend donc uniformément vers 0 pour $n \to +\infty$.

32. Revenons à la définition rappelée dans l'énoncé de l'inclusion $\mathrm{Supp}(T) \subset [-1,1]$. Fixons une fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ dont le support est un fermé inclus dans l'ouvert $[-1,1]^c$. On souhaite montrer que l'on a $\langle T,\varphi\rangle = 0$. La question précédente montre que pour les semi-normes de $\mathcal{S}(\mathbf{R})$, la suite de fonctions $(\varphi \star u_n)$ converge vers φ. Il s'ensuit que l'on a

$$\lim_{n\to+\infty}\langle T,\varphi\star u_n\rangle = \langle T,\varphi\rangle$$

(cela se montre en fait directement en majorant $|\langle T,\varphi\star u_n - \varphi\rangle|$ avec les estimations de continuité de la distribution T et de la question précédente).

Or les questions précédentes montrent également que l'on a

$$\langle T,\varphi\star u_n\rangle = \langle U_n,\varphi\rangle = \int_{-(1+\frac{1}{n})}^{1+\frac{1}{n}} f_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Comme $\mathrm{Supp}(\varphi)$ est un fermé disjoint du compact $[-1,1]$, on sait que la distance entre ces deux ensembles est strictement positive. Pour n assez grand, le fermé $\mathrm{Supp}(\varphi)$ est donc disjoint de $\big[-(1+\frac{1}{n}),1+\frac{1}{n}\big]$. Cela prouve que $\displaystyle\int_{-(1+\frac{1}{n})}^{1+\frac{1}{n}} f_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = 0$ et donc $\langle T,\varphi\star u_n\rangle = 0$. Cela achève de prouver que $\langle T,\varphi\rangle = 0$.

33.a) Comme μ est une mesure de probabilité, on a directement $|\langle M,\varphi\rangle| \leqslant \sup_{x\in\mathbf{R}}|\varphi(x)|$.

33.b) C'est grosso modo le même argument que celui employé à la question 28.b. Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, on a

$$\langle \widehat{M},\varphi\rangle = \langle M,\widehat{\varphi}\rangle = \int_{\mathbf{R}} \widehat{\varphi}(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathbf{R}}\left(\int_{\mathbf{R}} e^{-ix\xi}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\mu(x).$$

On est en pleine application du théorème de Fubini-Lebesgue car

$$\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} |e^{-ix\xi}\varphi(\xi)|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathbf{R}}|\varphi(\xi)|\mathrm{d}\xi < +\infty.$$

On a donc

$$\langle \widehat{M},\varphi\rangle = \int_{\mathbf{R}}\left(\int_{\mathbf{R}} e^{-ix\xi}\mathrm{d}\mu(x)\right)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbf{R}}\Phi(-\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

La fonction $f:\xi\mapsto\Phi(-\xi)$ convient (on rappelle que l'on a $\mathbf{E}[e^{i\xi X}] = \displaystyle\int_{\mathbf{R}} e^{i\xi x}\mathrm{d}\mu(x)$ d'après la formule de transfert).

33.c) Question de synthèse difficile. Comme $\Phi \in \mathcal{H}^{-\infty}(\mathbf{R})$ et comme la définition de $\mathcal{H}^{-\infty}(\mathbf{R})$ est clairement invariante en remplaçant z par $-z$, on déduit que f appartient aussi à $\mathcal{H}^{-\infty}(\mathbf{R})$. D'après les résultats précédents, il existe une (unique) distribution T à support dans $[-1,1]$ telle que $\widehat{T} = T_f$. Par injectivité de la transformée de Fourier, on a donc $T = M$. On a donc récupéré l'information suivante : la distribution M est à support dans $[-1, 1]$ au sens de la théorie des distributions (on va montrer que cela implique que la mesure μ est à support dans $[-1, 1]$).

On veut maintenant prouver les égalités $\P(X > 1) = \P(X < -1) = 0$. Examinons la première probabilité (la seconde est totalement identique) et considérons, pour tout nombre rationnel $a > 1$ la fonction φ_a de l'indication. On a clairement $\mathrm{Supp}(\varphi_a) \subset [a, +\infty[\subset [-1, 1]^c$. Par définition du support d'une distribution, on a $\langle M, \varphi_a \rangle = 0$, c'est-à-dire

$$\int_{\mathbf{R}} \varphi_a(x) \mathrm{d}\mu(x) = 0.$$

On souhaite montrer l'égalité $\mu(]1, +\infty[) = 0$.

Première argumentation possible. Comme $\varphi_a \geqslant 0$, la théorie de la mesure implique que $\varphi_a(x) = 0$ pour μ-presque tout $x \in \mathbf{R}$. Autrement dit, l'ensemble $\{x \in \mathbf{R}, \varphi_a(x) > 0\}$ est de mesure nulle pour μ, c'est-à-dire

$$\mu(]a, +\infty[) = 0.$$

Comme a parcourt un ensemble dénombrable, on a également :

$$\mu(]1, +\infty[) = \mu\Big(\bigcup_{\substack{a>1 \\ a\in\mathbf{Q}}}]a, +\infty[\Big) \leqslant \sum_{\substack{a>1 \\ a\in\mathbf{Q}}} \mu(]a, +\infty[) = 0.$$

Variante de l'argument précédent. Fixons un segment $[c, d]$ à extrémités rationnelles inclus dans $]1, +\infty[$. Soit $a \in \mathbf{Q}$ tel que $1 < a < c$. On a

$$0 = \int_{\mathbf{R}} \varphi_a(x) \mathrm{d}\mu(x) \geqslant \int_c^d \varphi_a(x) \mathrm{d}\mu(x) \geqslant \inf_{c \leqslant x \leqslant d} \varphi_a(x) \underbrace{\int_c^d \mathrm{d}\mu(x)}_{=\mu([c,d])}.$$

Comme la borne inférieure de φ_a est strictement positive (d'après les hypothèses faites sur φ_a), on déduit que $\mu([c, d]) = 0$. Par suite

$$\mu(]1, +\infty[) = \mu\Big(\bigcup_{\substack{c>1 \\ c\in\mathbf{Q}}} \bigcup_{\substack{d>c \\ d\in\mathbf{Q}}} [c, d]\Big) \leqslant \sum_{\substack{c>1 \\ c\in\mathbf{Q}}} \sum_{\substack{d>c \\ d\in\mathbf{Q}}} \mu([c, d]) = 0.$$

34.a) On va d'abord traiter le cas $x \geqslant 0$: comme $\chi(1) = 1$ et $\chi(2) = 0$, il est naturel de chercher s_δ de sorte que

$$s_\delta(1 + \delta) = 1 \qquad \text{et} \qquad s_\delta(1 + 2\delta) = 2.$$

Par interpolation de degré 1, on trouve facilement $s_\delta(x) = 1 + \frac{1}{\delta}(x - 1 - \delta) = \frac{x-1}{\delta}$.

La fonction $\chi_\delta : x \in \mathbf{R} \mapsto \chi(s_\delta(|x|)) \in \mathbf{R}$ vérifie les conditions i) et ii).

Il reste à montrer iii). Montrons d'abord que χ_δ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (malgré la présence d'une valeur absolue !). Le caractère $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}\backslash\{0\}$ ne pose aucun problème par composition. Au voisinage de $x = 0$, le nombre $s_\delta(0)$ est au voisinage de $1 + \frac{1}{\delta}(-1 - \delta) = -\frac{1}{\delta} \in]-\infty, -1]$. Comme χ est constante sur $]-\infty, 1]$, il n'y a aucun problème de régularité en $x = 0$. Enfin, la condition iii) est évidente, car il suffit de se restreindre à $x \geqslant 0$ et de calculer

$$\chi_\delta^{(m)}(x) = \delta^{-m} \chi^{(m)}(s_\delta(x)).$$

Remarque : on peut être plus rigoureux dans la preuve de la régularité au voisinage de 0 (même si l'argument précédent est convaincant) : comme la fonction affine s_δ est strictement croissante, on a pour tout réel x :

$$\begin{aligned} |x| < 1 + \delta &\Rightarrow s_\delta(|x|) < s_\delta(1 + \delta) = 1 \\ &\Rightarrow \chi(s_\delta(|x|)) = 0. \end{aligned} \tag{3.43}$$

34.b) On applique évidemment la formule de Leibniz :

$$(\chi_\delta f)^{(\ell)}(x) = \sum_{m=0}^{\ell} \frac{\ell!}{m!(\ell-m)!} \chi_\delta^{(\ell-m)}(x) f^{(m)}(x).$$

On notera que χ_δ et ses dérivées sont à support dans $[-1-2\delta, 1+2\delta]$ donc on peut restreindre la borne supérieure à cet intervalle. On peut majorer $|x^k|$ par $(1+2\delta)^k \leqslant 3^k$ et aussi (grâce à la question précédente) :

$$|\chi_\delta^{(\ell-m)}(x)| \leqslant C(\ell-m,\chi)\delta^{-(\ell-m)} \leqslant C'(\ell,\chi)\delta^{-\ell}\delta^m$$

avec la constante $C'(\ell,\chi) = \max_{0\leqslant m\leqslant \ell} C(m,\chi)$ ne dépendant que de ℓ et χ. Comme $\delta \in]0,1]$ on peut également majorer brutalement ainsi :

$$|\chi_\delta^{(\ell-m)}(x)| \leqslant C'(\ell,\chi)\delta^{-\ell}.$$

En combinant ces informations, on obtient

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} |x^k(\chi_\delta f)^{(\ell)}(x)| \leqslant \frac{3^k C'(\ell,\chi)}{\delta^\ell} \sum_{m=0}^{\ell} \frac{\ell!}{m!(\ell-m)!} \sup_{|x|\leqslant 1+2\delta} |f^{(m)}(x)|.$$

On peut conclure car les coefficients binomiaux sont bornés par une constante ne dépendant que de ℓ.

35.a) La fonction $\chi_{\delta,\xi}$ est tout simplement de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact (en l'occurrence $[-3,3]$) donc appartient à $\mathcal{S}(\mathbf{R})$.

Ensuite, si δ et δ' sont deux nombres dans $]0,1]$, on a

$$\langle T, \chi_{\delta,\xi}\rangle - \langle T, \chi_{\delta',\xi}\rangle = \langle T, \chi_{\delta,\xi} - \chi_{\delta',\xi}\rangle.$$

Or on a $\chi_{\delta,\xi}(x) - \chi_{\delta',\xi}(x) = (\chi_\delta(x) - \chi_{\delta'}(x))e^{-ix\xi}$ qui vaut 0 sur $[-(1+\min(\delta,\delta'), 1+\min(\delta,\delta')]$. C'est donc une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$. D'après la définition d'une distribution à support dans $[-1,1]$, on a

$$\langle T, \chi_{\delta,\xi} - \chi_{\delta',\xi}\rangle = 0.$$

35.b) Pour ξ fixé, l'idée est d'utiliser le développement en série entière $e^{-ix\xi} = \sum_{p\in\mathbf{N}} \frac{(-ix\xi)^p}{p!}$ et donc la formule $\chi_{1,\xi}(x) = \chi_1(x) \sum_{p\in\mathbf{N}} f_{p,\xi}(x)$ avec $f_{p,\xi}(x) = \frac{(-ix\xi)^p}{p!}$. On voudrait prouver une formule d'interversion

$$F(\xi) = \langle T, \chi_{1,\xi}\rangle = \sum_{p\in\mathbf{N}} \langle T, \chi_1 f_{p,\xi}\rangle. \tag{3.44}$$

En effet, admettons un instant cette interversion. Le membre droit n'est autre que $\sum_{p\in\mathbf{N}} \xi^p \langle T, \chi_1 f_{p,1}\rangle$. Or vu que cette formule a été obtenue pour tout $\xi \in \mathbf{C}$, cela prouvera bien que l'on a bien obtenu un développement en série entière de F de rayon $+\infty$ et donc que F est holomorphe.

Prouvons donc (3.44). Comme T est une distribution tempérée, elle est continue par rapport à un nombre fini de semi-normes sur $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ données par

$$\|\varphi\|_{k,\ell} = \sup_{x\in\mathbf{R}} |x^k \varphi^{(\ell)}(x)|$$

Il suffit donc de prouver que la série de fonctions $\sum \chi_1 f_{p,\xi}$ converge vers $\chi_{1,\xi}$ par rapport à chacune de ces semi-normes, c'est-à-dire :

$$\lim_{q\to+\infty} \sup_{x\in\mathbf{R}} \left| x^k \frac{d^\ell}{dx^\ell}\left(\chi_{1,\xi} - \sum_{p=0}^{q} \chi_1 f_{p,\xi}\right)\right| = 0.$$

On peut invoquer la question 34.b, avec $f(x) = e^{-ix\xi} - \sum\limits_{p=0}^{q} f_{p,\xi}(x)$. Il suffit donc de prouver que l'on a

$$\forall m \in \mathbf{N} \qquad \lim_{q\to+\infty} \sup_{|x|\leqslant 3} \left| \frac{d^m}{dx^m}\left(e^{-ix\xi} - \sum_{p=0}^{q} f_{p,\xi}\right)\right| = 0.$$

Or comme ξ est fixé, on sait que les sommes partielles du développement en série entière de $x \mapsto e^{-ix\xi}$ (qui est de rayon infini) convergent uniformément sur tout compact et de même pour toutes les dérivées terme à terme (car de même rayon infini). Cela prouve bien la limite précédente.

35.c) Utilisons de nouveau les inégalités de continuité de T (pour un certain entier $N \in \mathbf{N}$) :

$$|\langle T, \chi_{\delta,\xi}\rangle| \leqslant C \sum_{\max(k,\ell)\leqslant N} \sup_{x\in\mathbf{R}} |x^k (\chi_{\delta,\xi})^{(\ell)}(x)|.$$

Par définition $\chi_{\delta,\xi}(x) = \chi_\delta(x) e^{-ix\xi}$, on peut invoquer la question 34.b, si bien que l'on obtient

$$\begin{aligned} |\langle T, \chi_{\delta,\xi}\rangle| &\leqslant C \sum_{\max(k,\ell)\leqslant N} \frac{C(\chi,k,\ell)}{\delta^\ell} \sum_{m=0}^{\ell} \sup_{|x|\leqslant 1+2\delta} \left| \frac{d^m}{dx^m}(e^{-ix\xi})\right| && (3.45) \\ &\leqslant C \sum_{\max(k,\ell)\leqslant N} \frac{C(\chi,k,\ell)}{\delta^\ell} \sum_{m=0}^{\ell} |\xi|^m e^{(1+2\delta)|\operatorname{Im}(\xi)|}. \end{aligned}$$

Choisissons $\delta = \frac{1}{1+|\xi|}$:

$$|\langle T, \chi_{\delta,\xi}\rangle| \leqslant C \sum_{\max(k,\ell)\leqslant N} C(\chi,k,\ell)(1+|\xi|)^\ell \sum_{m=0}^{\ell} |\xi|^m e^{\left(1+\frac{2}{1+|\xi|}\right)|\operatorname{Im}(\xi)|}.$$

La partie exponentielle $e^{\left(1+\frac{2}{1+|\xi|}\right)|\operatorname{Im}(\xi)|}$ est clairement majorée par $e^{|\operatorname{Im}(\xi)|} \times e^2$ car $|\operatorname{Im}(\xi)| \leqslant 1 + |\xi|$. Il reste donc

$$|\langle T, \chi_{\delta,\xi}\rangle| \leqslant Ce^2 \times e^{|\operatorname{Im}(\xi)|} \sum_{\max(k,\ell)\leqslant N} C(\chi,k,\ell)(1+|\xi|)^\ell \sum_{m=0}^{\ell} |\xi|^m.$$

La contribution totale des termes en $|\xi|$ est contrôlée par $(1+|\xi|)^{2N}$. Ce qui donne

$$|F(\xi)| = |\langle T, \chi_{\delta,\xi}\rangle| \leqslant C'(1+|\xi|)^{2N} e^{|\operatorname{Im}(\xi)|}.$$

Comme F est holomorphe sur $\mathbf{C}$, on a bien $F \in \mathcal{H}^{-\infty}(\mathbf{R})$.

36.a) Cela ressemble manifestement à une manipulation de sommes de Riemann !

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\lfloor\sqrt{q}\rfloor}^{\lfloor\sqrt{q}\rfloor} f(\xi)\mathrm{d}\xi - \frac{1}{q} \sum_{p=-q\lfloor\sqrt{q}\rfloor}^{q\lfloor\sqrt{q}\rfloor-1} f\left(\frac{p}{q}\right)\right| &= \left| \sum_{p=-q\lfloor\sqrt{q}\rfloor}^{q\lfloor\sqrt{q}\rfloor-1} \left(\int_{\frac{p}{q}}^{\frac{p+1}{q}} f(\xi)\mathrm{d}\xi - \frac{1}{q} f\left(\frac{p}{q}\right)\right)\right| && (3.46) \\ &= \left| \sum_{p=-q\lfloor\sqrt{q}\rfloor}^{q\lfloor\sqrt{q}\rfloor-1} \int_{\frac{p}{q}}^{\frac{p+1}{q}} f(\xi) - f\left(\frac{p}{q}\right)\mathrm{d}\xi\right| && (3.47) \\ &\leqslant \sum_{p=-q\lfloor\sqrt{q}\rfloor}^{q\lfloor\sqrt{q}\rfloor-1} \int_{\frac{p}{q}}^{\frac{p+1}{q}} |f(\xi) - f\left(\frac{p}{q}\right)|\mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

On invoque alors l'inégalité des accroissements finis pour obtenir les majorants suivants :

$$\sup_{t\in\mathbf{R}}|f'(t)|\times\sum_{p=-q\lfloor\sqrt{q}\rfloor}^{q\lfloor\sqrt{q}\rfloor-1}\int_{\frac{p}{q}}^{\frac{p+1}{q}}|\xi-\frac{p}{q}|\mathrm{d}\xi=\sup_{t\in\mathbf{R}}|f'(t)|\times\frac{2q\lfloor\sqrt{q}\rfloor}{2q^2}\leqslant\frac{\sup_{t\in\mathbf{R}}|f'(t)|}{\sqrt{q}}.$$

Remarque : si l'on n'avait pas intégré $|\xi-\frac{p}{q}|$ mais préféré majorer par $\frac{1}{q}$, on aurait obtenu $\frac{1}{q^2}$ à la place de $\frac{1}{2q^2}$.

36.b) Comme χ_1 est à support dans $[-3,3]$ et bornée (car continue), il suffit de prouver

$$\lim_{q\to+\infty}\sup_{|x|\leqslant 3}\left|\widehat{\varphi}(x)-\frac{1}{q}\sum_{p=-q\lfloor\sqrt{q}\rfloor}^{q\lfloor\sqrt{q}\rfloor}e^{\frac{-ixp}{q}}\varphi\left(\frac{p}{q}\right)\right|=0. \tag{3.48}$$

Si on découpe $\widehat{\varphi}(x)=\displaystyle\int_{\mathbf{R}}e^{-ix\xi}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi$ suivant l'indication, alors la question précédente suggère de prouver les limites suivantes :

$$\lim_{q\to+\infty}\sup_{|x|\leqslant 3}\left|\int_{-\lfloor\sqrt{q}\rfloor}^{\lfloor\sqrt{q}\rfloor}e^{-ix\xi}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi-\frac{1}{q}\sum_{p=-q\lfloor\sqrt{q}\rfloor}^{q\lfloor\sqrt{q}\rfloor-1}e^{\frac{-ixp}{q}}\varphi\left(\frac{p}{q}\right)\right|=0, \tag{3.49}$$

$$\lim_{q\to+\infty}\sup_{|x|\leqslant 3}\left|\int_{|\xi|>\lfloor\sqrt{q}\rfloor}e^{-ix\xi}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi\right|=0, \tag{3.50}$$

$$\lim_{q\to+\infty}\frac{1}{q}\sup_{x\in\mathbf{R}}\left|e^{-ix\lfloor\sqrt{q}\rfloor}\varphi(\lfloor\sqrt{q}\rfloor)\right|=0. \tag{3.51}$$

En effet, l'inégalité triangulaire impliquera alors (3.48).

Preuve de (3.51)**.** Comme φ est bornée (car appartient à $\mathcal{S}(\mathbf{R})$), on a une borne directe en $\mathcal{O}(1/q)$ qui tend vers 0.

Preuve de (3.49)**.** On utilise la question précédente avec x fixé et $f(\xi)=e^{-ix\xi}\varphi(\xi)$. On peut alors majorer la partie après $\lim\limits_{q\to+\infty}$ dans (3.49) par

$$\begin{aligned}\sup_{|x|\leqslant 3}\frac{1}{\sqrt{q}}\sup_{\xi\in\mathbf{R}}|f'(\xi)|&=\sup_{|x|\leqslant 3}\frac{1}{\sqrt{q}}\sup_{\xi\in\mathbf{R}}|-ixe^{-ix\xi}\varphi(\xi)+e^{-ix\xi}\varphi'(\xi)| \\ &\leqslant\frac{3\sup_{\xi\in\mathbf{R}}|\varphi(\xi)|+\sup_{\xi\in\mathbf{R}}|\varphi'(\xi)|}{\sqrt{q}}.\end{aligned} \tag{3.52}$$

Or comme $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbf{R})$, les fonctions φ et φ' sont bornées. On obtient donc bien (3.49) pour $q\to+\infty$.

Preuve de (3.50)**.** Il suffit de majorer grossièrement

$$\left|\int_{|\xi|>\lfloor\sqrt{q}\rfloor}e^{-ix\xi}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi\right|\leqslant\int_{|\xi|>\lfloor\sqrt{q}\rfloor}|\varphi(\xi)|\mathrm{d}\xi$$

et d'invoquer l'inclusion $\mathcal{S}(\mathbf{R})\subset L^1(\mathbf{R})$ et la limite $\lim\limits_{q\to+\infty}\lfloor\sqrt{q}\rfloor=+\infty$ pour conclure.

36.c) D'après la question 34.b, il suffit de prouver

$$\forall m\in\mathbf{N}\qquad\lim_{q\to+\infty}\sup_{|x|\leqslant 3}\left|\frac{d^m}{dx^m}\left(\widehat{\varphi}(x)-\frac{1}{q}\sum_{p=-q\lfloor\sqrt{q}\rfloor}^{q\lfloor\sqrt{q}\rfloor}e^{\frac{-ixp}{q}}\varphi\left(\frac{p}{q}\right)\right)\right|=0.$$

Or on a $\widehat{\varphi}(x) = \int_{\mathbf{R}} e^{-ix\xi}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi$ et l'on sait que, puisque $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, que l'on peut intervertir dérivation et intégrale :

$$\frac{d^m}{dx^m}\widehat{\varphi}(x) = \int_{\mathbf{R}} e^{-ix\xi}(-i\xi)^m\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Mais on a aussi

$$\frac{d^m}{dx^m}\frac{1}{q}\sum_{p=-q\lfloor\sqrt{q}\rfloor}^{q\lfloor\sqrt{q}\rfloor} e^{\frac{-ixp}{q}}\varphi\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q}\sum_{p=-q\lfloor\sqrt{q}\rfloor}^{q\lfloor\sqrt{q}\rfloor} e^{\frac{-ixp}{q}}\left(-\frac{ip}{q}\right)^m\varphi\left(\frac{p}{q}\right).$$

Par ailleurs, la fonction $\xi \mapsto (-i\xi)^m\varphi(\xi)$ appartient à l'espace de Schwartz. On peut donc invoquer la preuve de la question précédente pour conclure grâce à la formule (3.48) (en changeant la fonction φ).

37. Étape 1. Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, on veut montrer la formule $\langle \widehat{T}, \varphi\rangle = \int_{\mathbf{R}} F(\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi$. Par définition de la transformée de Fourier d'une distribution, le membre gauche vaut

$$\langle T, \widehat{\varphi}\rangle.$$

Étape 2. Ensuite, la question précédente fournit une suite de fonctions de l'espace de Schwartz qui converge vers $\chi_1\widehat{\varphi}$ au sens de toutes les semi-normes de l'espace de Schwartz. Comme T est une distribution tempérée (c'est-à-dire continue par rapport aux semi-normes de $\mathcal{S}(\mathbf{R})$), on déduit que l'on a

$$\langle T, \chi_1\widehat{\varphi}\rangle = \lim_{q\to+\infty}\langle T, \varphi_q\rangle \qquad \text{avec} \qquad \varphi_q(x) = \frac{\chi_1(x)}{q}\sum_{p=-q\lfloor\sqrt{q}\rfloor}^{q\lfloor\sqrt{q}\rfloor} e^{\frac{-ixp}{q}}\varphi\left(\frac{p}{q}\right)$$

que l'on préfère écrire

$$\varphi_q(x) = \frac{1}{q}\sum_{p=-q\lfloor\sqrt{q}\rfloor}^{q\lfloor\sqrt{q}\rfloor}\varphi\left(\frac{p}{q}\right)\chi_1(x)e^{\frac{-ixp}{q}}.$$

Étape 3. Le lien entre les deux précédentes étapes est que l'on a la formule

$$\langle T, \widehat{\varphi}\rangle = \langle T, \chi_1\widehat{\varphi}\rangle.$$

En effet, comme T est à support dans $[-1, 1]$, on a $\langle T, \chi_1\widehat{\varphi}\rangle - \langle T, \widehat{\varphi}\rangle = \langle T, (\chi_1 - 1)\widehat{\varphi}\rangle$ et $(\chi_1 - 1)\widehat{\varphi}$ s'annule identiquement sur $[-2, 2]$, donc son support est inclus dans l'ouvert $[-1, 1]^c$. La définition du support d'une distribution montre bien que $\langle T, (\chi_1 - 1)\widehat{\varphi}\rangle = 0$.

Étape 4. Par linéarité de T et par définition de F (voir après la question 35.a), cela donne

$$\langle T, \widehat{\varphi}\rangle = \lim_{q\to+\infty}\frac{1}{q}\sum_{p=-q\lfloor\sqrt{q}\rfloor}^{q\lfloor\sqrt{q}\rfloor}\varphi\left(\frac{p}{q}\right)F\left(\frac{p}{q}\right).$$

Notons que $F\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ et que $(F\varphi)' = F'\varphi + F\varphi'$. Grâce aux estimations $F \in \mathcal{H}^{-\infty}(\mathbf{R})$, $F' \in \mathcal{H}^{-\infty}(\mathbf{R})$ (d'après la question 21) et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, on voit que $(F\varphi)'$ est bornée. La question 36.a nous permet d'écrire

$$\frac{1}{q}\sum_{p=-q\lfloor\sqrt{q}\rfloor}^{q\lfloor\sqrt{q}\rfloor}\varphi\left(\frac{p}{q}\right)F\left(\frac{p}{q}\right) = \int_{-\lfloor\sqrt{q}\rfloor}^{\lfloor\sqrt{q}\rfloor} F(\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{q}}\right).$$

En faisant tendre $q \to +\infty$, l'intégrabilité de $F\varphi$ assure que l'on a

$$\langle T, \widehat{\varphi}\rangle = \int_{\mathbf{R}} F(\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Chapitre 4

Épreuves orales de leçons

4.1 Liste des leçons.

Leçons Algèbre et Géométrie 2024

101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

102 Groupe des nombres complexes de module 1. Racines de l'unité. Applications.

103 Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

104 Groupes finis. Exemples et applications.

105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

120 Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

121 Nombres premiers. Applications.

122 Anneaux principaux. Exemples et applications.

123 Corps finis. Applications.

125 Extensions de corps. Exemples et applications.

127 Exemples de nombres remarquables. Exemples d'anneaux de nombres remarquables. Applications.

141 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

142 PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.

144 Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.

148 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

149 Déterminant. Exemples et applications.

150 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

151 Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

152 Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

153 Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.

154 Exemples de décompositions de matrices. Applications.

155 Exponentielle de matrices. Applications.

156 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

157 Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

158 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

159 Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

161 Espaces vectoriels et espaces affines euclidiens : distances, isométries.

162 Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

170 Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité. Applications.

171 Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

181 Convexité dans $\mathbf{R}^n$. Applications en algèbre et en géométrie.

190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

191 Exemples d'utilisation de techniques d'algèbre en géométrie.

Leçons Analyse-Probabilités 2024

201 Espaces de fonctions. Exemples et applications.

203 Utilisation de la notion de compacité.

204 Connexité. Exemples d'applications.

205 Espaces complets. Exemples et applications.

206 Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse.

208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

209 Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples d'applications.

213 Espaces de Hilbert. Exemples d'applications.

214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Illustrations en analyse et en géométrie.

215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

218 Formules de Taylor. Exemples et applications.

219 Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

220 Illustrer par des exemples la théorie des équations différentielles ordinaires.

221 Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

223 Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

224 Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

228 Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

234 Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.

235 Problèmes d'interversion de symboles en analyse

236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

241 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

243 Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

244 Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.

245 Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbf{C}$. Exemples et applications.

246 Séries de Fourier. Exemples et applications.

250 Transformation de Fourier. Applications.

253 Utilisation de la notion de convexité en analyse.

261 Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.

262 Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.

264 Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

266 Utilisation de la notion d'indépendance en probabilités.

4.2 Présentation des épreuves

Modalités. Pour les épreuves de leçons, la candidate ou le candidat tire au sort un couple de sujets, et est libre de choisir le sujet qui lui plaît parmi ces deux sujets proposés, celui qui lui semble le plus à même de mettre en valeur ses connaissances, sans avoir à justifier ou commenter son choix devant le jury.

Les candidates et candidats préparent l'interrogation pendant 3 heures.

Durant tout ce temps, elles ou ils ont libre accès aux livres de la bibliothèque de l'agrégation ou à leurs propres ouvrages. Seuls sont autorisés les ouvrages avec un numéro ISBN et jouissant d'une véritable diffusion commerciale. L'attention des candidates et candidats est attirée sur le fait que l'ISBN ne suffit pas, une « diffusion commerciale avérée »est tout autant importante. Ainsi, un polycopié de cours, propre à un établissement, même muni d'un ISBN, pourra être refusé. Cette restriction est motivée par le principe d'égalité des candidats : les ressources documentaires autorisées doivent être facilement accessibles à tout candidat au concours. Les ouvrages imprimés par les candidats eux-mêmes (ou les bibliothèques universitaires, ou les préparations universitaires) ne sont pas autorisés et les livres doivent être vierges d'annotation. Tous les ouvrages personnels peuvent être interdits, lors de l'oral, sur simple décision du représentant du directoire présent lors de la préparation. Il n'est pas autorisé non plus de venir avec des livres dont certaines pages auraient été marquées au préalable, fût-ce de manière amovible, au moyen de post-it par exemple. (Il est toutefois possible de se munir de tels marque-pages à apposer durant la préparation.) Le représentant du directoire présent lors de la préparation peut interdire tout ouvrage personnel ou envoyé par une préparation universitaire. Les notes personnelles, manuscrites ou dactylographiées, ne sont autorisées ni pendant l'épreuve proprement dite, ni pendant la préparation. Il est possible, et même recommandé, de venir muni d'un exemplaire du rapport du jury de l'agrégation externe de mathématiques, relié et sans annotation. Quelques exemplaires du rapport sont à disposition des candidates et candidats dans chaque salle de préparation.

Les candidates et candidats n'ont pas accès à Internet et la possession d'un dispositif de communication ou de stockage de données (téléphone, calculatrice, clé USB, montre connectée,...) serait considérée comme une tentative de fraude, susceptible d'entraîner l'exclusion du concours.

Les casques de réduction de bruit ne sont pas autorisés, les candidates ou candidats qui désirent s'isoler des bruits peuvent apporter des bouchons d'oreille.

Le temps de préparation est décompté dès l'ouverture des enveloppes contenant les sujets. À l'issue des trois heures de préparation, les plans des leçons sont ramassés pour être photocopiés à l'intention des jurys. Pendant le temps nécessaire à cette reproduction, lescandidates et candidats sont invités à ranger leurs affaires et à prendre quelques minutes de repos.

Les plans sont des documents manuscrits, communiqués à la commission d'interrogation. Ils comportent *au maximum 3 pages* au format A4, éventuellement complétées d'une page de figures. Les candidats doivent veiller à la lisibilité de leur document, en tenant en compte le fait qu'ils vont être photocopiés : écrire suffisament gros, soigner la présentation, faire apparaître des titres, éviter l'utilisation de couleurs et les encres très claires... Le candidat doit clairement signaler sur ce plan les résultats qu'il estime significatifs, représentatifs de la leçon et qu'il propose de développer devant le jury.

L'épreuve s'organise en trois temps, prévus pour une durée totale de *55 minutes environ* : une présentation du plan de la leçon éventuellement suivie d'une brève discussion, un développement de 15 minutes maximum et enfin une partie consacrée au dialogue et aux questions. La candidate ou le candidat peut utiliser sa copie du plan pendant toute l'épreuve. Pendant la première phase de l'interrogation consacrée à la présentation du plan, il peut utiliser toutes les notes manuscrites produites durant la préparation. Le développement doit quant à lui se faire sans utiliser ces notes manuscrites ; si le plan comporte lui-même trop de détails sur les développements proposés, le jury peut restreindre l'utilisation de ce document durant cette seconde phase de l'épreuve.

Commentaires généraux. Le jury met en garde contre plusieurs écueils constatés :

— *le hors-sujet*. Le hors-sujet se manifeste de deux manières, qui dans tous les cas sont lourdement sanctionnées. Quelques candidates ou candidats prennent des libertés quant au libellé de la leçon et s'en écartent notablement : les titres des leçons définissent le champ précis qu'il faut traiter. Par ailleurs, le jury constate l'abus de « recyclage »de thèmes plus ou moins classiques, mais qui ne sont pas exploités avec à propos dans les leçons et qui, parfois, prennent une place sans commune mesure avec leur importance mathématique.

— *le manque d'autonomie et de maîtrise du sujet*. Probablement dûe à une mauvaise évaluation des attentes et un manque de lucidité, trop de candidates ou candidats proposent plan ou développements qu'ils ne peuvent défendre. Des connaissances des bases fermement maîtrisées et intelligemment utilisées valent mieux qu'un étalage de savoirs emmagasinés sans recul et à peine digérés, voire pas assimilés du tout. Une maîtrise avérée et solide des bases assure déjà une note très convenable, certainement de nature à permettre l'admission, en l'état du concours.

— *la fatigue et le stress*. Une grande majorité des candidates et candidats se présente avec une forte charge émotionnelle, à la mesure de l'enjeu et de leur investissement personnel, qui peut nuire à l'expression de leurs connaissances. Cela est d'autant plus vrai que l'épreuve ne se réduit pas à la simple récitation d'un cours mais à un échange avec le jury et donc, là encore, à une réflexion personnelle, à une prise de hauteur et à la démonstration, dans un temps court, non seulement de la maîtrise technique mais aussi de l'aptitude à construire un raisonnement. Le jury est pleinement conscient de ces difficultés et s'emploie à en réduire les effets négatifs en mettant en pratique une posture de bienveillance constante. Le jury ne cherche en rien à déstabiliser le candidat pendant l'épreuve, mais au contraire cherche à valoriser les connaissances de la candidate ou du candidat. Les premières questions, parfois très simples, visent souvent à préciser une notation, un point du plan ou du développement, pour que le jury s'assure de la compréhension par le candidat des notions qu'il vient d'exposer et non pour lui tendre un quelconque piège. Les membres du jury font leur possible pour mettre en confiance, respecter, et écouter la candidate ou le candidat, en stimulant le dialogue.

Une liste d'énoncés, quelque sophistiqués qu'ils soient, ne peut suffire à convaincre le jury. Il faut savoir motiver ces énoncés et pouvoir expliquer comment ils s'enchaînent et en quoi ils sont pertinents. Les leçons doivent donc être illustrées avec des exemples judicieusement choisis. De nombreux titres de leçons se terminent d'ailleurs par « exemples et applications » : le jury attend donc que le plan soit riche en exemples et applications et/ou que le candidat puisse en développer lors de la présentation de son plan.

Recommandations. On trouvera ci-dessous des commentaires sur chaque leçon de la session 2024, l'objectif étant d'expliciter les attendus du jury. Ces commentaires proposent volontairement deux niveaux de lecture :

- le premier s'en tient strictement au programme officiel, et n'interdit pas d'obtenir sans le dépasser une très bonne note ;

- le second réservé seulement aux candidates et candidats suffisamment solides pour aborder avec maîtrise des thèmes plus ambitieux.

Le premier niveau correspond aux notions « de base », incontournables pour l'intitulé proposé et dont la maîtrise est attendue des candidats. Le second propose des suggestions d'ouverture. Ces suggestions sont de niveaux variés et peuvent concerner des champs différents, par exemple qui trouvent leurs motivations dans des problématiques propres aux options de modélisation. Certaines pistes se placent aussi aux frontières du programme et peuvent faire écho à des sujets spécialisés abordés durant la formation du candidat. Il ne s'agit là que de propositions qui ne revêtent aucun caractère obligatoire, introduites par des formulations comme « pour aller plus loin »ou « si les candidats le désirent » ; le jury n'attend certainement pas un balayage exhaustif de ces indications et il n'est pas nécessaire de développer les éléments les plus sophistiqués pour obtenir une note élevée. Enfin, certains commentaires font part de l'expérience du jury pour évoquer le dosage pas toujours approprié entre théorie et exemples, souligner des points de faiblesse qui méritent une attention particulière ou mettre en garde contre de possibles écueils (oublis, hors-sujets, erreurs fréquentes, positionnement mal à propos, etc). Le jury espère que candidates et candidats, ainsi que les préparateurs, sauront se saisir de ces indications pour proposer des développements originaux : il n'y a pas de format standard et des manières différentes d'aborder les leçons peuvent toutes permettre d'obtenir d'excellents résultats.

Les leçons proposées ont toutes leurs spécificités qu'un principe unique ne saurait résumer ou englober. Une partie des sujets sont très délimités, alors que certains intitulés de leçons sont très ouverts et obligent la candidate ou le candidat à opérer des choix thématiques et de points de vue. Ces sujets sont pensés pour offrir de multiples points d'entrée, avec une échelle de niveaux techniques assez large, l'objectif étant de permettre à l'ensemble des candidats de s'exprimer au mieux et de mettre en valeur leurs connaissances. La pertinence des choix adoptés et leur motivation au regard de l'intitulé de la leçon entrent alors tout particulièrement dans l'appréciation, ainsi, bien entendu, que la maîtrise du contenu proposé. Ces leçons de synthèse exigent certainement un important recul ; elles réclament un effort conséquent de réflexion et méritent tout particulièrement d'être préparées en amont du concours. En retour, elles permettent de consolider un matériel mathématique qui peut être réinvesti avec profit dans d'autres thèmes.

Lorsque la leçon s'y prête, le jury recommande très fortement qu'un des développements démontre l'un des résultats centraux ou un enchaînement de résultats centraux de la leçon. Les prérequis du dréveloppement devront (ou doivent) alors être clairement pécisés."

4.2.1 Première partie : présentation de la leçon

Dans cette première phase de l'épreuve, la candidate ou le candidat est convié à utiliser son temps de parole, *6 minutes maximum*, pour présenter, argumenter, mettre en valeur et faire une synthèse de sa leçon.

Pour cette partie de l'épreuve, la candidate ou le candidat devrait s'imaginer dans la situation où il doit introduire à un auditoire, pendant 6 minutes, une leçon destinée ensuite à être développée sur plusieurs séances. Quel est l'intérêt du sujet ? Comment se positionne-t-il dans un paysage mathématique plus large ? Comment s'articulent les différentes sections qui composent la leçon ? Comment s'expliquent et se motivent les enchaînements ? Comment se hiérarchisent les résultats et les difficultés ? Il s'agit aussi de s'interroger sur les enjeux didactiques de la leçon, c'est-à-dire dans quel ordre et comment présenter les choses pour que le tout soit cohérent, compréhensible et pédagogiquement efficace. De plus, cette présentation gagne à être illustrée. Des exemples peuvent être utilisés pour mettre en évidence les difficultés, faire ressortir le rôle des hypothèses et décrire des applications met en valeur l'intérêt des résultats. Enfin, des figures peuvent aussi contribuer à expliquer les idées maîtresses. Si l'enjeu principal est d'argumenter la construction du plan de la leçon, il est aussi parfois pertinent de mettre en valeur les liens logiques et l'intérêt des notions présentées dans d'autres domaines (sans forcément les introduire dans le plan écrit).

Le rapport du concours indique des pistes pour chaque leçon ; il ne s'agit que de suggestions que le candidat n'est pas tenu de suivre et qui ne constituent pas une trame obligatoire pour le plan. Notamment le rapport distingue clairement le cœur des leçons et des extensions dont le contenu peut être techniquement plus exigeant. La vocation de ces commentaires n'est donc pas d'être repris de manière exhaustive ; il ne s'agit que de guider les candidats dans leur auto-évaluation et les encourager à présenter des notions avec lesquelles ils sont à l'aise. Notamment, ils peuvent tout à fait exploiter des notions ou des applications qui trouvent leur motivation dans les options de modélisation qu'ils ont choisies.

Le jury ne cherche pas des plans absolument originaux, le plus important est que le plan soit bien structuré, maîtrisé par la candidate ou le candidat et qu'y figure une quantité substantielle d'exemples et de mathématique. Le jury attend que la candidate ou le candidat fasse preuve d'un investissement personnel sur le sujet et qu'il explique pourquoi il adopte cette présentation. Le jury s'émeut du nombre important de candidates et candidats qui utilisent un plan *tout fait* disponible dans la littérature et se trouvent ensuite, faute de regard critique et d'appropriation suffisante, en difficulté de pouvoir l'expliquer, le commenter et le défendre. Le jury cherche aussi à vérifier la capacité à penser par soi-même et à réfléchir de manière autonome. Face à ce qui peut ressembler à une dérive, les livres contenant des plans rédigés sont interdits depuis le concours 2023. Le jury invite les candidates et candidats, durant leur année de préparation, à ne pas craindre de faire preuve de curiosité et de diversifier leurs lectures, afin de produire des plans à la fois plus synthétiques et plus hiérachisés, proposant des résultats et des exemples réellement maîtrisés et analysés.

Le jury se désole par ailleurs du très petit nombre de candidates et candidats qui ont le réflexe de faire un dessin, lorsque c'est pertinent, notamment durant le développement. C'est pourtant un moyen extrêmement efficace pour faire saisir l'idée d'une preuve ou motiver une méthode.

Il s'agit d'une épreuve *orale*. Le document écrit transmis au jury se justifie pour servir de base pour la discussion et constitue un fil conducteur qui guide le jury pour mener la partie consacrée au dialogue et aux questions. Ce plan ne doit être ni une énumération d'énoncés, ni un cours ou un exposé complet avec développement des démonstrations. En revanche, il doit définir avec suffisamment de précision les notions mathématiques introduites, donner les énoncés complets (notamment les hypothèses) des résultats fondamentaux, citer des exemples et des applications. Le plan est important puisqu'il calibre l'ensemble de la leçon, il détermine l'orientation et le niveau choisis par le candidat. Les choix doivent être motivés lors de la présentation et éventuellement lors de la discussion avec le jury. Il est nécessaire d'être en mesure de démontrer les résultats importants et de pouvoir les illustrer avec des exemples simples. Soigner la présentation d'un document écrit qui sert de support pour un cours est une compétence professionnelle importante du métier d'enseignant. Aussi, la formalisation mathématique et le français doivent être soignés, ainsi que la mise en forme, autant que possible dans le temps de préparation imparti : ces éléments ne peuvent que faciliter les interactions avec le jury. Il est inutile, voire contre-productif, de chercher à remplir à tout prix les 3 feuilles autorisées, surtout avec des éléments que la candidate ou le candidat ne maîtrise manifestement pas.

Pendant les 6 minutes de présentation, la candidate ou le candidat doit tenter de faire une synthèse de son plan en en expliquant les grandes lignes et les articulations. Il est inutile de recopier le plan au tableau, puisque le jury dispose d'une copie de ce document. Toutefois le jury encourage lescandidates et candidats à exploiter le tableau comme support pédagogique. Faire apparaître la structure de la leçon, illustrer une difficulté technique ou le principe d'une démonstration par une figure... permet à la candidate ou au candidat de s'affranchir de ses notes et rend l'exposé plus vivant. La présentation orale, la qualité d'expression, la compréhension synthétique, la plus-value de l'exposé par rapport au plan écrit, la capacité de la candidate ou du candidat à intéresser son auditoire sur une leçon donnée, constituent des éléments importants d'évaluation. Le jury se réjouit d'ailleurs des progrès constatés sur cette partie de l'épreuve.

Le jury attache une grande importance à la *maîtrise du plan* qui intervient de manière substantielle dans la grille de notation. Le plan ne peut être considéré comme maîtrisé si l'exposé ressemble à une récitation. Les résultats exposés doivent être compris ainsi que l'organisation d'ensemble de la leçon. Il est souhaitable que la candidate ou le candidat connaisse dans leurs grandes lignes les démonstrations des résultats figurant au programme du concours. Il est indispensable que la candidate ou le candidat ait une idée assez claire de la difficulté des démonstrations des résultats qu'il évoque dans son plan. Le jury rappelle qu'il n'est pas nécessaire de s'aventurer au-delà des contours du programme pour prétendre à une très bonne note ! Plus généralement, il vaut mieux se cantonner à un niveau où l'on se sait solide plutôt que de chercher à placer des énoncés débordant du programme mais sans le recul, ni l'assurance technique nécessaires. Bien entendu, réussir cette partie de l'épreuve ne s'improvise pas et le discours doit avoir été réfléchi durant la préparation de l'épreuve, et plus largement tout au long du parcours qui conduit les candidates et candidats jusqu'au concours.

À la fin de cette présentation de la leçon, le jury peut éventuellement questionner très brièvement la candidate ou le candidat et aborder quelques points techniques, sans entrer dans des détails qui retarderaient le début du développement.

4.2.2 Deuxième partie : le développement

Le jury demande au candidat de proposer *deux développements au moins*. Il s'agit de résultats représentatifs de la leçon que la candidate ou le candidat est en mesure d'exposer en détail et sans notes.

Proposer un seul développement ou des développements de niveaux trop disparates conduit à une minoration de la note. Ces propositions de développements doivent être clairement mentionnées sur le plan écrit et non pas vaguement évoquées à l'oral. Dans cet esprit, la candidate ou le candidat doit pouvoir motiver le choix des développements qu'il propose et en quoi ces résultats ou énoncés sont centraux ou jouent à ses yeux un rôle particulier sur le sujet. la candidate ou le candidat doit aussi préciser, sur son plan écrit, ce qu'elle ou il va démontrer et, le cas échéant, les résultats de son plan qu' elle ou il va admettre pour mener à bien son développement. Il faut prendre garde dans ce choix à ne pas déclarer admis un énoncé majeur qui, une fois acquis, rend l'objet du développement trivial. De même il faut prendre garde aux « raisonnements circulaires »en faisant appel à un énoncé qu'on interpréterait comme une conséquence de celui qu'on cherche à démontrer. De telles maladresses sont perçues comme un défaut de maîtrise et de recul qui est pénalisé.

Le jury choisit le développement qui va être effectivement exposé par la candidate ou le candidat. Lla candidate ou le candidat dispose de 15 minutes (maximum) pour mener à bien son développement. La gestion du temps est une des difficultés de l'épreuve. Un exposé trop court est le signe d'un sujet mal choisi, inapproprié au concours ; une démonstration inachevée dans le temps imparti témoigne d'un manque de maîtrise. Le jury demande de bien gérer son tableau, en particulier la candidate ou le candidat doit demander aux membres du jury l'autorisation d'effacer. Lors du développement, le jury attend de la candidate ou du candidat des explications sur la preuve et sur l'utilisation pertinente des notions développées durant l'exposé oral ; il peut être opportun, lors du développement, de se référer explicitement au plan présenté. Trop peu des candidates et candidats commencent leur développement par une rapide synthèse des grandes idées ou des étapes qui le composent. Expliquer l'approche adoptée, et les difficultés, au début du développement est une démarche pédagogique appréciée. Un ou plusieurs dessins peuvent aider à clarifier la discussion technique. Il est inutile de se précipiter ou de parler trop vite ; on veillera au contraire à préciser ses notations, à soigner sa présentation, à placer sa voix et à regarder de temps en temps le jury. Le développement ressemble parfois à une succession plus ou moins convaincante de résultats intermédiaires *ad hoc*. Cette phase de l'épreuve vise à mettre en valeur des qualités pédagogiques autant que techniques et l'exposé doit faire la preuve de la compréhension du sujet par la candidate ou le candidat. La récitation mécanique d'un développement ne peut pas être convaincante ; le jury veille à ce que les futurs enseignants comprennent ce qu'ils exposent et sachent exposer ce qu'ils comprennent. C'est une qualité essentielle d'une future agrégée ou d'un futur agrégé . Un choix judicieux des notations utilisées contribuent à la clarté de l'exposé ; par exemple il peut être maladroit de noter deux polynômes P et P'... surtout si on doit travailler avec les dérivées de ceux-ci. Enfin, même si le jury laisse évoluer d'une future agrégé durant son développement, en intervenant le moins possible, il peut, en cas de lacunes ou d'erreurs manifestes, l'interrompre pour demander des explications. Cette intervention ne donne pas droit à une extension du temps consacré au développement.

Le jury veille à la cohérence du plan et des propositions de développements. Il est souhaitable que la candidate ou le candidat recherche une adéquation entre le niveau auquel il souhaite se placer et les développements proposés. La candidate ou le candidat qui présenterait un développement non maîtrisé, manifestement mal compris ne serait pas avantagé.

Si le niveau de l'agrégation ne peut se cantonner aux notions abordées dans une classe de Terminale ou une première année post-bac, trop de candidates et candidats se lancent, curieusement, dans des propositions, parfois aux limites du programme, qui dépassent largement leur niveau technique. Dans un cas comme dans l'autre, il en résulte une appréciation négative. Le développement doit être en lien direct avec le thème de la leçon présentée. L'utilisation d'un résultat qui n'apparaît pas dans le plan écrit doit être explicitement signalée par le candidat. Toute utilisation d'un lemme non démontré et enfermant l'essence de la preuve est sanctionnée. Le jury peut exiger la démonstration d'un lemme admis, si celui-ci est essentiellement le cœur du développement. Il faut éviter de présenter ou d'utiliser un résultat préliminaire ou intermédiaire sans explication convaincante. Dans le cas d'un développement difficile, il ne faut pas négliger les cas élémentaires et les détails utiles à la compréhension du jury. Le jury déplore l'abus de certains développements plus ou moins classiques, qui ne sont pas toujours utilisés à bon escient et qui occupent parfois une place disproportionnée (l'ellipsoïde de JOHN, la décomposition de DUNFORD, le théorème de BERNSTEIN, le processus de GALTON-WATSON,...). Trop de candidates et candidats ont tendance à replacer exagérément et de manière inappropriée de tels développements et se retrouvent ainsi hors sujet, impair qui est sévèrement sanctionné. Il faut aussi veiller au fait que des thèmes peuvent être exploités dans des leçons différentes... mais avec des points de vue différents, qu'il faut savoir mettre en exergue.

Le programme du concours comprend maintenant un chapitre spécifique consacré aux méthodes numériques. Les candidates et candidats sont invités à explorer ce champ, éventuellement en s'appuyant sur leurs connaissances spécifiques à l'option de modélisation qu'ils ont choisie, pour proposer des développements originaux en lien avec l'analyse d'algorithmes de calcul. La description des leçons indique quelques pistes dans cette direction. Le jury se réjouit qu'un nombre croissant de candidates et candidats saisisse ces opportunités et espère que cette tendance, qui enrichit les contenus, se renforcera.

La pertinence des explications, le souci pédagogique, la capacité à mener à bien et complètement le sujet dans le temps imparti, l'aisance technique sont des éléments importants d'appréciation. Par ailleurs, la candidate ou le candidat doit s'attendre à être interrogé lors de la période de discussion sur des applications ou illustrations élémentaires de son développement. Il est donc essentiel de montest rer qu'on capable de reconnaître dans une question donnée un cas particulier simple du résultat général qu'il vient d'exposer.

4.2.3 Troisième partie : questions et dialogue

Le jury teste systématiquement la maîtrise du plan présenté. Une part importante de la discussion porte donc sur le plan, ou trouve sa source dans le plan présenté par la candidate ou le candidat . Il faut éviter que ce plan dépasse largement le niveau que l'on maîtrise. La candidate ou le candidat doit se préparer à des questions élémentaires voire considérées comme « évidentes »sur tout énoncé mis dans son plan, questions auxquelles il doit répondre avec précision. Des candidates ou candidats après des prestations relevées ont parfois pu être surpris par de telles questions portant sur les bases ; elles sont pourtant quasi-systématiques, le jury souhaitant précisément s'assurer de la maîtrise de ces bases. Le jury peut aussi proposer des calculs illustrant les notions évoquées par le plan.

Cette phase de l'épreuve requiert un certain recul qui ne peut être que le fruit d'un travail de préparation approfondi en amont du concours où l'on doit se demander si on est capable de mettre en œuvre des énoncés sur des situations simples et, pour certains théorèmes, réfléchir à des exemples ou des contre-exemples.

Les réponses aux questions des examinateurs ne prennent pas forcément une forme unique et ceux-ci se placent dans une posture de dialogue avec la candidate ou le candidat. Le jury pose aussi des exercices en rapport direct avec la leçon et le plan proposé mais ne s'attend pas à ce que le candidat trouve une solution immédiatement. Ces exercices ont plutôt pour objectif de voir évoluer le futur agrégé dans une démarche scientifique rigoureuse et méthodique. Le candidat doit réfléchir, utiliser son plan et rattacher l'exercice à sa leçon. Le fait de ne pas résoudre un exercice ne doit pas être perçu comme un échec et la candidate ou le candidat ne doit pas se décourager : plus qu'achever l'exercice, ce sont ses réactions qui importent (par exemple en identifiant l'énoncé de la leçon qui permettrait de traiter le problème et en se demandant si les hypothèses d'application sont satisfaites). Dans cette partie de l'épreuve, la candidate ou le candidat doit faire preuve de capacité d'écoute, qui est aussi évaluée ; il doit rester attentif aux suggestions du jury. Il est souvent utile d'exploiter le tableau pour bien reformuler la question, formaliser les pistes de réflexion et donner un support écrit à l'échange. Pendant cette discussion, le jury veille à laisser un temps raisonnable à la candidate ou au candidat pour réfléchir, sans le submerger de questions.

Enfin, l'objet du concours étant de recruter de futurs enseignants, le jury peut aussi, comme l'indique l'article 8 de l'arrêté du 25 juillet 2014, poser toute question qu'il juge utile *lui permettant d'apprécier la capacité de la candidate ou du candidat, en qualité de futur agent du service public d'éducation, à prendre en compte dans le cadre de son enseignement la construction des apprentissages des élèves et leurs besoins, à se représenter la diversité des conditions d'exercice du métier, à en connaître de façon réfléchie le contexte, les différentes dimensions (classe, équipe éducative, établissement, institution scolaire, société) et les valeurs qui le portent, dont celles de la République. Le jury peut, à cet effet, prendre appui sur le référentiel des compétences professionnelles des métiers du professorat et de l'éducation fixé par l'arrêté du 1er juillet 2013.*

4.3 Épreuve orale d'algèbre et géométrie

Comme y invite clairement l'intitulé de l'épreuve, les exemples et applications motivés par la géométrie sont particulièrement bienvenus. Les thèmes relevant de la théorie des groupes se prêtent tout particulièrement à de telles illustrations. De plus, les connaissances spécifiques à chacune des trois options A, B et C fournissent des exemples d'applications très appréciés par le jury.
Les notions de quotients sont importantes, il est important de savoir utiliser la projection canonique et de maîtriser le passage au quotient dans le cadre d'un morphisme.

101 : Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

Le matériel théorique en accord avec le programme doit être présenté, accompagné d'illustrations pertinentes. Il faut pouvoir dégager l'intérêt des notions introduites avec des exemples d'actions bien choisies pour obtenir des informations soit sur un ensemble X donné, soit sur un groupe G donné et faire apparaître des sous-groupes intéressants de G comme stabilisateurs. Par ailleurs, la présentation doit illustrer comment l'étude des orbites de certaines actions revient à classifier certains objets, soit en trouvant un représentant simple de chaque orbite, soit en dégageant des invariants caractérisant les orbites. Les actions de groupes interviennent aussi efficacement dans des problèmes de dénombrements, notamment via la formule de BURNSIDE. Les exemples peuvent être internes à la théorie des groupes (action naturelle de $\mathfrak{S}_n$ sur $\{1, ..., n\}$, action par translation ou par conjugaison, etc). Mais il est souhaitable d'emprunter aussi à d'autres domaines (action sur des anneaux, des espaces de matrices ou des espaces de polynômes, représentations de groupes, groupes d'isométries, etc). La géométrie fournit aussi de nombreux exemples pertinents (groupes d'isométries d'un polygone dans le plan ou d'un solide ou d'un polygone régulier dans l'espace).

Pour aller plus loin, on peut aborder l'action de $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{K})$ sur la droite projective menant au birapport ou celle de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ sur le demi-plan de POINCARÉ ou les preuves par actions de groupes des théorèmes de SYLOW ou encore d'autres actions donnant lieu à des isomorphismes exceptionnels. Il est aussi possible de s'intéresser aux aspects topologiques ou différentiels liés à certaines actions.

102 : Groupe des nombres complexes de module 1. Racines de l'unité. Applications.

Les notions élémentaires concernant les nombres complexes de module 1 (définitions, exponentielle complexe, trigonométrie, etc.) doivent être présentés, avant d'aborder l'aspect « groupe »de S^1 en considérant son lien avec $(\mathbf{R}, +)$ et en examinant ses sous-groupes (en particulier finis). Il est souhaitable de présenter des applications en géométrie plane. Plus généralement, la leçon invite à expliquer où et comment les nombres complexes de module 1 et les racines de l'unité apparaissent dans divers domaines des mathématiques : spectres de matrices remarquables, polynômes cyclotomiques, et éventuellement les représentations de groupes, etc. On peut également s'intéresser aux sous-groupes compacts de $\mathbf{C}^*$.

Pour aller plus loin, on peut s'intéresser aux nombres de module 1 et aux racines de l'unité dans $\mathbf{Q}[i]$, ou à la dualité des groupes abéliens finis ou encore aux transformées de FOURIER discrètes et rapides. Des aspects analytiques du sujet peuvent être évoqués (théorème de relèvement, logarithme complexe, analyse de Fourier sur $\mathbf{R}^n$) mais ne doivent occuper ni le coeur de l'exposé, ni l'essentiel d'un développement.

103 : Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

Dans un premier temps, la notion de conjugaison dans un groupe doit être introduite, développée et illustrée dans des situations variées. On doit proposer des situations où la conjugaison aide à résoudre certains problèmes (par exemple, en transformant un élément en un autre plus simple à manipuler). On peut aussi illustrer et utiliser le principe du « transport par conjugaison » voulant que hgh^{-1} ait la même « nature géométrique » que g.

Ensuite, il est attendu de développer l'intérêt de la notion de sous-groupe distingué en particulier en regard de la structure de groupe obtenue par quotient d'un groupe, le lien entre sous-groupe distingué et noyau de morphisme de groupes, ainsi que la factorisation d'un morphisme de groupe au travers d'un tel quotient. Il est souhaitable de proposer quelques résultats bien choisis mettant en évidence l'utilisation de ces notions : citons par exemple le lien entre les sous-groupes de l'un et de l'autre et la caractérisation interne des produits directs. L'examen de la simplicité de certains groupes peut être proposé.

Comme indiqué dans le sujet, il est demandé de présenter des exemples pertinents utilisés pour obtenir des résultats significatifs. De tels exemples sont nombreux en théorie des groupes mais il est souhaitable d'en proposer dans d'autres domaines, comme en arithmétique, en géométrie et en algèbre linéaire

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent poursuivre en illustrant ces notions en théorie des représentations des groupes finis (classes de conjugaison et nombres de représentations irréductibles, treillis des sous-groupes distingués lu dans la table de caractères, etc.).

La notion de produit semi-direct et les théorèmes de Sylow débordent du programme. Il est possible de les évoquer, mais en veillant à les illustrer par des exemples et des applications.

104 : Groupes finis. Exemples et applications.

Cette leçon est particulièrement vaste et il convient de faire des choix, qui devront pouvoir être justifiés.

La notion d'ordre (d'un groupe, d'un élément et d'un sous-groupe) est très importante dans cette leçon ; le théorème de Lagrange est incontournable. Le théorème de structure des groupes abéliens finis doit figurer dans cette leçon. Sa démonstration est techniquement exigeante, mais il faut que l'énoncé soit bien compris, en particulier le sens précis de la clause d 'unicité, et être capable de l'appliquer dans des cas particuliers.

Il est souhaitable de présenter des exemples de groupes finis particulièrement utiles comme les groupes $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et $\mathfrak{S}_n$, en en maîtrisant les propriétés élémentaires (générateurs, classes de conjugaison, etc.) Il est important de connaître les groupes d'ordre premier ainsi que les groupes d'ordre inférieur à 8.

Des exemples de groupes finis isuus de domaines autres que la théorie des groupes doivent figurer en bonne place dans cette leçon. L'étude des groupes d'isométries laissant fixe un polygone (ou un polyèdre) régulier peut être opportunément exploitée sous cet intitulé. Afin d'illustrer leur présentation, les candidates et candidats peuvent aussi s'intéresser à des groupes d'automorphismes ou étudier les groupes de symétries $\mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}_4, \mathfrak{A}_5$ et relier sur ces exemples géométrie et algèbre.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent s'attarder sur la dualité dans les groupes abéliens finis. Comme application, la cyclicité du groupe multiplicatif d'un corps fini est tout à fait adaptée. Il est possible d'explorer des représentations de groupes, des donner des exemples de caractères, additifs, ou multiplicatifs dans le cadre des corps finis Il est aussi possible de s'intéresser aux sommes de Gauss. Les candidates et candidats peuvent ensuite introduire la transformée de Fourier discrète qui pourra être vue comme son analogue analytique, avec ses formules d'inversion, sa formule de Plancherel. Ainsi, la leçon peut mener à introduire la transformée de Fourier rapide sur un groupe abélien dont l'ordre est une puissance de 2 ainsi que des applications à la multiplication d'entiers, de polynômes et éventuellement au décodage de codes via la transformée de Hadamard.

105 : Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

Parmi les attendus, il faut savoir relier la leçon avec les notions d'orbites et d'actions de groupes. Il faut aussi savoir décomposer une permutation en cycles à supports disjoints, tant sur le plan théorique (preuve du théorème de décomposition), que pratique (sur un exemple). et savoir l'utiliser pour déterminer les classes de conjugaisons du groupe symétrique et pour donner des systèmes de générateurs. L'existence du morphisme signature est un résultat non trivial mais ne peut pas constituer, à elle seule, l'objet d'un développement. Il est bon d'avoir en tête que tout groupe fini se plonge dans un groupe symétrique et de savoir calculer la signature des permutations ainsi obtenues dans des cas concrets. Les applications sont nombreuses, il est très naturel de parler du déterminant, des polynômes symétriques ou des fonctions symétriques des racines d'un polynôme. On peut également parler du lien avec les groupes d'isométries des solides.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent aller plus loin en s'intéressant par exemple aux automorphismes du groupe symétrique, à des problèmes de dénombrement, aux représentations des groupes des permutations ou encore aux permutations aléatoires.

106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

Les premiéres définitions et propriétés générales du groupe linéaire doivent être présentées : familles de générateurs, les liens avec le pivot de GAUSS sont à détailler. et sous-groupes remarquables. Il est important de savoir faire correspondre certains sous-groupes du groupe linéaire avec les stabilisateurs de certaines actions naturelles (sur des formes quadratiques, sur des drapeaux, sur une décomposition en somme directe, etc.).

Il faut aussi savoir réaliser $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathrm{GL}(n, \mathbf{K})$ et faire le lien entre signature et déterminant.

Il est souhaitable de dégager des propriétés particulières r selon le corps de base, en particulier d'étudier les propriétés topologiques de ce groupe lorsque le corps est $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent exploiter le fait que la théorie des représentations permet d'illustrer l'importance de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ et de son sous-groupe unitaire. Ils peuvent également étudier les sous-groupes compacts maximaux et les sous-groupes fermés de $\mathrm{GL}(n)$.

108 : Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

La leçon doit être illustrée par des exemples de groupes très variés, dont il est indispensable de donner des parties génératrices. La description ensembliste du groupe engendré par une partie doit être connue et les groupes monogènes et cycliques doivent être évoqués.

Les groupes $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ fournissent des exemples naturels tout comme les groupes de permutations, les groupes linéaires ou leurs sous-groupes (par exemple $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$, $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ ou $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$). Ainsi, on peut s'attarder sur l'étude du groupe des permutations avec différents types de parties génératrices en discutant de leur intérêt (ordre, simplicité de $\mathcal{A}_5$ par exemple). On peut, en utilisant des parties génératrices pertinentes, présenter le pivot de GAUSS, le calcul de l'inverse ou du rang d'une matrice, le groupe des isométries d'un triangle équilatéral. Éventuellement, il est possible de discuter des conditions nécessaires et suffisantes pour que $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times$ soit cyclique ou la détermination de générateurs du groupe diédral.

On illustre comment la connaissance de parties génératrices s'avère très utile dans certaines situations, par exemple pour l'analyse de morphismes de groupes, ou pour montrer la connexité par arcs de certains sous-groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

Pour aller plus loin,on peut s'intéresser à la présentation de certains groupes par générateurs et relations. Il est également possible de parler du logarithme discret et de ces applications à la cryptographie (algorithme de DIFFIE-HELLMAN, cryptosystème de EL GAMAL).

120 : Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

Il est attendu de construire rapidement $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, puis d'en décrire les éléments inversibles, les diviseurs de zéro et les idéaux. Ensuite, le cas où l'entier n est un nombre premier doit être étudié. La fonction indicatrice d'EULER ainsi que le théorème chinois et sa réciproque sont incontournables. Il est naturel de s'intéresser à la résolution des systèmes de congruences

Les applications sont très nombreuses. Les candidates et candidats peuvent, par exemple, choisir de s'intéresser à la résolution d'équations diophantiennes (par réduction modulo n bien choisi) ou bien au cryptosystème RSA. Si des applications en sont proposées, l'étude des morphismes de groupes de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ ou le morphisme de FROBENIUS peuvent figurer dans la leçon.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent poursuivre en donnant une généralisation du théorème chinois lorsque deux éléments ne sont pas premiers entre eux, s'intéresser au calcul effectif des racines carrées dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, au logarithme discret, ou à la transformée de FOURIER rapide.

121 : Nombres premiers. Applications.

Le sujet de cette leçon est très vaste. Elle doit donc être abordée en faisant des choix qui devront être clairement motivés. On attend une étude purement interne à l'arithmétique des entiers, avec des applications dans différents domaines : théorie des corps finis, théorie des groupes, arithmétique des polynômes, cryptographie, etc. On peut définir certaines fonctions importantes en arithmétique, les relier aux nombres premiers et illustrer leurs utilisations. Il est recommand 'e de s'intéresser aux aspects algorithmiques du sujet (tests de primalité). La réduction modulo p n'est pas hors-sujet et constitue un outil puissant pour résoudre des problèmes arithmétiques simples. La répartition des nombres premiers doit être évoquée : certains résultats sont accessibles dans le cadre du programme du concours, d'autres peuvent être admis et cités pour leur importance culturelle.

122 : Anneaux principaux. Exemples et applications.

Cette leçon ne doit pas se cantonner aux aspects théoriques. L'arithmétique des anneaux principaux doit être décrite et les démonstrations doivent être maîtrisées (lemme d'EUCLIDE, théorème de GAUSS, décomposition en irréductibles, PGCD et PPCM, équations de type $ax+by=d$, etc.). On doit présenter des exemples d'utilisation effective du lemme chinois. Les anneaux euclidiens représentent une classe importante d'anneaux principaux et l'algorithme d'EUCLIDE a toute sa place dans cette leçon pour effectuer des calculs. Les applications en algèbre linéaire ne manquent pas et doivent être mentionnées (par exemple, le lemme des noyaux ou la notion de polynôme minimal pour un endomorphisme, pour un endomorphisme relativement à un vecteur ou pour un nombre algébrique). Si les anneaux classiques $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{K}[X]$ doivent impérativement figurer, il est possible d'en évoquer d'autres (décimaux, entiers de GAUSS $\mathbf{Z}[i]$ ou d'EISENSTEIN $\mathbf{Z}[e^{2i\pi/3}]$) accompagnés d'une description de leurs inversibles, de leurs irréductibles, en lien avec la résolution de problèmes arithmétiques (équations diophantiennes).

Les candidates et candidats peuvent aller plus loin en s'intéressant à l'étude des réseaux, à des exemples d'anneaux non principaux, mais aussi à des exemples d'équations diophantiennes résolues à l'aide d'anneaux principaux. À ce sujet, il sera fondamental de savoir déterminer les unités d'un anneau, et leur rôle au moment de la décomposition en facteurs premiers. De même, la résolution des systèmes linéaires sur $\mathbf{Z}$ ou le calcul effectif des facteurs invariants de matrices à coefficients dans un anneau principal peuvent être présentés en lien avec ce sujet.

123 : Corps finis. Applications.

La construction des corps finis doit être connue et une bonne maîtrise des calculs dans les corps finis est indispensable. Le calcul des degrés des extensions, le théorème de la base téléscopique, les injections des divers $\mathbf{F}_q$ sont incontournables. La structure du groupe multiplicatif doit aussi être connue.

Des applications des corps finis (y compris pour $\mathbf{F}_q$ avec q non premier !) ne doivent pas être oubliées. Par exemple, l'étude de polynômes à coefficients entiers et de leur irréductibilité peut figurer dans cette leçon. L'étude des carrés dans un corps fini et la résolution d'équations de degré 2 sont des pistes intéressantes.

Les candidates et candidats peuvent aller plus loin en détaillant des codes correcteurs ou en étudiant l'irréductiblilité des polynômes à coefficients dans un corps fini.

125 : Extensions de corps. Exemples et applications.

Les extensions de degré fini ont toute leur place dans cette leçon : le théorème de la base téléscopique et ses applications à l'irréductibilité de certains polynômes, ainsi que les corps finis, sont incontournables. Il est souhaitable d'introduire la notion d'élément algébrique et d'extension algébrique en en donnant des exemples. Il faut savoir calculer le polynôme minimal d'un élément algébrique dans des cas simples, notamment pour quelques racines de l'unité. La leçon peut être illustrée par des exemples d'extensions quadratiques et leurs applications en arithmétique, ainsi que par des extensions cyclotomiques.

Pour aller plus loin, les candidates et candidates et candidats peuvent montrer que l'ensemble des nombres algébriques forme un corps algébriquement clos, par exemple en expliquant comment l'utilisation du résultant permet de calculer des polynômes annulateurs de sommes et de produits de nombres algébriques. Il est possible de s'intéresser aux nombres constructibles à la règle et au compas, et éventuellement s'aventurer en théorie de Galois.

127 : Exemples de nombres remarquables. Exemples d'anneaux de nombres remarquables. Applications.

Le jury souhaite proposer une leçon qui offre une ouverture large autour du thème des nombres et des corps de nombres utilisés en algèbre ou en géométrie. L'objectif n'est pas d'en présenter le plus possible, mais plutôt d'en choisir certains, suffisamment variés, en en expliquant la genèse et en soulignant leur intérêt par des applications pertinentes. Les nombres décimaux, dyadiques, etc. fournissent des ensembles de nombres dont l'étude, si elle est accompagnée d'applications pertinentes, a sa place dans cette leçon. Les questions d'approximation diophantienne et leur lien avec les fractions continues, sans toutefois être un attendu de la leçon, entrent dans la suite logique de ce type de considération.
Le corps des nombres algébriques, ainsi que certains de ses sous-corps particuliers, comme celui formé par l'ensemble des nombres constructibles ou des sous-anneaux formés par certains ensembles d'entiers algébriques constituent des pistes d'étude. Les candidates et candidats qui maîtrisent ces notions pourront aussi s'aventurer du côté des nombres de Pisot.
La transcendance de π et celle de e sont des résultats à connaître, et le candidat pourra en donner des applications s'il le désire, mais les démonstrations de ces résultats non triviaux ne sont pas exigibles.
L' irrationalité de nombres remarquables ($\sqrt{2}$, nombre d'or, e, π peut être abordée. Étudier les propriétés algébriques de certains ensembles de nombres (par exemple du type $\mathbb{Z}[\omega]$ où ω est un nombre algébrique) peut être une piste intéressante et mener à des applications en arithmétique.
L'utilisation des nombres complexes ou, pour aller plus loin, des quaternions, en géométrie ou en arithmétique constitue aussi une piste exploitable pour cette leçon.

141 : Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

Les généralités sur les algèbres de polynômes à une variable sont supposées connues. Le bagage théorique permettant de définir corps de rupture et corps de décomposition doit être présenté. Ces notions doivent être illustrées dans différents types de corps (réel, rationnel, corps finis) ; les corps finis peuvent être illustrés par des exemples de polynômes irréductibles de degré 2, 3, 4 sur $\mathbf{F}_2$ ou $\mathbf{F}_3$. Il est nécessaire de présenter des critères d'irréductibilité de polynômes et des polynômes minimaux de quelques nombres algébriques, par exemple les polynômes cyclotomiques. Le théorème de la base téléscopique, ainsi que les utilisations arithmétiques (utilisation de la divisibilité) que l'on peut en faire dans l'étude de l'irréductibilité des polynômes sont incontournables. Des applications du corps de décomposition doivent être mentionnées, par exemple en algèbre linéaire.

Pour aller plus loin, on peut montrer que l'ensemble des nombres algébriques sur le corps $\mathbf{Q}$ des rationnels est un corps algébriquement clos, s'intéresser aux nombres constructibles à la règle et au compas, et éventuellement s'aventurer en théorie de Galois.

142 : PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.

Le candidat doit prendre soin de différencier le cadre théorique des anneaux factoriels ou principaux dans lequel sont définis les PGCD et PPCM et dans lequel s'appliquent les énoncés des théorèmes proposés et le cadre euclidien fournissant les algorithmes. Le champ d'étude de cette leçon ne peut se limiter au cas de $\mathbf{Z}$, mais la leçon peut opportunément s'illustrer d'exemples élémentaires d'anneaux euclidiens, comme $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{K}[X]$.

Une part substantielle de la leçon doit être consacrée à la présentation d'algorithmes : algorithme d'EUCLIDE, algorithme binaire, algorithme d'EUCLIDE étendu. Il est possible d'en évaluer le nombre d'étapes dans les pires cas et faire le lien avec les suites de FIBONACCI.

Des applications élémentaires sont particulièrement bienvenues : calcul de relations de BEZOUT, résolutions d'équations diophantiennes linéaires, inversion modulo un entier ou un polynôme, calculs d'inverses dans les corps de ruptures, les corps finis. On peut aussi évoquer le théorème chinois effectif, la résolution d'un système de congruences et faire le lien avec l'interpolation de LAGRANGE.

Pour aller plus loin, on peut évoquer le rôle de algorithme d'EUCLIDE étendu dans de nombreux algorithmes classiques en arithmétique (factorisation d'entiers, de polynômes, etc). Décrire l'approche matricielle de l'algorithme d'EUCLIDE et l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ sur $\mathbf{Z}^2$ est tout à fait pertinent. On peut aussi établir l'existence d'un supplémentaire d'une droite dans $\mathbf{Z}^2$, ou d'un hyperplan de $\mathbf{Z}^n$, la possibilité de compléter un vecteur de $\mathbf{Z}^n$ en une base. On peut aussi étudier les matrices à coefficients dans un anneau principal ou euclidien, et, de manière plus avancée, la forme normale d'HERMITE et son application à la résolution d'un système d'équations diophantiennes linéaires. De même, aborder la forme normale de SMITH, et son application au théorème de la base adaptée, permet de faire le lien avec la réduction des endomorphismes *via* le théorème des invariants de similitude. La leçon invite aussi, pour des candidates et candidats maîtrisant ces notions, à décrire le calcul de PGCD dans $\mathbf{Z}[X]$ et $\mathbf{K}[X,Y]$, avec des applications à l'élimination de variables. On peut rappeler les relations entre PGCD et résultant et montrer comment obtenir le PGCD en échelonnant la matrice de SYLVESTER. Sur l'approximation diophantienne, on peut enfin envisager le développement d'un rationnel en fraction continue et l'obtention d'une approximation de PADÉ-HERMITE à l'aide de l'algorithme d'EUCLIDE, la recherche d'une relation de récurrence linéaire dans une suite ou le décodage des codes BCH.

144 : Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications

Dans cette leçon, il est indispensable de bien définir l'ordre de multiplicité d'une racine (définition algébrique et analytique, quand c'est possible). Les fonctions symétriques élémentaires et les relations entre cœfficients et racines doivent être maîtrisées et pouvoir être mises en œuvre. Des méthodes, même élémentaires, de localisation des racines ont toute leur place et peuvent déboucher sur des résultats de topologie à propos de la continuité des racines.

Il est pertinent d'introduire la notion de polynôme scindé et de citer le théorème de D'ALEMBERT-GAUSS. On peut faire apparaître le lien entre la recherche des racines d'un polynôme et la réduction des matrices. Les candidates et candidats peuvent également s'intéresser aux racines des polynômes orthogonaux, ou aux règles des signes de DESCARTES et de STURM. L'étude des propriétés des nombres algébriques ont leur place dans cette leçon. La théorie des corps et le cas particulier des corps finis peuvent aussi être évoqués de façon pertinente.

Les candidates et candidats peuvent aller plus loin en s'intéressant à des problèmes de localisation des valeurs propres, comme les disques de GERSHGORIN ou au calcul effectif d'expressions polynomiales symétriques des racines d'un polynôme.

Il ne s'agit par contre en aucun cas d'adapter le plan de la leçon 141 : l'irréductibilité des polynômes peut être évoquée mais ne doit pas être l'élément central de la leçon.

148 : Exemples de décompositions de matrices. Applications.

Dans cette leçon, il est attendu de choisir quelques exemples de décompositions de matrices présentées avec quelques applications significatives. Citons les plus classiques : décomposition LU, décomposition de Dunford, décomposition de Frobenius, décomposition de Jordan, décomposition QR, décomposition polaire, décomposition de Cholesky... Il ne s'agit pas d'établir un catalogue complet, mais plutôt de présenter des méthodes et des domaines d'applications variées. Les aspects de constructions effectives ou approchèes algorithmiques doivent être abordés. Les relations entre les différentes décompositions proposées , s'il y en a, doivent être connues.

149 : Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.

Cette leçon doit aborder le bagage théorique propre aux vecteurs propres et aux valeurs propres et mettre en lumière l'exploitation de techniques d'algèbre ou d'analyse pour aborder leur recherche. Après avoir exploré la détermination théorique exacte des éléments propres, on s'intéresse à des exemples de matrices dont les éléments propres sont remarquables (matrices compagnons, matrices circulantes, matrices d'ordre fini, matrices stochastiques...) et donne des exemples de situations où la connaissance d'éléments propres s'avère utile. On doit connaître les limites du calcul exact, même si le cadre mathématique nécessaire est non exigible et hors programme et introduire sur **R** ou **C** une ou plusieurs méthodes itératives, dont on démontre la convergence. On peut citer les méthodes de la puissance, puissance inverse et QR pour la recherche d'éléments propres. Les notions de norme matricielle, de rayon spectral doivent être maîtrisées. Le lien avec la convergence des suites du type $X_{n+1} = AX_n$ doit être connu et illustré. On peut aussi s'intéresser à la localisation des valeurs propres.

Pour aller plus loin, on peut aborder la problématique du conditionnement en distinguant le problème général et le cas particulier des matrices auto-adjointes, s'intéresser aux liens qui peuvent aussi être faits avec la théorie des représentations et la transformée de FOURIER rapide, ainsi qu' au comportement de la suite des itérées de matrices stochastiques ou plus généralement de matriices à coefficients positifs, au moins dans des cas particuliers.

151 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

Dans cette leçon, il est indispensable de présenter les résultats fondateurs de la théorie des espaces vectoriels de dimension finie en ayant une idée de leurs preuves. Il est en particulier important de savoir justifier pourquoi un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est aussi de dimension finie.

On peut montrer, sur des exemples, comment la dimension finie intervient dans la démonstration de certains résultats (récurrence sur la dimension, égalité de sous-espaces par inclusion et égalité des dimensions, isomorphisme par injectivité et dimension, etc.). À cette occasion, on pourra signaler des résultats qui ne subsistent pas en dimension infinie. Le pivot de GAUSS ainsi que les diverses notions et caractérisations du rang trouvent leur place dans cette leçon. Les applications sont nombreuses : existence de polynômes annulateurs, dimension de l'espace des formes n-linéaires alternées en dimension n, isomorphisme avec le dual dans le cadre euclidien et théorème de RIESZ, espaces de solutions d'équations différentielles ordinaires, caractérisation des endomorphismes diagonalisables, décomposition d'isométries en produits de réflexions, dimensions des représentations irréductibles d'un groupe fini, théorie des corps finis, etc.

Les caractérisations du rang peuvent aussi être utilisées pour démontrer l'invariance du rang par extension de corps, ou pour établir des propriétés topologiques (sur **R** ou **C**). Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent déterminer des degrés d'extensions dans la théorie des corps ou s'intéresser aux nombres algébriques. Il est également possible d'explorer des applications en analyse comme les extrémas liés. Dans un autre registre, il est pertinent d'évoquer la méthode des moindres carrés dans cette leçon, par exemple en faisant ressortir la condition de rang maximal pour garantir l'unicité de la solution et s'orienter vers les techniques de décomposition en valeurs singulières pour le cas général. On peut alors naturellement analyser l'approximation d'une matrice par une suite de matrices de faible rang.

152 : Déterminant. Exemples et applications.

Dans cette leçon, il faut commencer par définir correctement le déterminant. et savoir démontrer ses propriétés fondamentales (en particulier le fait que l'espace des formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n est de dimension 1). La distinction entre le déterminant d'une famille de vecteurs dans une base donnée et le déterminant d'un endomorphisme doit être comprise. L'interprétation en termes de volume est essentielle. Le calcul explicite est important, mais le jury ne peut se contenter d'un déterminant de VANDERMONDE ou d'un déterminant circulant. Les opérations élémentaires permettant de calculer des déterminants doivent être présentées et illustrées. Parmi les applications possibles, on peut citer le polynôme caractéristique, les déterminants de GRAM (permettant des calculs de distances), le déterminant jacobien (utile en calcul intégral et en probabilités), donner des exemples d'utilisation du déterminant en géométrie (coordonnées barycentriques, colinéarité, etc.) ou son rôle dans l'étude des formes quadratiques. Il est bienvenu d'illustrer la continuité du déterminant par une application. On pourra aussi s'intéresser à sa différentielle.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent s'intéresser aux calculs de déterminants sur $\mathbf{Z}$. Le résultant et les applications simples à l'intersection ensembliste de deux courbes algébriques planes peuvent aussi trouver leur place dans cette leçon pour des candidates et candidats ayant une pratique de ces notions.

153 : Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

Cette leçon ne doit pas être un catalogue de résultats autour de la réduction ; les polynômes d'endomorphismes doivent y occuper une place importante. Il faut consacrer une courte partie de la leçon à l'algèbre $\mathbf{K}[u]$, en particulier connaître la dimension, et aux liens entre réduction de l'endomorphisme u et structure de l'algèbre $\mathbf{K}[u]$. Il est ensuite possible de s'intéresser aux propriétés globales de cette algèbre (inversibles, condition nécessaire et suffisante assurant que ce soit un corps...). De même il est important de mettre en évidence les liens entre les idempotents et la décomposition en somme de sous-espaces caractéristiques.

Le lemme des noyaux, les polynômes caractéristiques et minimaux doivent figurer dans la leçon. Il faut bien préciser que, dans la réduction de DUNFORD, les composantes sont des polynômes en l'endomorphisme, et en connaître des conséquences théoriques et pratiques.

On attend que la candidate ou le candidat soit en mesure, pour une matrice simple de justifier la diagonalisabilité et de déterminer un polynôme annulateur (voire minimal). L'aspect *applications* est trop souvent négligé. Il est par exemple possible d'envisager des applications au calcul de A^k à l'aide d'un polynôme annulateur, aux calculs d'exponentielles de matrices ou de mener l'analyse spectrale de matrices stochastiques.

Pour aller plus loin, la candidate ou le candidat pourra étudier des équations matricielles et de calcul fonctionnel, avec par exemple l'étude de l'extraction de racines ou du logarithme.

154 : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Dans cette leçon, il faut présenter des propriétés de l'ensemble des sous-espaces stables par un endomorphisme. Des études détaillées sont les bienvenues, par exemple dans le cas d'une matrice diagonalisable ou dans le cas d'une matrice nilpotente d'indice maximum.

L'étude des endomorphismes cycliques et des endomorphismes semi-simples trouvent tout à fait leur place dans cette leçon. Dans le cas des corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, on pourra, si on le souhaite, caractériser ces derniers par la fermeture de leur orbite.

Il ne faut pas oublier d'examiner le cas des sous-espaces stables par des familles d'endomorphismes. Ceci peut déboucher par exemple sur des propriétés des endomorphismes commutants entre eux.

La réduction des endomorphismes normaux et l'exemple de résolutions d'équations matricielles peuvent être présentés en applications.

La décomposition de FROBENIUS constitue également une application intéressante de cette leçon. Pour aller plus loin, on peut envisager de développer l'utilisation de sous-espaces stables en théorie des représentations.

155 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Dans cette leçon, on attend des exemples naturels d'endomorphismes diagonalisables et des critères de diagonalisabilité. On doit notamment savoir expliquer pourquoi l'application induite par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace stable est encore diagonalisable. Il ne faut pas oublier de parler du cas des endomorphismes symétriques, ni les familles commutantes d'endomorphismes diagonalisables. On peut étudier certaines propriétés topologiques en prenant le soin de donner des précisions sur le corps $\mathbf{K}$ et la topologie choisie pour $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Les candidates et candidats peuvent s'intéresser aux propriétés de l'exponentielle d'un endomorphisme diagonalisable. On peut dénombrer les endomorphismes diagonalisables dans les corps finis, ou possédant des propriétés données, liées à la diagonalisation.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent s'intéresser aux liens qui peuvent aussi être fait avec la théorie des représentations et la transformée de FOURIER rapide.

156 : Exponentielle de matrices. Applications.

Bien que ce ne soit pas une leçon d'analyse, il faut savoir justifier précisément la convergence de la série exponentielle.

Les questions de surjectivité ou d'injectivité doivent être abordées en distinguant les cas réel et complexe. Il est souhaitable de connaître l'image par exponentielle de certains sous-ensembles de matrices (ensemble des matrices symétriques, hermitiennes, ou antisymétriques).

La décomposition de DUNFORD multiplicative (décomposition de JORDAN) de $\exp(A)$ trouve toute son utilité dans cette leçon. L'exponentielle en lien avec la décomposition polaire peut s'avérer utile dans l'étude de sous-groupes du groupe linéaire. L'étude du logarithme (quand il est défini) peut être menée dans cette leçon.

Les applications aux équations différentielles méritent d'être présentées sans toutefois constituer l'essentiel de la leçon. On pourra par exemple faire le lien entre réduction et comportement asymptotique, mais le jury déconseille aux candidates et candidats de proposer ce thème dans un développement de cette leçon, sauf à avoir bien compris comment les apports algébriques permettent ici de simplifier les conclusions analytiques.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent s'aventurer vers les sous-groupes à un paramètre du groupe linéaire (on peut alors voir si ces sous-groupes constituent des sous-variétés fermées de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$) ou vers les algèbres de LIE.

157 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Il est indispensable de connaître les polynômes caractéristiques et minimaux d'un endomorphisme nilpotent et de savoir justifier son caractère trigonalisable. Il est bon de savoir expliquer pourquoi l'application induite par un endomorphisme trigonalisable (respectivement nilpotent) sur un sous-espace stable est encore trigonalisable (respectivement nilpotent). L'utilisation des noyaux itérés est fondamentale dans cette leçon, par exemple pour déterminer si deux matrices nilpotentes sont semblables. Il est intéressant de présenter des conditions suffisantes de trigonalisation simultanée ; l'étude des endomorphismes cycliques a toute sa place dans cette leçon. L'étude des nilpotents en dimension 2 débouche naturellement sur des problèmes de quadriques et l'étude sur un corps fini donne lieu à de jolis problèmes de dénombrement.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent aussi présenter la décomposition de Jordan ou la décomposition de FROBENIUS, ou des caractérisations topologiques des endomorphismes nilpotents, ou encore des propriétés topologiques de l'ensemble des endomorphismes nilpotents.

158 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

Le théorème spectral est indispensable dans cette leçon. Une place importante mérite d'être faite au cas particulier des matrices symétriques positives et définies positives ; les candidates et candidats doivent connaître leurs propriétés fondamentales, leur rôle, et la structure de leur ensemble. La notion de signature pourra être présentée en montrant comment elle détermine la classe de congruence d'une matrice symétrique réelle. L'action du groupe linéaire et du groupe orthogonal sur l'espace des matrices symétriques peut donner un cadre naturel à cette leçon. Le lien avec les formes quadratiques et les formes hermitiennes est incontournable. L'orthogonalisation simultanée est un résultat important de cette leçon. Il faut en connaître les applications géométriques aux quadriques.

Les candidates et candidats maîtrisant ces notions pourront illustrer la leçon en évoquant le cas des matrices de covariance de vecteurs aléatoires et discuter les conditions en assurant le caractère inversible, la décomposition de Cholesky, qui a de nombreuses applications pour le calcul scientifique (en lien avec la résolution de systèmes linéaires ou de problèmes de moindres carrés) ou en probabilités (construction d'un vecteur gaussien de matrice de covariance donnée à partir d'un vecteur gaussien de matrice de covariance identité), ou la décomposition en valeurs singulières d'une matrice (particulièrement importante pour le traitement massif de données).

159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

Il est important de bien placer la thématique de la dualité dans cette leçon ; celle-ci permet de mettre en évidence des correspondances entre un morphisme et son morphisme transposé, entre un sous-espace et son orthogonal (canonique), entre les noyaux et les images ou entre les sommes et les intersections. Bon nombre de résultats d'algèbre linéaire se voient dédoublés par cette correspondance. Les liens entre base duale et fonctions de coordonnées doivent être parfaitement connus. Le passage d'une base à sa base duale ou antéduale, ainsi que les formules de changement de base, doivent être maîtrisés. On pourra s'intéresser aux cas spécifiques où l'isomorphisme entre l'espace et son dual est canonique (cas euclidien, cas des matrices).

Savoir calculer la dimension d'une intersection d'hyperplans via la dualité est important dans cette leçon. L'utilisation des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes permet d'obtenir les équations d'un sous-espace vectoriel ou d'exhiber une base d'une intersection d'hyperplans. Le lien avec la résolution des systèmes linéaires doit être fait.

Cette leçon peut être traitée sous différents aspects : géométrique, algébrique, topologique ou analytique. Il faut que les développements proposés soient en lien direct avec la leçon. Enfin rappeler que la différentielle d'une fonction à valeurs réelles est une forme linéaire semble incontournable.

Pour des candidates et candidats ayant une pratique de ces notions, il est possible d'illustrer la leçon avec un point de vue probabiliste, en rappelant que la loi d'un vecteur aléatoire X est déterminée par les lois unidimensionnelles de $X \cdot u$ pour tout vecteur u.

160 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

Dans cette leçon, le caractère euclidien de l'espace est essentiel pour que l'endomorphisme soit remarquable. Le théorème spectral pour les auto-adjoints et la réduction des endomorphismes orthogonaux sont des résultats incontournables. Le jury met les candidates et candidats en garde sur le fait que le lemme des noyaux ou la décomposition de Dunford ne sont pas des développements adaptés à cette leçon. En revanche, l'utilisation du fait que l'orthogonal d'un sous-espace stable par un endomorphisme est stable par l'adjoint doit être mis en valeur. De même la réduction d'endomorphismes normaux peut être évoquée.

L'étude des projections orthogonales (en lien ave le calcul de distances), des rotations, des réflexions, des renversements, etc. fournit des exemples dignes d'intérêt. Une illustration pertinente peut s'appuyer sur la description de problèmes de moindres carrés en faisant ressortir le rôle de l'hypothèse de rang plein de A sur le caractère inversible de $A^{\intercal}A$.

161 : Espaces vectoriels et espaces affines euclidiens : distances, isométries.

Les généralités sur les espaces euclidiens et affines sont supposées connues. La leçon reste contenue dans le cadre des espaces de dimension finie.

La notion de distance est abordée dans le cadre de la norme euclidienne : les projections orthogonales doivent être mentionnées. Les déterminants de Gram et des inégalités du type des inégalités d'Hadamard ont toute leur place dans cette leçon.
La classification des isométries en dimension 2 et 3 est exigible. En dimension 3, il faut savoir classifier les rotations et connaître les liens avec la réduction. On peut aussi penser aux isométries laissant stables certains objets en dimension 2 et 3.
Il faut savoir justifier qu'une isométrie est affine, pouvoir donner des générateurs du groupe des isométries affines et savoir composer des isométries affines. Les groupes de similitudes peuvent également être abordés.
Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent évoquer l'interprétation de l'écart-type comme une distance, et présenter la matrice de covariance comme un exemple pertinent de matrice de Gram. Ainsi, les déterminants de GRAM permettent de calculer l'erreur commise dans le cadre de prédictions affines.

162 : Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

Dans cette leçon, les techniques liées au simple pivot de Gauss constituent l'essentiel des attendus. Il est impératif de faire le lien avec la notion de système échelonné (dont on donnera une définition précise et correcte) et de situer l'ensemble dans le contexte de l'algèbre linéaire, sans oublier la dualité. Un point de vue opératoire doit accompagner l'étude théorique et l'intérêt algorithmique des méthodes présentées doit être expliqué, éventuellement en l'illustrant par des exemples simples (où l'on attend parfois une résolution explicite).

Parmi les conséquence théoriques, les candidates et candidats peuvent notamment donner des systèmes de générateurs de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$. Ils est aussi pertinent de présenter les relations de dépendance linéaire sur les colonnes d'une matrice échelonnée qui permettent de décrire simplement les orbites de l'action à gauche de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{K})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ donnée par $(P, A) \mapsto PA$.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent exploiter les propriétés des systèmes d'équations linéaires pour définir la dimension des espaces vectoriels et obtenir une description de l'intersection de deux sous-espaces vectoriels donnés par des systèmes générateurs, ou d'une somme de deux sous-espaces vectoriels donnés par des équations.

De même, des discussions sur la résolution de systèmes sur $\mathbf{Z}$ et la forme normale de Hermite peuvent trouver leur place dans cette leçon. Enfin, il est possible de présenter les décompostions LU et de Choleski, en évaluant le coût de ces méthodes ou encore d'étudier la résolution de l'équation normale associée aux problèmes des moindres carrés et la détermination de la solution de norme minimale par la méthode de décomposition en valeurs singulières.

170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité. Applications.

La leçon débute par une étude générale des formes quadratiques, indépendamment du corps. On peut, par exemple, adopter le point de vue de l'action par congruence du groupe linéaire sur l'espace des matrices symétriques, ce qui permet de dégager quelques invariants (rang, discriminant), de s'interroger sur le nombre et la structure des orbites. L'algorithme de Gauss doit être énoncé et pouvoir être mis en œuvre sur une forme quadratique simple. En ajoût de la classification sur $\mathbf{R}$, le candidat pourra parler de la classification des formes quadratiques sur le corps des complexes. Il est aussi possible de s'intéresser à la classification sur les corps finis. On peut s'intéresser au groupe orthogonal (générateurs, structure du groupe quand l'espace est de dimension 2). Le lien avec la dualité des espaces vectoriels permet de comprendre le sens de la décomposition de Gauss et de comparer les notions de sous-espace orthogonal, en s'interrogeant sur les conditions pour que que l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel en soit un supplémentaire. La notion d'isotropie doit être connue. On pourra rattacher cette notion à la géométrie différentielle. Pour aller plus loin, on peut s'intéresser aux espaces hyperboliques, ou à l'étude de la géométrie d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel muni d'une forme quadratique de signature (p, q), notamment la structure du cône de lumière de l'espace-temps de Minkowski, avec la traduction géométrique de la notion d'orthogonal dans ce cas et des propriétés du groupe $O(p, q)$.

171 : Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

Dans cette leçon, la loi d'inertie de Silvester doit être présentée ainsi que l'orthogonalisation simultanée. L'algorithme de Gauss doit être énoncé et pouvoir être mis en œuvre sur une forme quadratique simple ; le lien avec la signature doit être clairement énoncé et la signification géométrique des deux entiers r et s composant la signature d'une forme quadratique réelle doit être expliqué. La différentielle seconde d'une fonction de plusieurs variables est une forme quadratique importante qui mérite d'être présentée dans cette leçon.

La définition et les propriétés classiques des coniques d'un plan affine euclidien doivent être connues. On peut présenter les liens entre la classification des formes quadratiques et celles des coniques ; de même il est intéressant d'évoquer le lien entre le discriminant de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ et la signature de la forme quadratique $ax^2 + bxy + cy^2$. La classification des quadriques n'est pas exigible, mais des situations particulières doivent pouvoir être discutées.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent aussi aller vers la théorie des représentations et présenter l'indicatrice de Schur-Frobenius qui permet de réaliser une représentation donnée sur le corps des réels.

181 : Convexité dans $\mathbf{R}^n$. Applications en algèbre et en géométrie.

Daans cette leçon, la notion de convexité doit être abordée d'un point de vue géométrique : les barycentres sont incontournables, et on peut à ce titre parler de coordonnées barycentriques. Les exemples géométriques sont importants et on espère que les notions introdiuites soient illustrées par des figures. Il est important de parler d'enveloppe convexe et de savoir dessiner l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points dans le plan ; le théorème de GAUSS-LUCAS trouve parfaitement sa place dans cette leçon. Il semble approprié d'évoquer les points extrémaux, ainsi que des applications qui en résultent. Par ailleurs, il est important d'avoir compris le lien entre fonctions convexes et ensembles convexes.
L'étude de certains ensembles convexes de matrices et de leurs propriétés rentre tout à fait dans le cadre de la leçon : on peut penser au cône des matrices symétriques (définies) positives, sur lequel le déterminant est log-convexe.

Pour aller plus loin, , les candidates et candidats peuvent aller plus loin en présentant le lemme de Farkas, le théorème de séparation de Hahn-Banach, les théorèmes de Helly et de Caratheodory, ou parler des sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

190 : Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

Il est nécessaire de dégager clairement différentes méthodes de dénombrement et de les illustrer d'exemples significatifs. De nombreux domaines de mathématiques sont concernés par des problèmes de dénombrement, cet aspect varié du thème de la leçon doit être mis en avant. L'utilisation de séries génératrices est un outil puissant pour le calcul de certains cardinaux. De plus, il est naturel de calculer des cardinaux classiques et certaines probabilités. Il est important de connaître l'interprétation ensembliste de la somme des coefficients binomiaux et ne pas se contenter d'une justification par le binôme de Newton. L'introduction des corps finis (même en se limitant aux cardinaux premiers) permet de créer un lien avec l'algèbre linéaire. Les actions de groupes peuvent également conduire à des résultats remarquables.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent aussi présenter des applications de la formule d'inversion de MÖEBIUS ou de la formule de BURNSIDE. Des candidates et candidats ayant un bagage probabiliste pourront explorer le champ des permutations aléatoires, en présentant des algorithmes pour générer la loi uniforme sur le groupe symétrique S_n et analyser certaines propriétés de cette loi uniforme (points fixes, cycles, limite $n \to +\infty$...).

191 : Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie

Le jury souhaite proposer une leçon qui offre une ouverture large autour du thème de la géométrie. Avec cet intitulé, les candidates et candidats sont libres de présenter des résultats et des exemples très variés en lien avec la géométrie. L'objectif n'est pas de couvrir le plus d'aspects possible, mais plutôt d'en proposer certains suffisamment consistants et variés. À partir du moment où ils sont de nature géométrique, tous les éléments du programme peuvent être pertinents. En contrepartie de cette liberté laissée aux candidates et candidats, une difficulté est de structurer la présentation des objets et des notions choisies. Ainsi, plusieurs approches sont possibles pour organiser cette leçon, par exemple :
- en regroupant les outils par « famille » : outils matriciels (repérage des points par des matrices colonnes, des transformations par des matrices, rang, réduction, etc.), outils polynomiaux (formes quadratiques, déterminant, résultant, etc.), outils structurels (groupes, corps) ;
- ou par niveau d'abstraction/de généralité (nombres réels, complexes, matrices, groupes...) ;
- ou par type d'objectifs (identifier des objets géométriques, les mesurer, les classifier, démontrer des résultats en utilisant des transformations géométriques...)

Il est aussi possible de se focaliser sur un seul type d'outils (par exemple algèbre linéaire, géométrie affine ou groupes) en détaillant plusieurs applications en géométrie ou sur une question géométrique fouillée à l'aide de diverses techniques (par exemple sur des problèmes impliquant des figures géométriques comme les cercles et triangles, les polygones et polyèdres réguliers, etc.). Des situations « élémentaires », dans le plan, permettent certainement de mettre en valeur des connaissances et un recul mathématique. Il faut bien éviter l'écueil d'un catalogue fastidieux ou celui qui consisterait à recycler directement le contenu d'une autre leçon avec un vague habillage géométrique.

Parmi les nombreux éléments qui peuvent être discutés, on peut indiquer :
- les notions de distance, aire, volume. Notamment les propriétés de la matrice de GRAM, le lien entre déterminant et aire d'un parallélogramme ou volume d'un parallélépipède, la construction du produit vectoriel et du produit mixte,... peuvent être exploités avec pertinence dans cette leçon. On peut ainsi être amené à étudier l'aire balayée par un arc paramétré du plan, la position d'un point par rapport à un cercle circonscrit à un triangle, etc. Le déterminant de CAYLEY-MENGER permet de mettre en évidence des conditions pour que $n+1$ points de $\mathbf{R}^n$ forment une base affine, ou que $n+2$ points de $\mathbf{R}^n$ soient cocycliques. Dans une autre direction, la division euclidienne dans $\mathbf{Z}$ donne une preuve d'une forme du théorème de la base adaptée, avec pour conséquence le calcul du volume (d'une maille élémentaire) d'un sous réseau de $\mathbf{Z}^n$ comme étant le déterminant d'un système générateur dans la base canonique.
- l'apport de l'algèbre linéaire à la géométrie. On peut ainsi exploiter le calcul matriciel et les techniques de réduction pour mettre en évidence des informations de nature géométrique (avec les exemples fondamentaux des homothéties, projections, symétries, affinités, rotations, la classification des isométries vectorielles, etc.). On peut être alors amené à présenter le théorème de CARTAN-DIEUDONNÉ sur la décomposition d'isométries euclidiennes en produit de réflexions ou encore évoquer une (ou des) interprétation(s) géométrique(s) de la décomposition en valeurs singulières. Dans cette même veine, la leçon peut être orientée vers la géométrie affine, en s'adossant à la théorie des espaces vectoriels pour définir certains objets (espaces et sous-espaces affines, applications affines, repères affines, etc), ce qui permet, par exemple, d'établir

ainsi certains résultats classiques, comme les théorèmes de THALÈS, PAPPUS, DESARGUES,...

- l'analyse des formes quadratiques permet d'aborder des problèmes géométriques : étude des coniques, quadriques, classification des quadriques de $\mathbf{R}^n$, interprétation géométrique de la signature, application des méthodes de réduction, etc.
- la théorie des groupes est un champ naturel pour cette leçon (mais qui n'est cependant pas indispensable) : groupes de transformations (isométries, déplacements, similitudes, translations), composition de transformations, mise en évidence d'invariants fondamentaux (angle, birapport, excentricité d'une conique). Il est possible de se focaliser sur des groupes de transformations préservant une certaine structure géométrique et en distinguant parmi eux les groupes finis (groupes d'isométries classiques), les groupes discrets infinis (avec des translations, groupes de pavages) et, pour aller plus loin, les groupes continus (groupes de LIE).
- les techniques de convexité constituent aussi un champ fructueux : le théorème de séparation par un hyperplan dans $\mathbf{R}^n$ de HAHN-BANACH et, en corollaire, le théorème de HELLY permettent par exemple d'établir des propriétés intéressantes sur les cordes de convexes compacts.
- certains candidates et candidats peuvent trouver intérêt à aborder les questions d'intersection de courbes polynomiales, qui permettent notamment de mettre en œuvre le théorème de BEZOUT et des méthodes exploitant la notion de résultant.
- un grand nombre de problèmes de géométrie peuvent être traités en exploitant le formalisme des nombres complexes. Il est tout à fait approprié d'évoquer l'étude des inversions et, en particulier la possibilité de ramener un cercle à une droite et inversement ; la formule de PTOLÉMÉE illustre bien l'utilisation de cet outil. On peut parler des suites définies par récurrence par une homographie et leur lien avec la réduction dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ et aborder la construction de la sphère de RIEMANN.
- les problématiques de la construction à la règle et au compas constituent un autre axe pertinent pour cette leçon, avec le théorème de WANTZEL, et peuvent conduire à s'intéresser à des extensions de corps.

Comme dans le cas des autres leçons, il est tout à fait bienvenu de chercher à illustrer cette leçon par des exemples issus de l'analyse, des probabilités, de la statistique (par exemple en évoquant l'interprétation géométrique de l'analyse en composantes principales), du calcul formel (par exemple avec les applications du résultant) ou du calcul scientifique (par exemple en présentant des problématiques de géométrie computationnelle, comme le calcul d'enveloppe convexe, les algorithmes de triangulation DELAUNAY, les diagrammes de VORONOI...). Les thèmes en lien avec la géométrie projective ou la géométrie algébrique peuvent permettre à certains candidates et candidats de présenter des résultats très avancés. Cette leçon nécessite une préparation très personnelle et réfléchie. Les exemples et les résultats qui y sont présentés ont vocation à inciter les candidates et candidats à enrichir les autres leçons de cette épreuve d'exemples issus de la géométrie.

4.4 Épreuve orale d'analyse et probabilités

201 : Espaces de fonctions. Exemples et applications. Sans sortir du programme, il y a au moins deux thèmes très riches pour nourrir le plan : espaces de fonctions continues sur un compact, espaces L^p sur le cercle ou sur la droite réelle.

Sur le premier sujet, le jury attend une bonne familiarité avec la convergence uniforme et son utilisation pour justifier des régularités. Le théorème de Stone-Weierstrass est évidemment incontournable, dans ses différentes versions, constructives ou non. La complétude peut également être exploitée, par exemple en lien avec les équations différentielles ou intégrales.

Sur le second, la convolution et ses applications, ainsi que l'analyse de Fourier fournissent un large terrain d'exploration.

Plusieurs prolongements s'offrent aux candidates et candidats solides : théorème de Baire et ses innombrables applications, espaces de fonctions holomorphes (théorème de Montel et ses applications, espaces de Hardy, etc.), espaces de fonctions régulières (fonctions lipschitziennes, C^k, classe de Schwartz), algèbres de Banach de fonctions (algèbre de convolution $L^1(\mathbf{R})$, algèbre du disque, algèbre de Wiener des séries de Fourier absolument convergentes, etc.), étude des parties compactes de $C(K)$ (K compact) voire de L^p.

203 : Utilisation de la notion de compacité. Cette leçon ne porte pas sur la compacité en général mais sur son utilisation. On peut songer à plusieurs thèmes : théorèmes d'existence exploitant la compacité, utilisation de la compacité pour obtenir des uniformités.

Sur le premier sujet, on peut s'intéresser à l'utilisation, dans les espaces compacts ou les espaces normés de dimension finie, des valeurs d'adhérence pour prouver des convergences ou des continuités, et bien sûr aux problèmes d'extrema. Un exemple est le théorème d'équivalence des normes sur un espace de dimension finie, qui repose sur un argument de compacité qu'il faut avoir bien compris.

Sur le second, on peut explorer quelques unes des innombrables applications du théorème de Heine (intégrabilité au sens de Riemann des fonctions continues sur un segment, continuité des translations dans L^p, etc), mais aussi l'utilisation de sous-recouvrements finis (par exemple pour passer du local au global).

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à la caractérisation des espaces normés de dimension finie par la compacité de la boule unité fermée (éventuellement assortie d'applications), aux équations différentielles non linéaires (phénomène de sortie de tout compact), à l'équicontinuité (théorème d'Ascoli), aux familles normales (théorème de Montel), aux opérateurs compacts.

204 : Connexité. Exemples d'applications. Dans cette leçon, une fois les propriétés élémentaires présentées, il convient de mettre en évidence à travers un choix judicieux, non nécessairement exhaustif, d'applications le fait que la connexité formalise l'idée d'espace «d'un seul tenant», que la connexité par arcs permet d'illustrer géométriquement. Du point de vue opérationnel, les deux idées maîtresses sont la préservation de la connexité par image continue, et l'utilisation de la connexité pour passer du local au global.

La seconde est abondamment illustrée dans le domaine du calcul différentiel, des équations différentielles non linéaires (passage d'une unicité locale à une unicité globale), des fonctions holomorphes (principe du prolongement analytique ou du maximum).

En cas de non-connexité, la notion pertinente est celle de composante connexe, dont une première application est la structure des ouverts de $\mathbf{R}$, et leur mesure. Les exemples issus de l'algèbre linéaire sont bien entendu les bienvenus, à condition de ne pas trop détourner la leçon...

Pour les candidates et candidats solides, de bons prolongements sont le théorème de Runge, l'ensemble triadique de Cantor comme prototype d'espace métrique compact, parfait et totalement discontinu, la notion de simple connexité.

205 : Espaces complets. Exemples et applications. L'un des intérêts essentiels de la complétude est de fournir des théorèmes d'existence. Les illustrations ne manquent pas : existence de limites, utilisation de la convergence absolue ou normale, théorème du point fixe de Picard-Banach et ses applications, prolongement des applications uniformément continues à valeurs dans un espace métrique complet, et leurs innombrables applications.

Le cas particulier des espaces de Hilbert est un riche terrain d'exploration : théorème de projection sur un convexe fermé et ses applications, analyse de Fourier sur le cercle ou sur la droite réelle.

Les espaces L^p peuvent être abordés dans le cadre de cette leçon, mais sous leur angle spécifique d'espaces de Banach.

Pour les candidates et candidats solides, le théorème de Baire fournit d'innombrables applications passionnantes. Ils pourront également songer à la théorie des algèbres de Banach, notamment l'algèbre de Wiener des séries de Fourier absolument convergentes, ou à l'espace des fonctions holomorphes sur un ouvert de C muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

206 : Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse. Cette leçon d'exemples est l'occasion d'une réflexion sur de nombreuses parties du programme.

En topologie, il s'agit bien sûr des propriétés spécifiques aux espaces normés de dimension finie, notamment l'utilisation des valeurs d'adhérence, l'équivalence des normes ou encore l'identité entre parties compactes et parties fermées et bornées. D'autres champs d'application sont : la théorie de la mesure (mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^d$), le calcul différentiel (utilisation de matrices jacobiennes, espaces tangents, extrema liés, etc.), les équations différentielles linéaires, les séries de Fourier et plus généralement l'approximation dans un espace préhilbertien séparable par projection sur des sous-espaces de dimension finie.

Les candidates et candidats solides peuvent aborder la question de l'unicité de la meilleure approximation uniforme d'une fonction continue sur un segment par des polynômes de degré au plus égal à d, ou les liens entre la régularité et la qualité de l'approximation par des polynômes (algébriques ou trigonométriques) voire des fonctions rationnelles. D'autres pistes possibles sont l'étude des propriétés spectrales des opérateurs compacts, ou le théorème de Grothendieck sur les sous-espaces fermés de L^p contenus dans L^∞.

208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples. Cette leçon est particulièrement vaste, et il convient de faire des choix. Il est inutile de commencer systématiquement le plan de cette leçon par de longs rappels sur les normes : comme toutes les autres, cette leçon ne doit pas tomber dans le formalisme, mais bien proposer des résultats significatifs illustrés par des exemples bien choisis, en particulier de normes équivalentes ou non, ou de calculs de normes subordonnées. En ce qui concerne le contenu, le programme offre de nombreuses possibilités qui permettent aussi de faire un développement conséquent d'un résultat central ou d'un enchaînement de résultats centraux de cette leçon : cas de la dimension finie, intervention de la complétude (en particulier le cas hilbertien), étude de la compacité de la boule unité fermée, lien entre continuité d'une forme linéaire (ou plus généralement, d'une application linéaire de rang fini) et fermeture du noyau...

Pour les candidates et candidats solides, des prolongements possibles sont : les conséquences du théorème de Baire dans le cadre des espaces de Banach (tout particulièrement le théorème de Banach-Steinhaus et son utilisation pour construire des objets pathologiques), le théorème de Hahn-Banach et ses conséquences, la théorie de algèbres de Banach, la détermination de duals topologiques.

209 : Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples d'applications. Le programme offre aux candidates et candidats plusieurs pistes très riches pour nourrir cette leçon d'applications significatives : l'approximation uniforme par des polynômes algébriques ou trigonométriques, la régularisation par convolution. Mais on peut également penser à l'approximation des fonctions intégrables sur la droite réelle par des fonctions continues ou plus régulières à support compact.

Les séries de Fourier s'intègrent parfaitement à cette leçon, avec le théorème de Fejér (dans ses versions $L^p(\mathbf{T})$ ou $C(\mathbf{T})$) et ses applications, par exemple à la construction de bases hilbertiennes d'exponentielles complexes dans $L^2(\mathbf{T})$ et ses conséquences.

Voici enfin quelques pistes à réserver aux candidates et candidats solides : le théorème de Runge en analyse complexe, le théorème taubérien de Littlewood, l'unicité de la meilleure approximation uniforme d'une fonction continue sur un segment par des polynômes de degré au plus égal à d, les liens entre la régularité et la qualité de l'approximation par des polynômes (algébriques ou trigonométriques) voire des fonctions rationnelles, l'approximation uniforme par des fonctions lipschitziennes.

213 : Espaces de Hilbert. Exemples d'applications.

La théorie des espaces de Hilbert est riche. Les propriétes algébriques fondamentales, l'utilisation de la complétude et la projection orthogonale sur les convexes fermés (en particulier les sous-espaces vectoriels fermés) doivent être bien comprises.

L'analyse de Fourier, sur le cercle où la droite réelle, est évidemment une illustration fondamentale des résultats de cette leçon. Le jury a noté que la théorie L^2 des séries de Fourier n'était pas souvent maîtrisée.

Les concepts de famille orthonormée et de base hilbertienne constituent une source abondante d'applications. Le fait que les polynômes constituent une base hilbertienne de l'espace des fonctions de carré intégrable relativement à certains poids est présenté quasi systématiquement en développement. Peut-être faudrait-il songer à trouver d'autres sources d'inspiration, d'autant que la preuve et en déduire une base hilbertienne de $L^2(\mathbf{R})$ ne sont pas parfaitement compris.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser aux propriétés spectrales des opérateurs autoadjoints compacts d'un espace de Hilbert, à la minimisation de fonctionnelles convexes et coercives sur un espace de Hilbert, ou encore au théorème de Paley-Wiener qui caractérise les fonctions de $L^2(\mathbf{R})$ dont la transformée de Fourier est à support compact, ou encore au théorème d'échantillonnage de Shannon.

214 : Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Illustrations en analyse et en géométrie.

Les deux théorèmes fondamentaux auxquels cette leçon est consacrée offrent bien sûr une belle utilisation de la complétude, qu'on ne passera pas sous silence. Ils peuvent parfaitement faire l'objet d'un des deux développements. Pour autant, pour traiter l'intégralité du sujet, il faut se garder d'un point de vue trop formel, et proposer des applications significatives aussi bien en analyse qu'en géométrie : étude locale de courbes, de surfaces ou d'intersection de surfaces, problèmes d'optimisation sous contraintes (si possible autres que la preuve de l'inégalité arithméticogéométrique), régularité des racines d'un polynôme en fonction des coefficients, etc.

Une bonne compréhension de la méthode des multiplicateurs de Lagrange requiert celle de la notion d'espace tangent, qui en donne une justification beaucoup plus claire que certains raisonnements purement matriciels.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à l'étude locale d'applications suffisamment régulières (submersions, immersions, théorème du rang constant, lemme de Morse), au lemme de Sard, ainsi qu'aux sous-variétés de $\mathbf{R}^n$.

215 : Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.
L'idée de départ de cette leçon est qu'une fonction suffisamment régulière se comporte localement comme une application linéaire. De nombreuses différentielles usuelles (notamment issues de l'algèbre linéaire) peuvent ainsi être obtenues en calculant directement un développement limité. Sur ce point, une aisance raisonnable est attendue par le jury.

Un cas particulier important est la caractérisation des fonctions holomorphes parmi les fonctions différentiables, et son interprétation géométrique.

Les candidates et candidats semblent en général peu familiers avec les propriétés élémentaires des fonctions harmoniques, qui fournissent pourtant un riche champ d'applications.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à la différentielle de l'exponentielle matricielle, ainsi qu'aux points où celle-ci est un difféomorphisme local.

Pour ce qui concerne les applications, de nombreux thèmes relatifs aux leçons 214 ou 219 sont ici appropriés.

218 : Formules de Taylor. Exemples et applications.

La connaissance des formules de Taylor, en une ou plusieurs variables, de leurs différences et de leurs champs d'applications, allant de la géométrie jusqu'aux probabilités, doit constituer le cœur de la leçon, illustrée par des exemples pertinents. En général, le développement de Taylor d'une fonction comprend un terme de reste qu'il est crucial de savoir analyser. Cette analyse impose une bonne connaissance des relations de comparaison (des confusions entre o et O sont parfois constatées).

Le jury rappelle que le lien entre l'existence d'un développement limité à un ordre n et l'existence d'une dérivée n-ième doit être connu. On peut aussi montrer comment les formules de Taylor permettent d'établir le caractère développable en série entière (ou analytique) d'une fonction dont on contrôle les dérivées successives.

Pour les candidates et candidats solides voulant aller plus loin, on peut mentionner des applications en géométrie (lemme de Morse, étude locale au voisinage des points stationnaires pour les courbes et des points critiques pour la recherche d'extrema) et, même si c'est plus anecdotique, en probabilités (théorème central limite). On peut aussi penser à la méthode de Laplace, du col, de la phase stationnaire ou aux inégalités contrôlant les dérivées intermédiaires lorsque f et sa dérivée n-ième sont bornées, ou encore à l'analyse de méthodes d'intégration numérique.

219 : Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

Cette leçon offre aux candidates et candidats une multitude d'approches possibles : utilisation de la topologie, du calcul différentiel, de la convexité (fonctions convexes, projection sur un convexe fermé et leurs multiples applications), de l'holomorphie.

Les candidates et candidats peuvent proposer des problèmes d'optimisation sous contraintes, si possible autres que la preuve de l'inégalité arithmético-géométrique. À ce sujet, une bonne compréhension de la méthode des multiplicateurs de Lagrange requiert celle de la notion d'espace tangent, qui en donne une justification beaucoup plus claire que certains raisonnements purement matriciels.

Les algorithmes de recherche d'extremums ont également leur place dans cette leçon (méthode de Newton, du gradient à pas optimal, problème des moindres carrés, etc).

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser aux diverses versions du principe du maximum (fonctions holomorphes ou harmoniques, équations aux dérivées partielles), au calcul des variations, ou réfléchir à l'unicité de la meilleure approximation dans divers espaces fonctionnels, à commencer par celle des fonctions continues sur un segment par des polynômes de degré au plus égal à d.

220 : Illustrer par des exemples la théorie des équations différentielles ordinaires.

Cette leçon nécessite d'être soigneusement préparée. Bien entendu, la théorie de Cauchy-Lipschitz non linéaire en est le fondement, et comporte plusieurs points subtils (passages du local au global, phénomènes d'explosion en temps fini, etc.) qui requièrent une attention particulière. La leçon étant orientée vers l'étude d'exemples, il convient d'eviter cependant d'y consacrer une trop large portion du plan.

Le nombre des exemples proposés aura avantage à être restreint : il ne s'agit pas de présenter une longue compilation d'exemples à peine effleurés, mais d'en analyser avec soin un petit nombre, choisis pour leur intérêt et dans un souci d'illustrer des méthodes variées.

Des exemples de résolutions explicites peuvent bien sûr être proposés, mais l'intitulé appelle également des études qualitatives d'équations différentielles non linéaires d'ordre 1 ou 2, sans forcément toujours se limiter au pendule ou au modèle de Lotka-Volterra.

Il est important d'avoir compris comment l'étude d'une équation d'ordre 2 se ramène à celle d'un système différentiel d'ordre 1.

Dans les exemples d'études proposés, on a tout intérêt à mettre en évidence l'utilisation d'éléments géométriques pour construire l'allure des trajectoires : champs de vecteurs, points d'équilibre, barrières, isoclines, intégrales premières, et bien sûr, à faire des dessins ! Le cas autonome mérite une attention particulière, avec en particulier la recherche de trajectoires périodiques.

221 : Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

La théorie de Cauchy-Lipschitz linéaire est une porte d'entrée obligée pour cette leçon. Elle constitue un des premiers triomphes historiques de l'utilisation de la complétude (méthode des approximations successives), et un exemple fondamental d'intervention de la dimension finie en analyse. Sans que cet aspect devienne trop envahissant, les candidates et candidats peuvent proposer quelques exemples de résolutions explicites : cas des coefficients constants (qui mobilise fortement la réduction des endomorphismes), utilisation de séries entières, variation des constantes, etc.

Même dans le cadre linéaire, les études qualitatives présentent un grand intérêt et fournissent de nombreuses possibilités : étude du comportement asymptotique des solutions (pour lequel le lemme de Gronwall est un outil d'une grande efficacité), de la distribution des zéros, etc.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à la linéarisation d'équations non linéaires au voisinage d'un point d'équilibre, proposer des exem-ples de problèmes aux limites (théorie de Sturm-Liouville) ou d'études d'équations aux dérivées partielles linéaires.

223 : Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications

Cette leçon est limitée aux suites réelles ou complexes.

L'utilisation des valeurs d'adhérence pour montrer des convergences ou des continuités, ainsi que celle des limites inférieures et supérieures d'une suite réelle (qui permettent des rédactions expurgées d'epsilons superflus) sont des thèmes centraux. Le théorème de Bolzano-Weierstrass ainsi que celui de Cesàro, que les candidates et candidats doivent savoir démontrer, sont incontournables dans cette leçon.

Sans se limiter aux cas convergents, on peut également présenter des exemples d'études asymptotiques de suites définies par des sommes ou des relations de récurrence, voire implicitement.

D'autres pistes, comme les différentes méthodes d'approximation des réels par des irrationnels, la résolution numérique d'équations et leur vitesse de convergence peuvent être explorées.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser par exemple à l'équirépartition, à l'étude de systèmes dynamiques discrets, à l'accélération de la convergence, aux procédés de sommation des séries divergentes et aux théorèmes taubériens qui en découlent.

224 : Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

Cette leçon est exclusivement consacrée à des exemples : on n'attend aucun exposé systématique sur les notions de développement asymptotique ou d'échelle de comparaison. Une certaine aisance dans la manipulation des relations de comparaison est attendue dans cette leçon. Presque toutes les parties du programme peuvent être mises à contribution : suites définies par une relation de récurrence ou implicitement, estimation asymptotique de sommes partielles ou de restes, fonctions définies par une série ou une intégrale (comportement de la fonction ζ au voisinage de 1 ou du logarithme intégral au voisinage de $+\infty$, méthode de Laplace ou de la phase stationnaire notamment), mais aussi solutions d'équations différentielles dont on peut étudier le comportement à l'infini ou la distribution des zéros.

Il ne s'agit pas de présenter un grand nombre d'exemples triviaux, mais quelques exemples significatifs bien choisis et diversifiés, pour lesquels on analysera avec soin les idées essentielles des méthodes utilisées.

Pour les candidates et candidats solides voulant aller plus loin, des exemples de méthodes d'accélération de convergence peuvent être présentées.

226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

L'intitulé de la leçon permet de se placer dans des contextes variés : $\mathbf{R}, \mathbf{R}^n$, voire certains espaces de Banach fonctionnels.

En ce qui concerne le cadre réel, on pourra présenter des exemples d'études asymptotiques (si possible autres que $u_{n+1} = \sin u_n$), étudier l'itération d'une fonction suffisamment régulière au voisinage d'un point fixe ou encore présenter des exemples de méthodes de résolution approchée d'équations. En ce qui concerne l'étude asymptotique des suites récurrentes, le jury souligne le fait que la mise en œuvre d'une analogie discret-continu permet souvent de faire surgir naturellement la suite auxiliaire adaptée.

En se plaçant dans $\mathbf{R}^n$, on peut aborder par exemple l'étude des suites vérifiant une relation de récurrence d'ordre 2 ou plus, la convergence en loi de chaînes de Markov à espace d'états fini, l'extension à ce cadre de la méthode de Newton ou plus généralement les méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires.

Dans le cadre des espaces de Banach, les applications de la méthode des approximations successives ne manquent pas, qu'il s'agisse de la construction de solutions d'équations différentielles, intégrales, ou fonctionnelles.

228 : Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

Au delà des définitions et premiers théorèmes, le programme offre de nombreuses pistes aux candidates et candidats pour élaborer leur plan : recherche d'extrema, utilisations de la continuité uniforme, fonctions convexes et leur régularité, approximation par des fonctions régulières, utilisations des formules de Taylor, liens entre caractère C^∞ et analycité, etc.

Des exemples explicites de fonctions continues et nulle part dérivables, de fonctions continues et croissantes à dérivée nulle presque partout, de fonctions C^∞ à dérivées en un point prescrites, etc. sont les bienvenus dans cette leçon.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à la dérivabilité des fonctions monotones ou lipschitziennes ou à celle de l'intégrale indéfinie d'une fonction intégrable, proposer diverses applications du théorème de Baire (continuité d'une limite simple de fonctions continues, points de continuité d'une dérivée, généricité des fonctions nulle part dérivables parmi les fonctions continues ou des fonctions nulle part analytiques parmi les fonctions C^∞, etc.)

229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications. Les définitions et premières propriétés liées à ces notions doivent bien sûr être présentées pour pouvoir aborder les questions de limites et de continuité de ces fonctions et leurs caractérisations à l'aide de leurs dérivées. Il convient d'illustrer son exposé par de nombreux dessins.

La convexité est une source inépuisable d'inégalités, dans divers domaines y compris les probabilités. Dans ce même domaine, l'étude des fonctions de répartition de variables aléatoires réelles, fonctions croissantes s'il en est, est une piste intéressante.

Au delà de la dimension 1, les fonctions convexes définies sur une partie convexe de $\mathbf{R}^n$ font partie de cette leçon. La recherche de leurs extrema constitue une thèmatique riche d'exemples.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à des questions de dérivabilité des fonctions monotones, ou de continuité des fonctions convexes définies sur un ouvert convexe de $\mathbf{R}^n$.

230 : Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

Dans cette leçon, les définitions et premiers exemples de référence sont incontournables. Lorsque des « règles » de convergence sont présentées, celles-ci doivent être illustrées d'exemples consistants.

Le sujet ne se limite pas à la seule étude de la convergence d'une série, l'estimation des sommes partielles ou des restes (où la technique de comparaison entre somme et intégrale, en présence ou non de monotonie, est particulièrement efficace), et ses conséquences (comme l'étude asymptotique de certaines suites récurrentes) font partie intégrante du sujet.

L'utilisation de séries entières ou de séries de Fourier pour calculer la somme de certaines séries, le calcul de l'espérance d'une variable aléatoire discrète fournissent également de riches thèmes d'étude.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à quelques procédés de sommation des séries divergentes (qui interviennent naturellement dans la théorie des séries de Fourier, entre autres) ainsi qu'aux théorèmes taubériens qui s'y rapportent.

234 : Fonctions et espaces de fonctions LEBESGUE-intégrables. Cette leçon est orientée vers l'étude et l'utilisation des espaces L^1 (voire L^p) associés à la mesure de Lebesgue (supposée construite) sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{R}^n$, voire à d'autres mesures.

Les grands théorèmes de la théorie (permutations limite-intégrale, Fubini, etc.) sont évidemment incontournables et la proposition systématique d'exemples d'application significatifs doit enrichir ce déroulé.

Le thème de l'approximation (approximation des fonctions intégrables par des fonctions continues à support compact, utilisation de la convolution) fournit de nombreuses applications, ainsi que celui de l'analyse de Fourier sur le cercle ou la droite réelle.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à la transformée de Fourier sur L^2, la dualité entre L^p ($1 \leqslant p < \infty$), les liens entre intégration et dérivation, les procédés de sommation presque partout des séries de Fourier, l'algèbre de convolution L^1, l'étude des parties compactes de L^p, etc.

235 : Problèmes d'interversion de symboles en analyse. Le nouvel intitulé de cette leçon de synthèse doit permettre d'aborder explicitement des problèmes variés de permutations de symboles, qu'il s'agisse de limites, d'intégrales, de dérivées, d'espérances ou d'autres opérations.

Les candidates et candidats peuvent également inclure dans leur leçon des exemples de permutations de quantificateurs, obtenus par des arguments de compacité (voire, pour les candidates et candidats solides, utilisant le théorème de Baire).

La présentation des thématiques abordées doit être ordonnée rationnellement et illustrée systématiquement d'exemples significatifs.

236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

Les exemples proposés par les candidates et candidats doivent mettre en œuvre des techniques diversifiées : méthodes élémentaires, intégrales dépendant d'un paramètre, utilisation de la formule des résidus, de sommes de Riemann, voire de la transformée de Fourier dans L^1 ou L^2.

Il est attendu par le jury quelques exemples significatifs de calculs d'intégrales multiples (utilisation du théorème de Fubini, de changements de variables, etc.).

Les résultats d'analyse ou de théorie des probabilités dont la preuve utilise crucialement un calcul spécifique d'intégrale, (à pur titre indicatif, celle du théorème d'inversion de Fourier basée sur la transformée de Fourier d'une gaussienne) peuvent constituer de bonnes sources de développements.

Il est enfin possible de proposer une ou deux méthodes pertinentes de calcul approché d'intégrales.

239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Le programme fournit aux candidates et candidats de multiples pistes pour élaborer leur plan à commencer par les théorèmes de régularité usuels (allant jusqu'à inclure pour les plus solides celui d'holomorphie sous le signe somme). Ces résultats doivent être présentés dans un ordre rationnel et illustrés par des exemples et contre-exemples significatifs.

Convolutions et transformées de Fourier font naturellement partie de ces exemples, les candidates et candidats peuvent également s'intéresser aux fonctions caractéristiques en théorie des probabilités, à la transformée de Laplace ou à certaines fonctions «spéciales» définies par une intégrale. Les techniques d'études asymptotiques de fonctions définies par des intégrales font partie intégrante de cette leçon.

241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

L'étude des différents modes de convergence et leur utilisation ne doit pas donner lieu à un catalogue formel de théorèmes, mais être illustrée par des exemples significatifs et diversifiés.

Les fonctions « spéciales » définies par une série sont légion et fournissent aux candidates et candidats de multiples possibilités, sans éluder le champ complexe qui leur confère souvent leur pleine signification. Des exemples de sommes de séries continues nulle part dérivables ou croissantes non constantes et à dérivée nulle presque partout pourront également être proposés.

Les candidates et candidats peuvent aborder les séries entières (qui ont des applications combinatoires pouvant donner lieu à des études asymptotiques intéressantes), les fonctions génératrices des variables aléatoires à valeurs entières ou les séries de Fourier. Il est préférable, dans ce cas, de présenter quelques applications significatives plutôt qu'un cours formel.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à l'étude des séries de variables aléatoires indépendantes, la formule sommatoire de Poisson et ses applications aux fonctions spéciales - comme la fonction θ de Jacobi -, la théorie des séries de Dirichlet et ses utilisations en théorie des nombres.

243 : Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

Cette leçon ne doit pas être un catalogue de définitions, règles et propriétés accompagnées de quelques exemples triviaux. Le problème du domaine et les modes de convergence doivent être abordés.

Les liens entre l'holomorphie et l'analyticité doivent être maîtrisés. L'existence de nombreux développements en série entière peut être établie de manière immédiate par cet argument, avec en prime une information sur le rayon de convergence, voire sur l'ordre de grandeur des coefficients.

Le théorème radial (ou non-tangentiel) d'Abel est souvent proposé comme développement, en pensant qu'il s'agit d'un théorème de prolongement, alors qu'il s'agit d'un résultat de continuité. En réalité, ce théorème débouche naturellement sur la question plus générale des procédés de sommation des séries divergentes.

Les séries entières ont également des applications combinatoires pouvant donner lieu à des études asymptotiques très intéressantes. Les fonctions génératrices des variables aléatoires à valeurs entières ont également toute leur place dans cette leçon.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser aux théorèmes taubériens relatifs aux séries entières, au problème du prolongement analytique de la somme d'une série entière, aux séries entières aléatoires ou encore aux fonctions C^∞ nulle part analytiques.

244 : Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales. En 2023, cette leçon portait le numéro 265.

Si les fonctions usuelles élémentaires (logarithme, exponentielles, fonctions trigonométriques, etc) font partie de la leçon et doivent être maîtrisées, le jury attend en complément un panel d'exemples plus ambitieux. On ne peut bien sûr pas être exhaustif.

Il s'agit de proposer un choix pertinent de fonctions spéciales rencontrées dans divers domaines des mathématiques (fonction Γ en analyse complexe, densités de lois variées en probabilités, fonctions ζ, η ou séries L en théorie des nombres, etc.) avec des applications significatives. On peut très bien organiser l'exposé en fonction des techniques mathématiques utilisées, ou selon les applications envisagées.

Pour les candidates et candidats solides, la résolution d'équations aux dérivées partielles, la théorie analytique des nombres, les propriétés de stabilité de certaines lois en probabilités, les applications diverses des polynômes orthogonaux, etc., sont des sources d'inspiration possibles pour cette leçon.

245 : Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de C. Exemples et applications.

Les fondements de la théorie des fonctions holomorphes d'une variable complexe contenues dans le programme fournissent un ample matériel pour nourrir cette leçon : représentation intégrale ou sous forme de série entière, principe des zéros isolés et ses conséquences, principe du maximum. L'un des deux développements proposés peut être consacré à la preuve d'un de ces résultats fondamentaux.

Les candidats doivent être capables de donner la définition d'une fonction méromorphe, et d'en présenter les applications du programme : développements en série de Laurent et formule des résidus, illustrés par des exemples significatifs.

Les candidates et candidats solides peuvent aborder par exemple les théorèmes de Rouché ou de Hurwitz, l'étude des zéros des fonctions holomorphes, la représentation sous forme de produit infini, le problème de la représentation conforme, le théorème de Paley-Wiener, les espaces de Hardy sur le disque unité, le problème du prolongement analytique, l'équation fonctionnelle de la fonction ζ et ses conséquences, les algèbres de Banach, etc.

246 : Séries de Fourier. Exemples et applications. Dans cette leçon, la théorie L^2 est incontournable, et son interpétation en terme d'isométrie doit être mise en évidence. Les candidates et candidats doivent pouvoir écrire l'identité de Parseval pour exprimer le produit scalaire de deux fonctions de $L^2(\mathbf{T})$.

En ce qui concerne la convergence simple, ou uniforme ou en norme L^p au sens de Cesàro, les propriétés cruciales des noyaux utilisés doivent être clairement explicitées.

Un autre thème important est le lien entre régularité de la fonction et vitesse de convergence vers 0 de ses coefficients de Fourier.

Il est important d'illustrer cette leçon de quelques unes des innombrables applications des séries de Fourier : calculs de sommes de séries, équations aux dérivées partielles (équation de la chaleur, problème de Dirichlet sur le disque unité, etc.), inégalité de Bernstein, formule sommatoire de Poisson et ses applications, inégalité de Wirtinger, inégalité isopérimétrique, etc.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à la divergence des séries de Fourier dans divers contextes (soit en exhibant des contre-exemples, soit en utilisant la théorie de Baire), mais aussi aux procédés de sommation presque partout des séries de Fourier, aux séries de Fourier lacunaires, à l'algèbre de Wiener des séries de Fourier absolument convergentes, la convergence de la série de Fourier d'une fonction α-höldérienne si $\alpha > \frac{1}{2}$, etc.

250 : Transformation de Fourier. Applications. Cette leçon est consacrée à l'analyse de Fourier sur la droite réelle. Au niveau de l'agrégation, elle peut être abordée dans trois cadres : L^1, classe de Schwartz des fonctions C^∞ à décroissance rapide, ou L^2. Les deux derniers cadres sont les plus satisfaisants du point de vue de la symétrie obtenue, le dernier étant le plus délicat. Cette leçon exige donc une préparation soigneuse.

La leçon nécessite de rappeler le lien avec le produit de convolution. Elle doit aussi être illustrée par quelques applications significatives : formule sommatoire de Poisson et ses applications, résolution d'équations aux dérivées partielles, etc. Par ailleurs, les fonctions caractéristiques et leurs applications en probabilités ont toute leur place dans cette leçon.

Proposer comme développement le théorème d'échantillonage de Shannon est pertinent, à condition d'avoir bien compris qu'il traduit une isométrie entre deux espaces de Hilbert.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser aux vecteurs propres de la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbf{R})$, à la non-dérivabilité de la fonction de Weierstrass dans le cas le plus général, à l'algèbre de convolution $L^1(\mathbf{R})$, au théorème de Paley-Wiener qui caractérise les fonctions de $L^2(\mathbf{R})$ dont la transformée de Fourier est à support compact, aux principes d'incertitude, etc.

253 : Utilisation de la notion de convexité en analyse.

La convexité intervient dans plusieurs parties du programme, offrant ainsi plusieurs pistes très riches pour élaborer la leçon : convexité dans les espaces vectoriels réels, fonctions convexes (d'une ou plusieurs variables réelles), caractérisation parmi les fonctions C^1 ou C^2 sur un ouvert convexe de $\mathbf{R}^n$, projection sur un convexe fermé d'un espace de Hilbert, méthodes d'optimisation en dimension finie. Les applications de ces thèmes sont innombrables : inégalités classiques en analyse et en probabilité, optimisation, critère de densité d'un sous-espace vectoriel d'un espace de Hilbert, etc.

Il est important de développer cette leçon dans son cadre géométrique naturel, en n'hésitant pas à l'illustrer par de nombreux dessins.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à la continuité, voire à la différentiabilité d'une fonction convexe définie sur un ouvert convexe de $\mathbf{R}^n$, aux points extrémaux d'une partie convexe d'un espace vectoriel réel de dimension finie, à la minimisation de fonctionnelles convexes et coercives sur un espace de Hilbert, aux applications du théorème de Hahn-Banach, à la notion d'uniforme convexité et son application à l'existence d'un vecteur normant pour une forme linéaire continue.

261 : Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications. Cette leçon concerne les diverses lois du programme, leurs interactions et leurs propriétés de stabilité, et appelle donc quelques illustrations concrètes et bien choisies de calculs de lois, dans un contexte de modélisation. Le théorème de transfert, qui calcule $\mathbf{E}(f(X))$ à l'aide de la loi de X, les vecteurs aléatoires à coordonnées indépendantes, ainsi que la caractérisation de la loi par la fonction de répartition, fonction génératrice ou caractéristique, sont au cœur de cette leçon. Les principales propriétés des fonctions de répartition et des fonctions caractéristiques des variables aléatoires réelles doivent être connues.

Les candidates et candidats peuvent également aborder la convergence en loi en l'illustrant d'exemples et d'applications variés en probabilités et/ou en statistique (estimation par intervalle de confiance).

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à la caractérisation de la loi par les moments, à des inégalités de concentration, aux vecteurs gaussiens, au théorème central limite dans $\mathbf{R}^d$, aux chaînes de Markov, aux processus de Poisson.

262 : Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications. Les liens entre les différents modes de convergence d'une suite de variables aléatoires doivent être illustrés par des exemples et contre-exemples variés. Ainsi, les implications entre les divers modes de convergence, et les réciproques partielles doivent être connues. Les théorèmes de convergence du programme (lois des grands nombres, théorème central limite) sont bien sûr au cœur de cette leçon, et la preuve de la loi forte des grands nombres, éventuellement sous des hypothèses de confort, peut être présentée. Les liens de ces théorèmes limite avec les questions d'estimation ponctuelle, d'estimation par intervalle de confiance en statistique, ont leur place dans cette leçon.

Les candidates et candidats solides peuvent aborder la convergence des séries de variables aléatoires indépendantes, les marches aléatoires, la loi du logarithme itéré, la méthode de Monte Carlo, le théorème central limite dans $\mathbf{R}^d$, les chaînes de Markov, les lois stables ou infiniment divisibles.

264 : Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Le jury attend des candidates et candidats qu'ils rappellent la définition d'une variable aléatoire discrète et que des lois usuelles du programme soient présentées, ainsi que leurs liens éventuels. Il est important de proposer quelques exemples de modélisation faisant intervenir ces lois. Les techniques spécifiques aux variables discrètes, notamment à valeurs entières (caractérisation de la convergence en loi, notion de fonction génératrice) doivent être mises en évidence et illustrées par des exemples variés. La marche aléatoire symétrique sur $\mathbf{Z}$ ou le processus de Galton-Watson fournissent des exemples riches.

Les candidates et candidats solides peuvent aborder la loi du logarithme itéré (par exemple dans le cas de la marche aléatoire symétrique), les chaînes de Markov, les processus de Poisson.

266 : Utilisation de la notion d'indépendance en probabilités.

Le titre de cette leçon en 2023 était : **Illustration de la notion d'indépendance en probabilités.**

Cette reformulation a pour objectif d'en faire une leçon de synthèse autour de cette notion incontournable en probabilités.

L'indépendance est centrale en probabilités et démarque cette théorie de celle de l'intégration. Les notions importantes de probabilité conditionnelle, d'indépendance de deux événements, d'indépendance mutuelle d'une suite d'événements, (voire de celle d'une suite de tribus), d'indépendance de familles de variables aléatoires, doivent être connues.

Le programme fournit plusieurs utilisations élémentaires de l'indépendance : lien avec l'espérance, la variance, la covariance, le coefficient de corrélation, loi faible des grands nombres, lemme de Borel-Cantelli, stabilité de certaines lois (normale, Cauchy). Des thèmes pouvant également être abordés sont la loi forte des grands nombres ou le théorème central limite, ou l'étude de la marche aléatoire symétrique sur $\mathbf{Z}$.

Les candidates et candidats solides peuvent aborder la loi du 0-1 de Kolmogorov, la convergence des séries de variables aléatoires indépendantes, les vecteurs gaussiens, le théorème de Cochran.

Chapitre 5

Épreuves orales de modélisation

5.1 Présentation des épreuves de Modélisation

Lors de l'inscription au concours, trois options sont proposées :

A. Probabilités et Statistiques,
B. Calcul scientifique,
C. Algèbre et Calcul formel.

L'épreuve de modélisation est composée d'une première période de préparation de quatre heures et d'une seconde période d'interrogation d'une heure, elle-même subdivisée en un exposé de 35 minutes et d'un échange avec le jury de 25 minutes. Ces modalités s'appliqueront encore pour la session 2024. La candidate ou le candidat commence par tirer au sort un couple de textes. Elle ou il a alors accès aux deux textes durant sa préparation et peut de choisir celui qu'elle ou il souhaite étudier et présenter durant la période d'interrogation.

Cette épreuve permet aux candidates et candidats de mettre en avant diverses qualités : les connaissances mathématiques, leur mise en perspective, l'aptitude à les appliquer à des problèmes concrets de modélisation, la réflexion, la pertinence des illustrations informatiques, les qualités pédagogiques de mise en forme d'un exposé construit et cohérent, la capacité à faire preuve d'initiative pour s'exprimer et manifester des qualités pédagogiques et de synthèse. L'aptitude des candidates et candidats à répondre aux questions fait partie intégrante de l'évaluation de cette épreuve. Comme pour l'ensemble des oraux, les exposés dynamiques et vivants sont particulièrement appréciés.

5.1.1 Textes

L'épreuve de modélisation repose sur l'exploitation d'un texte d'environ 5 à 6 pages que les candidates et candidats choisissent parmi les deux qui leur sont proposés lors du tirage et qu'ils pourront consulter en ligne dans la salle de préparation.

Le texte fourni est la base pour construire et exposer un traitement mathématique d'un problème « concret » en s'appuyant sur les éléments, généralement partiels, disséminés dans le texte. Les candidates et candidats doivent utiliser leurs connaissances mathématiques pour justifier les points de leur choix parmi ceux évoqués dans le texte, proposer un retour sur la problématique étudiée ainsi qu'une conclusion. Les textes peuvent présenter des arguments rapides, voire heuristiques, qui sont dans ce cas signalés comme tels, mais ils ne contiennent pas d'assertion délibérément trompeuse et se concluent par une liste de suggestions. Les principaux attendus de l'épreuve sont rappelés dans un bandeau surmontant chaque texte.

Même si la plupart des textes s'appuient sur des problématiques issues de sciences autres que les mathématiques, aucune connaissance dans ces domaines n'est exigée par le jury. Discuter la modélisation proposée par un texte consiste donc avant tout à dégager les comportements qualitatifs du modèle, la manière dont il dépend d'éventuels paramètres et s'il semble apte à rendre compte des phénomènes qu'il est censé représenter. Toutefois, le jury s'attend à ce que les candidates et candidats ne se contentent pas d'un exposé intégralement qualitatif et démontrent certains résultats évoqués dans le texte ; il apprécie particulièrement, sans toutefois l'exiger, qu'un candidat montre sa compréhension du modèle en exhibant par exemple les conséquences d'une variation de paramètres ou de données, notamment dans l'illustration informatique. *A contrario*, des interprétations qualitatives du comportement des modèles sont trop souvent absentes des exposés. Pourtant, montrer que l'on comprend un modèle ne se réduit pas à prouver un théorème, et nécessite d'exposer des expérimentations informatiques à fin d'illustration.

Chaque année, des textes sont rendus publics et sont disponibles sur le site de l'agrégation de mathématiques https://agreg.org. Ces textes sont représentatifs de l'épreuve et permettent aux candidates et candidats de se familiariser avec le format des textes, de se faire une idée des attentes du jury et de réfléchir à des illustrations numériques pertinentes dans le cadre du texte.

5.1.2 Période de préparation

Durant les quatre heures de préparation, les candidates et candidats ont accès à une bibliothèque numérique et disposent d'un ordinateur dont la configuration est décrite sur le site de l'agrégation de mathématiques, à l'adresse https://agreg.org. Les candidates et candidats retrouveront le même environnement sur l'ordinateur de la salle d'interrogation. Il n'est évidemment pas réaliste de découvrir les logiciels à disposition des candidates et candidats le jour de l'épreuve : la configuration informatique utilisée pour le concours et sa documentation sont accessibles et téléchargeables depuis le site https://agreg.org et permettent de se familiariser avec l'environnement offert lors de l'épreuve. Durant la période de préparation, les candidates et candidats peuvent également utiliser leurs propres ouvrages, dans les mêmes conditions que pour les épreuves de leçons.

Il est instamment demandé aux candidates et candidats de ne pas écrire sur le texte imprimé qui leur est distribué car il est destiné à être utilisé à nouveau pendant la session.

Il est recommandé aux candidates et candidats de consacrer une partie de leur temps de préparation à s'interroger sur le discours qu'ils tiendront, sur l'exploitation du tableau, sur l'utilisation de l'outil informatique et sur le temps qu'ils vont consacrer à chacune des parties de leur plan, ce qui leur permettra de mettre au mieux en valeur leurs connaissances et leur compréhension du texte ou d'une partie de celui-ci. Proposer un exposé structuré et cohérent ne peut s'improviser au moment de l'oral et doit faire l'objet d'une réflexion préalable durant la préparation. Il est également conseillé aux candidates et candidats de consacrer quelques minutes à la fin de leur préparation à une prise de recul sur leur plan. Ce dernier est un élément important pour le jury, qui pourra, en s'y référant, aider les candidates et candidats dans leur gestion du temps de l'exposé, notamment en leur rappelant, si ce n'est fait avant les dernières minutes, que l'illustration informatique doit être présentée au cours de la présentation et non pendant le temps d'échange.

5.1.3 Période d'interrogation

Au début de l'interrogation, le jury rappelle les modalités de l'épreuve, puis invite la candidate ou le candidat à vérifier que les fichiers qu'ils ont créés lors de la préparation ont bien été transférés sur la machine servant pour l'épreuve (dont l'environnement est identique à celui de la salle de préparation). La période d'interrogation dure une heure et est scindée en deux temps : un exposé de 35 minutes maximum suivi d'échanges avec le jury jusqu'à la fin de l'heure impartie. Durant la dernière session, le jury a constaté une augmentation de la proportion de candidates et candidats utilisant des expressions familières durant leur période d'interrogation : nous invitons les futurs candidates et candidats à soigner le vocabulaire employé devant le jury.

Exposé. Les candidates et candidats ont la recommandation de commencer par donner la structure de leur présentation sous forme d'un plan et le déroulement de l'exposé doit être en cohérence avec cette structure. Grâce à ce plan, le jury pourra ainsi avoir une vision globale de l'exposé et aider, si besoin, les candidates et candidats à gérer leur temps. Comme les candidates et candidats se le voient rappeler en début d'épreuve, l'exposé doit être accessible à un public qui découvre les problématiques du texte et doit permettre d'en faire comprendre les enjeux à un public qui ne le connaîtrait pas. Ainsi, le jury n'est pas censé connaître le texte présenté par le candidat, mais chaque membre dispose néanmoins d'un exemplaire papier, afin que les candidates et candidats puissent y faire référence pour éviter de recopier les notations, les énoncés complets ou certaines formules. Le jury, tout en étant conscient des difficultés du concours, attend un minimum d'aisance au tableau, la manifestation d'une certaine volonté de capter l'attention de l'auditoire et un discours clair et précis.

Durant l'exposé, les candidates et candidats disposent de leurs notes, d'un tableau et d'un ordinateur. Ils peuvent alterner, quand bon leur semble, entre un exposé oral, quelques éléments rédigés au tableau de façon propre et lisible et la présentation de ce qui a été préparé à l'aide de l'outil informatique. Les candidates et candidats doivent gérer correctement le tableau et demander, si besoin, au jury les parties qu'elles ou ils peuvent effacer, ce dernier pouvant souhaiter conserver certains passages et y revenir lors des échanges avec les candidates et candidats . Même si les programmes informatiques ne fonctionnent pas commeelles ou ils l'auraient souhaité ou si les simulations numériques n'ont pas abouti, les candidates et candidats sont invités à expliquer ce qu'ils voulaient mettre en œuvre, illustrer ou programmer. Si, lors de la phase d'exposé, les candidates et candidats n'ont pas du tout utilisé l'ordinateur dix minutes avant la fin du temps qui leur est imparti, le jury les en alertera.

Comme dans tout oral, la construction de l'exposé doit être une préoccupation importante des candidates et candidats : l'exposé doit s'appuyer sur un dosage cohérent et harmonieux entre introduction motivée de modèles, preuves mathématiques, illustrations informatiques, critiques éventuelles du texte, réponses aux questions, mise en lumière des connaissances. Une réflexion s'impose afin de produire un tout cohérent et intelligible par un public qui, dans l'esprit de l'épreuve, découvre le texte à travers l'exposé des candidates et candidats .

Les candidates et candidats sont libres de la gestion de leur exposé : il n'y a pas de « format type » pour cette épreuve. Sur un même texte, des formats très différents de prestation ont été valorisés : certains s'éloignant du découpage opéré par le texte et arrangeant les éléments autrement ; d'autres présentant un survol du problème, de la méthode et des résultats obtenus avant de détailler des aspects plus mathématiques ; d'autres au contraire suivant de près la progression du texte mais en y apportant les éclairages et les illustrations nécessaires. De bons exposés ont parfois choisi d'aller loin dans le texte pour en décrire la dynamique globale et l'aboutissement (quitte à ne pas traiter toutes les démonstrations) ; d'autres exposés, tout aussi bons, ont traité un passage plus limité du texte mais de manière détaillée et en fournissant tous les arguments pertinents.

Le jury est sensible à l'honnêteté du discours. Tenter de faire semblant de connaître une notion ou d'avoir compris un passage du texte est pénalisé. Un regard critique (« il faudrait prouver que... mais je n'ai pas réussi à le faire », « les hypothèses du théorème de XXX que je connais pour aborder des problèmes similaires ne sont pas satisfaites dans le cas présent »...) est une attitude bien plus appréciée.

Échanges avec le jury. Durant 25 minutes, le jury revient sur certains propos des candidates et candidats qui méritent précision. Il peut demander un énoncé précis d'un théorème utilisé pour démontrer une assertion ou des éléments de démonstration d'un résultat énoncé par les candidates et candidats . Les échanges peuvent également porter sur la modélisation ou les illustrations informatiques.

5.2 Recommandations du jury communes aux trois options

5.2.1 Organisation de l'exposé

L'exercice de l'exposé en temps limité nécessite un certain entraînement. Il est malheureusement fréquent de voir des exposés un peu trop lents pendant les 20 à 25 premières minutes qui accélèrent brutalement dans les 10 dernières minutes et que les candidates et candidats peinent à conclure dans le temps imparti.

La rigueur et la clarté de l'organisation, la gestion du temps, la pertinence des choix opérés parmi les différentes questions soulevées par le texte sont des éléments de l'évaluation. Les qualités de synthèse sont aussi appelées à s'exprimer : il vaut mieux indiquer les étapes cruciales d'un raisonnement que de se lancer dans un long calcul fastidieux qu'on aura du mal à mener à bien et à mettre en valeur.

Par ailleurs, si le jury sanctionne un exposé significativement trop bref, la démarche consistant à « jouer la montre » est encore plus sévèrement pénalisée. Utiliser une portion excessive du temps de parole pour recycler un chapitre de cours ou un développement d'une leçon d'Analyse et Probabilités ou d'Algèbre et Géométrie, en s'éloignant des enjeux du texte, est considéré comme un hors sujet et est sévèrement sanctionné. Enfin, l'aspect pédagogique de l'exposé, même si le texte n'est restitué que partiellement mènera à une note bien plus élevée qu'un catalogue de type paraphrase.

Une brève introduction à la problématique avant de s'engager dans une longue digression sans lien avec le problème de départ ne peut conduire à une prestation jugée comme satisfaisante et sera sanctionnée par le jury. De même, un exposé se réduisant à la présentation de la problématique du texte et à des illustrations informatiques, ou à l'énumération linéaire des suggestions proposées par le texte, sans contribution des candidates et candidats , ne peut conduire au mieux qu'à un résultat médiocre. Plutôt qu'un survol superficiel de l'intégralité du texte sans apport mathématique ou critique scientifique, les candidates et candidats doivent préférer traiter le texte de façon partielle mais substantielle et en profondeur, ce qui peut aboutir à une bonne note.

5.2.2 Contenu de l'exposé

Le jury rappelle que, même s'il s'agit d'une épreuve plus appliquée ou moins académique que les deux autres épreuves orales, cela ne dispense en aucun cas les candidates et candidats de faire preuve de la rigueur mathématique requise : quand on utilise un théorème, il faut impérativement être capable d'en restituer un jeu d'hypothèses. Par jeu d'hypothèses correct, on entend que le théorème soit vrai et qu'il s'applique effectivement au contexte considéré. Le jury n'attend pas nécessairement un énoncé avec les hypothèses les plus générales possibles.

Le jury regrette de ne pas voir davantage de dessins (soignés) ou schémas explicatifs qui peuvent rendre l'argumentation plus claire et convaincante. La capacité à revenir sur le problème de départ et à conclure quant à l'efficacité de l'approche mathématique proposée pour y répondre est une qualité très appréciée.

Pour enrichir leur propos, les candidates et candidats sont invités à mobiliser leurs connaissances sur des aspects variés du programme, en étayant les arguments seulement esquissés dans le texte par des énoncés précis. Il est totalement illusoire de chercher à impressionner le jury par une logorrhée de mots savants : les textes proposés peuvent être discutés en exploitant un bagage technique qui n'utilise pas les éléments les plus sophistiqués du programme. En particulier, le jury ne manque pas de s'attarder sur toute notion amenée par les candidates et candidats durant leur présentation et il est toujours dommageable de s'aventurer sur des terrains méconnus. Bien plus qu'une démonstration de virtuosité technique, le jury attend que les candidates et candidats montrent leur maîtrise d'énoncés relativement simples « en situation » : c'est là que réside une des difficultés principales de l'épreuve. Nombre de candidates et candidats peinent à formaliser précisément des notions de base du programme ou à mettre en œuvre certaines de leurs connaissances.

5.2.3 Illustration informatique

Le jury rappelle son fort attachement à cet aspect de l'épreuve, dont les ambitions sont clairement délimitées. Il ne s'agit en aucun cas, et pour aucune des trois options, d'un exercice de programmation. L'objectif est d'être capable d'utiliser l'outil informatique pour illustrer, de façon pertinente, le contenu du texte.

La réalisation de cet objectif constitue une part incompressible de la note finale attribuée à l'épreuve. Une très bonne évaluation peut résulter d'une exploitation judicieuse de programmes simples, reposant largement sur les routines standards des logiciels fournis. La forme et la nature des illustrations proposées n'obéissent à aucun format préétabli. En revanche, elles doivent faire la preuve d'une véritable réflexion scientifique et être agrémentées de commentaires, sur les résultats et les méthodes. En particulier, le choix des jeux de paramètres d'entrée pour leurs codes doit être pertinent. Les illustrations informatiques devraient plus souvent permettre de faire un retour sur la problématique du texte et il convient de commenter les résultats obtenus dans le cadre du modèle proposé par le texte. Des illustrations peuvent mettre en valeur les limites du modèle étudié et le jury apprécie particulièrement que les candidates et candidats aient un regard critique sur le texte et ne prennent pas celui-ci pour vérité absolue.

Si un bel effort est produit par la majorité des candidates et candidats , un nombre très limité d'entre eux rechignent encore à toucher à l'outil informatique. Cette stratégie, dont on pourrait naïvement penser qu'elle permet de consacrer plus de temps à l'analyse du texte et à la préparation de l'exposé oral, est fortement sanctionnée.

Il est important de se rappeler qu'il s'agit d'une illustration. Les candidates et candidats peuvent choisir de présenter leur code, s'ils le souhaitent, mais ils doivent réfléchir à en extraire les points clés ; une présentation exhaustive et linéaire est préjudiciable à l'exposé, car elle risque d'empiéter sur le temps à consacrer à la restitution du texte. Cependant, le jury peut demander des précisions sur un point du code. Dans le cas d'une représentation graphique, il est important de préciser, au moins oralement, ce qui est représenté en abscisses et ordonnées.

Pour finir, le jury est tout à fait conscient de la difficulté de l'utilisation de l'outil informatique en temps limité et en situation de stress. Il reste bienveillant face aux candidates et candidats dont les illustrations informatiques n'ont pas abouti au résultat souhaité. Dans une telle situation les candidates et candidats sont encouragés à expliquer ce qu'ils ont fait et quel type de résultats ils espéraient obtenir. Le jury sait prendre en compte dans sa notation la démarche suivie lorsqu'elle est clairement argumentée et permettrait, avec des aménagements mineurs, de mettre en évidence des aspects intéressants du texte.

5.3 Option A : Probabilités et Statistiques

5.3.1 Généralités

Les textes proposés à l'option A abordent indifféremment des thèmes faisant intervenir des probabilités ou des statistiques, parfois les deux en même temps, dans des proportions variables. Une préparation homogène sur l'ensemble du programme de l'option A est donc attendue et fortement conseillée.

Le niveau de préparation progresse globalement depuis 2019 : les candidates et candidats maîtrisent mieux les notions essentielles, et l'utilisation de l'outil informatique est en général plus pertinente. Les rapports des sessions précédentes ont visiblement été lus en détail et les attentes de l'épreuve sont mieux comprises. Seuls quelques rares candidates et candidats semblent découvrir le format de l'épreuve le jour de l'oral. Le jury rappelle à ce propos qu'il est permis aux candidates et candidats de consulter leurs notes manuscrites à tout moment.

Il faut garder en tête que toute étude mathématique d'une situation réelle passe par une étape de modélisation, laquelle implique des choix d'outils et d'hypothèses mathématiques adaptés à l'étude. À titre d'exemple, il est ainsi apprécié de justifier la pertinence d'une hypothèse d'indépendance, du caractère markovien d'une suite de variables aléatoires ou encore du choix des lois de probabilité utilisées dans la modélisation. On pourra citer notamment la loi géométrique qui modélise un premier succès, la loi exponentielle qui reflète une absence de mémoire, la loi normale qui traduit une accumulation de petites erreurs indépendantes ou encore la loi de Poisson dans un contexte d'événements rares.

Naturellement, on appréciera que le candidat ou la candidate mène une réflexion critique et argumentée sur les diverses hypothèses du texte et propose éventuellement des améliorations rendant le modèle plus réaliste. Cette argumentation pourra reposer sur des illustrations informatiques ou des considérations mathématiques.

5.3.2 Recommandations spécifiques

Le jury signale ici quelques points du programme sur lesquels des progrès ont été notables lors de la session 2023, ou *a contrario*, pour lesquels des problèmes récurrents apparaissent. Des suggestions d'illustrations informatiques de ces notions figurent dans la section suivante.

- **La loi des grands nombres et le théorème central limite** (attention à la confusion entre variance et écart-type) sont des résultats indispensables. Leurs hypothèses exactes et les modes de convergence en jeu semblent mieux maîtrisés.
- **Convergences de suites de variables aléatoires.** Les définitions, caractérisations et les liens entre les différents modes de convergence (presque-sûre, dans L^p, en probabilité, en loi, etc.) sont des questions fréquemment soulevées : elles posent souvent quelques difficultés et il faut s'y préparer.
- **Intervalles de confiance.** La maîtrise de cette notion essentielle dans le cadre de l'estimation d'un paramètre est très hétérogène : certains sont capables de donner immédiatement un intervalle, tout en maîtrisant chaque étape de sa construction. Pour d'autres, la notion même d'intervalle de confiance reste floue. La démarche qui y mène est trop souvent confondue avec la pratique d'un test statistique. Le lemme de Slutsky, qui peut mener à des intervalles asymptotiques, est en général connu.
  Signalons encore qu'un intervalle de confiance ne relève pas toujours du théorème central limite, certains intervalles sont exacts : par exemple dans le contexte du modèle linéaire gaussien ou bien avec l'utilisation d'inégalités de concentration.
- Plus largement, le vocabulaire des **estimateurs** (convergence, biais, risque quadratique, etc.) doit être maîtrisé et utilisé pour comparer avec pertinence des estimateurs d'un même paramètre.
- **Chaînes de Markov.** Depuis 2021, le programme inclut les propriétés de Markov faible et forte. La propriété faible est souvent connue, mais il est très rare d'obtenir un énoncé correct de la forte, alors même que la notion de temps d'arrêt semble comprise. Les définitions et résultats associés aux chaînes de Markov : états récurrents, irréductibilité, apériodicité, théorèmes limites (ergodique, existence et unicité d'une loi invariante, etc.) sont relativement bien connus pour cette session 2023.
- **Vecteurs gaussiens.** On observe toujours des lacunes sur ce sujet. Le théorème central limite vectoriel pose donc des problèmes dès son énoncé. La définition de la matrice de covariance doit être connue, ainsi que la loi image d'un vecteur gaussien par une transformation affine $X \mapsto AX + B$. Le théorème de Cochran, très utile pour établir la loi de certaines statistiques, a posé des difficultés à de nombreux candidates et candidats lors de la session 2023.
- **Processus de Poisson.** Le jury a constaté une amélioration sensible des connaissances sur cette partie du programme, autrefois très méconnue. Les propriétés de ce processus, l'allure des

trajectoires, une idée de sa construction (et sa simulation) à partir de variables exponentielles sont à connaître.

— **Tests statistiques.** Pour beaucoup de candidates et candidats , c'est l'un des points les plus problématiques du programme, alors que deux tests statistiques y figurent explicitement (χ^2 et Kolmogorov-Smirnov). Il faut en connaître le principe, la forme de la statistique, le contexte où ils peuvent être appliqués et, surtout, être capable d'expliquer comment mener concrètement un test.
Les discours confus qui mélangent la pratique d'un test et la détermination d'un intervalle de confiance ne sont pas rares, la distinction doit être travaillée. La notion de p-valeur, parfois abordée dans certains exposés (voir la section suivante), semble embarrasser celles ou ceux qui l'utilisent quand une interprétation est demandée. Elle est très souvent confondue avec les risques de première ou deuxième espèce.

5.3.3 Mise en œuvre informatique

Le logiciel Python est prédominant en 2023, suivi de Scilab. Dans tous les cas, les compétences informatiques sont en progrès ces dernières années. Les possibilités d'utilisation de l'outil informatique pour illustrer des résultats probabilistes ou statistiques avec pertinence sont nombreuses, nous ne pouvons pas espérer en dresser une liste exhaustive. Nous donnons ici quelques conseils et les exemples les plus importants.

— Les candidates et candidats peuvent **choisir de présenter une partie de leur code** s'ils le souhaitent (surtout en cas de dysfonctionnement à l'exécution), mais de manière synthétique afin de ne pas porter préjudice au déroulement de l'exposé.

— Tout tracé devrait être accompagné d'une **légende explicite** à l'adresse du jury. Si c'est un graphe, il faut systématiser l'emploi d'étiquettes sur les axes : que représentent les abscisses ? les ordonnées ?

— Il est indispensable de savoir **illustrer une convergence en loi**. Deux méthodes sont couramment utilisées : on peut confronter graphiquement un histogramme de copies indépendantes d'une variable donnée X_n (pour n assez grand) à la densité de la loi limite ; on peut aussi tracer la fonction de répartition empirique et la fonction de répartition limite. La plupart des candidates et candidats privilégient les histogrammes, en se contentant d'une appréciation visuelle de l'adéquation, mais sans que sa pertinence soit expliquée mathématiquement ou quantifiée. Il faut garder à l'esprit que ces illustrations reposent sur deux convergences bien distinctes : d'une part la convergence en loi qui entraîne la convergence des fonctions de répartition (en tout point de continuité de la fonction limite) et d'autre part le fait que la fonction de répartition empirique approche la fonction de répartition exacte de X_n lorsque l'échantillon est assez grand (en conséquence de la loi forte des grands nombres). On notera que les tests d'adéquation peuvent prolonger cette discussion de façon naturelle.

— Les candidates et candidats peuvent également prendre l'initiative de valider une convergence en loi par des **tests statistiques** (χ^2 ou Kolmogorov-Smirnov). Ils peuvent le faire en se donnant un risque α (classiquement $\alpha = 0.05$), en définissant une statistique et une région de rejet permettant de conclure. Certaines routines ou modules de logiciels offrent la possibilité de réaliser très rapidement des tests à partir d'un échantillon, et nombre d'entre eux renvoient la p-valeur, déjà évoquée dans ce rapport : les candidates et candidats abordant cette notion doivent s'attendre à des questions à son sujet, et s'y préparer afin de ne pas improviser leurs réponses le jour de l'oral.

— Les chaînes de Markov se prêtent à plusieurs possibilités d'illustrations : **simulation de trajectoires et études de convergence**. Dans des cas simples (marche aléatoire sur trois sites par exemple), on peut se voir demander comment simuler des itérations d'une chaîne à partir de variables aléatoires uniformes sur $[0, 1]$. La convergence presque-sûre de moyennes $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i)$ et la convergence en loi (ou pas) vers une mesure stationnaire donnent lieu à des illustrations informatiques de choix.

Le jury rappelle que certains textes sont assortis d'un jeu de données numériques sur lequel les candidates et candidats sont invités à mettre en œuvre des illustrations. Le jury se réjouit de l'augmentation du nombre de candidates et candidats traitant effectivement ces données. Cela constitue une réelle plus-value pour l'exposé. Signalons que ces textes sont accompagnés d'une notice expliquant comment ouvrir les fichiers de données avec les logiciels Python, Scilab, Octave et R, logiciels que le jury estime les plus adaptés à l'option A.

5.4 Option B : Calcul scientifique

5.4.1 Généralités

Si les modalités et les attentes de cette épreuve semblent connues par une fraction croissante des candidates et candidates admissibles, une part d'entre eux ne maîtrisent pas suffisamment les rudiments du programme général intervenant dans les textes. Quelques notions sont centrales pour cette option et reviennent, sous une forme ou une autre, dans un grand nombre de textes. S'exercer à les manipuler et à énoncer les principaux résultats afférents permet d'aborder sereinement les textes proposés. Le jury attend des candidates et candidats de :

- connaître le théorème de Cauchy-Lipschitz et être en mesure de l'appliquer pour des systèmes différentiels simples en citant correctement toutes les hypothèses nécessaires à son utilisation.
- construire la méthode d'Euler explicite et en analyser les propriétés de convergence.
- connaître les principes des méthodes directes de résolution de systèmes linéaires (pivot de Gauss, LU), la notion de conditionnement, la recherche d'éléments propres de matrices, analyser et mettre en œuvre la méthode de la puissance.
- analyser et mettre en œuvre la méthode de Newton (cas vectoriel).
- construire la matrice correspondant à la discrétisation par différences finies de $(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2})$ et connaître ses propriétés.
- être capable d'énoncer et appliquer le théorème des extrema liés (typiquement pour des problèmes de minimisation de fonctionnelles convexes sur $\mathbb{R}^N$ avec contraintes linéaires), analyser et mettre en œuvre un algorithme du gradient.
- maîtriser les outils d'analyse de Fourier.
- connaître les méthodes de quadratures classiques.

Le jury souligne que les textes exploitent ces notions dans leurs versions les plus élémentaires et ne requièrent aucun raffinement technique. Un énoncé précis des théorèmes utilisés par les candidates et candidats est exigible. Ces derniers prendront par ailleurs soin de citer des énoncés adaptés à la problématique du texte qu'ils ont choisi plutôt que des résultats trop généraux ou des listes de mots-clefs sans rapport direct avec le texte.

5.4.2 Recommandations spécifiques

Le jury émet les recommandations plus spécifiques suivantes :

- **Quadratures numériques.** L'erreur commise par la méthode des rectangles doit être connue et une preuve élémentaire est exigible des candidates et candidats .
- **Analyse des équations différentielles ordinaires et calcul différentiel.** La dérivation de fonctions de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$, et notamment le calcul de la différentielle des applications linéaires, bilinéaires et des applications composées, ne devrait pas poser de difficulté au niveau de l'agrégation. Les formules de développements de Taylor contiennent généralement un terme de reste, dont l'analyse est un point souvent crucial. La lecture de la moindre équation différentielle ordinaire devrait déclencher des automatismes. Par exemple, un texte indiquant « la solution de l'équation différentielle [...] est définie pour tout temps et reste positive » doit amener à :

a) énoncer de façon précise le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ le plus adapté au problème (version linéaire si le problème est linéaire, version globale quand elle s'applique,...) et donner une définition claire de la notion de solution utilisée.

b) expliquer comment ce théorème s'applique dans le contexte présent, notamment en explicitant la fonction $(t, X) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \mapsto f(t, X) \in \mathbb{R}^n$ qui permet de mettre le problème sous la forme $X'(t) = f(t, X(t))$, tout en prenant soin de distinguer la variable vectorielle X et la fonction $X : t \mapsto X(t)$.

c) exploiter les critères classiques garantissant la positivité de la solution et sa globalité en temps. Le jury attend des candidates et candidats une bonne maîtrise de la notion de solution maximale.

— **Schémas numériques pour les équations différentielles.** Le jury considère la description des schémas d'EULER comme un élément central du programme de l'option B. Les candidates et candidats doivent être capables de présenter clairement les principes guidant l'écriture de ces schémas et l'analyse de leurs propriétés de convergence, ainsi que les avantages et inconvénients des méthodes explicites et implicites. Le jury note un effort pour énoncer des définitions claires qui distinguent l'approximation X_n de l'évaluation $X(t_n)$, et permettent de relier le nombre de points de discrétisation et le pas Δt. Néanmoins, de nombreux candidates et candidats se contentent ensuite de citer les notions de consistance, stabilité et convergence sans les définir rigoureusement, ni les mettre en lien avec les méthodes proposées pour illustrer le texte. La mise en œuvre de ces méthodes peut être l'occasion de discuter des difficultés potentielles liées à la stabilité et aux contraintes portant sur le pas de temps.

— **Equations aux dérivées partielles.** Le jury précise que les textes qui évoquent des problèmes d'équations aux dérivées partielles peuvent être abordés avec des outils rudimentaires et ne nécessitent par exemple *a priori* aucune connaissance sur la théorie des distributions, ni ne réclament de dextérité particulière d'analyse fonctionnelle. Il est néanmoins important de savoir faire la différence entre un problème aux limites et un problème de CAUCHY, et d'utiliser la discrétisation adaptée au type de problème considéré. Le jury s'attend à ce que les matrices associées à la discrétisation de $(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2})$ par différences finies pour des conditions aux limites classiques (DIRICHLET, NEUMANN, périodiques) soient connues.

— **Algèbre linéaire.** Des lacunes profondes et inquiétantes sont relevées chez certains candidates et candidats . Le jury sétonne que le lien entre matrices symétriques et formes quadratiques n'est pas toujours fait. Les raisonnements liés à la réduction des matrices peuvent être extrêmement laborieux et les méthodes pratiques de calcul (résolution de systèmes, calcul de puissance et d'exponentielle de matrice, inverse d'une matrice,...) méconnues. La notion de conditionnement est bien souvent trop imprécise et les liens entre rayon spectral et normes matricielles doivent être maîtrisés.

— **Optimisation.** Les théorèmes de base se rapportant aux extrema doivent être connus. On s'attend à ce que les candidates et candidats soient capables de préciser des hypothèses requises pour :

a) obtenir l'existence d'un extremum,

b) obtenir l'unicité,

c) caractériser l'extremum (sans contrainte ou avec contraintes d'égalité).

— **Analyse de FOURIER.** Le jury s'étonne que de nombreux candidates et candidats aient du mal à préciser les hypothèses de régularité assurant la convergence de la série de FOURIER. Le lien entre la régularité de la fonction et le comportement asymptotique de ses coefficients de FOURIER doit être connu.

5.4.3 Mise en œuvre informatique

Sans que cela soit nécessairement propre à l'option B, le jury insiste sur le fait qu'il est important de commenter les résultats informatiques (courbes, solutions, erreurs...) obtenus et de les relier au problème de modélisation traité par le texte ou à des résultats mathématiques sous-jacents.

Le jury de l'option B rappelle qu'une illustration réalisée avec les routines de base des logiciels fournis est tout-à-fait satisfaisante si ces routines sont clairement présentées et motivées. Par ailleurs, utiliser une routine de base (par exemple pour résoudre numériquement un système linéaire, pour calculer une valeur approchée d'une intégrale, ou pour déterminer des valeurs approchées d'une solution d'un problème de CAUCHY) ne dispense pas les candidates et candidats de savoir décrire, mettre en œuvre et discuter les propriétés des méthodes de base du programme de l'option qui auraient pu être utilisées alternativement.

Les illustrations informatiques doivent être produites par des programmes écrits et présentés par le candidat. Ce dernier doit être capable d'expliquer la structure (boucles, tests, *etc*) et la raison de l'utilisation des instructions (affectations, calculs, routines du langage, *etc*) par exemple si le jury le questionne à ce sujet. Parmi les choix proposés, les langages `Scilab` ou `Python` sont certainement les mieux adaptés à l'esprit de l'épreuve d'option B. Une présentation `libreoffice` ne pourra pas être considérée comme une illustration informatique.

5.5 Option C : Algèbre et Calcul formel

5.5.1 Généralités

La ligne directrice de l'option C est dans un premier temps la recherche de l'*effectivité*, puis de l'*efficacité* (souvent en temps, parfois en espace) du calcul algébrique. Cela va des aspects les plus élémentaires (algèbre linéaire, groupes, calcul avec les entiers, les polynômes, les entiers modulo) aux aspects plus avancés (élimination, géométrie effective, codes correcteurs d'erreurs). Si l'option dispose d'un programme spécifique, les textes peuvent traiter de toute notion au programme, en particulier au programme d'algèbre. De fait, il est tout à fait possible qu'un texte parle de réduction d'endomorphismes ou de groupes, même si ces notions ne sont pas mentionnées dans le programme spécifique de l'option.

5.5.2 Recommandations spécifiques

Le programme de l'option est résolument orienté sur les problématiques du calcul algébrique effectif. Lorsqu'un énoncé du texte affirme l'existence d'un objet (scalaire, vecteur, matrice, élément d'un groupe, entier, polynôme, etc...), le jury apprécie que le candidat mène la réflexion suivante :

— peut-on calculer cet objet ?
— si oui, par quelle(s) méthodes ?
— ces méthodes sont-elles efficaces ? quel est leur coût ?

Si la démarche reste rare, le jury observe une progression du nombre de candidates et candidats se saisissant spontanément d'une question de complexité. Cette démarche est perçue très positivement par le jury. Pour prendre un exemple, quand le texte parle de cryptographie, comparer le coût des opérations de chiffrement et déchiffrement du système proposé avec le coût d'une attaque, même naïve, est une initiative intéressante et valorisée. Une telle étude est beaucoup plus à sa place qu'un exposé détaillé de RSA plaqué sur un texte qui n'en parle pas – la mention rapide de RSA dans un texte introduisant un système de chiffrement pour comparer des complexités restant bien sûr pertinente.

Sur les aspects mathématiques et la maîtrise des éléments du programme, les principales observations du jury sont les suivantes.

— **Algorithmes et complexité.** Il s'agit d'un point fondamental de l'option C que les candidates et candidats ne peuvent négliger. Il est malheureusement encore trop rare de voir des candidates et candidats prendre spontanément l'initiative d'analyser la complexité d'un algorithme pendant leur exposé. Le jury observe toutefois une progression des connaissances dans ce domaine même si certains points restent méconnus :
  — si l'algorithme d'EUCLIDE est bien connu des candidates et candidats , la plupart d'entre eux ne savent obtenir des relations de BÉZOUT qu'en effectuant l'algorithme d'EUCLIDE classique puis en procédant à une laborieuse « remontée ». Rappelons que l'algorithme d'EUCLIDE *étendu* est explicitement au programme de l'option.
  — pour analyser une complexité en temps, il faut compter des opérations et il est donc nécessaire dans un premier temps de bien identifier l'anneau dans lequel on compte les opérations. Pour donner un exemple simple, le produit de deux polynômes de degré n dans $\mathbf{K}[X]$ coûte une seule opération dans $\mathbf{K}[X]$, mais en coûte $O(n^2)$ dans $\mathbf{K}$.

— **Codes correcteurs d'erreurs.** Depuis quelques années, le jury constate une sensible progression des connaissances des candidates et candidats sur le sujet. Les codes correcteurs sont une partie limitée du programme et très peu de connaissances sont exigibles et exigées. Toutefois, il est nécessaire de s'y être confronté pour se familiariser avec les problématiques sous-jacentes. À savoir, typiquement qu'un bon code correcteur a une grande dimension et grande distance minimale par rapport à sa longueur.
  Si les définitions de base (codes, distance de HAMMING, distance minimale) sont souvent connues, les candidates et candidats peinent toujours à en donner une interprétation pratique. Par exemple, peu de candidates et candidats sont capables d'interpréter le ratio k/n pour un code de dimension k dans $\mathbf{F}_q^n$ comme un rendement ou un taux d'information. Certains candidates et candidats ne savent même pas expliquer comment utiliser concrètement un code donné et que le nombre d'erreurs suit un modèle probabiliste. Enfin il faut être conscient que la méconnaissance des corps finis est souvent rédhibitoire pour ce sujet.

— **Corps finis.** Sur cette notion, les connaissances des candidates et candidats sont très inégales. Tout d'abord, il n'est pas acceptable de n'avoir pas d'autres exemples de corps finis en tête que $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. La construction d'extensions de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ doit être connue ainsi que la manière dont les opérations de corps s'effectuent. Par ailleurs, il est important de savoir différentier les structures algébriques sous-jacentes : par exemple, savoir que $\mathbf{F}_{p^n}$ est isomorphe en tant que $\mathbf{F}_p$-espace-vectoriel à $\mathbf{F}_p^n$ mais pas en tant qu'anneau.

— **Résultant.** Le jury regrette de constater que cette notion est boudée par les candidates et candidats . Rappelons que si le résultant ne fait plus partie du programme de mathématiques générales, il continue à figurer parmi les notions au programme de l'option.

5.5.3 Mise en œuvre informatique

Quasiment tous les candidates et candidats sont maintenant en mesure d'utiliser l'outil informatique durant leur présentation. Il est important que les programmes et les calculs effectués avec l'outil informatique s'intègrent de façon pertinente dans l'exposé. L'aptitude à présenter, discuter et mettre en valeur les résultats d'exécution d'un programme puis à les relier à certains énoncés du texte est une démarche qui sera bien plus valorisée que la dextérité en programmation.

Le jury attire particulièrement l'attention sur les points suivants :

— les candidates et candidats sont libres de leur choix en ce qui concerne le logiciel parmi ceux présents dans la `ClefAgreg`. Nous avons constaté que les candidates et candidats ont tenu compte de l'invitation du jury à réfléchir sur le choix d'un logiciel adapté à l'épreuve : nous incitons les futurs candidates et candidats à continuer sur cette voie.

— le jury est parfois surpris de voir des candidates et candidats développer de longs et fastidieux calculs au tableau alors que l'utilisation de l'outil informatique leur aurait permis de gagner en temps et en clarté.

— certains textes présentent des algorithmes pour résoudre efficacement un problème donné. De nombreux candidates et candidats se contentent de les tester pour une valeur d'entrée très petite, ce qui présente un intérêt moindre. Nous encouragerons les futurs candidates et candidats à tester leurs algorithmes sur plusieurs entrées de taille différente.

Chapitre 6

La bibliothèque de l'agrégation

6.1 Liste des livres disponibles

Le jury attire l'attention des candidats sur le fait que l'organisation du concours met à leur disposition une bibliothèque complète, bien ordonnée, avec des livres faciles à trouver. Cette bibliothèque fait l'objet d'achats réguliers qui permettent de proposer des ouvrages de référence modernes et adaptés. La liste sera mise à jour sur le site du jury avant les épreuves orales.

AEBISCHER B.	L2 Analyse fonctions de plusieurs variables et géométrie analytique – **1 ex.** –	VUIBERT
AEBISCHER B.	L3 Géométrie – **1 ex.** –	VUIBERT
AHUÉS M. **CHATELIN F.**	Exercices de valeurs propres de matrices – **2 ex.** –	MASSON
ALDON G.	Mathématiques dynamiques – **2 ex.** –	HACHETTE
ALESSANDRI M.	Thèmes de géométrie – **1 ex.** –	DUNOD
ALLAIRE G.	Analyse numérique et optimisation – **2 ex.** –	EDITIONS DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ALLANO-CHEVALIER M. **OUDOT X.**	Analyse et géométrie différentielle – **1 ex.** –	HACHETTE
ALLOUCHE J. P. **SHALLIT J.**	Automatic sequences theory, applications, generalizations – **1 ex.** –	CAMBRIDGE

AMAR E. **MATHERON É.**	Analyse complexe – **2 ex.** –	CASSINI
ANDLER M. **BLOCH J. D.** **MAILLARD B.**	Exercices corrigés de Mathématiques — Tome 1A - Topologie – **5 ex.** – — Tome 1B - Fonctions numériques – **6 ex.** – — Tome 2 - Suites et séries numériques – **7 ex.** – — Tome 3 - Analyse fonctionnelle – **6 ex.** – — Tome 5 - Algèbre générale, polynômes – **4 ex.** – — Tome 6 - Algèbre linéaire, première partie – **6 ex.** – — Tome 7 - Algèbre linéaire, deuxième partie – **7 ex.** –	ELLIPSES
ANDREWS G.	Number Theory – **1 ex.** –	DOVER
APPEL W.	Probabilités pour non probabilistes – **1 ex.** –	H & K
ARIBAUD F. **VAUTHIER J.**	Mathématiques. Première année de DEUG – **1 ex.** –	ESKA
ARNAUDIÈS J-M. **BERTIN J.**	Groupes, Algèbres et Géométrie — Tome I – **1 ex.** – — Tome II – **1 ex.** –	ELLIPSES
ARNAUDIÈS J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus d'analyse – **8 ex.** –	DUNOD
ARNAUDIÈS J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus d'algèbre bilinéaire et géométrie du cours de Mathématiques tome 4 – **5 ex.** –	DUNOD
ARNAUDIÈS J-M. **FRAYSSE H.**	Cours de Mathématiques — 1. Algèbre – **12 ex.** – — 2. Analyse – **6 ex.** – — 3. Compléments d'analyse – **8 ex.** – — 4. Algèbre bilinéaire et géométrie – **5 ex.** –	DUNOD

ARNAUDIÈS J.-M. **LELONG-FERRAND J.**	Cours de Mathématiques — Tome 1 pour M-M' : Algèbre – **5 ex.** – — Tome 1 pour MP AA' : Algèbre – **1 ex.** – — Tome 2 : Analyse – **7 ex.** – — Tome 3 : Géométrie et cinématique – **5 ex.** – — Tome 4 : Equations différentielles, intégrales multiples – **4 ex.** –	DUNOD
ARNOLD V.	Chapitre supplémentaire de la théorie des équations différentielles ordinaires – **2 ex.** –	MIR
ARNOLD V.	Équations différentielles ordinaires – **3 ex.** –	MIR
ARNOLD V.	Lectures on partial differential equations – **1 ex.** –	SPRINGER
ARTIN E.	Algèbre géométrique – **5 ex.** –	GAUTHIER-VILLARS
ARTIN E.	Algèbre géométrique – **1 ex.** –	GABAY
ARTIN M.	Algebra – **2 ex.** –	PRENTICE HALL
AUBIN J.P.	Analyse fonctionnelle appliquée — Tome 2 – **1 ex.** –	PUF
AUDIN M.	Géométrie de la licence à l'agrégation – **1 ex.** –	BELIN
AVEZ A.	Calcul différentiel – **2 ex.** –	MASSON
BAILLY-MAITRE G.	Arithmétique et cryptologie – **1 ex.** –	ELLIPSES
BAKHVALOV N.	Méthodes numériques – **2 ex.** –	MIR
BARANGER J.	Analyse numérique – **1 ex.** –	HERMANN
BARBE Ph. **LEDOUX M.**	Probabilité (De la licence à l'agrégation) – **1 ex.** –	BELIN

BASILI B. **PESKINE C.**	Algèbre – **1 ex.** –	Diderot, éditeur Arts et Sciences
BASS J.	Cours de Mathématiques — Tome 1 – **2 ex.** – — Tome 2 – **2 ex.** –	Masson
BAUER F. L.	Decrypted secrets. Methods and maxims of cryptology – **1 ex.** –	Springer
BECK V. **MALICK J.** **PEYRÉ G.**	Objectif Agregation – **3 ex.** –	HK
BENAÏM M. **EL KAROUI N.**	Promenade aléatoire – **1 ex.** –	Les éditions de l'X
BENDER C. **ORSZAG S.**	Advanced mathematical methods for scientists and engineers – **3 ex.** –	Mc Graw Hill
BENIDIR M. **BARRET M.**	Stabilité des filtres et des systèmes linéaires – **1 ex.** –	Dunod
BENOIST J. *et al*	Math L2, Cours complet avec 700 tests et exercices corrigés – **1 ex.** –	Pearson Education
BENOIST J. **SALINIER A.**	Exercices de calcul intégral – **2 ex.** –	Dunod
BENZONI-GAVAGE S.	Calcul différentiel et équations différentielles – **2 ex.** –	Dunod
BERCU B. **CHAFAÏ D.**	Modélisation stochastique et simulation – **1 ex.** –	Dunod
BIASI J.	Mathématiques pour le CAPES et l'agrégation interne – **1 ex.** –	Ellipse

BERGER M.	Géométrie — Index – **3 ex.** – — 1. Action de groupes, espaces affines et projectifs – **3 ex.** – — 2. Espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères – **1 ex.** – — 3. Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes – **3 ex.** – — 4. Formes quadratiques, quadriques et coniques – **2 ex.** – — 5. La sphère pour elle-même, géométrie hyperbolique, l'espace des sphères – **2 ex.** –	Cédic/Nathan
BERGER M.	Géométrie tome 2 – **1 ex.** –	Nathan
BERGER M.	Géométrie vivante – **2 ex.** –	Cassini
BERGER M. **BERRY J-P.** **PANSU P.** **SAINT RAYMOND X.**	Problèmes de géométrie commentés et rédigés – **3 ex.** –	Cédic/Nathan
BERGER M. **GOSTIAUX B.**	Géométrie différentielle – **2 ex.** –	Armand Colin
BERHUY G.	Algèbre, le grand combat – **1 ex.** –	Calvage & Mounet
BERLINE N. **SABBAH C.**	Groupes finis, journées X-UPS 2000 – **1 ex.** –	Editions de l'X
BERTHELIN F.	Equations différentielles – **3 ex.** –	Cassini
BHATIA R.	Matrix Analysis – **1 ex.** –	Springer
BICKEL P.J. **DOKSUM K.A.**	Mathematical statistics – **1 ex.** –	Prentice Hall
BIGGS N. L.	Discrete mathematics – **1 ex.** –	Oxford Science Publications
BINET G.	Traitement du signal – **2 ex.** –	Ellipse

BELGHITI I. **MANSUY R.** **VIE J.**	Les clefs pour l'info : ENS et Agrégation – **1 ex.** –	CALVAGE& MOUNET
BILLINGSLEY P.	Probability and measure – **2 ex.** –	WILEY
BLANCHARD A.	Les corps non commutatifs – **5 ex.** –	PUF
BOAS R.	A primer of real functions – **1 ex.** –	MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA
BOCCARA N.	Distributions – **2 ex.** –	ELLIPSES
BOISSONAT J.-D. **YVINEC M.**	Géométrie algorithmique – **1 ex.** –	EDISCIENCE
BON J.-L.	Fiabilité des systèmes – **1 ex.** –	MASSON
BONNANS J.-F. **GILBERT J.C.** **LEMARÉCHAL C.** **SAGASTIZABAL C.** **PENNEQUIN D.**	Optimisation numérique – **2 ex.** –	SPRINGER
BONY J.-M.	Cours d'analyse – **5 ex.** –	EDITIONS DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
BONY J.-M.	Méthodes mathématiques pour les sciences physiques – **3 ex.** –	EDITIONS DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
BORIES-LONGUET F.	Graphes et combinatoire – **2 ex.** –	ELLIPSE
BOSTAN A. **CHYZAK F.** **GIUSTI M.** **LEBTRETON R.** **LECERF G.** **SALVY B.** **SCHOST E.**	Algorithmes efficaces en calcul formel – **2 ex.** –	CHYZAK F. ED.

BOUALEM H. **BROUZET J.C.** **ELSNER B.** **KACZMAREK L.**	Mathématique L1 – **1 ex.** –	Pearson Education
BOURBAKI N.	Éléments de Mathématique — Topologie générale, chapitres V à X – **2 ex.** – — Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à VII – **2 ex.** – — Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à III – **2 ex.** – — Fascicule XIII Intégration, chapitres I à IV – **2 ex.** –	Hermann
BOURGADE P.	Annales des Olympiades internationales de mathématiques 1976-2005 – **1 ex.** –	Cassini
BOUVIER A. **RICHARD D.**	Groupes – **3 ex.** –	Hermann
BRÉMAUD P.	Introduction aux probabilités – **1 ex.** –	Springer
BRÉZIS H.	Analyse fonctionnelle, théorie et applications – **4 ex.** –	Masson
BRÉZIS H.	Analyse fonctionnelle, théorie et applications – **3 ex.** –	Dunod
BRIANE M. **PAGÈS G.**	Théorie de l'intégration Cours et exercices, 3ème édition – **3 ex.** –	Vuibert
BROUSSE P.	Mécanique MP - PC.- Spéciales A. A'. B. B'. – **2 ex.** –	Armand Colin
CABANE R. **LEBOEUF C.**	Algèbre linéaire — 1. Espaces vectoriels , Polynômes – **4 ex.** – — 2. Matrices et réduction – **4 ex.** –	Ellipses
CABANNES H.	Cours de Mécanique générale – **2 ex.** –	Dunod
CALAIS J.	Éléments de théorie des anneaux – **1 ex.** –	PUF

CALAIS J.	Éléments de théorie des groupes – **1 ex.** –	PUF
CALDERO P. **GERMONI J.**	Histoires hédonistes de groupes et de géométries – **6 ex.** –	Calvage et Mounet
CALDERO P. **GERMONI J.**	Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries – **3 ex.** –	Calvage et Mounet
CALDERO P. **PERONNIER M..**	Carnet de voyage en Algèbrie – **2 ex.** –	Calvage et Mounet
CALVO B.	Cours d'analyse II – **1 ex.** –	Armand Colin
CANDELPERGHER B.	Théorie des probabilités – **2 ex.** –	Calvage et Mounet
CARREGA J.C.	Théorie des corps – **1 ex.** –	Hermann
CARRIEU H.	Probabilités : exercices corrigés – **1 ex.** –	EDP Sciences
CARTAN H.	Cours de calcul différentiel (1971) – **5 ex.** –	Hermann
CARTAN H.	Formes différentielles – **4 ex.** –	Hermann
CARTAN H.	Théorie élémentaire des fonctions analytiques – **6 ex.** –	Hermann
CASAMAYOU A. **et al.**	Calcul mathématique avec SAGE – **1 ex.** –	Copyrighted material
CASAMAYOU A. **CHAUVIN P.** **CONNAN G.**	Programmation en Python pour les mathématiques – **2 ex.** –	Dunod
CASTI J.L.	Realty Rules : Picturing the world in mathematics I – **1 ex.** –	Wiley Interscience
CASTI J.L.	Realty Rules : Picturing the world in mathematics II – **1 ex.** –	Wiley Interscience
CASTLEMAN K.R.	Digital image processing – **1 ex.** –	Prentice Hall

CHABANOL M.-L. **RUCH J.-J.**	Probabilités et statistiques pour l'épreuve de modélisation à l'agrégation de mathématiques – **2 ex.** –	ELLIPSE
CHABAT B.	Introduction à l'analyse complexe – **1 ex.** –	MIR
CHAMBERT-LOIR A.	Algèbre corporelle – **1 ex.** –	EDITIONS DE L'X
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation — Analyse 2 – **1 ex.** – — Analyse 3 – **2 ex.** –	MASSON
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.** **MAILLOT V.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Analyse 1 (seconde édition revue et corrigée) – **3 ex.** –	MASSON
CHARLES J. **MBEKHTA M.** **QUEFFÉLEC H.**	Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs – **4 ex.** –	DUNOD
CHARPENTIER E. **NIKOLSKI N.**	Leçons de mathématiques d'aujourd'hui — Vol 1 – **3 ex.** – — Vol 2 – **1 ex.** – — Vol 3 – **2 ex.** – — Vol 4 – **1 ex.** –	CASSINI
CHILDS L.	A concrete introduction to Higher Algebra – **2 ex.** –	SPRINGER VERLAG
CHOIMET D. **QUEFFÉLEC H.**	Analyse mathématique – **2 ex.** –	CASSINI
CHOQUET G.	Cours d'analyse Tome II : Topologie – **6 ex.** –	MASSON
CHOQUET G.	L'enseignement de la géométrie – **4 ex.** –	HERMANN
CHOQUET-BRUHAT Y.	Distributions. Théories et problèmes – **1 ex.** –	MASSON
CHRISTOL G. **PILIBOSSIAN P.** **YAMMINE S.**	— Algèbre 1 – **1 ex.** – — Algèbre 2 – **2 ex.** –	ELLIPSES
CHIRON D.	chemins d'analyse Tome 1 – **1 ex.** –	EYROLLES

CIARLET P.G.	Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation – **2 ex.** –	Masson
COGIS O. **ROBERT C.**	Au-delà des ponts de Könisberg. Théorie des graphes. Problèmes, théorie, algorithmes – **1 ex.** –	Vuibert
COHN P.M.	Algebra Volume 1 – **1 ex.** –	John Wiley
COLLET H. **GIRARD B.** **PERRIER C.**	Mathématique BTS industriel – **1 ex.** –	Nathan
COLLET P.	Modeling binary data – **1 ex.** –	Chapman and Hall
COLLET J.-F.	Discrete stochastic processes and applications – **2 ex.** –	Springer
COLMEZ P.	Éléments d'analyse et d'algèbre – **2 ex.** –	Editions de l'X
COMBES F	Algèbre et géométrie – **1 ex.** –	Bréal
COMBROUZE A.	Probabilités et statistiques – **1 ex.** –	PUF
CORTELLA A.	Théorie des groupes – **2 ex.** –	Vuibert
COTRELL M. **GENON-CATALOT V.** **DUHAMEL C.** **MEYRE T.**	Exercices de probabilités – **2 ex.** –	Cassini
COURANT R. **HILBERT D.**	Methods of Mathematical Physics — Volume 1 – **1 ex.** – — Volume 2 – **1 ex.** –	John Wiley
COX D.A.	Galois Theory – **1 ex.** –	Wiley Interscience
COXETER H.S.M.	Introduction to Geometry – **1 ex.** –	John Wiley

DACUNHA-CASTELLE D. **DUFLO M.**	— Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe – **2 ex.** – — Exercices de Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe – **1 ex.** –	MASSON
DACUNHA-CASTELLE D. **REVUZ D.** **SCHREIBER M.**	Recueil de problèmes de calcul des probabilités – **1 ex.** –	MASSON
DANTZER J.F.	Mathématiques pour l'agrégation interne – **3 ex.** –	VUIBERT
DEBREIL A.	Groupes finis et treillis de leurs sous-groupes – **1 ex.** –	CALVAGE & MOUNET
DEBREIL A. **EIDEN J.-D.** **MNEIMNÉ R.** **NGUYEN T.-H.**	Formes quadratiques et géométrie : Une introduction, et un peu plus – **1 ex.** –	CALVAGE & MOUNET
DE BIÈVRE S.	Face au jury du CAPES : Préparer les leçons d'Analyse, l'oral du CAPES de mathématiques – **1 ex.** –	ELLIPSES
DEHEUVELS P.	L'intégrale – **4 ex.** –	PUF
DEHEUVELS R.	Formes quadratiques et groupes classiques – **3 ex.** –	PUF
DE KONNINCK J.M. **MERCIER A.**	Introduction à la théorie des nombres – **1 ex.** –	MODULO
DELCOURT J.	Théorie des groupes – **2 ex.** –	DUNOD
DELTHEIL R. **CAIRE D.**	Géométrie et compléments – **2 ex.** –	JACQUES GABAY
DEMAILLY J.P.	Analyse numérique et équations différentielles – **2 ex.** –	PU GRENOBLE
DEMAZURE M.	Catastrophes et bifurcations – **1 ex.** –	ELLIPSES
DEMAZURE M.	Cours d'algèbre : primalité, divisibilité, codes – **5 ex.** –	CASSINI

DEMBO A. **ZEITOUNI O.**	Large deviations techniques and applications – **1 ex.** –	SPRINGER
DESCHAMPS C. **WARUSFEL A.** *et al.*	Mathématiques, cours et exercices corrigés — 1ère année MPSI, PCSI, PTSI – **2 ex.** – — 2ème année MP, PC, PSI – **1 ex.** –	DUNOD
DESCOMBES R.	Éléments de théorie des nombres – **2 ex.** –	PUF
DE SEGUINS PAZZIS C.	Invitation aux formes quadratiques – **3 ex.** –	CALVAGE & MOUNET
DESPRÉS B.	Lois de conservations euleriennes, lagrangiennes et méthodes numériques – **2 ex.** –	SPRINGER
DEVANZ C. **ELHODAIBI M.**	Exercices corrigés de Mathématiques posés à l'oral des Ensi, Tome 2 – **4 ex.** –	ELLIPSES
DI MENZA L.	Analyse numérique des équations aux dérivées partielles – **2 ex.** –	CASSINI
DIEUDONNÉ J.	Algèbre linéaire et géométrie élémentaire – **4 ex.** –	HERMANN
DIEUDONNÉ J.	Calcul infinitésimal – **2 ex.** –	HERMANN
DIEUDONNÉ J.	Sur les groupes classiques – **1 ex.** –	HERMANN
DIEUDONNÉ J.	Éléments d'Analyse. — Fondements de l'analyse moderne – **5 ex.** – — Éléments d'Analyse Tome 2. – **5 ex.** –	GAUTHIER-VILLARS
DIXMIER J.	Cours de Mathématiques du premier cycle — Première année – **3 ex.** – — Deuxième année – **3 ex.** –	GAUTHIER-VILLARS
DOUCHET J.	Analyse complexe – **2 ex.** –	PRESSES POLYTECHNIQUES ET UNIV. ROMANDES

DOUCHET J.	Analyse : recueil d'exercices et aide-mémoire, volume 1 – **2 ex.** –	Presses polytechniques et univ. romandes
DOUCHET J.	Analyse : recueil d'exercices et aide-mémoire, volume 2 – **2 ex.** –	Presses polytechniques et univ. romandes
DOUCHET J. **ZWALHEN B.**	Calcul différentiel et intégral – **2 ex.** –	Presses polytechniques et univ. romandes
DRAPPER N. **SCHMITH H.**	Applied regression analysis – **1 ex.** –	Wiley
DUBERTRET G.	Initiation à la cryptographie – **1 ex.** –	PUF
DUBUC S.	Géométrie plane – **4 ex.** –	PUF
DUGAC P.	Histoire de l'analyse. Autour de la notion de limite et de ses voisinages – **1 ex.** –	Vuibert
DUMAS L. .	Modélisation á l'oral de l'agrégation de calcul scientifique – **1 ex.** –	Ellipses
DUMMIT D.	Abstract Algebra – **1 ex.** –	Wiley
DUPONT G.	Probabilités et statistiques – **2 ex.** –	Dunod
DYM H. **McKEAN H.P.**	Fouriers series and integrals – **1 ex.** –	Academics Press
EBBINGHAUS H. *et al.*	Les Nombres – **2 ex.** –	Vuibert
EIDEN J.D.	Géométrie analytique classique – **3 ex.** –	Calvage et Mounet
EIDEN J.D.	Le jardin d'Eiden – **1 ex.** –	Calvage et Mounet

EL KACIMI ALAOUI A. **QUEFFÉLEC H.** **SACRÉ C.** **VASSALLO V.**	Quelques aspects des mathématiques actuelles – **3 ex.** –	Ellipses
ENGEL A.	Solutions d'expert — Vol 1 – **2 ex.** – — Vol 2 – **1 ex.** –	Cassini
ÉPISTEMON L. **(OVAERT J.L.** **VERLEY J.L.)**	Exercices et problèmes — Analyse. Volume 1 – **1 ex.** – — Algèbre. – **3 ex.** –	Cédic/Nathan
ESCOFIER J.-P.	Théorie de Galois : Cours et exercices corrigés – **2 ex.** –	Dunod
ESKIN G.	Lectures on linear partial differential equations – **2 ex.** –	AMS
EXBRAYAT J.M. **MAZET P.**	Notions modernes de mathématiques — Algèbre 1 : Notions fondamentales de la théorie des ensembles – **3 ex.** – — Analyse 1 : Construction des espaces fondamentaux de l'analyse – **3 ex.** – — Analyse 2 : Éléments de topologie générale – **3 ex.** –	Hatier
FADDEEV D. **SOMINSKI I.**	Recueil d'exercices d'Algèbre Supérieure – **3 ex.** –	MIR
FAIRBANK X. **BEEF C.**	POX - Exercices posés au petit oral de l'X – **7 ex.** –	Ellipses
FARAUT J.	Analyse sur les groupes de Lie – **3 ex.** –	Calvage et Mounet
FARAUT J. **KHALILI E.**	Arithmétique Cours, Exercices et Travaux Pratiques sur Micro-Ordinateur – **1 ex.** –	Ellipses
FELLER W.	An introduction to probability theory and its applications — Volume 1 – **2 ex.** – — Volume 2 – **2 ex.** –	John Wiley
FERRIER J.P.	Mathématiques pour la licence – **2 ex.** –	Masson

FILBET F.	Analyse numérique – **2 ex.** –	DUNOD
FLORY G.	Exercices de topologie et analyse avec solutions — Tome 1 - Topologie – **10 ex.** – — Tome 2 - Fonctions, Variables – **6 ex.** – — Tome 3 - Fonctions différentiables, intégrales multiples – **7 ex.** – — Tome 4 - Séries, équations différentielles – **8 ex.** –	VUIBERT
FOISSY L. **NINET A.**	Algèbre et calcul formel – **2 ex.** –	ELLIPSES
FONTANEZ F. **RANDÉ B.**	Les clefs pour les Mines – **2 ex.** –	CALVAGE ET MOUNET
FRANCHINI J. **JACQUENS J-C.**	Mathématiques Spéciales — Algèbre – **1 ex.** – — Analyse 1 – **1 ex.** –	ELLIPSES
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Algèbre 1 – **7 ex.** –	CASSINI
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Algèbre 2 – **1 ex.** –	CASSINI
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Algèbre 3 – **4 ex.** –	CASSINI
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Analyse 1 – **3 ex.** –	CASSINI
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Analyse 2 – **4 ex.** –	CASSINI
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Analyse 3 – **5 ex.** –	CASSINI
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Analyse 4 – **1 ex.** –	CASSINI

FRANCINOU S. **GIANELLA H.**	Exercices de Mathématiques Algèbre 1 – **2 ex.** –	Masson
FRESNEL J.	Méthodes modernes en géométrie – **1 ex.** –	Hermann
FRESNEL J. **MATIGNON M.**	Algèbre et géométrie : Recueil d'exercices corrigés – **1 ex.** –	Hermann
FUHRMANN P.	A polynomial approach to linear algebra – **1 ex.** –	Springer
FULTON W.	Algebraic Topology A first course – **1 ex.** –	Springer
GABRIEL P.	Matrices, géométrie, algèbre linéaire – **3 ex.** –	Cassini
GALLOUET T. **HERBIN R.**	Mesure, Intégration, Probabilités – **3 ex.** –	Ellipses
GANTMACHER F.R.	Théorie des matrices — Tome 1 – **1 ex.** – — Tome 2 – **1 ex.** –	Dunod
GARET O.	Probabilités et processus stochastiques – **2 ex.** –	Copyrighted material
GARET O. **KURTZMANN A.**	De l'intégration aux probabilités – **5 ex.** –	Ellipses
GARLING D.J.H.	Inequalities : a journey into linear analysis – **1 ex.** –	Cambridge
GARNIER J.-M.	Groupes et géométrie pour l'agrégation – **4 ex.** –	Ellipses
GATHEN (von zur) J. **GERHARD .J**	Modern computer algebra – **1 ex.** –	Cambridge University press
GENET J.	Mesure et intégration. Théorie élémentaire. Cours et exercices résolus – **2 ex.** –	Vuibert
GHIDAGLIA J.M.	Petits problèmes d'analyse – **1 ex.** –	Springer
GINDIKIN S.	Histoires de mathématiciens et de physiciens – **1 ex.** –	Cassini

GOBLOT R.	Algèbre commutative – **2 ex.** –	MASSON
GOBLOT R.	Thèmes de géométrie – **1 ex.** –	MASSON
GODEMENT R.	Analyse — Tome 1 – **1 ex.** – — Tome 2 – **4 ex.** – — Tome 3 – **1 ex.** –	SPRINGER
GODEMENT R.	Cours d'Algèbre – **4 ex.** –	HERMANN
GOLUB G.H. **VAN LOAN C.F.**	Matrix computations – **1 ex.** –	WILEY
GONNORD S. **TOSEL N.**	Thèmes d'Analyse pour l'agrégation — Topologie et Analyse fonctionnelle – **1 ex.** – — Calcul différentiel – **1 ex.** –	ELLIPSES
GOSTIAUX B.	Cours de mathématiques spéciales — Tome 1 - Algèbre – **1 ex.** – — Tome 2 - Topologie et analyse réelle – **1 ex.** – — Tome 3 - Analyse fonctionnelle et calcul différentiel – **1 ex.** – — Tome 4 - Géométrie affine et métrique – **1 ex.** – — Tome 5 - Géométrie : arcs et nappes – **1 ex.** –	PUF
GOUDON T.	Mathématiques pour la modélisation et le calcul scientifique – **2 ex.** –	ISTE
GOUDON T.	Intégration – **2 ex.** –	ELLIPSES
GOURDON X.	Les maths en tête, mathématiques pour M' — Algèbre Probabilités – **3 ex.** – — Algèbre – **1 ex.** – — Analyse – **5 ex.** –	ELLIPSES
GRAHAM R. **KNUTH D.** **PATASHNIK O.**	Concrete mathematics – **1 ex.** –	ADISON-WESLEY

GRAMAIN A.	Géométrie élémentaire – **2 ex.** –	HERMANN
GRENIER J.-P.	Débuter en algorithmique avec Matlab et Scilab – **1 ex.** –	ELLIPSES
GREUB W.	Linear Algebra – **2 ex.** –	SPRINGER VERLAG
GRIFONE J.	Algèbre linéaire – **3 ex.** –	CEPADUES
GRIMMET G. **WELSH D.**	Probability (an introduction) – **1 ex.** –	OXFORD
GUININ D. **ZAUBONNET F.** **JOPPIN B.**	Cours et exercices résolus — Algèbre-Géométrie MPSI – **1 ex.** – — MP – **1 ex.** –	BRÉAL
GUIGNARD Q. **RANDE B.**	Les clés pour l'oral MP Mathématiques – **1 ex.** –	CALVAGE ET MOUNET
GUJARATI D. N.	Basic Econometrics – **1 ex.** –	WILEY
HABSIEGER L. **MARTEL V.**	Exercices corrigés posés à l'oral des ENSI Tome 1 Analyse – **7 ex.** –	ELLIPSES
HAMMAD P.	Cours de probabilités – **3 ex.** –	CUJAS
HAMMAD P. **TARANCO A.**	Exercices de probabilités – **2 ex.** –	CUJAS
HARDY G.H. **WRIGHT E.M.**	An introduction to the theory of numbers – **2 ex.** –	OXFORD
HAUCHECORNE B.	Les contre-exemples en mathématiques – **2 ex.** –	ELLIPSES
HENNEQUIN P.L. **TORTRAT A.**	Théorie des probabilités et quelques applications – **2 ex.** –	MASSON
HENRICI P.	Applied and Computational Complex Analysis — Volume 1 – **1 ex.** – — Volume 2 – **1 ex.** – — Volume 3 – **2 ex.** –	WILEY-INTERSCIENCE

HERVÉ M.	Les fonctions analytiques – **4 ex.** –	PUF
HINDRY M.	Arithmétique – **2 ex.** –	CALVAGE ET MOUNET
HIRSCH F. **LACOMBE G.**	Eléments d'analyse fonctionnelle – **3 ex.** –	MASSON
HOCHART M. **SCIUTO G.**	Algèbre Analyse Géométrie (MPSI/PCSI) – **1 ex.** –	VUIBERT
HOUZEL C.	Analyse mathématique : cours et exercices – **1 ex.** –	BELIN
HUBBARD J. **HUBERT F.**	Calcul scientifique T1 – **3 ex.** –	VUIBERT
HUBBARD J. **HUBERT F.**	Calcul scientifique T2 – **3 ex.** –	VUIBERT
INGRAO B.	Coniques projectives, affines et métriques – **2 ex.** –	CALVAGE ET MOUNET
IRELAND K. **ROSEN M.**	A Classical Introduction to Modern Numbers Theory – **2 ex.** –	SPRINGER VERLAG
ISAAC R.	Une initiation aux probabilités (Trad. R. Mansuy) – **1 ex.** –	VUIBERT-SPRINGER
ITARD J.	Les nombres premiers – **1 ex.** –	QUE SAIS-JE ? PUF
JACOBSON N.	Basic Algebra — Tome I – **2 ex.** – — Tome II – **2 ex.** –	FREEMAN AND CO
JACOD J. **PROTTER P.**	L'essentiel en théorie des probabilités – **2 ex.** –	CASSINI
JAUME M.	Éléments de mathématiques discrètes – **2 ex.** –	ELLIPSES
KAHANE J.P. **GILLES P.**	Séries de Fourier et ondelettes – **4 ex.** –	CASSINI
KERBRAT Y. **BRAEMER J.-M.**	Géometrie des courbes et des surfaces – **1 ex.** –	HERMANN

KERNIGHAN B. **RITCHIE D.**	Le langage C – **1 ex.** –	DUNOD
KETRANE H. **ELINEAU L.**	Épreuve orale d'exemples et d'exercices : Agrégation interne/CAERPA mathématiques – **1 ex.** –	DUNOD
KLOECKNER B.	Un bref aperçu de la géométrie projective – **1 ex.** –	CALVAGE ET MOUNET
KNUTH D.E.	The art of computer programming — Volume 1 : Fundamental algorithms – **1 ex.** – — Volume 2 : Seminumerical algorithms – **1 ex.** – — Volume 3 : Sorting and Searching – **1 ex.** –	ADDISON-WESLEY
KOBLITZ N.	A course in number theory and cryptography – **1 ex.** –	SPRINGER
KOLMOGOROV A. **FOMINE S.**	Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle – **1 ex.** –	ELLIPSES
KÖRNER T.W.	Exercises in Fourier analysis – **1 ex.** –	CAMBRIDGE
KOURIS E.	Une année de colle en maths en MPSI – **2 ex.** –	CALVAGE ET MOUNET
KREE P.	Introduction aux Mathématiques et à leurs applications fondamentales M.P.2 – **1 ex.** –	DUNOD
KRIVINE H.	Exercices de Mathématiques pour physiciens – **2 ex.** –	CASSINI
KRIVINE J.-L.	Théorie axiomatique des ensembles – **2 ex.** –	PUF
KRIVINE J.-L.	Théorie des ensembles – **2 ex.** –	CASSINI
KUNG J.P.S. **ROTA G-C.** **YAN C.H.**	Combinatorics : the Rota way – **1 ex.** –	CAMBRIDGE
LAAMRI E. H.	Mesures, intégration et transformée de Fourier des fonctions – **1 ex.** –	DUNOD

LAFONTAINE J.	Introduction aux variétés différentielles – **1 ex.** –	PUF
LANG S.	Algèbre linéaire — Tome 1 – **2 ex.** – — Tome 2 – **2 ex.** –	InterEditions
LANG S.	Algebra – **3 ex.** –	Addison-Wesley
LANG S.	Linear Algebra – **5 ex.** –	Addison-Wesley
LAROCHE F.	Escapades arithmétiques – **1 ex.** –	Ellipses
LASCAUX T. **THÉODOR R.**	Analyse matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur, tomes 1 & 2 – **2 ex.** –	Dunod
LAVILLE G.	Courbes et surfaces – **1 ex.** –	Ellipses
LAVILLE G.	Géométrie pour le CAPES et l'Agrégation – **1 ex.** –	Ellipses
LAX P. D.	Functional analysis – **1 ex.** –	Wiley
LAX P. D.	Linear Algebra – **1 ex.** –	Wiley
LEBOEUF C. **GUÉGAND J.** **ROQUE J.L.** **LANDRY P.**	Exercices corrigés de probabilités – **1 ex.** –	Ellipses
LEBORGNE D.	Calcul différentiel et géométrie – **3 ex.** –	PUF
LEBOSSÉ C. **HÉMERY C.**	Géométrie. Classe de Mathématiques – **1 ex.** –	Jacques Gabay
LEHMANN D. **SACRÉ C.**	Géométrie et topologie des surfaces – **1 ex.** –	PUF

LEHNING H.	Mathématiques supérieures et spéciales — Tome 1 : Topologie – **8 ex.** – — Tome 2 : Dérivation – **8 ex.** – — Tome 3 : Intégration et sommation – **4 ex.** – — Tome 4 : Analyse en dimension finie – **8 ex.** – — Tome 5 : Analyse fonctionnelle – **5 ex.** –	MASSON
LEICHTNAM E. **SCHAUER X.**	Exercices corrigés de mathématiques posés aux oraux X-ENS — Tome I - Algèbre 1 – **2 ex.** – — Tome 2 - Algèbre et géométrie – **4 ex.** – — Tome 3 - Analyse 1 – **4 ex.** – — Tome 4 - Analyse 2 – **9 ex.** –	ELLIPSES
LELONG-FERRAND J.	Géométrie différentielle – **3 ex.** –	MASSON
LELONG-FERRAND J.	Les fondements de la géométrie – **2 ex.** –	PUF
LELONG-FERRAND J.	exercices résolus d'analyse – **1 ex.** –	DUNOD
LESIEUR L. **MEYER Y.** **JOULAIN C.** **LEFEBVRE J.**	Algèbre linéaire, géométrie – **1 ex.** –	ARMAND COLIN
LIRET F.	Maths en pratiques – **1 ex.** –	DUNOD
LIRET F. **MARTINAIS D.**	Algèbre 1 – **1 ex.** –	DUNOD
LION G.	Algèbre pour la licence Cours et exercices (2ème édition) – **1 ex.** –	VUIBERT
LION G.	Géométrie du plan Cours complet avec 600 exercices résolus – **1 ex.** –	VUIBERT
LOTHAIRE M.	Algebraic combinatorics on words – **1 ex.** –	CAMBRIDGE
MAC LANE S. **BIRKHOFF G.**	Algèbre — 1 : Structures fondamentales – **4 ex.** – — 2 : Les grands théorèmes – **4 ex.** –	GAUTHIER-VILLARS

MACKI J. **STRAUSS A.**	Introduction to optimal control theory – **1 ex.** –	Springer
MAKAROV B.M. **GOLUZINA M.G.** **LODKIN A.A.** **PODKORYTOV A.N.**	Problèmes d'analyse réelle – **1 ex.** –	Cassini
MALLIAVIN M. P.	Les groupes finis et leurs représentations complexes – **2 ex.** –	Masson
MALLIAVIN P.	Géométrie différentielle intrinsèque – **2 ex.** –	Hermann
MALLIAVIN M. P. **WARUSFEL A.**	Algèbre linéaire et géométrie classique. Exercices – **1 ex.** –	Masson
MANIVEL L.	Cours spécialisé – **1 ex.** –	SMF
MANSUY R. **MNEIMNÉ R.**	Algèbre linéaire réduction des endomorphismes – **3 ex.** –	Vuibert
MANSUY R. **RANDÉ B.**	Les clefs pour l' X – **2 ex.** –	Calvage et Mounet
MARCO J.P. *et al.*	Analyse L3 – **1 ex.** –	Pearson
MASCART H. **STOKA M.**	Fonctions d'une variable réelle — Tome 2 : Exercices et corrigés – **1 ex.** – — Tome 3 : Exercices et corrigés – **1 ex.** – — Tome 4 : Exercices et corrigés – **1 ex.** –	PUF
MAURY B.	Analyse fonctionnelle, Exercices et problèmes corrigés – **15 ex.** –	Ellipses
MAWHIN J.	Analyse : fondements, technique, évolutions – **2 ex.** –	De Boeck Université
MENEZES A.J. **van OORSCHOT P.C.** **VANSTONE S.A.**	Handbook of applied cryptography – **1 ex.** –	CRC Press
MERINDOL J.-Y.	Nombres et algèbre – **2 ex.** –	EDP Sciences
MERKIN D.	Introduction to the theory of stability – **1 ex.** –	Springer

MÉTIVIER M.	Probabilités : dix leçons d'introduction. École Polytechnique – **2 ex.** –	Ellipses
MEUNIER P.	Agrégation interne de Mathématiques Exercices d'oral corrigés et commentés — Tome 2 – **1 ex.** – — Tome 3 – **1 ex.** –	PUF
MEUNIER P.	Algèbre avec applications à l'algorithmique et à la cryptographie – **1 ex.** –	Ellipses
MEYRE T.	Probabilités, cours et exercices corrigés – **2 ex.** –	Calvage & Mouret
MEYRE T.	Séries, intégrales et probabilités – **2 ex.** –	IREM Université Paris Diderot
MIGNOTTE M.	Mathématiques pour le calcul formel – **1 ex.** –	PUF
MILHAUD X.	Statistique – **1 ex.** –	Belin
MNEIMNÉ R.	Eléments de géométrie : action de groupes – **4 ex.** –	Cassini
MNEIMNÉ R.	Réduction des endomorphismes – **2 ex.** –	Calvage et Mounet
MNEIMNÉ R. **TESTARD F.**	Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques – **5 ex.** –	Hermann
MOISAN J. **VERNOTTE A.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales Analyse : topologie et séries – **3 ex.** –	Ellipses
MOISAN J. **VERNOTTE A.** **TOSEL N.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales Analyse : suites et séries de fonctions – **2 ex.** –	Ellipses
MONIER J.M.	Cours de mathématiques — Analyse 2 MPSI, PCSI, PTSI – **1 ex.** – — Analyse 3 MP, PSI, PC, PT – **1 ex.** – — Analyse 4 MP, PSI, PC, PT – **1 ex.** – — Algèbre 1 MPSI, PCSI, PTSI – **2 ex.** – — Algèbre 2 MP, PSI, PC, PT – **1 ex.** – — Exercices d'analyse MPSI – **1 ex.** – — Exercice d'algèbre et géométrie MP – **1 ex.** –	Dunod

MUTAFIAN C.	Le défi algébrique — Tome 1 – **3 ex.** – — Tome 2 – **3 ex.** –	VUIBERT
NAGEL E. **NEWMAN J. R.** **GÖDEL K.** **GIRARD J. Y.**	Le théorème de Gödel – **1 ex.** –	SEUIL
NAUDIN P. **QUITTE C.**	Algorithmique algébrique avec exercices corrigés – **1 ex.** –	MASSON
NEVEU J.	Base mathématique du calcul des probabilités – **1 ex.** –	MASSON
NEVEU J.	Martingales à temps discret – **1 ex.** –	MASSON
NIVEN I.	Irrational numbers – **2 ex.** –	MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA
NORRIS J.R.	Markov chains – **1 ex.** –	CAMBRIDGE
NOURDIN Y.	Leçons d'analyse, probabilités, algèbre et géométrie – **1 ex.** –	DUNOD
O'ROURKE J.	Computational geometry in C (second edition) – **1 ex.** –	CAMBRIDGE
OPREA J.	Differential geometry – **1 ex.** –	PRENTICE HALL
OUVRARD J.Y.	— Probabilités 1 (capes, agrégation) – **3 ex.** – — Probabilités 2 (maîtrise, agrégation) – **1 ex.** –	CASSINI
PABION J.F.	Elements d'analyse complexe – **2 ex.** –	ELLIPSE
PAPINI O. **WOLFMANN J.**	Algèbre discrète et codes correcteurs – **2 ex.** –	SPRINGER
PARDOUX E.	Processus de Markov et applications – **1 ex.** –	DUNOD

PEDOE D.	Geometry- A comprehensive course – **1 ex.** –	DOVER
PERKO L.	Differential equation and dynamical systems – **1 ex.** –	SPRINGER
PERRIN D.	Cours d'Algèbre – **3 ex.** –	ELLIPSES
PERRIN D.	Cours d'Algèbre – **1 ex.** –	ENSJF
PERRIN D.	Mathématiques d'école – **1 ex.** –	CASSINI
PERRIN D.	Nombres, mesures et géométrie – **1 ex.** –	ELLIPSE
PERRIN-RIOU B.	Algèbre, arithmétique et MAPLE – **3 ex.** –	CASSINI
PETROVŠEK M. **WILF H.S.** **ZEILBERGER D.**	A=B – **1 ex.** –	A.K. PETERS
PEVZNER P.	Computational molecular biology- an algorithmic approach – **1 ex.** –	MIT PRESS
PEYRÉ G.	L'algèbre discrète de la transformée de Fourier – **3 ex.** –	ELLIPSE
PÓLYA G. **SZEGŐ G.**	Problems and Theorems in Analysis — Volume I – **3 ex.** – — Volume II – **3 ex.** –	SPRINGER VERLAG
POMMELLET A.	Agrégation de Mathématiques. Cours d'Analyse – **1 ex.** –	ELLIPSES
PRASOLOV V.	Polynomials – **1 ex.** –	SPRINGER
PRASOLOV V.	Problèmes et théorèmes d'algèbre linéaires – **3 ex.** –	CASSINI
PREPARATA F.P. **SHAMOS M.I.**	Computational geometry - an introduction – **1 ex.** –	SPRINGER

PRESS W. **FLANNERY B.** **TEUKOLSKI S.** **VETTERLING W.**	Numerical recipes in Pascal – **1 ex.** –	CAMBRIDGE
PUTZ J.F.	Maple animation – **1 ex.** –	CHAPMAN AND HALL
QUATERONI A. **SACCO R.** **SALERI F.**	Méthodes numériques – **2 ex.** –	SPRINGER
QUATERONI A. **SALERI F.** **GERVASIO P.**	Calcul scientifique – **2 ex.** –	SPRINGER
QUEFFÉLEC H.	Topologie – **3 ex.** –	MASSON
QUEFFÉLEC H. **QUEFFELEC M..**	Analyse complexe et applications – **1 ex.** –	CALVAGE ET MOUNET
QUEFFÉLEC H. **ZUILY C.**	Analyse pour l'agregation – **4 ex.** –	DUNOD
RALSTON A. **RABINOWITCH P**	A first course in numerical analysis – **3 ex.** –	INTERNATINAL STUDENT EDITION
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Cours de Mathématiques spéciales — 1- Algèbre – **7 ex.** – — 2- Algèbre et applications à la géométrie – **8 ex.** – — 3- Topologie et éléments d'analyse – **13 ex.** – — 4- Séries et équations différentielles – **9 ex.** – — 5- Applications de l'analyse à la géométrie – **8 ex.** –	MASSON
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Exercices avec solutions — Algèbre – **2 ex.** – — Analyse 1 – **5 ex.** – — Analyse 2 – **7 ex.** –	MASSON
RAMIS J.P. **WARUSFEL A.**	Mathématiques - Tout en un pour la licence Niveau 1 – **2 ex.** –	DUNOD

RAMIS J.P. **WARUSFEL A.**	Mathématiques - Tout en un pour la licence Niveau 2 – **2 ex.** –	DUNOD
RAMIS J.P. **WARUSFEL A.**	Mathématiques - Tout en un pour la licence Niveau 3 – **2 ex.** –	DUNOD
RAO C.R.	Linear statistical inference and its application – **1 ex.** –	WILEY
RANDÉ B.	Les carnets indiens de Srinivasa Ramanujan – **1 ex.** –	CASSINI
RANDÉ B. **MANSUY R.**	Les clefs pour l'X (2) – **1 ex.** –	CALVAGE MOUNET
RANDÉ B. **TAIEB F.**	Les clefs pour l'X – **1 ex.** –	CALVAGE MOUNET
REINHARDT F. **SOEDER H.**	Atlas des mathématiques – **1 ex.** –	LIVRE DE POCHE
REMMERT R.	Classical topics in complex function theory – **1 ex.** –	SPRINGER
RIDEAU F.	Exercices de calcul différentiel – **2 ex.** –	HERMANN
RIESZ F. **NAGY SZ. B.**	Leçons d'analyse fonctionnelle – **2 ex.** –	GAUTHIER-VILLARS
RIO E.	Théorie asymptotique des processus aléatoires faiblement dépendants – **2 ex.** –	SPRINGER
RISLER J.-J.. **BOYER P.**	Algèbre pour la licence 3 – **2 ex.** –	DUNOD
RITTAUD, B.	Newton implique Kepler – **2 ex.** –	ELLIPSES
RIVAUD J.	Algèbre (Tome 2) – **1 ex.** –	VUIBERT
RIVOIRARD V. **STOLTZ G.**	Statistique mathématique en action – **3 ex.** –	DUNOD
ROBERT C.	Contes et décomptes de la statistique - Une initiation par l'exemple – **1 ex.** –	VUIBERT

ROLLAND R.	Théorie des séries 2- Séries entières – **1 ex.** –	CÉDIC/NATHAN
ROMAN S.	Field theory – **1 ex.** –	SPRINGER-VERLAG
ROMBALDI J.-E.	Thèmes pour l'agrégation de mathématiques algébre et géometrie – **4 ex.** –	EDP SCIENCES
ROMBALDI J.-E.	Interpolation et approximation Analyse pour l'agrégation - Cours et exercices résolus – **1 ex.** –	VUIBERT
ROMBALDI J.-E.	Analyse matricielle – **2 ex.** –	EDP SCIENCES
ROMBALDI J.-E.	Éléments d'analyse réelle – **1 ex.** –	EDP SCIENCES
ROMBALDI J.-E.	Mathématiques pour l'agrégation – **2 ex.** –	DEBOECK SUP.
ROMBALDI J.E.	Thèmes pour l'Agrégation de mathématiques – **2 ex.** –	EDP SCIENCES
ROTMAN J. J.	An introduction to the theory of groups – **1 ex.** –	SPRINGER-VERLAG
ROUDIER H.	Alèbre linéaire. Cours et exercices – **1 ex.** –	VUIBERT
ROUSSEAU Y. **SAINT-AUBIN Y.**	Mathématiques et technologie – **1 ex.** –	SPRINGER (SUMAT)
ROUVIÈRE F.	Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation – **4 ex.** –	CASSINI
ROUX J.	Systèmes dynamiques et méthodes de continuation : Applications en biologie et dynamique des populations – **1 ex.** –	ELLIPSES
RUAUD J.F. **WARUSFEL A.**	Exercices de Mathématiques Algèbre 3 – **2 ex.** –	MASSON
RUDIN W.	Analyse réelle et complexe – **4 ex.** –	MASSON

RUDIN W.	Functional analysis – **3 ex.** –	Mc Graw Hill
RUDIN W.	Real and complex analysis – **3 ex.** –	Mc Graw Hill
SA EARP R. **TOUBIANA E.**	Introduction à la Géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann – **1 ex.** –	Cassini
SAINSAULIEU L.	Calcul scientifique – **1 ex.** –	Dunod
SAINT RAYMOND J.	Topologie, calcul différentiel et variable complexe – **1 ex.** –	Calvage et Mounet
SAKAROVITCH J.	Eléments de théorie des automates – **1 ex.** –	Vuibert
SAKS S. **ZYGMUND A.**	Fonctions analytiques – **2 ex.** –	Masson
SAMUEL P.	Géométrie projective – **1 ex.** –	PUF
SAMUEL P.	Théorie algébrique des nombres – **3 ex.** –	Hermann
SARMANT M.C. **MERLIER T.** **PILIBOSSIAN Ph.** **YAMMINE S.**	Analyse 1 – **1 ex.** –	Ellipses
SAUX PICARD P.	Cours de calcul formel - Algorithmes fondamentaux – **1 ex.** –	Ellipses
SAUX PICARD P.	Cours de calcul formel : Corps finis, systèmes polynomiaux - Applications – **1 ex.** –	Ellipses
SAVIOZ J.C.	Algèbre linéaire, cours et exercices – **1 ex.** –	Vuibert
SCHATZMAN M.	Analyse numérique, une approche mathématique – **2 ex.** –	Dunod
SCHNEIER B.	Applied cryptography – **1 ex.** –	Wiley

SCHWARTZ L.	Analyse — I Topologie générale et analyse fonctionnelle – **4 ex.** – — II Calcul différentiel et équations différentielles – **1 ex.** –	Hermann
SCHWARTZ L.	Cours d'Analyse — Tome 1 – **2 ex.** – — Tome 2 – **3 ex.** –	Hermann
SCHWARTZ L.	Méthodes Mathématiques pour les sciences physiques – **1 ex.** –	Hermann
SEGUINS PAZZIS (de) C.	Invitation aux formes quadratiques – **1 ex.** –	Calvage et Mounet
SELBERHERR S. **STIPPEL H.** **STRASSER E.**	Simulation of semi-conductor devices and processes – **1 ex.** –	Springer
SERRE D.	Les matrices, théorie et pratique – **3 ex.** –	Dunod
SERRE J.P.	Cours d'arithmétique – **3 ex.** –	PUF
SHAPIRO H.N.	Introduction to the theory of numbers – **1 ex.** –	Dover
SIDLER J.C.	Géométrie Projective – **1 ex.** –	Dunod
SILVESTER J. R.	Geometry, ancient and modern – **1 ex.** –	Oxford Univ. Press
SKANDALIS G.	Topologie et analyse – **1 ex.** –	Dunod
SKANDALIS G.	Agrégation interne : Algèbre générale, algèbre linéaire et un peu de géométrie – **2 ex.** –	Calvage & Mounet
STANLEY R.P.	Enumerative combinatorics Volume I – **2 ex.** –	Waddworth and Brooks
STEIN E.	Functional Analysis – **2 ex.** –	Princeton
STEIN E.	Complex Analysis – **2 ex.** –	Princeton

STEIN E.	Fourier Analysis – **2 ex.** –	PRINCETON
STEIN E.	Real Analysis – **2 ex.** –	PRINCETON
STEWART I.	Galois theory – **2 ex.** –	CHAPMAN AND HALL
SZPIRGLAS A.	Exercices d'algèbre – **1 ex.** –	CASSINI
SZPIRGLAS A. *et al.*	Mathématiques : Algèbre L3 – **1 ex.** –	PEARSON
TAUVEL P.	Cours de Géométrie – **1 ex.** –	DUNOD
TAUVEL P.	Cours d'algèbre – **1 ex.** –	DUNOD
TAUVEL P.	Corps commutatifs et théorie de Galois – **1 ex.** –	CALVAGE ET MOUNET
TAUVEL P.	Mathématiques générales pour l'agrégation – **2 ex.** –	MASSON
TAUVEL P.	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Algèbre 2 – **1 ex.** –	MASSON
TAUVEL P.	Analyse complexe pour la licence – **2 ex.** –	DUNOD
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres T 1 – **3 ex.** –	S. M. F.
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres – **2 ex.** –	BELIN
TENENBAUM G. **MENDÈS-FRANCE M.**	Les nombres premiers – **1 ex.** –	QUE SAIS-JE ? PUF
TENENBAUM G. **WU J.**	Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres T 2 – **1 ex.** –	S. M. F.
TESTARD F.	Analyse mathématique – **3 ex.** –	CALVAGE ET MOUNET

TEYTAUD O. **ANTONINI C.** **BORGNAT P.** **CHATEAU A.** **LEBEAU E.**	Les maths pour l'agreg – **1 ex.** –	DUNOD
TISSERON C.	Géométries affine, projective et euclidienne – **1 ex.** –	HERMANN
TISSIER A.	Mathématiques générales : exercices avec solutions – **4 ex.** –	BRÉAL
TITCHMARSH E.C.	The theory of functions – **2 ex.** –	OXFORD UNIV. PRESS
TORTRAT A.	Calcul des probabilités et introduction aux processus aléatoires – **1 ex.** –	MASSON
TRIGNAN J.	Constructions géométriques et courbes remarquables – **1 ex.** –	VUIBERT
TRUFFAULT B.	Exercices de géométrie élémentaires – **1 ex.** –	IREM PAYS DE LA LOIRE
TRUSS J.-K..	Foundations of mathematical analysis – **1 ex.** –	OXFORD
ULMER F.	Théorie des groupes – **3 ex.** –	ELLIPSES
ULMER F.	anneaux, corps, résultant – **2 ex.** –	ELLIPSES
VALIRON G.	Cours d'analyse mathématique — I Théorie des fonctions – **2 ex.** – — II Équations fonctionnelles - Applications – **2 ex.** –	MASSON
VAUTHIER J. **PRAT J-J.**	Cours d'Analyse Mathématique de l'Agrégation – **3 ex.** –	MASSON
VERGNAUD D.	Exercices et problèmes de cryptographie – **2 ex.** –	DUNOD
VINBERG E. B.	A course in algebra – **1 ex.** –	AMS
WAGSCHAL C.	Fonctions holomorphes - Équations différentielles – **1 ex.** –	HERMANN

WAGSCHAL C.	Topologie et analyse fonctionnelle – **1 ex.** –	Hermann
WAGSCHAL C.	Distributions, analyse microlocale, équations aux dérivées partielles – **2 ex.** –	Hermann
WARUSFEL A.	Structures algébriques finies – **2 ex.** –	Classiques Hachette
WARUSFEL A. **ATTALI P.** **COLLET M.** **GAUTIER C.** **NICOLAS S.**	Mathématiques — Analyse – **1 ex.** – — Arithmétique – **1 ex.** – — Géométrie – **1 ex.** – — Probabilités – **1 ex.** –	Vuibert
WEST D. B.	Introduction to graph theory – **1 ex.** –	Prentice Hall
WHITTAKER E.T. **WATSON G.N.**	A course of modern analysis – **3 ex.** –	Cambridge
WILF H.	Generatingfunctionology – **1 ex.** –	Academic Press
WILF H.	Algorithms and complexity – **1 ex.** –	A.K. Peters
WILLEM M.	Analyse fonctionnelle élémentaire – **3 ex.** –	Cassini
WILLEM M.	Principes d'analyse fonctionnelle – **3 ex.** –	Cassini
YALE P.B.	Geometry and Symmetry – **1 ex.** –	Dover
YGER A.	Analyse complexe – **2 ex.** –	Ellipses
YGER A. *et al.*	Mathématiques appliquées L3 – **1 ex.** –	Pearson
YGER A. *et al.*	Intégration, espaces de Hilbert et analyse de Fourier – **1 ex.** –	Ellipse
YOUNG D.M. **GREGORY R.T.**	A survey of numerical mathematics – **1 ex.** –	Dover

ZAVIDOVIQUE M.	Un max de math – **1 ex.** –	Calvage et Mounet
ZÉMOR G.	Cours de cryptographie – **3 ex.** –	Cassini
ZUILY C.	Éléments de distributions et d' équations aux dérivées partielles – **2 ex.** –	Dunod
ZUILY C. **QUEFFÉLEC H.**	Éléments d'analyse pour l'agrégation – **1 ex.** –	Masson
ZUILY C. **QUEFFÉLEC H.**	Problèmes de distributions – **3 ex.** –	Cassini

6.2 Bibliothèque numérique

Pour l'épreuve de leçons de mathématiques, les candidates et candidats peuvent utiliser la bibliothèque du concours. La liste des ouvrages disponibles se trouve dans le rapport du concours externe. En 2021, les candidats ont pu utiliser une bibliothéque numérique pendant la préparation de l'épreuve de modélisation. La liste des livres disponibles actualisée en 2023 est décrite ci-dessous.

- Grégoire Allaire : Analyse numerique et optimisation (Éditions de l'École polytechnique)
- Gilles Bailly-Maitre : Arithmétique et cryptologie (Ellipses, 2e édition)
- Philippe Barbe et Michel Ledoux - Probabilité (EDP Sciences)
- Sylvie Benzoni-Gavage : Calcul différentiel et équations différentielles (Dunod, 2e édition)
- Florent Berthelin : Équations différentielles (Cassini)
- Frédéric Bertrand, Myriam Maumy Bertrand : Initiation à la statistique avec R (Dunod)
- Alin Bostan et al. : Algorithmes efficaces en calcul formel (Hal.inria.fr)
- Richard Brent, Paul Zimmermann : Modern Computer Arithmetic (Cambridge University Press)
- Hervé Carrieu : Probabilité (EDP Sciences)
- Alexandre Casamayou et al. : Calcul mathématique avec Sage
- Marie-Line Chabanol, Jean-Jacques Ruch : Probabilités et statistiques (Ellipses)
- Djalil Chafai, Pierre-André Zitt : Probabilités, préparation à l'agrégation interne
- Djalil Chafai, Florant Malrieu : Recueil de modèles aléatoires (HAL Id : hal-01897577, version 3)
- Jean-Pierre Demailly - Analyse numérique et équations différentielles (EDP Sciences, 4e édition)
- Michel Demazure : Cours d'algèbre (Cassini)
- Laurent di Menza : Analyse numérique des équations aux dérivées partielles (Cassini)
- Jérôme Escoffier : Probabilités et statistiques (Ellipses, 3e édition)
- Francis Filbet : Analyse numérique (Dunod, 2e édition)
- Loïc Foissy et Alain Ninet : Algèbre et calcul formel (Ellipses)
- Olivier Garet et Aline Kurtzmann : De l'intégration aux probabilités (Ellipses, 2e édition)
- Thierry Goudon : Mathématiques pour la modélisation et le calcul scientifique (ISTE)
- Jean-Baptiste Hiriart-Urruty : Optimisation et analyse convexe (EDP Sciences)
- John Hubbard, Beverly West : équations différentielles et systèmes dynamiques (Cassini)
- Laurent Le Floch et Frédéric Testard : Probabilités 1 (Calvage et Mounet)
- Thierry Meyre : Probabilités, cours et exercices corrigés. Tome 1 (Calvage et Mounet
- Thierry Meyre : Probabilités, cours et exercices corrigés. Tome 2 (Calvage et Mounet)
- Jean-Yves Ouvrard : Probabilités. tome 1 (Cassini, 2e édition)
- Jean-Yves Ouvrard : Probabilités. tome 2 (Cassini, 2e édition)
- Jean-Étienne Rombaldi : Analyse matricielle (EDP Sciences, 2e édition)
- François Rouvière : Petit guide de calcul différentiel (Cassini, 4e édition)
- Victor Shoup : Computational introduction to number theory and algebra (Cambride University Press)
- Damien Vergnaud : Exercices et problèmes de cryptographie (Dunod, 3e édition)