Concours de recrutement du second degré

Rapport de jury

Concours : Agrégation externe

Section : Mathématiques

Session 2022

Rapport de jury présenté par : Claudine Picaronny
Présidente du jury

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Le rapport de jury répond à deux objectifs : le premier est d'établir un compte-rendu de la session passé, le second est de préparer la prochaine session. Aussi, le lecteur y trouvera

- un bilan de la session 2022 qui restitue, au travers de quelques statistiques, la physionomie d'ensemble des candidats et des admis, en termes de profils et de performances.
- une description de l'esprit dans lequel le jury entend aborder le concours de l'agrégation externe de mathématiques et la manière dont il conçoit les épreuves.
- une description et un commentaire détaillé de chacune des épreuves, discutant les réalisations de l'année et détaillant les attentes du jury.

Ce rapport peut être vu comme un guide pratique ; il se veut utile aux futurs candidats afin de les aider à se préparer au mieux pour les épreuves qui les attendent. S'il mentionne des lacunes et défauts constatés sur lesquels des efforts spécifiques mériteraient d'être faits, il cherche surtout à faire comprendre la nature des attentes, avec l'intention d'accompagner la préparation au concours.

Le jury considère que ce rapport est précis et détaillé quant à ses attentes et l'engage dans son évaluation. Le jury recommande donc aux candidats de tous profils, ainsi qu'aux centres de préparation et à leurs intervenants, d'en faire une lecture attentive et de bien tenir compte des prescriptions qui y sont faites.

Le site officiel de l'agrégation externe de mathématiques est accessible à l'adresse `agreg.org`. Il est régulièrement mis à jour en fonction de l'actualité du concours. Les visiteurs y trouveront des conseils, des liens pertinents, des archives (notamment les sujets d'écrits et leurs corrigés) et des renseignements pratiques concernant la session à venir. En particulier, les futurs candidats peuvent trouver sur ce site la `ClefAgreg` qui leur permettra de se familiariser avec l'environnement informatique qu'ils rencontreront pour l'épreuve de modélisation. Cette épreuve, sur texte et où la production d'illustrations informatiques est attendue, est assez spécifique ; s'y préparer suffisamment tôt permet de bien appréhender ses spécificités et aide nécessairement à renforcer les capacités de synthèse sur l'ensemble du programme. De plus, il est aussi possible d'y consulter une série de vidéos, réalisée par le jury, qui détaille le déroulement des épreuves de leçons et en précise les attentes.

Enfin, le jury rappelle qu'une réunion est traditionnellement organisée en début d'année universitaire sous l'égide des sociétés savantes de mathématiques et d'informatique (Société Mathématique de France, Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles, Société Informatique de France) pour évoquer le bilan et les perspectives du concours. Cette réunion est publique, préparateurs et candidats de tous horizons y sont bienvenus.

Chapitre 2

Déroulement du concours et statistiques

2.1 Déroulement du concours

2.1.1 Les épreuves et le calendrier 2022

Le concours comprend deux épreuves écrites d'admissibilité — une composition de mathématiques générales et une composition d'analyse-probabilités — et trois épreuves orales d'admission : algèbre et géométrie , analyse et probabilités , modélisation. Les candidats ont eu le choix parmi trois options :
- probabilités et statistiques,
- calcul scientifique,
- algèbre et calcul formel.

Elles ne diffèrent que par l'épreuve de modélisation.

Les épreuves écrites de l'agrégation externe de mathématiques 2022 se sont déroulées

- le jeudi 24 février 2022 pour l'épreuve de mathématiques générales,
- le vendredi 25 février 2022 pour l'épreuve d'analyse et probabilités.

La liste d'admissibilité a été publiée le mardi 10 mai 2022. Le concours fait l'objet de conventions internationales qui lient la France, le Maroc et la Tunisie : les sujets d'écrit servent aussi pour l'admissibilité aux agrégations de mathématiques en Tunisie et au Maroc. La délibération du jury d'admissibilité est ainsi menée conjointement avec les présidents des agrégations marocaine et tunisienne. Les barres d'admissibilité pour les étudiants de ces deux pays sont au moins égales à celle de la barre fixée pour le concours français.

Les épreuves d'admission se sont déroulées du samedi 18 juin au dimanche 3 juillet 2022. La liste d'admission a été publiée le lundi 4 juillet 2022. Le déroulement et l'organisation d'un concours qui soumet environ 720 candidats admissibles à trois épreuves orales, avec des options variées, une infrastructure informatique complexe, est une mécanique de précision, astreinte de surcroît à des exigences exceptionnelles de rigueur et d'égalité de traitement. Sa réussite repose sur l'engagement des équipes de l'établissement et du rectorat qui en ont la charge. L'installation du concours dans une nouvelle académie et dans un nouvel établissement s'est faite avec la meilleure volonté et le dévouement de tous : le personnel du lycée Kléber, qui a accueilli les épreuves orales, et le personnel du rectorat de l'académie de Strasbourg ont offert au jury et aux candidats des conditions de travail excellentes et ont assuré une organisation performante, avec beaucoup de gentillesse et de patience. Ce rapport est l'occasion de transmettre à Monsieur le Recteur, Monsieur le Proviseur et Monsieur le Secrétaire Général du lycée Kléber, le personnel de la DEC, et tous les appariteurs les plus chaleureux remerciements du jury et relaie les nombreux messages de reconnaissance exprimés par les candidats pour la qualité de l'accueil qu'ils ont reçus.

2.1.2 le programme

Le concours externe de l'agrégation a pour vocation de recruter des professeurs agrégés destinés à exercer dans l'enseignement secondaire (lycées d'enseignement général et technologique et, exceptionnellement, collèges) ou dans l'enseignement supérieur (universités, instituts universitaires de technologie, grandes écoles, classes préparatoires aux grandes écoles, sections de techniciens supérieurs). Le jury estime donc que le niveau visé devrait permettre au professeur agrégé d'intervenir sereinement et efficacement sur le créneau « bac−3/bac+3 » ; cet objectif calibre la conception du programme et les critères d'évaluation.

Le programme et la nature des épreuves, écrites et orales, font l'objet de publications sur le site officiel de ministère de l'Éducation nationale http://www.devenirenseignant.gouv.fr. Le programme 2023 (https://media.devenirenseignant.gouv.fr/file/agreg_externe/14/3/p2023_agreg_ext_math_1428143.pdf) est identique au programme 2022.

Le jury s'engage, bien sûr, à respecter le programme. Ce programme n'est pas exhaustif, il résulte d'un compromis et des résultats mathématiques « importants »manquent au programme. Il est tout à fait possible que des candidats aient connaissance de ces notions avancées, souhaitent en faire mention et proposer des excursions hors des limites du programme. Le jury saura s'adapter et apprécier de telles propositions. Toutefois, elles ne sont absolument pas nécessaires pour prétendre aux notes maximales.

2.1.3 Après la réussite au concours, la carrière d'enseignant

Le jury conseille aux candidats de se préoccuper suffisamment tôt des questions liées à la gestion de leur carrière auxquelles ils seront confrontés en cas de succès au concours. Le site https://agreg.org procure des informations complémentaires sur les textes de référence concernant les modalités d'affectation et d'organisation de l'année de stage et sur le statut des doctorants ou des docteurs agrégés qui suscite des questions fréquentes et demande une vigilance particulière.

Tout en étant pleinement conscient des enjeux de couverture des besoins d'enseignement, le jury recommande qu'une attitude positive soit réservée aux demandes de report ou de détachement de jeunes docteurs ou de doctorants en fin de thèse. Des dispositions restrictives, dont la motivation à très court terme peut se comprendre, obèrent les perspectives des doctorants agrégés et sont susceptibles de gravement perturber le fonctionnement et l'attractivité des formations de l'enseignement supérieur en mathématiques, avec des conséquences qui peuvent s'avérer néfastes à plus long terme. Comme la préparation au concours de l'agrégation joue, traditionnellement, un rôle structurant majeur sur l'ensemble de ces formations, on peut craindre un impact négatif sur les parcours conduisant vers la recherche en mathématiques, domaine où le pays excelle au tout meilleur niveau international, tout comme sur l'attractivité du concours.

2.2 Commentaires généraux et statistiques sur la session 2022

2.2.1 Commentaires généraux

Le nombre de postes ouverts est relativement stable depuis pluiseurs années. En 2022, il a légèrement baissé pour tenir compte de la disparition de l'option informatique en raison de la création de l'agrégation d'informatique : 364. Le recrutement externe est par ailleurs complété par un concours externe spécial, réservé à des candidats titulaires d'un doctorat. Seize postes étaient ouverts à ce titre. Ce concours indépendant, mais dont les épreuves sont menées concomitamment à celle du concours standard, fait l'objet d'un rapport spécifique.

Année	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
Concours externe	391	395	457	467	457	381	391	387	383	364
Concours spécial					15	16	16	16	16	16

Nombre de postes ouverts

Le nombre de candidats « étudiants », auxquels ce concours devrait prioritairement s'adresser et qui a drastiquement diminué dans les vingt dernières années est en légère augmentation depuis quatre ans. Sans rien enlever aux mérites et aux qualités des candidats relevant d'autres catégories, la faiblesse du nombre d'étudiants attirés par ce concours reste une source d'inquiétude pour la communauté éducative.

Admissibilité

Le jury a déclaré admissibles 719 candidats à l'issue des deux épreuves d'admissibilité (Mathématiques générales et Analyse-Probabilités). Le premier admissible a une moyenne de 20/20 et le dernier une moyenne de 5/20 pour les deux épreuves écrites. Ce volume et ce seuil sont semblables à ceux des années passées.

Le ratio admissibles/postes de l'ordre de 0,5 laisse la possibilité de pourvoir les postes ouverts au concours. La décision finale s'apprécie sur l'ensemble du concours ; tous les candidats admissibles doivent tenter de profiter pleinement de cette possibilité. Un score modeste à l'écrit peut être compensé par des qualités techniques et pédagogiques constatées pendant les épreuves orales. Certains candidats parmi les plus mal classés des épreuves écrites tirent profit de cette opportunité : parmi les reçus, environ 70 candidats avait une moyenne d'écrit inférieure à 8/20 et treize candidats reçus avaient une moyenne inférieure à 6,75/20 aux épreuves d'admissibilité.

Enfin, l'admissibilité au concours et les examens universitaires relèvent de processus d'évaluation distincts. Les Universités, garantes de la qualité de leurs diplômes ne jugent pas opportun de délivrer le M2 à une fraction des candidats admissibles.

La conception des sujets est guidée par la volonté de valoriser les candidats ayant investi dans une préparation sérieuse. Chacun des sujets propose des questions qu'on pourrait qualifier de « classiques », très certainement proches d'exercices qu'un titulaire de M2 a forcément traités durant sa formation universitaire. Les deux sujets, de conceptions indépendantes, ont conduit à des prestations qui manifestent les mêmes traits saillants et qui doivent faire l'objet d'une attention particulière dans les préparations :

- une rédaction et une présentation désinvolte sur un trop grand nombre de copies. Le jury accorde une attention particulière à la qualité de la rédaction. Un item spécifique du barème valorise cette compétence.
- des raisonnements fragiles, avec des erreurs de logique grossières (formaliser une contraposée par exemple). Les raisonnements par récurrence sont souvent mal formalisés.
- Une forte proportion de candidats a manqué de méthodes pour une rédaction efficace. Plus que la technicité, c'est bien davantage le volume abordé qui a départagé les candidats.

Oraux

Convocations. La procédure de convocation aux épreuves d'admission s'effectue en deux temps. Tout d'abord, les candidats admissibles reçoivent une convocation — dite « convocation administrative »— par mail. Cette convocation indique les trois jours de passage prévus pour leurs épreuves d'admission, mais n'en précise pas les horaires. Pour connaître les horaires précis d'interrogation, les candidats doivent ensuite se connecter sur le site sécurisé de l'agrégation de mathématiques, en indiquant leur

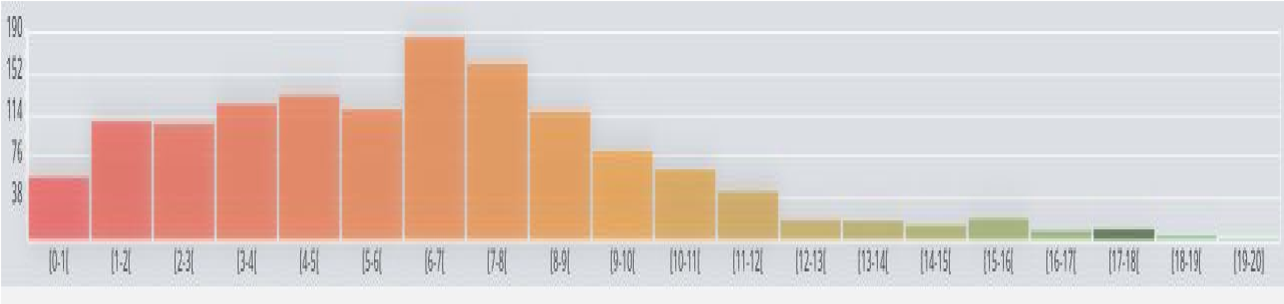


FIGURE 2.1 – *Répartition des notes de l'épreuve écrite de mathématiques générales, agrégations France-Maroc-Tunisie*

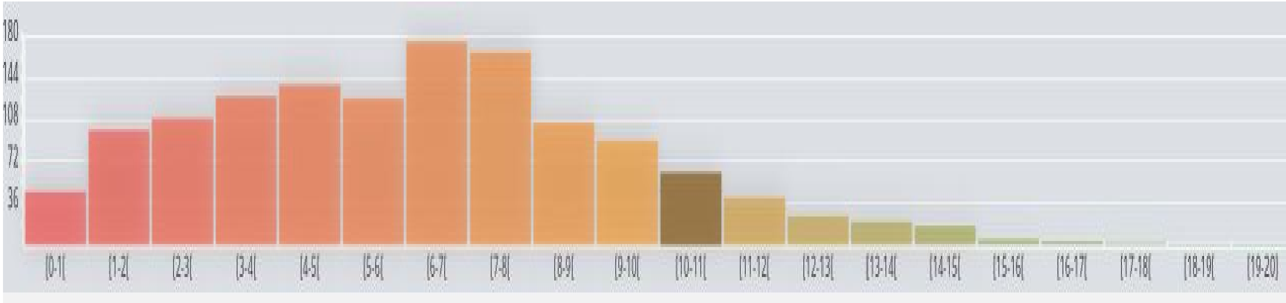


FIGURE 2.2 – *Répartition des notes de l'épreuve écrite d'analyse et probabilités, agrégations France-Maroc-Tunisie*

numéro de candidat : cette procédure permet de s'assurer de la volonté de participer aux épreuves et attribue alors les horaires de passage. L'application a été fermée, comme les années passées, trois jours avant le début des oraux. Les candidats qui n'avaient pas ainsi édité leurs horaires devaient, par défaut, se présenter à 6h30 le premier jour de leur convocation sur les lieux du concours, sous peine d'être déclarés non présents. Cette procédure bien établie sera reconduite pour la session 2023.

Fraude. Le jury a devoir de vigilance aux risques de fraude. En particulier, tout moyen de communication ou tout support de stockage de données (téléphone, montre connectée, clef USB...) est strictement interdit lors des épreuves, écrites et orales, sous peine d'exclusion du concours. Tous les documents personnels type fiche résumé, plan préparé, notes de cours manuscrites ou dactylographiées, livres comportant des ajoûts manuscrits significatifs etc. sont aussi prohibés [1]. Les livres apportés par les candidats ne doivent pas être annotés.

Conditions de passage des oraux. Lors des passages des candidats, le jury ne dispose d'aucune information particulière : les notes d'écrit, les notes obtenues aux oraux précédents, le statut ou la profession, etc. demeurent inconnus des commissions d'évaluation. Le jury note selon les mêmes critères, avec une grille stricte commune à toutes les commissions, toutes les personnes à partir de leur seule prestation. Des comparaisons statistiques sont faits très régulièrement pour guider l'harmonisation entre les commissions et la présidence du concours veille sur ces indicateurs. En outre, des réunions régulières entre les différentes commissions permettent d'échanger sur la notation et de rester vigilant pour réduire les éventuels écarts dans l'évaluation. Le jury a la volonté d'accueillir les candidats de manière positive et bienveillante et cherche à valoriser toutes les connaissances, le travail de préparation et les aspects positifs des prestations des candidats.

Auditeurs. Les conditions sanitaires ont autorisé la présence d'auditeurs lors des oraux de la session

1. Pour les épreuves orales, un dispositif de consigne, aux risques et périls des déposants, est assuré à l'accueil des candidats et permet, pour les candidats de déposer tout matériel de communication ou de stockage de données. La possession d'un tel matériel dans les salles de préparation peut conduire à l'exclusion du concours ou à l'interdiction d'assister aux épreuves.

2022. Le jury rappelle que les épreuves d'admission d'un concours ont un caractère public. Ce principe général s'applique évidemment au concours de l'agrégation de mathématiques et les candidats ne peuvent s'opposer à la présence d'auditeurs (ce qui serait quelque peu paradoxal pour des candidats à des fonctions d'enseignant). Le jury incite très fortement les futurs candidats et les préparateurs à venir assister aux épreuves et à s'appuyer sur cette expérience pour se préparer au mieux aux épreuves ; c'est un investissement qui ne peut être que bénéfique. Une attitude et une tenue correctes sont exigées des visiteurs. En particulier, les téléphones portables des auditeurs doivent être éteints. L'accès aux salles d'interrogation pourrait ne pas être autorisé à un auditeur dont la tenue serait estimée inappropriée ou le comportement susceptible de perturber l'interrogation.

Résultats.

À l'issue des épreuves orales, 338 candidats ont été déclarés admis ; le premier admis a eu une moyenne de 19,65/20, le dernier admis une moyenne de 8,1/20. Ce résultat est la marque de la stabilité du concours : la barre d'admission est inchangée depuis 2015 et le nombre de lauréats varie peu depuis la session 2016 ; Compte tenu du relativement faible nombre de candidats issus des préparations universitaires, le jury se réjouit de cette stabilité, qui ne fait, bien entendu, aucune concession à la qualité des reçus.

Le jury rappelle qu'un concours n'est pas un examen : le but n'est pas de valider des connaissances. Les notes attribuées ne sont pas des jugements de valeur sur les candidats et n'ont aucun caractère « absolu » ; il ne s'agit que de discriminer au mieux une population donnée dans un contexte donné et à un instant donné. Toute la plage de notes de 0 à 20 est utilisée. Il en résulte que des candidats peuvent recevoir des notes très basses ; elles ne sont que le reflet d'une prestation dans ce contexte particulier. Elles n'enlèvent rien à l'estime que le jury porte aux efforts de préparation des candidats, ne préjugent en rien de leurs qualités humaines ou professionnelles.

Le jury insiste sur l'importance de passer toutes les épreuves. Tous les ans, on déplore l'abandon de candidats qui étaient en position d'être reçus. Le stress, les sentiments de frustration à l'issue d'une interrogation et la fatigue ne peuvent être négligés. Mais ils ne doivent pas prendre le pas sur l'engagement dans le concours ; le jury encourage les candidats à se présenter aux épreuves suivantes et à s'investir jusqu'au terme du concours.

Les moyennes et écarts-types des présents à l'oral sur les différentes épreuves sont résumés dans les tableaux ci-dessous :

	Oral Alg-G	Oral Ana-P	Oral Mod	Ecrit MG	Ecrit AP
moyenne	9,9	10,1	9,25	9	8,6
écart-type	4,8	4,8	4,7	3,1	2,9

Moyennes et écarts-types des candidats présents à l'ensemble des épreuves

	Oral Alg-G	Oral Ana-P	Oral Mod	Ecrit MG	Ecrit AP
moyenne	12,9	12,9	12	10,5	10,1
écart-type	3,6	4	4	3,1	2,6

Moyennes et écarts-types des candidats admis

Ces données offrent l'occasion de rappeler le conseil de ne négliger aucune des épreuves. Les épreuves de leçons et l'épreuve de modélisation mettent en valeur des qualités, techniques et pédagogiques, différentes. L'épreuve de modélisation, avec un temps d'exposé « libre »conséquent, donne beaucoup d'autonomie au candidat. Elle requiert des capacités de synthèse importantes puisque les textes font appel à des notions présentes dans l'ensemble du programme et mettent les énoncés « en situation ». De plus, il est souvent valorisant de savoir illustrer sur ordinateur un propos mathématique et des candidats en tirent parti pour produire des prestations originales et scientifiquement profondes. Mais, cette compétence ne s'improvise pas ; elle réclame un minimum de préparation en amont du concours. De manière générale, les épreuves orales demandent une certaine pratique et la manifestation d'un certain recul scientifique, qui ne peuvent résulter que d'un travail préparatoire de fond. Il est sûrement profitable de s'exercer au concours dans son ensemble tout au long de l'année, une partie des exercices proposés à l'écrit se rapprochant d'ailleurs de questions posées à l'oral et le recul gagné dans la préparation à l'oral ne pouvant être que bénéfique aux prestations écrites.

On résume dans le tableau ci-dessous l'évolution des barres d'admission depuis 2008 :

Année	Nombre de postes attribués	Barre d'admission (/20)
2022	338	8,1
2021	327	8,1
2020	325	
2019	308	8,1
2018	315	8,1
2017	305	8,1
2016	304	8,1
2015	274	8,1
2014	275	8,48
2013	323	7,95
2012	308	8,1
2011	288	9,33
2010	263	9,8
2009	252	10,15
2008	252	10,1

Le recrutement de professeurs agrégés de mathématiques obéit à des critères de qualités scientifiques et pédagogiques, afin que les personnels recrutés soient en mesure de répondre efficacement aux missions actuellement données aux agrégés qui sont de pouvoir exercer sur l'ensemble du créneau « bac−3/bac+3 ». Pour cette session, le minimum requis correspond à un score total de 162/400. Il correspond à la barre retenue sur les cinq dernières années. Le nombre de reçus est en légère augmentation qu'on pourrait corréler avec celle du nombre de candidats étudiants. Cette stabilité du concours est encourageante et montre, avec les très bonnes prestations de la tête du concours, le maintien du niveau des formations universitaires. Le tableau suivant donne une indication sur la répartition des notes. On observera aussi que 233 candidats ont une moyenne supérieure ou égale à 10/20.

Rang	Moyenne
1	19,65
1-10	19,65-17,85
10-50	17,85-14,75
50-100	14,7-5-12,85
100-200	12,85–10,5

Réussir le concours de l'agrégation externe requiert un minimum de préparation et cette stabilité repose d'abord sur l'engagement et la qualité des formations universitaires. L'impossibilité de pourvoir les postes témoigne de l'insuffisance préoccupante d'une population étudiante souhaitant s'orienter vers l'enseignement des mathématiques. Cette faiblesse du vivier résulte de la combinaison d'une réduction des effectifs inscrits en L3 de mathématiques, et de la diversification des débouchés des études universitaires en mathématiques, qui dépassent largement le seul emploi académique puisque trois diplômés d'un Master en mathématiques sur quatre travaillent dans le secteur privé (Source : Étude de l'impact socio-économique des mathématiques en France, étude menée en 2015 par CMI).

Dans cette configuration particulière, le concours externe offre une opportunité de promotion pour des professeurs certifiés. Déplorer la faiblesse du vivier de candidats étudiants n'empêche pas le jury d'être particulièrement respectueux des efforts des enseignants en poste dans le secondaire qui se confrontent à ce concours. Ils forment, avec les étudiants, la catégorie la plus importante parmi les inscrits et représentent environ 20% des admissibles, dont un grand nombre lauréat de l'agrégation interne.

Le jury n'a nul doute que l'immense majorité de ces certifiés est certainement constituée d'excellents enseignants de mathématiques, même si les résultats obtenus à ce concours leur semblent parfois ne pas être à la hauteur de leur investissement. Il est clair pour le jury que l'on ne peut pas être admissible et se présenter aux épreuves orales de ce concours sans avoir acquis des compétences techniques qui dépassent largement celles de la pratique professionnelle de l'enseignant certifié. Cependant, le niveau d'exigence technique du concours leur laisse le concours difficile d'accès. Le jury souhaite accueillir chaleureusement ces collègues méritants et, même si les résultats sont en-deçà de leurs espoirs, leur renouvelle tous ses encouragements. Le volume de plus de 1000 enseignants inscrits à un concours aussi exigeant est significatif d'une réelle volonté de progression, qui mériterait d'être soutenue par un nombre accru de congés formation.

Depuis quelques années, le jury annonce à l'avance les leçons qui seront proposées aux candidats lors de la session à venir. Ainsi on trouvera en annexe de ce présent rapport la liste des leçons pour la session 2023. Cette pratique s'inscrit dans la logique d'aider les candidats à bien se préparer et à ne leur tendre aucun piège. Le jury rappelle que tous les couplages sont *a priori* possibles et qu'il veille scrupuleusement à ce que l'apparition des intitulés de leçons soit équiprobable dans l'ensemble des sujets proposés. En modélisation, la conception et la sélection des textes proposés rend tout aussi hasardeuse toute stratégie d'impasse sur une partie du programme des options.

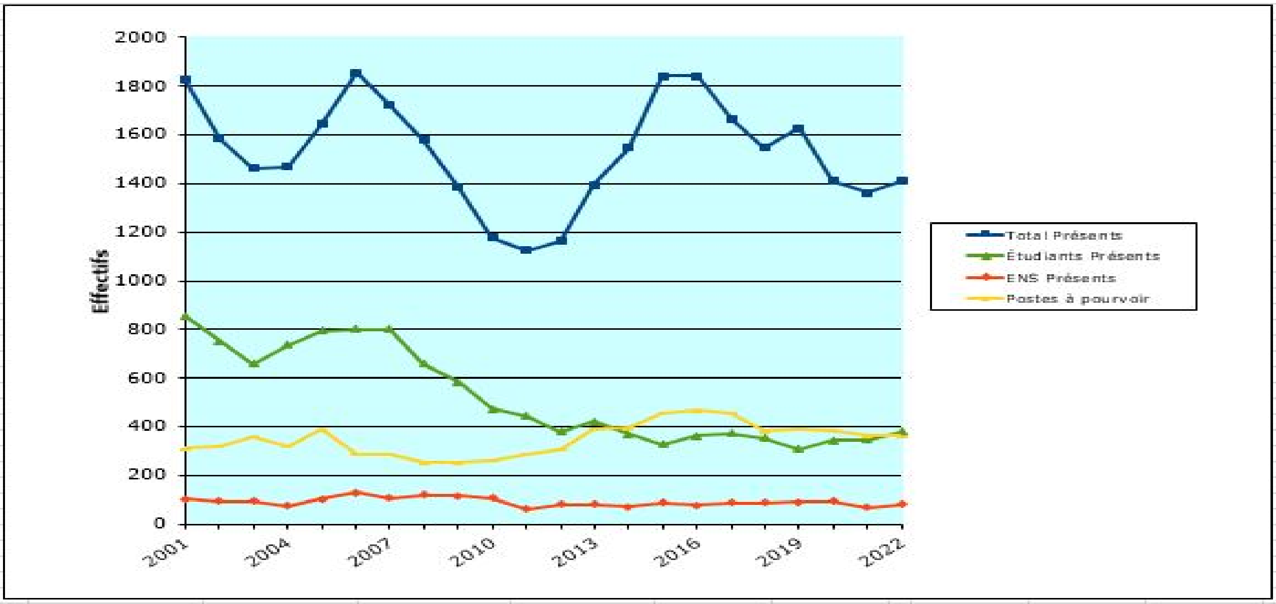
2.2.2 Données statistiques diverses

Les tableaux et graphiques suivants présentent un bilan statistique du concours, selon le statut des candidats, leur diplôme, leur genre, leur origine géographique, leur âge. Ces statistiques portent sur les candidats qui peuvent être admis au concours et n'incluent pas les étudiants marocains et tunisiens.

Effectifs détaillés. On observe un tassement du nombre des inscrits qui passe sous la barre des 3000. De manière plus positive, le nombre de présents à l'écrit reste stable, tout comme le nombre d'étudiants et celui des candidats normaliens. Le jury rappelle son attachement à la justification historique commune aux Écoles Normales Supérieures, et le contrat implicite de leurs élèves qui était, en contrepartie de leur statut et de leur rémunération, de passer l'agrégation (source : Rapport public de la Cour des comptes 2012). Leur participation contribue au rôle structurant du concours sur les formations universitaires en mathématiques et à l'excellence de la discipline au niveau international. Le jury souhaite donc que les responsables d'études des Écoles Normales Supérieures restent conscients de ces enjeux et encouragent les élèves à se préparer et à passer le concours.

Ce tableau résume l'évolution des effectifs :

Année	Inscrits	Présents	Etudiants présents	ENS présents	Postes à pourvoir	Présents par poste
2022	2858	1411	379	82	364	3,9
2021	2823	1363	348	68	383	3,6
2020	2710	1409	344	93	387	3,6
2019	2787	1628	309	92	391	4,2
2018	3285	1545	352	89	381	4,1
2017	3582	1668	374	86	457	3,6
2016	3525	1841	364	78	467	3,9
2015	3252	1841	326	89	457	4
2014	3001	1546	371	72	395	3,9
2013	2673	1393	420	81	391	3,6
2012	2673	1163	379	82	308	3,8
2011	2500	1124	445	62	288	3,9
2010	2332	1177	474	106	263	4,5
2009	2351	1384	585	116	252	5,5
2008	2491	1579	659	119	252	6,3
2007	2801	1722	800	106	290	5,9
2006	2849	1853	800	129	290	6,4
2005	2560	1644	795	105	388	4,2
2004	2333	1470	735	76	321	4,6
2003	2217	1463	657	93	360	4,1
2002	2343	1584	753	95	320	5
2001	2663	1828	857	105	310	5,9



Courbes de l'évolution des effectifs

Professions et Diplômes.

Professions	Inscrits	Présents	Admissibles	Présents oraux	Admis
ADJOINT D'ENSEIGNEMENT	6	2	0		
AG NON TIT FONCT HOSPITAL	1	0	0		
AG NON TITULAIRE FONCT PUBLIQ	4	0	0		
AGENT ADMI.MEMBRE UE(HORS FRA)	1	0	0		
AGREGE	19	6	5	3	2
ARTISANS / COMMERCANTS	4	0	0		
ASSISTANT D'EDUCATION	9	5	1	1	0
CADRES SECT PRIVE CONV COLLECT	97	31	18	11	3
CERTIFIE	1059	401	148	80	6
CONTRACT ENSEIGNANT SUPERIEUR	9	5	2	1	0
CONTRACTUEL 2ND DEGRE	82	22	3	3	1
CONTRACTUEL APPRENTISSAGE(CFA)	1	0	0		
ELEVE D'UNE ENS	95	82	75	72	72
EMPLOI AVENIR PROF.2ND D.PRIVE	1	0	0		
EMPLOI AVENIR PROF.2ND D.PUBLI	2	1	0		
EMPLOI AVENIR PROF.ECOLE PRIVE	2	1	0		
ENS.STAGIAIRE 2E DEG. COL/LYC	112	36	13	9	1
ENSEIG NON TIT ETAB SCOL.ETR	3	0	0		
ENSEIGNANT DU SUPERIEUR	13	3	2	2	1
ETUD.HORS ESPE (PREPA CNED)	18	11	6	4	1
ETUD.HORS ESPE (PREPA MO.UNIV)	401	379	319	298	203
ETUD.HORS ESPE (SANS PREPA)	100	57	44	36	19
ETUDIANT EN ESPE EN 1ERE ANNEE	5	3	2	2	2
ETUDIANT EN ESPE EN 2EME ANNEE	25	9	4	3	0
FONCT STAGIAIRE FONCT PUBLIQUE	8	3	0		
FORMATEURS DANS SECTEUR PRIVE	14	5	3	3	0
INSTITUTEUR	8	1	0		
MAITRE AUXILIAIRE	10	2	0		
MAITRE CONTR.ET AGREE REM TIT	22	12	5	4	0
MAITRE DELEGUE	2	0	0		
MAITRE D'INTERNAT	1	1	1	1	0
MILITAIRE	7	4	4	2	1
PEPS	2	0	0		
PERS ADM ET TECH MEN	2	1	0		
PERS ENSEIG NON TIT FONCT PUB	6	2	1	1	0
PERS ENSEIG TIT FONCT PUBLIQUE	56	13	4	3	0
PERS FONCT TERRITORIALE	1	0	0	0	0
PERS FONCTION PUBLIQUE	11	3	1		
PERSONNEL DE DIRECTION	1	0	0		
PERSONNEL D'INSPECTION	1	0	0		
PLP	42	18	3	1	0
PROF DES ECOLES STAGIAIRE	4	0	0	0	0
PROFESSEUR ASSOCIE 2ND DEGRE	28	4	0		
PROFESSEUR ECOLES	60	11	1		
PROFESSIONS LIBERALES	29	6	5	2	1
SALARIES SECTEUR INDUSTRIEL	17	4	1	1	0
SALARIES SECTEUR TERTIAIRE	27	8	3	2	0
SANS EMPLOI	277	84	45	39	25
VACATAIRE APPRENTISSAGE (CFA)	2	0	0		
VACATAIRE DU 2ND DEGRE	4	1	0		
VACATAIRE ENSEIGNANT DU SUP.	9	0	0		

Résultat du concours par catégories professionnelles[2]

2. Les catégories professionnelles et les catégories par diplômes listées correspondent aux déclarations des candidats

Outre la présence notable d'enseignants certifiés, déjà évoquée, on remarque l'attractivité du concours auprès de titulaires d'un diplôme d'ingénieur ou issus d'une grande école. Cette donnée confirme les observations du concours docteurs, et un phénomène qui s'inscrit tant dans le cadre de projets de reconversion professionelle, que d'une orientation en fin de formation.

Diplômes	Inscrits	Présents	admissibles	admis
DOCTORAT	153	54	21	3
DIP POSTSECONDAIRE 5 ANS OU +	80	32	9	0
MASTER	1554	821	526	300
GRADE MASTER	63	23	6	0
ENSEIGNANT TITUL-ANCIEN TITUL CAT A	355	142	55	3
CPE TITULAIRE - ANCIEN TITULAIRE	2	1	0	0
DIPLOME D'INGENIEUR (BAC+5)	351	136	71	28
DIPLOME GRANDE ECOLE (BAC+5)	95	38	19	3
DISP.TITRE 3 ENFANTS	58	24	10	1
ADMIS ECH.REM PROFESSEUR ECOLE	6	2	2	0
AUTRE DIPLOME	3	0	0	0

Répartition selon le genre. Les enjeux de parité font partie des préoccupations du jury, qui comprend 42% de femmes, au delà des taux observés dans les différents corps dont sont issus les membres du jury. La correction des épreuves écrites se fait de manière totalement dématérialisée et le jury ne dispose d'absolument aucune information sur les candidats : il n'a accès au moment de l'admissibilité qu'aux copies repérées par un numéro. Il est donc difficile d'imaginer quelle mesure pourrait permettre d'identifier et corriger un éventuel biais, pour autant qu'il y en ait un dans cette étape du concours. À l'oral, des processus de veille sont mis en place et le jury est en permanence vigilant sur ses pratiques afin de ne pas introduire de biais dans l'évaluation.

Néanmoins, la répartition hommes/femmes reste déséquilibrée. À chaque étape du concours, la proportion de femmes décroît : 28% des inscrits, 27% des présents, les femmes ne représentent plus que 22% des admissibles et 21% des candidats ayant dépassé la barre d'admission. Cette année, on trouve une femme parmi les 10 premiers, mais seulement 3 parmi les 50 premiers.

	Inscrits	Présents	admissibles	Présents Oral	Admis
Hommes	2062	1037	556	450	265
Femmes	796	374	163	134	73
% femmes	27.85%	26.51%	22.67%	22.95%	21.60%

Répartition selon le genre

lors de l'inscription : elles ne font l'objet d'aucune vérification et doivent être considérées avec prudence.

Répartition selon l'âge. Le tableau de répartition des candidats suivant l'âge indique que l'essentiel des admis agrégation externe se regroupe dans la tranche 21-25 ans.

Age	Inscrits	Présents	admissibles	Présents Oral	Admis
21	6	6	5	5	5
22	59	51	49	46	42
23	223	204	170	159	118
24	209	156	125	119	76
25	150	93	57	52	28
26	132	67	39	31	16
27	120	54	32	26	12
28	107	29	15	12	6
29	93	31	12	5	3
30	85	27	8	4	1
31	89	29	8	7	4
32	68	27	12	6	1
33	75	22	11	10	6
34	59	18	4	3	2
35	51	15	7	4	0
36	79	24	5	5	1
37	58	20	9	7	2
38	45	17	6	1	1
39	51	17	7	4	0
40	59	23	11	8	2
41	54	11	3	1	0
42	53	17	8	5	1
43	73	17	7	5	2
44	61	22	11	5	1
45	51	18	7	3	1
46	56	29	14	7	1
47	45	14	5	4	1
48	60	22	8	5	1
49	74	26	8	7	0
50	48	21	9	2	0
51	44	19	8	5	1
52	41	18	7	5	0
53	42	21	4	2	0
54	28	12	5	1	1
55	37	17	4	2	0
56	21	7	1	0	0
57	20	10	4	3	1
58	22	9	4	1	0
59	17	6	1	1	0
60	17	8	3	2	0
61	7	4	2	1	0
62	8	3	2	2	0
63	6	3	1	1	1
64	8	6	0	0	0
65	6	3	1	0	0
66	2	0	0	0	0
67	1	0	0	0	0

FIGURE 2.3 – *Tableau de répartition des candidats en fonction de l'âge*

Répartition selon l'académie. Le tableau de répartition des candidats par académie montre une forte concentration sur les centres Paris-Créteil-Versailles, Rennes et Lyon. Hormis ces académies, sièges d'Écoles Normales Supérieures, on relèvera le très bon taux de réussite (admis/admissibles) de l'académie de Besançon, ainsi que des académies de Grenoble, Nancy-Metz, Poitiers et Toulouse.

Académies	Inscrits	Présents	admissibles	Présents Oral	Admis
AIX-MARSEILLE	110	55	18	14	5
AMIENS	52	28	11	10	2
BESANCON	30	16	11	11	7
BORDEAUX	71	39	26	22	8
CAEN	34	24	14	12	6
CLERMONT-FERRAND	35	15	8	5	1
CORSE	6	0	0	0	0
CRETEIL-PARIS-VERSAIL.	741	332	204	168	110
DIJON	29	14	11	10	4
GRENOBLE	90	52	41	35	23
GUADELOUPE	17	6	1	0	0
GUYANE	10	2	0	0	0
LA REUNION	52	30	9	4	1
LILLE	109	46	20	14	7
LIMOGES	14	5	1	0	0
LYON	134	82	63	57	43
MARTINIQUE	23	7	4	2	0
MAYOTTE	16	7	0	0	0
MONTPELLIER	82	40	23	14	7
NANCY-METZ	87	55	32	27	16
NANTES	106	59	31	25	9
NICE	179	95	21	14	7
NOUVELLE CALEDONIE	12	5	2	0	0
ORLEANS-TOURS	48	23	12	11	5
POITIERS	393	143	7	6	4
POLYNESIE FRANCAISE	8	5	3	1	0
REIMS	36	27	15	11	3
RENNES	109	71	54	49	38
ROUEN	51	34	13	9	1
STRASBOURG	76	47	31	25	13
TOULOUSE	98	47	33	28	18

FIGURE 2.4 – *Tableau de répartition par académie*

Les sociétés savantes collectent des informations sur les volumes horaires consacrés aux préparations selon les universités ; ces données révèlent de très grandes disparités (en rapport avec le nombre d'étudiants et le nombre d'options préparées), avec un nombre d'heures annuelles consacrées à la préparation au concours qui varie de 300 à plus de 1200 ! À ces différences de volume horaire s'ajoute la faiblesse des effectifs présents dans certaines préparations, alors que l'émulation et le travail en groupe jouent souvent un rôle important dans le succès des formations. À cet égard, l'incorporation dans les préparations de candidats du concours spécial réservé aux docteurs, qui ont en général une plus grande maturité scientifique, pourrait être un stimulant efficace.

Les préparations doivent étudier l'évolution sur plusieurs années de leur taux de réussite au concours, certains résultats pouvant être purement conjoncturels. La mise au point d'un programme de préparation est un processus dynamique, exigeant, qui se fait en lien étroit avec l'élaboration des maquettes des formations et qui réclame de suivre les évolutions du concours. Le jury rappelle aussi aux candidats comme aux préparateurs que les épreuves orales sont publiques et que venir assister à des interrogations permet certainement de mieux appréhender les attendus et les difficultés des épreuves.

Chapitre 3

Épreuve écrite de mathématiques générales

3.1 Énoncé

Le sujet est disponible à l'URL https://www.devenirenseignant.gouv.fr/cid159832/sujets-rapports-des-jurys-agregation-2022.html ou sur le site https://agreg.org.

3.2 Rapport sur l'épreuve écrite de mathématiques générales

Présentation du sujet

Le but du problème est de classifier les représentations irréductibles complexes du groupe d'Heisenberg $\mathcal{H}(\mathbf{F}_q)$ en trois variables sur un corps fini $\mathbf{F}_q$, puis de déterminer parmi les représentations irréductibles de $\mathcal{H}(\mathbf{F}_{q^2})$ celles qui admettent une droite fixe sous $\mathcal{H}(\mathbf{F}_q)$. Auparavant on démontre qui si G est un groupe d'ordre impair et H un sous-groupe fixé par une involution de G, alors V^H est de dimension au plus 1 pour tout représentation irréductible V de G. Pour cela on utilise un célèbre argument très général dû à Gelfand, la multiplicité un découlant de la commutativité de l'algèbre de convolution $\mathbf{C}[H\backslash G/H]$. Le groupe d'Heisenberg réel $\mathcal{H}_3(\mathbf{R})$ et ses représentations complexes unitaires sur un espace de Hilbert ont pour origine la mécanique quantique. Le théorème de Stone-von Neumann [5], [6] affirme que si une telle représentation n'est pas de dimenstion un, elle est alors déterminée à équivalence unitaire près par son caractère central. Pour un caractère central fixé, la représentation irréductible de dimension infinie correspondante est en fait l'induite d'une extension de ce caractère central à un sous-groupe lagrangien de $\mathcal{H}(\mathbf{R})$, au groupe $\mathcal{H}(\mathbf{R})$ entier. Ce type de représentation est intimement liée à la transformation de Fourier sur $L^2(\mathbf{R})$. Plus tard Kirillov [2] a paramétré les représentations irréductibles des groupes de Lie réels unipotents en termes de "polarisations", généralisant ainsi largement le théorème de Stone-von Neumann, et Yves Benoist [1], [3] a déterminé celles d'entre elles, dites distinguées, qui admettent un "vecteur généralisé" fixe sous l'action d'un sous-groupe de $\mathcal{H}(\mathbf{R})$ fixé par une involution. Le cas des groupes unipotents p-adique a été traité dans [4]. Dans les deux cas la multiplicité des vecteurs généralisés invariants est au plus un, et l'argument de la preuve est celui de Gelfand, alors que la classification des représentations distinguées découle d'un théorème de point fixe. Dans le cas du groupe de Heisenberg fini de $\mathcal{H}(\mathbf{F}_q^2)$ on retrouve dans le problème la multiplicité au plus un sous $\mathcal{H}(\mathbf{F}_q)$ à la main (ce qui couvre ainsi le cas où q est une puissance de 2). Les méthodes de comptage habituelles et un peu de transformée de Fourier discrète règlent de manière assez élémentaire la version finie du théorème de Stone-von Neuman, une fois qu'on a construit suffisamment de représentations irréductibles. La condition de distinction se lit alors facilement sur le caractère central.

Bibliographie

[1] Y. Benoist : *Analyse harmonique sur les espaces symétriques nilpotents.* J. Funct. Anal., 1984, vol 59, 211-253

[2] A. Kirillov, *Unitary representations of nilpotent Lie groups*, Russian Math. Surveys, 1962, vol 17(4)

[3] Y. Benoist : *Multiplicité un pour les espaces symétriques exponentiels*, Mémoires de la S.M.F., 1984, tome 15, 1-37

[4] N. Matringe : *Distinction for unipotent p-adic groups*, Bull. Iranian Math. Soc., 2020, vol 46(6)

[5] M.H. Stone : *Linear transformations in Hilbert space III, operational methods and group theory*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1930 National Academy of Sciences, vol 16(2)

[6] J. Von Neumann : *Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren*, Math. Ann., 1931, vol 104(1)

Commentaires sur les copies

— L'exercice 1 a été abordé par la quasi-totalité des copies. Dans les premières questions notamment, des conditions nécessaires et suffisantes claires ont rarement été établies : par exemple, les copies se contentent souvent de démontrer que si M appartient à $R(I_n)$, alors M est diagonalisable et ses valeurs propres sont dans $\{-1, 1\}$, négligeant d'au moins évoquer la réciproque. Dans le même ordre d'idée, le jury attire l'attention sur la distinction entre majoration et égalité pour déterminer un cardinal (dans les questions 3 et 4 notamment) : l'ensemble $\{x_1, \ldots, x_n\}$ n'est de cardinal n que si $x_1, \ldots, x_n$ sont deux à deux distincts. Par ailleurs, le point de vue géométrique n'est que rarement adopté, notamment pour démontrer la similitude de deux matrices.

— L'exercice 2 a également été abordé par la quasi-totalité des copies. La commutativité est très souvent oubliée pour justifier l'application d' identités de factorisation de $A^k - B^k$ ou l'égalité $(AB)^k = A^k B^k$, où A et B sont des matrices carrées de même taille et k un entier naturel. Par ailleurs, il convient de faire attention à la nature des objets considérés : l'application ϕ n'est pas un morphisme et la démonstration de son injectivité ne peut donc pas faire intervenir un noyau. Cette erreur a également été souvent retrouvée dans la question 12 du problème. Dans le même ordre d'idée, un argument de dimension finie pour affirmer qu'une application injective est bijective ne peut s'appliquer que si l'application considérée est linéaire.

— L'exercice 3 a été abordé par plus de deux tiers des copies. Tout d'abord, le jury a constaté des erreurs de lecture de l'énoncé : il n'était pas demandé ici de démontrer que ϕ_p est un morphisme. Par ailleurs, il est souhaitable de rédiger correctement les raisonnements par récurrence et notamment de faire apparaître clairement un prédicat. Ce conseil s'applique d'autant plus quand le prédicat dépend d'un second paramètre, comme c'était le cas dans la question 3 lorsque l'on utilisait la définition de ϕ_p^k proposée par l'énoncé. Enfin, la connaissance de la définition d'un sous-corps est un attendu du programme.

— Enfin, l'exercice 4 a été abordé par plus de la moitié des copies. Ici encore, la commutativité a été souvent oubliée pour justifier l'application de la formule du binôme de Newton.

— Concernant le problème, la première partie a été abordée par environ trois quarts des copies, a deuxième partie a été abordée par un tiers des copies, la troisième par environ un cinquième des copies. Enfin, la quatrième partie a été très peu abordée et les deux dernières parties n'ont quasiment pas été abordées.
Le jury constate des difficultés en dénombrement dans la question 2.c) notamment et souhaite attirer l'attention sur une subtilité : pour répondre à la question « quels sont les ordres des éléments de $\mathcal{H}_3(\mathbf{F})$? », il s'agit de montrer que l'ordre d'un élément de $\mathcal{H}_3(\mathbf{F})$ ne peut être que $1, 2$ ou 4 et réciproquement que $1, 2$ et 4 sont chacun l'ordre au moins un élément de $\mathcal{H}_3(\mathbf{F})$. La

deuxième partie a souvent été oubliée. Dans le même ordre d'idée, la question 6 de l'exercice 3 « Démontrer que $\mathbf{L}$ est le seul sous-corps de $\mathbf{K}$ de cardinal q » demandait de démontrer que $\mathbf{L}$ était un sous-corps de $\mathbf{K}$ de cardinal q et que c'était le seul. C'est ici la première partie qui a généralement été omise.
On prendra garde à ne pas affirmer de propriétés sans précaution : par exemple, la restriction d'une injection reste une injection, mais cela n'est pas le cas d'une bijection.
Enfin, il convenait dans ce problème d'être particulièrement vigilant aux notations (additives ou multiplicatives) utilisées pour la loi des groupes étudiés. La notation additive est généralement réservée aux groupes abéliens.

3.3 Corrigé de l'épreuve écrite de mathématiques générales

Exercice 1

1. Soit P dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que $B = PAP^{-1}$. M est racine de A si, et seulement si,PMP^{-1} est racine de B. Donc l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est une bijection de $R(A)$ dans $R(B)$, de bijection réciproque $M \mapsto P^{-1}MP$.
2. Soit M une racine carrée de αI_n. Alors pour tout P dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$,
$$(PMP^{-1})^2 = PM^2P^{-1} = P(\alpha I_n)P^{-1} = \alpha I_n.$$
Donc si M est dans $R(\alpha I_n)$, toute sa classe de similitude est incluse dans $R(\alpha I_n)$. On a donc démontré que la réunion des classes de similitude des éléments de $R(\alpha I_n)$ est incluse dans $R(\alpha I_n)$, c'est-à-dire, en notant, pour une matrice M dans $R(\alpha I_n)$, $\overline{M}$ sa classe de similitude :
$$\bigcup_{M\in R(\alpha I_n)} \overline{M} \subset R(\alpha I_n),$$
l'inclusion réciproque étant immédiate, puisque chaque élément de $R(\alpha I_n)$ est dans sa classe de similitude. Finalement, $R(\alpha I_n)$ est la réunion des classes de similitude de ses éléments.
3. Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. M est racine de I_n si, et seulement si,M est une symétrie, c'est-à-dire si, et seulement si,M est semblable à la matrice diagonale $\mathrm{diag}(I_r, -I_{n-r})$, où :
$$r = \dim \mathrm{Ker}(M - I_n).$$
Puisque l'entier $\dim \mathrm{Ker}(M-I_n)$ est un invariant de similitude, les $n+1$ matrices $\mathrm{diag}(I_r, -I_{n-r})$ sont les représentantes de classes de similitude deux à deux distinctes, et l'équivalence précédemment établie permet d'affirmer que $R(I_n)$ est la réunion d'exactement $n+1$ classes de similitudes.
4. Remarquons que toutes les matrices de $R(0)$ sont nilpotentes. Mieux, une matrice nilpotente M est dans $R(0)$ si, et seulement si,tous ses blocs de Jordan sont de taille 1 ou 2.
Or une matrice nilpotente admet un nombre de blocs de taille 2 compris entre 0 et $\lfloor n/2 \rfloor$. Notons, pour tout entier k compris entre 0 et $\lfloor n/2 \rfloor$, N_k l'unique matrice diagonale par blocs de Jordan ayant k blocs de taille 2 et $n-2k$ de blocs de taille 1. L'unicité de la décomposition de Jordan (on peut également considérer le rang de ces matrices) permet d'affirmer que ces matrices sont deux à deux non semblables, et on a établi que la réunion de leurs classes de similitude forme $R(0)$. Finalement, $R(0)$ est la réunion d'exactement $1 + \lfloor n/2 \rfloor$ classes de similitudes.
5. (a) Soit M une racine carrée de A.
Remarquons que A et M commutent car $AM = M^3 = MA$.
Notons $D = PAP^{-1}$, $\Delta = PMP^{-1}$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{C}^n$. D et Δ commutent car A et M commutent. En notant $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de D

(ce sont les valeurs propres de A) associées à $e_1, \dots, e_n$, on a pour tout entier k compris entre 1 et n : $D\Delta(e_k) = \Delta D(e_k) = \lambda_k \Delta(e_k)$.
Donc $\Delta(e_k) \in \mathrm{Ker}(D - \lambda_k I_n) = \mathbf{C}.e_k$, la dernière égalité étant obtenue car les espaces propres de D sont de dimension 1 (ils sont isomorphes à ceux de A). Ainsi, on a bien démontré que Δ est diagonale.

(b) En reprenant les notations de la question précédente, on a $M^2 = A$ si, et seulement si,$\Delta^2 = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$, c'est-à-dire si, et seulement si,pour tout entier k compris entre 1 et n, le k-ème coefficient diagonal de Δ est une racine carrée du complexe λ_k. Ainsi, puisque tout nombre complexe non nul admet exactement deux racines carrées :
— Si A est inversible, A admet 2^n racines carrées.
— Sinon, puisque les valeurs propres de A sont deux à deux distinctes, toutes ses valeurs propres sauf exactement une sont non nulles : A admet donc 2^{n-1} racines carrées.

(c) Il suffit de prendre A nulle et $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. A est diagonalisable, $M^2 = A$ et M n'est pas diagonalisable car nilpotente et non nulle.

6. Soit M une racine carrée de $-I_n$ à coefficients réels. On a $\det(-I_n) = (-1)^n = (\det M)^2$. Donc si $-I_n$ admet une racine carrée à coefficients réels, n est pair.
Réciproquement, si n est pair, la matrice $M = \mathrm{diag}(B, \dots, B)$ où $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est une racine carrée de $-I_n$.
Finalement, $-I_n$ admet des racines carrées dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ si, et seulement si, n est pair.

7. Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à J_{2n} et $(e_1, \dots, e_{2n})$ la base canonique de $\mathbf{C}^{2n}$. On a $u^2(e_1) = u^2(e_2) = 0$ et pour tout entier $k \in \{3, \dots, 2n\}$, $u^2(e_k) = e_{k-2}$. Ainsi, dans la base $(e_1, e_3, \dots, e_{2n-1}, e_2, e_4, \dots, e_{2n})$, u^2 a pour matrice $\begin{pmatrix} J_n & 0 \\ 0 & J_n \end{pmatrix}$, ce qui prouve bien que J_{2n}^2 est semblable à $\begin{pmatrix} J_n & 0 \\ 0 & J_n \end{pmatrix}$. De même, en passant de la base canonique $(e_1, \dots, e_{2n+1})$ de $\mathbf{C}^{2n+1}$ à la base $(e_2, e_4, \dots, e_{2n}, e_1, e_3, \dots, e_{2n+1})$, on obtient bien que J_{2n+1}^2 est semblable à $\begin{pmatrix} J_n & 0 \\ 0 & J_{n+1} \end{pmatrix}$.

8. (a) D'après le calcul de la question précédente, la matrice $\mathrm{diag}(J_7, J_8)^2$ est semblable à la matrice $\mathrm{diag}(J_3, J_4, J_4, J_4)$, donc semblable à A. Ainsi, en notant $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que $A = P\mathrm{diag}(J_7, J_8)^2 P^{-1}$, $P\mathrm{diag}(J_7, J_8)P^{-1}$ est une racine carrée de A.

(b) Soit M une racine carrée de A. M est nécessairement nilpotente, et chaque bloc de Jordan de M donne, dans A, soit un bloc de taille 1, soit un couple de blocs dont les tailles forment un couple (p, p) ou $(p, p+1)$, où p est un entier naturel non nul. Il est impossible d'obtenir ainsi la suite $3, 4, 4, 6$. Ainsi, A n'admet pas de racine carrée.

(c) La matrice $\mathrm{diag}(J_1, J_1, J_1, J_6)^2$ est semblable à $\mathrm{diag}(J_1, J_1, J_1, J_3, J_3)$ donc à A. Comme précédemment, A admet donc une racine carrée.

(d) Comme on l'a vu à l'occasion des exemples précédents, A admet une racine carrée si, et seulement si,la suite des tailles de ses blocs de Jordan est constituée de 1, puis de couples (p, p) ou $(p, p+1)$, où p est un entier naturel non nul. Donc il suffit de parcourir la liste $n_1, \dots, n_r$ en partant de la fin. Tant que la liste des éléments à parcourir est de taille au moins 2, on regarde si ses deux derniers éléments sont de la forme (p, p) ou $(p, p+1)$ (où p est un entier naturel non nul). Si oui, on passe aux deux suivants et sinon on sait déjà que A n'admet pas de racine carrée. Lorsqu'il ne reste qu'au plus un élément à parcourir, A admet une racine carrée si, et seulement si,ce dernier est un 1.

Exercice 2

1. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{C}^n$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à J_n. On a $u(e_1) = 0$ et pour tout i dans $\{2, \dots, n\}$, $u(e_i) = e_{i-1}$. Ainsi, on montre par récurrence simple sur l'entier naturel k que pour tout i dans $\{1, \dots, n\}$, $u^k(e_i) = e_{i-k}$ si $k \leqslant i-1$ et $u^k(e_i) = 0$ sinon. Ainsi, $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$. Puisque pour tout entier naturel k, u^k est l'endomorphisme canoniquement associé à J_n^k, on a démontré que $J_n^n = 0$ et $J_n^{n-1} \neq 0$. Finalement, J_n est nilpotente d'indice $d(J_n) = n$. Ainsi, X^n est un polynôme annulateur de J_n, donc le polynôme minimal μ_{J_n} de J_n divise X^n. Puisque $J_n^{n-1} \neq 0$, $1, X, \dots, X^{n-1}$ ne sont pas annulateurs de J_n, $\mu_{J_n} = X^n$. Le polynôme caractéristique χ_{J_n} de J_n est donc un multiple de X^n, et il est unitaire et de degré n, donc $\chi_{J_n} = \mu_{J_n} = X^n$.
2. Un calcul par blocs donne que pour tout entier naturel k,
$$\operatorname{diag}(J_{n_1}, \dots, J_{n_r})^k = \operatorname{diag}(J_{n_1}^k, \dots, J_{n_r}^k).$$
D'après la question précédente, pour tout i dans $\{1, \dots, r\}$, $n_r \geqslant d(J_{n_i})$ donc $J_{n_i}^{n_r} = 0$, et $J_{n_r}^{n_r-1} \neq 0$. Finalement, $\operatorname{diag}(J_{n_1}, \dots, J_{n_r})$ est bien nilpotente d'indice n_r
3. (a) Par définition de $d(N)$, $N^{d(N)} = 0$. Ainsi, $X^{d(N)}$ est un polynôme annulateur de N, donc μ_N divise $X^{d(N)}$. Ainsi, il existe k dans $\{1, \dots, d(N)\}$ tel que $\mu_N = X^k$. Or, toujours par définition de $d(N)$, pour tout k dans $\{1, \dots, d(N)-1\}$, X^k n'est pas un polynôme annulateur de N. Donc μ_N est bien égal à $X^{d(N)}$

   (b) Puisque, pour tout entier $k \geqslant d(N)$, $N^k = 0$, tout polynôme en N est combinaison linéaire de $I_n, N, \dots, N^{d(N)-1}$ et ces derniers sont bien des éléments de $\mathbf{F}[N]$. Donc $\mathbf{F}[N]$ est engendré par la famille $(1, N, \dots, N^{d(N)-1})$. Prouvons que cette famille est libre, on en déduira que c'est une base de $\mathbf{F}[N]$, qui sera aussitôt de dimension $d(N)$. Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_{d(N)-1}$ des scalaires tels que :
$$\lambda_0 I_n + \lambda_1 N + \cdots + \lambda_{d(N)-1} N^{d(N)-1} = 0.$$
Le polynôme $P = \lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_{d(N)-1} X^{d(N)-1}$ est annulateur de N donc divisible par $\mu_N = X^{d(N)}$, ce qui n'est possible que si pour tout k dans $\{0, \dots, d(N)-1\}$, $\lambda_k = 0$. Finalement, la famille $(I_n, N, \dots, N^{d(N)-1})$ est bien libre, ce qui entraîne, comme annoncé ci-dessus, que $\mathbf{F}[N]$ est de dimension $d(N)$.
4. Puisque I_n et N commutent, on a :
$$I_n = I_n^{d(N)} - (-N)^{d(N)} = (I_n + N) \sum_{k=0}^{d(N)-1} (-1)^k N^k = \left(\sum_{k=0}^{d(N)-1} (-1)^k N^k \right) (I_n + N).$$
Ainsi, $I_n + N$ est inversible d'inverse $\displaystyle\sum_{k=0}^{d(N)-1} (-1)^k N^k$.

On suppose jusqu'à la fin de cette partie que $\operatorname{car}(\mathbf{F}) \neq 2$.

5. (a) Puisque N et $2I_n + N$ commutent, on a :
$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad (2N + N^2)^k = N^k (2I_n + N)^k = 2^k N^k \left(I_n + 2^{-1} N\right)^k,$$
où $I_n + 2^{-1}N$ est bien définie car $\operatorname{car}(\mathbf{F}) \neq 2$ et inversible d'après la question 4 car $2^{-1}N$ est nilpotente. Donc, pour tout entier naturel k, $(2N + N^2)^k = 0$ si, et seulement si,$N^k = 0$. On a donc bien démontré que $2N + N^2$ est nilpotente et que son indice de nilpotence est égal à $d(N)$.

(b) Il est clair que $\mathbf{F}[2N+N^2] \subset \mathbf{F}[N]$. Or, d'après les questions précédentes, $\mathbf{F}[N]$ et $\mathbf{F}[2N+N^2]$ sont des espaces vectoriels de même dimension $d(2N+N^2) = d(N)$. Finalement, on a bien l'égalité $\mathbf{F}[2N+N^2] = \mathbf{F}[N]$.
En particulier, puisque $N \in \mathbf{F}[N]$, $N \in \mathbf{F}[2N+N^2]$: N est donc un polynôme en $2N+N^2$.

6. (a) ϕ est bien définie puisque pour tout N dans $\mathcal{N}_n(\mathbf{F})$, $2N+N^2$ est dans $\mathcal{N}_n(\mathbf{F})$.
Par ailleurs, soient N et M dans $\mathcal{N}_n(\mathbf{F})$ telles que $\phi(N) = \phi(M)$, c'est à dire $2N+N^2 = 2M+M^2$. D'après la question précédente, N est un polynôme en $2N+N^2$ donc en $2M+M^2$, donc en M. En particulier, N commute avec M. Ceci permet d'écrire :

$$0 = 2N+N^2-2M+M^2 = 2(N-M)+(N+M)(N-M) = (2I_n+N+M)(N-M).$$

Or $N+M$ est nilpotente car N et M commutent, donc d'après la question 4 et parce que $\mathrm{car}(\mathbf{F}) \neq 2$, la matrice $2I_n+N+M$ est inversible, donc $N-M$ est la matrice nulle. Finalement, on a démontré que pour toutes matrices N et M dans $\mathcal{N}_n(\mathbf{F})$ ayant la même image par ϕ, N et M sont égales : ainsi, ϕ est bien une injection de $\mathcal{N}_n(\mathbf{F})$ dans lui-même.

(b) D'après la question 5, $2N+N^2$ est nilpotente d'indice n. D'après les rappels, il existe un unique entier $r \geqslant 1$ et une unique suite d'entiers $n_1,\dots,n_r$ vérifiant $1 \leqslant n_1 \leqslant \cdots \leqslant n_r$ et $n_1+\cdots+n_r = n$ telle que :

$$2N+N^2 \sim \mathrm{diag}(J_{n_1},\dots,J_{n_r}).$$

Or deux matrices semblables ont le même indice de nilpotence et celui de la matrice $d(\mathrm{diag}(J_{n_1},\dots,J_{n_r}))$ est n_r. Donc $n_r = n$. Ainsi, on a nécessairement $r=1$ et $2N+N^2 \sim J_n$.

(c) Soit N dans $\mathcal{N}_n(\mathbf{F})$. D'après les rappels, il existe un unique entier $r \geqslant 1$ et une unique suite d'entiers $n_1,\dots,n_r$ vérifiant $1 \leqslant n_1 \leqslant \cdots \leqslant n_r$ et $n_1+\cdots+n_r = n$, et une matrice P dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F})$ tels que :

$$N = P\mathrm{diag}(J_{n_1},\dots,J_{n_r})P^{-1}.$$

Soit i dans $\{1,\dots,r\}$. J_{n_i} est dans $\mathcal{N}_{n_i}(\mathbf{F})$ d'indice n_i, donc d'après la question précédente, $2J_{n_i}+J_{n_i}^2$ est semblable à J_{n_i}. Ainsi, il existe P_i dans $\mathrm{GL}_{n_i}(\mathbf{F})$ telle que

$$J_{n_i} = P_i(2J_{n_i}+J_{n_i}^2)P_i^{-1} = 2P_iJ_{n_i}P_i^{-1} + (P_iJ_{n_i}P_i^{-1})^2.$$

Notons $M = \mathrm{diag}(P_1J_{n_1}P_1^{-1},\dots,P_rJ_{n_r}P_r^{-1})$. Remarquons que $M \in \mathcal{N}_n(\mathbf{F})$ et qu'un calcul par blocs donne $2M+M^2 = \mathrm{diag}(J_{n_1},\dots,J_{n_r})$. PMP^{-1} est bien dans $\mathcal{N}_n(\mathbf{F})$ et :

$$\begin{aligned}
\phi(PMP^{-1}) &= 2PMP^{-1} + (PMP^{-1})^2 \\
&= 2PMP^{-1} + PM^2P^{-1} \\
&= P(2M+M^2)P^{-1} \\
&= P\mathrm{diag}(J_{n_1},\dots,J_{n_r})P^{-1} \\
&= N.
\end{aligned}$$

Ainsi, tout élément N de $\mathcal{N}_n(\mathbf{F})$ admet un antécédent par ϕ.
Finalement, ϕ est surjective et on a démontré précédemment qu'elle est injective : ϕ est bien une bijection de $\mathcal{N}_n(\mathbf{F})$ dans lui-même.

7. Notons ψ l'application qui à tout élément de $\mathcal{U}_n(\mathbf{F})$ associe son carré. Pour tout N dans $\mathcal{N}_n(\mathbf{F})$, $\psi(I_n+N) = I_n+2N+N^2 = I_n+\phi(N) \in \mathcal{U}_n(\mathbf{F})$. Ainsi, ψ est bien une application de $\mathcal{U}_n(\mathbf{F})$ dans lui-même. De plus, en notant t l'application bijective de $\mathcal{N}_n(\mathbf{F})$ dans $\mathcal{U}_n(\mathbf{F})$ qui à N associe à I_n+N, on a l'égalité $\psi = t\circ\phi\circ t^{-1}$ donc ψ est une bijection de $\mathcal{U}_n(\mathbf{F})$ dans lui-même car ϕ en est une de $\mathcal{N}_n(\mathbf{F})$ dans lui-même.

8. (a) Soit Q dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des complexes tels que $M = Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} Q^{-1}$.

Pour tout i dans $\{1, \ldots, n\}$, λ_i admet une racine carré μ_i dans $\mathbf{C}^\star$.

Notons $P = Q \begin{pmatrix} \mu_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \mu_n \end{pmatrix} Q^{-1}$. P est bien dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ et $P^2 = M$, ce qui achève la preuve.

(b) Notons ψ l'application de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ dans lui-même qui à une matrice P associe son carré. Remarquons que ψ n'est pas injective, puisque I_n admet au moins deux antécédents I_n et $-I_n$.

Soit P dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ et u l'automorphisme de $\mathbf{C}^n$ qui lui est canoniquement associé. D'après la décomposition de Dunford, u est la somme de deux endomorphismes d et m, diagonalisable et nilpotent respectivement, qui commutent.

Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distinctes de d, où r est un entier dans $\{1, \ldots, n\}$. Puisque d et m commutent, m laisse stable $E_i = \mathrm{Ker}(d - \lambda_i \mathrm{Id}_{\mathbf{C}^n})$ pour tout i dans $\{1, \ldots, r\}$ et m induit donc un endomorphisme nilpotent de E_i. Ainsi, dans une base de vecteurs propres de d obtenue par concaténation de bases des E_i, la matrice de u est diagonale par blocs de la forme $\lambda_i I_{n_i} + N_i$, où i est dans $\{1, \ldots, r\}$, n_i est la dimension de E_i et N_i est dans $\mathcal{N}_{n_i}(\mathbf{C})$. Il existe donc une matrice Q dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que $P = Q\mathrm{diag}(\lambda_1 I_{n_1} + N_1, \ldots, \lambda_r I_{n_r} + N_r)Q^{-1}$. Ainsi, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont également les valeurs propres de u et sont en particulier non nulles. D'après la question 7, il existe, pour tout entier i dans $\{1, \ldots, r\}$, une matrice M_i dans $\mathcal{M}_{n_i}(\mathbf{C})$ telle que $M_i^2 = I_{n_i} + \frac{1}{\lambda_i} N_i$. En notant, pour tout i dans $\{1, \ldots, r\}$, μ_i une racine carrée de λ_i, on a alors

$$(\mu_i M_i)^2 = \mu_i^2 M_i^2 = \lambda_i \left(I_{n_i} + \frac{1}{\lambda_i} N_i \right) = \lambda_i I_{n_i} + N_i,$$

et donc la matrice $Q\mathrm{diag}(\mu_1 M_1, \ldots, \mu_r M_r)Q^{-1}$ est un antécédent de P par ψ. Finalement, $P \mapsto P^2$ est bien une surjection de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ dans lui-même.

9. Pour tout P dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, $\det(P^2) = \det(P)^2 > 0$. Donc la matrice $\begin{pmatrix} -1 & & & (0) \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}$ n'admet pas d'antécédent par l'application de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ dans lui-même qui à une matrice associe son carré : cette dernière n'est donc pas surjective.

Exercice 3

1. En notant 1 l'unité de $\mathbf{K}$, 1 est également l'unité de $\mathbf{F}_p$. Ainsi, $p.1 = 0$ donc la caractéristique de $\mathbf{K}$ divise p. Puisque p est premier et que la caractéristique d'un corps est différente de 1, on a bien $\mathrm{car}(\mathbf{K}) = p$.

2. On a admis que ϕ_p est un morphisme du corps $\mathbf{K}$. Son noyau est un idéal de $\mathbf{K}$ donc égal à $\mathbf{K}$ ou réduit à $\{0\}$. Puisque $\phi_p(1) = 1$, le noyau de ϕ_p est réduit à $\{0\}$: ϕ_p est donc injectif. Par ailleurs, $\mathbf{K}$ est algébriquement clos, donc pour tout y dans $\mathbf{K}$, le polynôme $X^p - y$ admet une racine x dans $\mathbf{K}$. On a alors $y = x^p = \phi_p(x)$. Or y était quelconque dans $\mathbf{K}$ donc ϕ_p est surjectif. Finalement, ϕ_p est bien un automorphisme du corps $\mathbf{K}$.

3. Posons pour tout entier $k \geqslant 1$, $\mathcal{P}(k)$: « $\forall x \in \mathbf{K},\ \phi_p^k(x) = x^{p^k}$ ».
   — L'assertion $\mathcal{P}(1)$ est vraie par hypothèse.

— Soit k un entier $\geqslant 1$. On suppose $\mathcal{P}(k)$. On a alors pour tout x dans $\mathbf{K}$

$$\phi_p^{k+1}(x) = \phi_p^k(x^p) = (x^p)^{p^k} = x^{p^{k+1}},$$

donc $\mathcal{P}(k+1)$. On a ainsi démontré l'implication $\mathcal{P}(k) \Rightarrow \mathcal{P}(k+1)$ pour tout entier naturel non nul k.

— Finalement, on a bien démontré l'égalité voulue par récurrence.

4. On a pour tout x dans $\mathbf{K}$, $\phi_q(x) = x^q$. Donc $\mathbf{L}$ est l'ensemble des racines dans $\mathbf{K}$ du polynôme de $X^q - X$: il est donc de cardinal au plus $\deg(X^q - X) = q$.
5. Le polynôme $X^q - X$ admet pour dérivée $qX^{q-1} - 1 = -1$, puisque $\mathbf{K}$ est de caractéristique p et q est un multiple de p (car $k \geqslant 1$). Ainsi, puisque $\mathbf{K}$ est algébriquement clos, $X^q - X$ est scindé à racines simples dans $\mathbf{K}$ et de degré q, donc $\mathbf{L}$ est de cardinal exactement q.
6. Démontrons d'abord que $\mathbf{L}$ est bien un sous-corps de $\mathbf{K}$. ϕ_q est un morphisme du corps $\mathbf{K}$ comme composée de morphismes de $\mathbf{K}$. On en déduit que :
   — $\phi_q(0) = 0$ donc $0 \in \mathbf{L}$.
   — Pour tous x, y dans $\mathbf{L}$, $\phi_q(x+y) = \phi_q(x) + \phi_q(y) = x + y$ donc $x + y \in \mathbf{L}$.
   — Pour tout x dans $\mathbf{L}$, $\phi_q(-x) = -\phi_q(x) = -x$ donc $-x \in \mathbf{L}$.
   — $\phi_q(1) = 1$ donc $1 \in \mathbf{L}$.
   — Pour tous x, y dans $\mathbf{L}$, $\phi_q(xy) = \phi_q(x)\phi_q(y) = xy$ donc $xy \in \mathbf{L}$.
   — Poru tout x dans $\mathbf{L}^\star$, $\phi_q(x^{-1}) = \phi_q(x)^{-1} = x^{-1}$ donc $x^{-1} \in \mathbf{L}$.

   Finalement, $\mathbf{L}$ est bien un sous-corps de $\mathbf{K}$ de cardinal q.
   Soit maintenant $\mathbf{L}'$ un sous-corps de $\mathbf{K}$ de cardinal q. $\mathbf{L}'\backslash\{0\}$ est un groupe de cardinal $q-1$. Ainsi, d'après le théorème de Lagrange, $x^{q-1} = 1$ pour tout x dans $\mathbf{L}'\backslash\{0\}$. Donc pour tout x dans $\mathbf{L}'\backslash\{0\}$, $x^q = x$, cette égalité restant vraie si $x = 0$. Ainsi, $\mathbf{L}'$ est inclus dans $\mathbf{L}$ et par égalité des cardinaux : $\mathbf{L}' = \mathbf{L}$. On a donc bien démontré que $\mathbf{L}$ est le seul sous-corps de $\mathbf{K}$ de cardinal q.
7. Soit x dans $\mathbf{F}_{q^2}$. x est un élément de $\mathbf{K}$ et $\phi_q(x)^{q^2} = (x^q)^{q^2} = (x^{q^2})^q = x^q = \phi_q(x)$. Donc $\phi_q(x) \in \mathbf{F}_{q^2}$. On a ainsi établi l'inclusion $\phi_q(\mathbf{F}_{q^2}) \subset \mathbf{F}_{q^2}$.
   Par ailleurs, pour tout x dans $\mathbf{F}_q$, x est un élément de $\mathbf{K}$ vérifiant :
   $$\phi_{q^2}(x) = x^{q^2} = (x^q)^q = x^q = x.$$
   Donc $\mathbf{F}_q \subset \mathbf{F}_{q^2}$. Par ailleurs, pour tout x dans $\mathbf{F}_q$, $\phi_q(x) = x$. On a donc démontré que $\mathbf{F}_q \subset \{x \in \mathbf{F}_{q^2},\ \phi_q(x) = x\}$. L'inclusion réciproque découlant immédiatement de l'inclusion $\mathbf{F}_{q^2} \subset \mathbf{K}$, on a bien démontré l'égalité $\mathbf{F}_q = \{x \in \mathbf{F}_{q^2},\ \phi_q(x) = x\}$.

Exercice 4

1. (a) H est d'ordre p^α, donc d'après le théorème de Lagrange tout élément x de H est d'ordre divisant p^α. En particulier, $x^{p^\alpha} = I_n$.
   (b) Soit x dans H. Posons $N = x - I_n$. Puisque I_n et N commutent et que $\mathbf{F}_p$ est de caractéristique p, on a l'égalité : $x^p = I_n^p + N^p = I_n + N^p$. Ainsi, on obtient par récurrence sur k que pour tout k dans $\mathbf{N}$, $x^{p^k} = I_n + N^{p^k}$.
   En particulier, $I_n = x^{p^\alpha} = I_n + N^{p^\alpha}$. Donc N est nilpotente et $x \in \mathcal{U}_n(\mathbf{F}_p)$. Puisque x était quelconque dans H, on a bien démontré que $H \subset \mathcal{U}_n(\mathbf{F}_p)$.
2. (a) Puisque $p \geqslant 2$, il existe $\alpha > 0$ tel que $p^\alpha \geqslant n$. Soit x dans H. Puisque $H \subset \mathcal{U}_n(\mathbf{F}_p)$, il existe N dans $\mathcal{N}_n(\mathbf{F})$ telle que $x = I_n + N$. On a alors comme précédemment :
   $$x^{p^\alpha} = I_n + N^{p^\alpha} = I_n,$$
   car $N^{p^\alpha} = 0$ puisque N est nilpotente d'indice inférieur à n donc à p^α.

(b) H est bien fini car c'est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_p)$. Soit q un diviseur premier de l'ordre de H. D'après le théorème de Cauchy, H contient un élément x d'ordre q. D'après la question précédente, $x^{p^\alpha} = I_n$ donc q divise p^α et puisque q et p sont premiers, $q = p$. Ainsi, on a démontré que le seul diviseur premier de l'ordre de H est p, donc que H est un p-groupe.

3. (a) Soit g dans G. L'application $\phi_g : x \mapsto gx$ est une permutation de G (de réciproque $x \mapsto g^{-1}x$). On a pour tout g, g' dans G, $\phi_{gg'} = \phi_g \circ \phi_{g'}$ (par associativité de loi de G). Donc $\phi : g \mapsto \phi_g$ est un morphisme de groupes de G dans le groupe $\mathfrak{S}(G)$ des permutations de G. De plus, le noyau de ϕ est réduit à $\{e\}$, où e est le neutre de G, puisque pour tout g dans G, $\phi_g(e) = g$ donc si $\phi_g = \mathrm{Id}_G$, $g = e$. Ainsi, $\phi(G)$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}(G)$ isomorphe à G. En numérotant les éléments de G, on obtient bien que G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_r$. Plus précisément, si f est une bijection de $\{1, \ldots, r\}$ dans G, $\sigma \mapsto f^{-1} \circ \sigma \circ f$ est un isomorphisme du groupe $\mathfrak{S}(G)$ dans le groupe de $\mathfrak{S}_r$, et ce dernier induit un isomorphisme entre $\phi(G)$ et un sous-groupe de $\mathfrak{S}_r$.

   (b) Notons, pour tout élément σ de $\mathfrak{S}_r$, P_σ la matrice de permutation associée à σ, c'est-à-dire la matrice dont, pour tous indices i et j dans $\{1, \ldots, r\}$, le coefficient d'indice (i, j) vaut 1 si $i = \sigma(j)$ et 0 sinon. Cette dernière est bien dans $\mathrm{GL}_r(\mathbf{F}_p)$ puisque l'ensemble de ses colonnes est celui des colonnes de la matrice I_n.
   En notant $(e_1, \ldots, e_r)$ la base canonique de $\mathbf{F}_q^r$, on a pour tout j dans $\{1, \ldots, r\}$ et pour tout σ dans $\mathfrak{S}_r$, $P_\sigma e_j = e_{\sigma(j)}$. Donc pour toutes permutations σ, σ' de $\{1, \ldots, r\}$, et pour tout j dans $\{1, \ldots, r\}$, $P_\sigma P_{\sigma'} e_j = P_\sigma e_{\sigma'(j)} = P_{\sigma \circ \sigma'} e_j$. Ainsi, $P_\sigma P_{\sigma'}$ et $P_{\sigma \circ \sigma'}$ ont les mêmes colonnes donc sont égales. L'application $\sigma \mapsto P_\sigma$ est donc un morphisme de groupes de $\mathfrak{S}_r$ dans $\mathrm{GL}_r(\mathbf{F}_p)$. De plus, pour tout σ dans $\mathfrak{S}_r$, $P_\sigma = I_r$ si, et seulement si,$\sigma = \mathrm{Id}_{\{1,\ldots,r\}}$ donc $\sigma \mapsto P_\sigma$ est un morphisme injectif. Tout sous-groupe de $\mathfrak{S}_r$ est par conséquent isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_r(\mathbf{F}_p)$. Finalement, d'après la question précédente, G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_r(\mathbf{F}_p)$.

4. — Supposons (i) donc que G est un p-groupe. Notons r son ordre. On a bien $r \in \mathbf{N}\backslash\{0\}$ et d'après la question précédente, G est isomorphe à un sous groupe de $\mathrm{GL}_r(\mathbf{F}_p)$. Or on a établi à la question 1 que tout p-sous-groupe de $\mathrm{GL}_r(\mathbf{F}_p)$ est inclus dans $\mathcal{U}_r(\mathbf{F}_p)$. On a donc bien démontré l'implication $(i) \Rightarrow (ii)$.
   — Réciproquement, supposons (ii). Soit r dans $\mathbf{N}\backslash\{0\}$ tel que G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_r(\mathbf{F}_p)$ contenu dans $\mathcal{U}_r(\mathbf{F}_p)$. On a démontré à la question 2 que tout sous-groupe de $\mathrm{GL}_r(\mathbf{F}_p)$ contenu dans $\mathcal{U}_r(\mathbf{F}_p)$ est un p-groupe. Puisque deux groupes isomorphes ont le même ordre, G est également un p-groupe.

   Finalement, on a bien démontré l'équivalence $(i) \Leftrightarrow (ii)$.

Problème

Partie I

1. Soit (x, y, z) dans $\mathbf{F}^3$. Puisque $h(x, y, z)$ est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale, on sait que $h(x, y, z)$ est inversible et que son inverse est de la même forme. Soit (x', y', z') dans $\mathbf{F}^3$. $h(x, y, z)h(x', y', z') = I_n$ si, et seulement si, $\begin{cases} x + x' = 0 \\ y + y' = 0 \\ z + z' + xy' = 0. \end{cases}$
   Donc
$$h(x, y, z)^{-1} = h(-x, -y, xy - z).$$

2. (a) Posons, pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}(n)$: « $h(x, y, z)^n = h\left(nx, ny, nz + \frac{n(n-1)}{2}xy\right)$ ».
   — $h(x, y, z)^0 = I_n = h(0, 0, 0)$, donc $\mathcal{P}(0)$.

— Soit n un entier naturel. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\begin{aligned} h(x,y,z)^{n+1} &= h(x,y,z)^n h(x,y,z) \\ &= h\left(nx, ny, nz + \frac{n(n-1)}{2}xy\right) h(x,y,z) \text{ d'après } \mathcal{P}(n) \\ &= h\left(nx + x, ny + y, nz + \frac{n(n-1)}{2}xy + z + nxy\right) \\ &= h\left((n+1)x, (n+1)y, (n+1)z + \frac{(n+1)n}{2}xy\right) \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$. On a donc bien prouvé l'implication $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$, et ceci pour tout n dans $\mathbf{N}$.

— Finalement, on a bien démontré l'égalité voulue par récurrence.

(b) D'après la question précédente, $h(x,y,z)^p = h\left(px, py, pz + \frac{p(p-1)}{2}xy\right)$. Or p est impair, donc $\frac{p-1}{2}$ est un entier. Puisque $\mathbf{F}$ est de caractéristique p, on a : $h(x,y,z)^p = h(0,0,0) = I_n$. Donc $h(x,y,z)$ est d'ordre divisant p, donc d'ordre égal à 1 ou p.

(c) i. Soit (x,y,z) dans $\mathbf{F}^3$. On a $h(x,y,z)^4 = h(4x, 4y, 4z + 6xy) = h(0,0,0) = I_n$. Donc tout élément de $\mathcal{H}_3(\mathbf{F})$ est d'ordre $1, 2$ ou 4. De plus, pour tout (x,y,z) dans $\mathbf{F}^3$, $h(x,y,z)^2 = h(0,0,xy)$. Ainsi,

— I_n est un élément d'ordre 1.

— $h(0,1,0)$ est un élément d'ordre 2.

— $h(1,1,0)$ est un élément d'ordre 4.

Ainsi, les ordres des éléments de $\mathcal{H}_3(\mathbf{F})$ sont exactement $1, 2$ et 4.

ii. Soit (x,y,z) dans $\mathbf{F}^3$, $h(x,y,z)^2 = h(0,0,xy)$ donc $h(x,y,z)$ est d'ordre 1 ou 2 si, et seulement si,$xy = 0$. Or, puisque $\mathbf{F}$ est un corps, $xy = 0$ si, et seulement si,$x = 0$ ou $y = 0$. Il y a donc $2q - 1$ couples (x,y) dans F^2 tels que $xy = 0$, donc $q \times (2q-1)$ triplets (x,y,z) tels que $xy = 0$. Finalement, puisque $h(0,0,0)$ est le seul élément de $\mathcal{H}_3(\mathbf{F})$ d'ordre 1, le nombre d'éléments d'ordre 2 de $\mathcal{H}_3(\mathbf{F})$ vaut :

$$q(2q-1) - 1 = 2q^2 - q - 1.$$

3. Soit (x,y,z,x',y',z') dans $\mathbf{F}^6$. On a bien :

$$\begin{aligned} [h(x,y,z), h(x',y',z')] &= h(x,y,z)h(x',y',z')h(-x,-y,xy-z)h(-x',-y',x'y'-z') \\ &= h(x+x', y+y', z+z'+xy')h(-x,-y,xy-z)h(-x',-y',x'y'-z') \\ &= h(x', y', z' + xy' - x'y)h(-x',-y',x'y'-z') \\ &= h(0,0,xy'-x'y) \end{aligned}$$

4. Notons $H = \{h(0,0,z),\ z \in \mathbf{F}\}$. H est stable par produit et passage à l'inverse car pour tout z, z' dans $\mathbf{F}$:

$$h(0,0,z)h(0,0,z') = h(0,0,z+z') \quad \text{et} \quad h(0,0,z)^{-1} = h(0,0,-z).$$

— D'après la question précédente, tout commutateur est dans H. Comme ce dernier est stable par produit et passage à l'inverse, $D(\mathcal{H}_3(\mathbf{F})) \subset H$.

— Réciproquement, pour tout $z \in \mathbf{F}$, $h(0,0,z) = [h(1,0,0), h(0,z,0)] \in D(\mathcal{H}_3(\mathbf{F}))$. Donc $H = D(\mathcal{H}_3(\mathbf{F}))$ par double-inclusion.

— Soient x, y, z dans $\mathbf{F}$. On a $h(x,y,z) \in Z(\mathcal{H}_3(\mathbf{F}))$ si, et seulement si,pour tous x', y', z' dans $\mathbf{F}$, $[h(x,y,z), h(x',y',z')] = h(0,0,0)$. D'après la question 3, $h(x,y,z)$ appartient donc à $Z(\mathcal{H}_3(\mathbf{F}))$ si, et seulement si,pour tous x', y' dans $\mathbf{F}$, $xy' - x'y = 0$, c'est-à-dire si, et seulement si,$x = y = 0$. En effet, le sens réciproque de la dernière équivalence est clair, tandis que le sens direct est obtenu en prenant $x' = 1$ et $y' = 0$ puis $x' = 0$ et $y' = 1$. Ainsi, $Z(\mathcal{H}_3(\mathbf{F})) = H$.

Finalement, on a bien démontré que $Z(\mathcal{H}_3(\mathbf{F})) = D(\mathcal{H}_3(\mathbf{F})) = \{h(0,0,z),\ z \in \mathbf{F}\}$.

5. D'après l'expression du produit de deux éléments de $\mathcal{H}_3(\mathbf{F})$, l'application de l'énoncé est un morphisme de groupes. Il est surjectif, et son noyau est égal à $D(\mathcal{H}_3(\mathbf{F}))$. Donc les groupes $Ab(\mathcal{H}_3(\mathbf{F}))$ et $(\mathbf{F}^2, +)$ sont isomorphes.
6. (a) Soient (x, y) et (x', y') dans $\mathbf{F}^2$. Puisque ψ_1 et ψ_2 sont des morphismes de $(\mathbf{F}, +)$ dans $\mathbf{C}^*$:

$$\begin{aligned}\psi_1 \otimes \psi_2 \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right) &= \psi_1 \otimes \psi_2 \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix} \\ &= \psi_1(x + x')\psi_2(y + y') \\ &= \psi_1(x)\psi_1(x')\psi_2(y)\psi_2(y') \\ &= \psi_1 \otimes \psi_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \psi_1 \otimes \psi_2 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Donc $\psi_1 \otimes \psi_2$ est un morphisme de $(\mathbf{F}^2, +)$ dans $\mathbf{C}^*$.

(b) Soient ψ_1, ψ_2, ψ_1' et ψ_2' dans $\widehat{(\mathbf{F}, +)}$. On a :

$$j((\psi_1, \psi_2)(\psi_1', \psi_2')) = j(\psi_1\psi_1', \psi_2\psi_2') = (\psi_1\psi_1') \otimes (\psi_2\psi_2') = (\psi_1 \otimes \psi_2)(\psi_1' \otimes \psi_2'),$$

donc j est un morphisme de groupes.
Montrons que j est injectif. Soit (ψ_1, ψ_2) dans le noyau de j. Pour tous x, y dans $\mathbf{F}$, $\psi_1(x)\psi_2(y) = 1$. Donc en prenant $y = 0$, on obtient que pour tout $x \in \mathbf{F}$, $\psi_1(x) = 1$. Donc ψ_1 est constant égal à 1 et il en est de même pour ψ_2 (en prenant $x = 0$). Donc le noyau de j est réduit au neutre de $\widehat{(\mathbf{F}, +)}^2$: j est injectif.
Montrons que j est surjectif. Soit ψ dans $\widehat{(\mathbf{F}^2, +)}$. On a pour tout (x, y) dans $\mathbf{F}^2$:

$$\psi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \psi \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \psi \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix},$$

Donc en posant pour tout z dans $\mathbf{F}$, $\psi_1(z) = \psi \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\psi_2(z) = \psi \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix}$, on définit deux éléments de $\widehat{(\mathbf{F}, +)}$ tels que $\psi = \psi_1 \otimes \psi_2$. Finalement, j est surjectif : c'est aussitôt un isomorphisme entre les groupes $\widehat{(\mathbf{F}, +)}^2$ et $\widehat{(\mathbf{F}^2, +)}$.
7. Si ψ est un morphisme de $\mathcal{H}_3(\mathbf{F})$ dans $\mathbf{C}^*$, alors son noyau contient tout commutateur, donc $D(\mathcal{H}_3(\mathbf{F}))$. Donc pour tout x dans $\mathcal{H}_3(\mathbf{F})$, $\psi(x)$ ne dépend que de sa classe $\overline{x}$ dans $Ab(\mathcal{H}_3(\mathbf{F}))$. On peut donc définir un isomorphisme f entre $\widehat{\mathcal{H}_3(\mathbf{F})}$ et $Ab\widehat{(\mathcal{H}_3(\mathbf{F}))}$ par :

$$\begin{array}{cccc} f & : & \widehat{\mathcal{H}_3(\mathbf{F})} & \to & Ab\widehat{(\mathcal{H}_3(\mathbf{F}))} \\ & & \psi & \mapsto & (\overline{x} \mapsto \psi(x)) \end{array}$$

Par ailleurs, on sait que $Ab(\mathcal{H}_3(\mathbf{F}))$ et $(\mathbf{F}^2, +)$ sont isomorphes. Notons i l'isomorphisme de $Ab(\mathcal{H}_3(\mathbf{F}))$ dans $(\mathbf{F}^2, +)$ obtenu à la question 5 par passage au quotient. L'application

$$\begin{array}{cccc} g & : & Ab\widehat{(\mathcal{H}_3(\mathbf{F}))} & \to & \widehat{(\mathbf{F}^2, +)} \\ & & \psi & \mapsto & \psi \circ i^{-1} \end{array}$$

est un isomorphisme de $Ab\widehat{(\mathcal{H}_3(\mathbf{F}))}$ dans $\widehat{(\mathbf{F}^2, +)}$.
On peut maintenant exhiber un isomorphisme explicite de $\widehat{\mathcal{H}_3(\mathbf{F})}$ dans $\widehat{(\mathbf{F}, +)}^2$: en reprenant la notations de la question précédente, $j^{-1} \circ g \circ f$ en est un.

8. En notant $\mathbf{U}_p$ le groupe des racines p-èmes de l'unité, $\mathbf{U}_p$ et $(\mathbf{F}_p,+)$ sont isomorphes, donc il suffit de démontrer que $\widehat{(\mathbf{F}_p,+)}$ et $\mathbf{U}_p$ sont isomorphes. On définit l'application

$$\begin{array}{cccc} \Psi & : & \widehat{(\mathbf{F}_p,+)} & \to & \mathbf{U}_p \\ & & \psi & \mapsto & \psi(1) \end{array}$$

Ψ est bien définie, car pour tout ψ dans $\widehat{(\mathbf{F}_p,+)}$, $\psi(1)^p = \psi(p.1) = \psi(0) = 1$. De plus, pour tous ψ,ψ' dans $\widehat{(\mathbf{F}_p,+)}$, $\Psi(\psi\psi') = \psi(1)\psi'(1) = \Psi(\psi)\Psi(\psi')$. Donc Ψ est un morphisme de groupes. Montrons que Ψ est bijectif.

— Soit ψ dans le noyau de Ψ. On a $\psi(1) = 1$, donc pour tout k dans $\mathbf{F}_p$, $\psi(k) = \psi(1)^k = 1$, la quantité $\psi(1)^k$ étant bien définie : en effet, puisque $\psi(1) \in \mathbf{U}_p$, la quantité $\psi(1)^k$ ne dépend pas du représentant de k choisi. Donc le noyau de Ψ est réduit au neutre de $\widehat{(\mathbf{F}_p,+)}$: Ψ est donc injectif.

— Soit maintenant $a \in \mathbf{U}_p$. Comme précédemment, la quantité a^k ne dépend pas du représentant de l'élément k dans $\mathbf{F}_p$. On définit alors :

$$\begin{array}{cccc} \psi & : & \mathbf{F}_p & \to & \mathbf{U}_p \\ & & k & \mapsto & a^k \end{array}.$$

ψ est bien défini, appartient à $\widehat{(\mathbf{F}_p,+)}$ et $\Psi(\psi) = a$. Ainsi, tout élement de $\mathbf{U}_p$ admet un antécédent par Ψ. Donc Ψ est surjectif.

Finalement, Ψ est un isomorphisme entre $\widehat{(\mathbf{F}_p,+)}$ et $\mathbf{U}_p$, donc $(\mathbf{F}_p,+)$ et $\widehat{(\mathbf{F}_p,+)}$ sont bien isomorphes.

9. Par construction de $\mathbf{F}_q$ dans l'exercice 3, $\mathbf{F}_p$ est un sous-corps de $\mathbf{F}_q$. Donc $\mathbf{F}_q$ est un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel. Puisque $\mathbf{F}_q$ est fini, il est nécessairement de dimension finie. Notons d sa dimension. $(\mathbf{F}_q,+,.)$ et $(\mathbf{F}_p^d,+,.)$ sont isomorphes via le choix d'une base, et en particulier $(\mathbf{F}_q,+)$ et $(\mathbf{F}_p^d,+)$ sont isomorphes et ont même cardinal. Donc $p^k = q = p^d$. Ainsi, $k = d$ et on a bien démontré que $(\mathbf{F}_q,+)$ et $(\mathbf{F}_p^k,+)$ sont isomorphes.

10. D'après ce qui précède, $\widehat{\mathcal{H}_3(\mathbf{F}_q)}$ et $\widehat{(\mathbf{F}_q,+)}^2$ sont isomorphes. Or $(\mathbf{F}_q,+)$ et $(\mathbf{F}_p^k,+)$ sont isomorphes, donc on montre comme à la question 7 que $\widehat{(\mathbf{F}_q,+)}$ et $\widehat{(\mathbf{F}_p^k,+)}$ sont isomorphes, puis comme à la question 6 que $\widehat{(\mathbf{F}_p^k,+)}$ et $\widehat{(\mathbf{F}_p,+)}^k$ le sont aussi. On a également démontré que $\widehat{(\mathbf{F}_p,+)}$ et $(\mathbf{F}_p,+)$ sont isomorphes. Ainsi, $\widehat{\mathcal{H}_3(\mathbf{F}_q)}$ est isomorphe à $\mathbf{F}_p^{2k}$ et a, en particulier le même ordre. Finalement, $\widehat{\mathcal{H}_3(\mathbf{F}_q)}$ est d'ordre $p^{2k} = q^2$.

Partie II

11. G^+ est une partie de G par définition, et elle contient le neutre e de G, car σ est un morphisme de G dans lui-même.
Par ailleurs, soit g_1, g_2 dans G^+. $\sigma(g_1g_2^{-1}) = \sigma(g_1)\sigma(g_2)^{-1} = g_1g_2^{-1}$ en utilisant le fait que σ est un morphisme de groupe, puis que g_1 et g_2 sont dans G^+. Donc $g_1g_2^{-1}$ est encore dans G^+.
Finalement, G^+ est un sous-groupe de G.

12. (a) D'après le théorème de Lagrange, $x^{|G|} = e$, où e est le neutre de G. Donc $x^{|G|+1} = x$. Puisque $|G|$ est impair, $\frac{|G|+1}{2}$ est un entier et on peut poser $y = x^{\frac{|G|+1}{2}}$. y est bien bien un élément de G tel que $y^2 = x$.

    (b) Φ est surjective d'après la question précédente, et puisque G est fini, elle est aussitôt bijective.

13. Puisque σ est un morphisme de G dans lui-même, G^+ et G^- sont stables par Φ. Or la restriction de Φ à G^+ est encore injective par restriction de quantificateurs. Ainsi, $\Phi(G^+)$ est inclus dans G^+ et a même cardinal, donc $\Phi(G^+) = G^+$. Donc Φ induit une bijection de G^+ dans lui-même, et on raisonne de même pour G^-.

14. Soit g dans G.
    — Soit (x^-, x^+) dans $G^- \times G^+$ tel que $g = x^-x^+$. On a alors $\sigma(g) = \sigma(x^-)\sigma(x^+) = (x^-)^{-1}x^+$. Donc $\sigma(g)^{-1} = (x^+)^{-1}x^-$. Ainsi, $g\sigma(g)^{-1} = (x^-)^2$ et $x^+ = (x^-)^{-1}g$. Puisque Φ injective, il existe au plus un couple $(x^-, x^+) \in G^- \times G^+$ tel que $g = x^-x^+$.
    — Réciproquement, puisque $\sigma^2 = \mathrm{Id}_G$,

    $$\sigma(g\sigma(g)^{-1}) = \sigma(g)\sigma^2(g)^{-1} = \sigma(g)g^{-1} = (g\sigma(g)^{-1})^{-1},$$

    On a donc démontré que $g\sigma(g)^{-1} \in G^-$. Puisque Φ induit une bijection de G^- dans lui-même, il existe $x^- \in G^-$ tel que $(x^-)^2 = g\sigma(g)^{-1}$. Posons $x^+ = (x^-)^{-1}g$. On a : $\sigma(x^+) = \sigma(x^-)^{-1}\sigma(g) = x^-\sigma(g)$. Donc :

    $$(x^+)^{-1}\sigma(x^+) = g^{-1}(x^-)^2\sigma(g) = g^{-1}g\sigma(g)^{-1}\sigma(g) = e.$$

    Ainsi, $\sigma(x^+) = x^+$, c'est-à-dire $x^+ \in G^+$. De plus, on a : $x^-x^+ = g$ par construction.

    Finalement, on a démontré que tout élément de g s'écrit de manière unique comme le produit d'un élément de G^- et d'un élément de G^+ : m est bijective.

15. Soit g dans G.
    — Soient g_1, g_2 dans G^+.

    $$\tau(g_1gg_2) = \sigma(g_1gg_2)^{-1} = (g_1\sigma(g)g_2)^{-1} = g_2^{-1}\tau(g)g_1^{-1} \in G^+\tau(g)G^+.$$

    Donc $\tau(G^+gG^+) \subset G^+\tau(g)G^+$.
    — Réciproquement, soit g_1, g_2 dans G^+, $g_1\tau(g)g_2 = \tau(g_2^{-1}gg_1^{-1}) \in \tau(G^+gG^+)$ d'après le calcul précédent. Donc $G^+\tau(g)G^+ \subset \tau(G^+gG^+)$.
    — Soit (x^-, x^+) dans $G^- \times G^+$ tel que $g = x^-x^+$.

    $$\tau(g) = \sigma(x^-x^+)^{-1} = ((x^-)^{-1}x^+)^{-1} = (x^+)^{-1}x^- = (x^+)^{-1}g(x^+)^{-1}.$$

    Donc $\tau(g) \in G^+gG^+$. Puisque G^+ est stable par produit, on en déduit l'inclusion $G^+\tau(g)G^+ \subset G^+gG^+$.
    Mais, on a également, d'après le calcul précédemment $g = x^+\tau(g)x^+ \in G^+\tau(g)G^+$ et donc $G^+gG^+ = G^+\tau(g)G^+$ par double inclusion.

    Finalement, on a bien montré que $\tau(G^+gG^+) = G^+\tau(g)G^+ = G^+gG^+$, et ceci pour tout g dans G.

Partie III

16. Soient (a, b) dans G^2 et g dans G.

    $$\begin{aligned}\delta_a * \delta_b(g) &= \sum_{x\in G} \delta_a(x)\delta_b(x^{-1}g)\\ &= \delta_b(a^{-1}g)\\ &= \delta_{ab}(g)\end{aligned}$$

    et ceci pour tout g dans G, donc $\delta_a * \delta_b = \delta_{ab}$.

17. D'après le calcul qui précéde, pour tout a dans G, $\delta_e * \delta_a = \delta_a * \delta_e = \delta_a$. Puisque $f \mapsto f * \delta_e$ et $f \mapsto \delta_e * f$ sont linéaires, que $(\delta_a)_{a\in G}$ est une base de $\mathbf{C}[G]$, on en déduit que δ_e est l'unité de $\mathbf{C}[G]$.

18. — On a bien $\widetilde{\pi}(\delta_e) = \sum_{g\in G} \delta_e(g)\pi(g) = \pi(e) = \mathrm{Id}_V$, car π est un morphisme de groupe de G dans $\mathrm{GL}_{\mathbf{C}}(V)$.
 — L'application $\widetilde{\pi}$ est clairement linéaire.
 — Soient f, f' dans $\mathbf{C}[G]$.

$$\begin{aligned}
\widetilde{\pi}(f * f') &= \sum_{g\in G} f * f'(g)\pi(g) \\
&= \sum_{g\in G}\sum_{x\in G} f(x)f'(x^{-1}g)\pi(g) \\
&= \sum_{x\in G}\sum_{g\in G} f(x)f'(x^{-1}g)\pi(x)\circ\pi(x^{-1}g) \text{ car } \pi(g) = \pi(x)\circ\pi(x^{-1}g) \\
&= \sum_{x\in G} f(x)\pi(x)\circ\left(\sum_{g\in G} f'(x^{-1}g)\pi(x^{-1}g)\right) \text{ car } \pi(x) \text{ est linéaire} \\
&\underset{(1)}{=} \sum_{x\in G} f(x)\pi(x)\circ\left(\sum_{g\in G} f'(g)\pi(g)\right) \\
&= \left(\sum_{x\in G} f(x)\pi(x)\right)\circ\widetilde{\pi}(f') \\
&= \widetilde{\pi}(f)\circ\widetilde{\pi}(f')
\end{aligned}$$

 où l'on utilisé en (1) que $g \mapsto x^{-1}g$ est une bijection de G dans lui-même.
 — Pour le dernier point, on pouvait aussi remarquer que puisque les applications $(f, f') \mapsto \widetilde{\pi}(f * f')$ et $(f, f') \mapsto \widetilde{\pi}(f)\circ\widetilde{\pi}(f')$ sont bilinéaires, il suffit de vérifier que pour tout a, b dans G, $\widetilde{\pi}(\delta_a * \delta_b) = \widetilde{\pi}(\delta_a)\circ\widetilde{\pi}(\delta_b)$. Or pour tout g dans G, $\widetilde{\pi}(\delta_g) = \pi(g)$, ce qui permet d'affirmer que l'on a bien :

$$\widetilde{\pi}(\delta_a * \delta_b) = \widetilde{\pi}(\delta_{ab}) = \pi(ab) = \pi(a)\circ\pi(b) = \widetilde{\pi}(\delta_a)\circ\widetilde{\pi}(\delta_b).$$

 Finalement, $\widetilde{\pi}$ est un morphisme d'algèbres.

Partie IV

19. Soient (π', V') et (π, V) deux représentations isomorphes de G et u un isomorphisme de V dans V' tel que pour tout g dans G, $u\circ\pi(g)\circ u^{-1} = \pi'(g)$.
 Soient x dans V et g dans G^+. Puisque u est injective et que $\pi'(g)\circ u = u\circ\pi(g)$, on a : $\pi(g)(x) = x$ si, et seulement si,$u\circ\pi(g)(x) = u(x)$, c'est-à-dire si, et seulement si,$\pi'(g)(u(x)) = u(x)$. Donc $x \in V^{G^+}$ si, et seulement si,$u(x) \in V'^{G^+}$.
 Ainsi, $V'^{G^+} = u\left(V^{G^+}\right)$. En particulier, $\dim(V'^{G^+}) = \dim(V^{G^+})$.

20. Soient $f,\ f'$ dans $\mathbf{C}[G]$ et g dans G.

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}(f*f')(g) &= f*f'(\tau(g))\\
&= f*f'\left(\sigma(g)^{-1}\right)\\
&= \sum_{x\in G} f(x)f'(x^{-1}\sigma(g)^{-1})\\
&= \sum_{x\in G} f(x)f'\left((\sigma(g)x)^{-1}\right)\\
&\underset{(1)}{=} \sum_{x\in G} f(x)f'\left((\sigma(g\sigma(x))^{-1}\right)\\
&= \sum_{x\in G} \tilde{\tau}(f')(g\sigma(x))f(x)\\
&\underset{(2)}{=} \sum_{y\in G} \tilde{\tau}(f')(y)\tilde{\tau}(f)\left(y^{-1}g\right)\\
&= \tilde{\tau}(f')*\tilde{\tau}(f)(g)
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé en (1) le fait que σ est un morphisme de groupe et une involution, et en (2) que $x\mapsto g\sigma(x)$ est une bijection de G dans lui-même, de bijection réciproque $y\mapsto \sigma(g)^{-1}\sigma(y) = \tau(y^{-1}g)$.

21. Soient f, f' dans $\mathbf{C}[G^+\backslash G/G^+]$. Il s'agit de démontrer que $f*f'$ est encore dans $\mathbf{C}[G^+\backslash G/G^+]$. Soient x_0, y_0 dans G^+ et $g\in G$.

$$\begin{aligned}
f*f'(x_0gy_0) &= \sum_{x\in G} f(x)f'(x^{-1}x_0gy_0)\\
&= \sum_{x\in G} f(x)f'(y_0^{-1}y_0x^{-1}x_0gy_0)\\
&\underset{(1)}{=} \sum_{x\in G} f(x)f'(y_0x^{-1}x_0g)\\
&= \sum_{x\in G} f(x)f'\left(\left(x_0^{-1}xy_0^{-1}\right)^{-1}g\right)\\
&\underset{(2)}{=} \sum_{y\in G} f(x_0yy_0)f'(y^{-1}g)\\
&\underset{(3)}{=} \sum_{y\in G} f(y)f'(y^{-1}g)\\
&= f*f'(g)
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé en (1) que y_0^{-1} et y_0 sont dans G^+ et f' dans $\mathbf{C}[G^+\backslash G/G^+]$, en (2) que $x\mapsto x_0^{-1}xy_0^{-1}$ est une bijection de G dans lui-même de réciproque $y\mapsto x_0yy_0$ et enfin en (3) que $f\in\mathbf{C}[G^+\backslash G/G^+]$. Finalement, on a bien démontré que $\mathbf{C}[G^+\backslash G/G^+]$ est stable par $*$.

22. Soient f dans $\mathbf{C}[G^+\backslash G/G^+]$ et g dans G. $\tau(g)\in G^+\tau(g)G^+ = G^+gG^+$ en utilisant la question 15. Donc il existe (x,y) dans $(G^+)^2$ tel que $\tau(g)=xgy$. Et ainsi, on a bien :

$$\tilde{\tau}(f)(g) = f(\tau(g)) = f(xgy) = f(g),$$

et ceci pour tout g dans G, donc $\tilde{\tau}(f)=f$.

23. Soient f, f' dans $\mathbf{C}[G^+\backslash G/G^+]$. On déduit des questions précédentes que :

$$f*f' = \tilde{\tau}(f*f') = \tilde{\tau}(f')*\tilde{\tau}(f) = f'*f.$$

Donc les éléments $\mathbf{C}[G^+\backslash G/G^+]$ commutent pour la loi $*$. Ainsi, puisque $\tilde{\pi}$ est un morphisme d'algèbre, $\tilde{\pi}(\mathbf{C}[G^+\backslash G/G^+])$ est une famille commutative.

24. Soient v dans V^{G^+} et f dans $\mathbf{C}[G^+\backslash G/G^+]$. On a, pour tout x dans G^+, en notant encore e le neutre de G :

$$\begin{aligned}
\pi(x)\left(\widetilde{\pi}(f)(v)\right) &= \pi(x)\left(\sum_{g\in G} f(g)\pi(g)(v)\right) \\
&= \sum_{g\in G} f(g)\pi(x)\circ\pi(g)(v) \\
&= \sum_{g\in G} f(g)\pi(xg)(v) \\
&= \sum_{g\in G} f(x^{-1}g)\pi(g)(v) \text{ car } g\mapsto xg \text{ est une bijection de réciproque } g\mapsto x^{-1}g \\
&= \sum_{g\in G} f(g)\pi(g)(v) \text{ car } f\in\mathbf{C}[G^+\backslash G/G^+] \text{ et } (x^{-1},e)\in(G^+)^2 \\
&= \widetilde{\pi}(f)(v)
\end{aligned}$$

et ceci pour tout x dans G^+. Donc $\widetilde{\pi}(f)(v)\in V^{G^+}$, et ceci pour tout v dans V^{G^+}, donc V^{G^+} est bien stable par $\widetilde{\pi}(f)$.

25. Soit v dans F et x dans $\mathrm{Ker}(u-\lambda\mathrm{Id}_{V^{G^+}})$. Puisque u et v commutent d'après la question 23, on a :

$$u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x),$$

donc $v(x)\in\mathrm{Ker}(u-\lambda\mathrm{Id}_{V^{G^+}})$, et ceci pour tout x dans $\mathrm{Ker}(u-\lambda\mathrm{Id}_{V^{G^+}})$. On a bien démontré que $\mathrm{Ker}(u-\lambda\mathrm{Id}_{V^{G^+}})$ est stable par tout élément v de F.

26. Soit v dans $V\backslash\{0\}$. Il suffit de montrer que $(\pi(g)(v))_{g\in G}$ est une famille génératrice de V. Pour tout w dans V, il existera f dans $\mathbf{C}[G]$ telle que :

$$w = \sum_{g\in G} f(g)\pi(g)(v) = \widetilde{\pi}(f)(v).$$

Notons W l'espace vectoriel engendré par $(\pi(g)(v))_{g\in G}$.
Pour tout g_0 dans G, $\pi(g_0)(W)$ est l'espace vectoriel engendré par $(\pi(g_0g)(v))_{g\in G}$ donc égal à W, car $g\mapsto g_0g$ est une bijection de G dans lui-même. Ainsi, W est stable par $\pi(g_0)$ pour tout g_0 dans G. Puisque (π,V) est irréductible, on a démontré que $W=\{0\}$ ou $W=V$. Or $v\neq 0$ et $v\in W$, donc $W=V$, ce qui achève la preuve.

27. Soient v dans $V^{G^+}\backslash\{0\}$, w dans V^{G^+}, et f dans $\mathbf{C}[G]$ telle que $\widetilde{\pi}(f)(v)=w$. Soient x,y dans G^+.

$$\begin{aligned}
w &= \pi(x^{-1})(w) \\
&= \pi(x^{-1})\left(\sum_{g\in G} f(g)\pi(g)(v)\right) \\
&= \sum_{g\in G} f(g)\pi(x^{-1}g)(v) \text{ car } \pi(x^{-1}) \text{ est linéaire et } \pi(x^{-1})\circ\pi(g)=\pi(x^{-1}g) \\
&= \sum_{g\in G} f(g)\pi(x^{-1}gy^{-1})(v) \quad \text{car } \pi(y^{-1})(v)=v \\
&= \sum_{g\in G} f(xgy)\pi(g)(v)
\end{aligned}$$

et ceci pour tout x, y dans G^+. Donc en notant $|G^+|$ l'ordre de G^+ et en posant pour tout g dans G,

$$f'(g) = \frac{1}{|G^+|^2} \sum_{(x,y)\in(G^+)^2} f(xgy),$$

on vérifie facilement que $f' \in \mathbf{C}[G^+\backslash G/G^+]$ et $w = \widetilde{\pi}(f')(v)$, ce qui achève la preuve.

28. Soient u dans F et λ dans $\mathbf{C}$ une valeur propre de u. Soient v dans $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda \mathrm{Id}_{V^{G^+}})$ et w dans V^{G^+}. Il existe f dans $\mathbf{C}[G^+\backslash G/G^+]$ tel que $w = \widetilde{\pi}(f)(v)$. Or $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda \mathrm{Id}_{V^{G^+}})$ est stable par tous les éléments de F, donc en particulier par l'induit de $\widetilde{\pi}(f)$ sur V^{G^+}. Ainsi, $w \in \mathrm{Ker}\,(u - \lambda \mathrm{Id}_{V^{G^+}})$ et ceci pour tout w dans V^{G^+}. Donc $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda \mathrm{Id}_{V^{G^+}}) = V^{G^+}$: u est donc une homothétie de rapport λ. Or u était un élément quelconque de F, donc F n'est bien constitué que d'homothéties. Ainsi, en réutilisant le résultat de la question précédente, tous les éléments V^{G^+} sont colinéaires. Finalement, on a bien $\dim(V^{G^+}) = 1$.

Partie V

29. Si V est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension 1, $\mathrm{GL}_{\mathbf{C}}(V)$ s'identifie à $\mathbf{C}^*$ et un morphisme de groupes de $\mathcal{H}_3(\mathbf{F}_q)$ dans $\mathrm{GL}_{\mathbf{C}}(V)$ à un élément de $\widehat{\mathcal{H}_3(\mathbf{F}_q)}$. Plus précisément, tout élément de $\mathrm{GL}_{\mathbf{C}}(V)$ est une homothétie ; l'application qui à un élément λ dans $\mathbf{C}^*$ associe l'homothétie de rapport λ est un isomorphisme de $\mathbf{C}^*$ dans $\mathrm{GL}_{\mathbf{C}}(V)$, et ce dernier induit un isomorphisme entre $\widehat{\mathcal{H}_3(\mathbf{F}_q)}$ et le groupe des morphismes de $\mathcal{H}_3(\mathbf{F}_q)$ dans $\mathrm{GL}_C(V)$. Ainsi, les représentations de dimension 1 sont, à isomorphisme près, les éléments de $\widehat{\mathcal{H}_3(\mathbf{F}_q)}$: il y en a q^2.

30. Il s'agit de prouver que ρ_ψ est un morphisme de groupe de $\mathcal{H}_3(\mathbf{F}_q)$ dans $\mathrm{GL}_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}[\mathbf{F}_q])$.
    — Soit (x_0, y_0, z_0) dans $\mathbf{F}_q^3$. Démontrons que $\rho_\psi(h(x_0, y_0, z_0)) \in \mathrm{GL}_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}[\mathbf{F}_q])$. Puisque $\mathbf{C}[\mathbf{F}_q]$ est de dimension finie q, il suffit de démontrer que $\rho_\psi(h(x_0, y_0, z_0))$ a son noyau réduit à $\{0\}$. Soit f dans le noyau de $\rho_\psi(h(x_0, y_0, z_0))$. On a pour tout x dans $\mathbf{F}_q$, $\psi(z_0 + xy_0)f(x + x_0) = 0$. Or ψ est à valeurs dans $\mathbf{C}^\star$, donc pour tout x dans $\mathbf{F}_q$, $f(x + x_0) = 0$. Donc f est bien la fonction nulle, puisque $x \mapsto x + x_0$ est une bijection de $\mathbf{F}_q$ dans lui-même. Ainsi, ρ_ψ est bien à valeurs dans $\mathrm{GL}_C(\mathbf{C}[\mathbf{F}_q])$.
    — Soient maintenant $x_0, y_0, z_0, x_0', y_0', z_0'$ dans $\mathbf{F}_q$.
    Notons $M = h(x_0, y_0, z_0)$ et $M' = h(x_0', y_0', z_0')$.
    Il s'agit de démontrer que $\rho_\psi(MM') = \rho_\psi(M) \circ \rho_\psi(M')$. Soit $f \in \mathbf{C}[\mathbf{F}_q]$. On a pour tout $x \in \mathbf{F}_q$:

$$\begin{aligned}
\rho_\psi(M) \circ \rho_\psi(M')f(x) &= \psi(z_0 + xy_0)\rho_\psi(M')f(x + x_0) \\
&= \psi(z_0 + xy_0)\psi(z_0' + (x + x_0)y_0')f(x + x_0 + x_0') \\
&= \psi(z_0 + z_0' + x_0 y_0' + x(y_0 + y_0'))f(x + x_0 + x_0') \quad \text{car } \psi \in \widehat{(\mathbf{F}_q, +)} \\
&= \rho_\psi(MM')f(x),
\end{aligned}$$

    car $MM' = h(x_0 + x_0', y_0 + y_0', z_0 + z_0' + x_0 y_0')$.

    Finalement, on a bien prouvé que $(\rho_\psi, \mathbf{C}[\mathbf{F}_q])$ est une représentation de $\mathcal{H}_3(\mathbf{F}_q)$.

31. Soit x dans $\mathbf{F}_q$.
    — Si $x = 0$, on a $\frac{1}{q}\sum_{y\in\mathbf{F}_q} \psi(xy) = \frac{1}{q}\sum_{y\in\mathbf{F}_q} \psi(0) = 1$, puisque $\psi(0) = 1$.
    — Sinon, en introduisant x_0 dans $\mathbf{F}_q$ tel que $\psi(x_0) \neq 1$, on obtient en utilisant le fait $y \mapsto xy$ et $y \mapsto x_0 + y$ sont des bijections de $\mathbf{F}_q$ dans lui-même :

$$\sum_{y\in\mathbf{F}_q} \psi(xy) = \sum_{y\in\mathbf{F}_q} \psi(y) = \sum_{y\in\mathbf{F}_q} \psi(x_0 + y) = \psi(x_0) \sum_{y\in\mathbf{F}_q} \psi(y),$$

    Ainsi, $(\psi(x_0) - 1)\sum_{y\in\mathbf{F}_q} \psi(xy) = 0$ et $\psi(x_0) \neq 1$, donc $\sum_{y\in\mathbf{F}_q} \psi(xy) = 0$.

Finalement, $\frac{1}{q}\sum_{y\in\mathbf{F}_q}\psi(xy)=\delta_0(x)$.

32. Soit $V\subset\mathbf{C}[\mathbf{F}_q]$ un sous-espace stable par $\rho_\psi(h(x_0,y_0,z_0))$ pour tout (x_0,y_0,z_0) dans $\mathbf{F}_q^3$, et non réduit à $\{0\}$. Soit f un élément non nul de V. Pour tout $x_0,y\in\mathbf{F}_q$, $\rho_\psi(h(x_0,y,0))f\in V$, et pour tout $x\in\mathbf{F}_q$:
$$\frac{1}{q}\sum_{y\in\mathbf{F}_q}\rho_\psi(h(x_0,y,0))f(x)=\frac{1}{q}\sum_{y\in\mathbf{F}_q}\psi(xy)f(x+x_0)=\delta_0(x)f(x+x_0)=f(x_0)\delta_0(x)$$
Il suffit donc de choisir $x_0\in\mathbf{F}_q$ tel que $f(x_0)\neq 0$. On a alors :
$$\delta_0=\frac{1}{qf(x_0)}\sum_{y\in\mathbf{F}_q}\rho_\psi(h(x_0,y,0))f\in V,$$
ce qui achève la preuve.

33. Il suffit de prouver que, si $V\subset\mathbf{C}[\mathbf{F}_q]$ est un sous-espace stable par $\rho_\psi(h(x_0,y_0,z_0))$ pour tout (x_0,y_0,z_0) dans $\mathbf{F}_q^3$, et non réduit à zéro, alors $V=\mathbf{C}[\mathbf{F}_q]$. Il suffit donc de prouver qu'un tel V contient δ_{x_0} pour tout x_0 dans $\mathbf{F}_q$. Or $\delta_0\in V$ et pour tout x_0 dans $\mathbf{F}_q$:
$$\forall x\in\mathbf{F}_q,\quad \rho_\psi(h(-x_0,0,0))\delta_0(x)=\delta_0(x-x_0)=\delta_{x_0}(x),$$
donc $\delta_{x_0}\in V$, ce qui achève la preuve.

34. On a déjà prouvé que $Z(\mathcal{H}_3(\mathbf{F}_q))=\{h(0,0,z),\ z\in\mathbf{F}_q\}$. S'il existe un automorphisme u de $\mathbf{C}[\mathbf{F}_q]$ tel que pour tout (x_0,y_0,z_0) dans $\mathbf{F}_q^3$, $u\circ\rho_\psi(h(x_0,y_0,z_0))=\rho_{\psi'}(h(x_0,y_0,z_0))\circ u$, alors en particulier, pour tout z_0 dans $\mathbf{F}_q$ et pour tout f dans $\mathbf{C}[\mathbf{F}_q]$, $u(\psi(z_0)f)=\psi'(z_0)u(f)$. Donc en choisissant f dans $\mathbf{C}[\mathbf{F}_q]$ telle que $u(f)\neq 0$, $\psi(z_0)=\psi'(z_0)$ et ceci pour tout z_0 dans $\mathbf{F}_q$, ce qui achève la preuve par contraposition.

35. D'après les rappels, $(\rho_\psi,\mathbf{C}[\mathbf{F}_q])$ a pour dimension l'ordre de $\mathbf{F}_q$, soit q.

36. On a déjà trouvé q^2 représentations de dimension 1 (et a fortiori irréductibles) de $\mathcal{H}_3(\mathbf{F}_q)$ deux à deux non isomorphes, et $(q-1)$ représentations irréductibles de dimension q^2 deux à deux non isomorphes. Or $q^2\times 1+(q-1)q^2=q^3$ et q^3 est l'ordre $\mathcal{H}_3(\mathbf{F}_q)$ (car $\mathcal{H}_3(\mathbf{F}_q)$ est en bijection avec $\mathbf{F}_q^3$) donc d'après le théorème de Maschke, on a trouvé toutes les représentations irréductibles de $\mathcal{H}_3(\mathbf{F}_q)$ à isomorphisme près.

Partie VI

37. Puisque $s\neq\mathrm{Id}_{\mathbf{F}_{q^2}}$ et $s^2=\mathrm{Id}_{\mathbf{F}_{q^2}}$, on a : $\sigma\neq\mathrm{Id}_G$ et $\sigma^2=\mathrm{Id}_G$. Il suffit donc de vérifier que σ est un morphisme de G dans lui-même pour pouvoir conclure que σ est un élément d'ordre 2 de $\mathrm{Aut}(G)$.
σ est bien une application de G dans G. Soit x,y,z,x',y',z' dans $\mathbf{F}_{q^2}$. Puisque s est un morphisme de $\mathbf{F}_{q^2}$ dans lui-même,
$$\begin{aligned}\sigma(h(x,y,z)h(x',y',z'))&=\sigma(h(x+x',y+y',z+z'+xy'))\\&=h(s(x+x'),s(y+y'),s(z+z'+xy'))\\&=h(s(x)+s(x'),s(y)+s(y'),s(z)+s(z')+s(x)s(y'))\\&=h(s(x),s(y),s(z))h(s(x'),s(y'),s(z'))\\&=\sigma(h(x,y,z))\sigma(h(x',y',z'))\end{aligned}$$
ce qui achève la preuve.

38. G^+ est l'ensemble des matrices de la forme $h(x,y,z)$ où x,y,z sont des éléments de $\mathbf{F}_{q^2}$ fixes par s. Or, d'après la question 7, on a pour tout $t\in\mathbf{F}_{q^2}$, $s(t)=t$ si, et seulement si,$t\in\mathbf{F}_q$. Donc $G^+=\mathcal{H}_3(\mathbf{F}_q)$.

39. On note ici $H \simeq H'$ si deux groupes H et H' sont isomorphes. Comme à la question 29, une représentation (π, V) de G de dimension 1 correspond à, isomorphisme près, à un élément χ de $\widehat{G}$. Mieux, pour tout g dans G, $\chi(g)$ est le rapport de l'homothétie $\pi(g)$. Donc pour tout x dans V, $\pi(g)(x) = \chi(g)x$. Ainsi, V^{G^+} n'est pas réduit à $\{0\}$ si, et seulement si,pour tout g dans G^+, $\chi(g) = 1$. Les représentations de dimension 1 distinguées de G correspondent donc aux éléments de $\widehat{G}$ dont le noyau contient G^+.

D'après les questions 6 et 7, $\widehat{G}$ est isomorphe à $\widehat{(\mathbf{F}_{q^2}^2, +)} \simeq \widehat{(\mathbf{F}_{q^2}, +)}^2$, ce qui permet d'affirmer que les représentations de dimension 1 distinguées de G correspondent aux éléments de l'ensemble :

$$\left\{(\chi_1, \chi_2) \in \widehat{(\mathbf{F}_{q^2}, +)}^2, \quad \forall (x, y) \in \mathbf{F}_q^2, \quad \chi_1(x)\chi_2(y) = 1\right\}.$$

Soit (χ_1, χ_2) un couple d'éléments de $\widehat{(\mathbf{F}_{q^2}, +)}$.

— Si pour tout (x, y) dans $\mathbf{F}_q^2$, $\chi_1(x)\chi_2(y) = 1$, alors en prenant en particulier $x = 0$ puis $y = 0$, on obtient que pour tout x dans $\mathbf{F}_q$, $\chi_1(x) = 1$ et $\chi_2(x) = 1$.

— Réciproquement, si pour x dans $\mathbf{F}_q$, $\chi_1(x) = 1$ et $\chi_2(x) = 1$, il est clair que pour tout (x, y) dans $\mathbf{F}_q^2$, $\chi_1(x)\chi_2(y) = 1$.

Ainsi, les représentations de dimension 1 distinguées de G correspondent aux éléments de A^2, où :

$$A = \left\{\chi \in \widehat{(\mathbf{F}_{q^2}, +)}, \quad \forall x \in \mathbf{F}_q, \quad \chi(x) = 1\right\} \simeq \widehat{(\mathbf{F}_{q^2}/\mathbf{F}_q, +)}.$$

Démontrons maintenant que $\widehat{(\mathbf{F}_{q^2}/\mathbf{F}_q, +)}$ et $\widehat{(\mathbf{F}_q, +)}$ sont isomorphes. Comme à la question 10, cela prouvera que A est de cardinal q et donc qu'il y a q^2 représentations de dimension 1 distinguées de G. Il suffit pour cela de démontrer que $\mathbf{F}_{q^2}/\mathbf{F}_q$ et $\mathbf{F}_q$ sont isomorphes. Or $\mathbf{F}_{q^2}$ est un $\mathbf{F}_q$-espace vectoriel de dimension 2. On peut compléter la famille (1) en une $\mathbf{F}_q$-base $(1, x)$ de $\mathbf{F}_{q^2}$. L'application qui à y dans $\mathbf{F}_{q^2}$ associe sa coordonnée selon x dans la base $(1, x)$ est un morphisme surjectif de groupes de $\mathbf{F}_{q^2}$ dans $\mathbf{F}_q$ et son noyau est $\mathbf{F}_q$. Donc $\mathbf{F}_{q^2}/\mathbf{F}_q$ et $\mathbf{F}_q$ sont bien isomorphes, ce qui achève la preuve.

40. Soient x_0, y_0, z_0 dans $\mathbf{F}_q$ et $g = h(x_0, y_0, z_0) \in G^+$. Pour tout f dans $\mathbf{C}[\mathbf{F}_{q^2}]$, $\rho_\psi(g)f = f$ si, et seulement si,

$$\forall x \in \mathbf{F}_{q^2}, \quad \psi(z_0 + xy_0)f(x + x_0) = f(x).$$

— Si $\psi_{|\mathbf{F}_q} = 1$, on choisit la fonction f qui vaut 1 sur $\mathbf{F}_q$ et 0 sinon. Puisque pour tout x dans $\mathbf{F}_{q^2} \backslash \mathbf{F}_q$, $x + x_0 \in \mathbf{F}_{q^2} \backslash \mathbf{F}_q$, on a bien $\rho_\psi(g)f = f$, et ceci pour tout g dans G^+. Donc $(\rho_\psi, \mathbf{C}[\mathbf{F}_{q^2}])$ est distinguée.

— Réciproquement, supposons $(\rho_\psi, \mathbf{C}[\mathbf{F}_{q^2}])$ distinguée. Ainsi, il existe un élément f de $\mathbf{C}[\mathbf{F}_{q^2}]$ non nul tel que pour tout g dans G^+, $\rho_\psi(g)f = f$. En particulier, pour tout z_0 dans $\mathbf{F}_q$, $h(0, 0, z_0) \in G^+$ donc pour tout x dans $\mathbf{F}_{q^2}$, $\psi(z_0)f(x) = f(x)$. En choisissant x dans $\mathbf{F}_{q^2}$ tel que $f(x) \neq 0$, on obtient : $\psi(z_0) = 1$ et ceci pour tout z_0 dans $\mathbf{F}_q$. Donc $\psi_{|\mathbf{F}_q} = 1$.

Finalement, on a bien démontré que la représentation $(\rho_\psi, \mathbf{C}[\mathbf{F}_{q^2}])$ est distinguée si, et seulement si,$\psi_{|\mathbf{F}_q} = 1$.

41. Soit x dans $\mathbf{F}_{q^2} \backslash \mathbf{F}_q$. La famille $(1, x)$ est une famille libre du $\mathbf{F}_q$-espace vectoriel $\mathbf{F}_{q^2}$, et ce dernier est dimension 2. Donc $(1, x)$ en est une base. Puisque ψ n'est pas constant égal à 1, il existe y dans $\mathbf{F}_{q^2}$ tel que $\psi(y) \neq 1$. Soit (z_0, y_0) le couple de coordonnées de y dans la base $(1, x)$: $(z_0, y_0) \in \mathbf{F}_q^2$ et $\psi(z_0 + xy_0) \neq 1$.

42. On sait déjà d'après la partie IV que si $p \neq 2$, alors $\dim(\mathbf{C}[\mathbf{F}_{q^2}]^{G^+}) = 1$, puisque G est d'ordre $q^6 = p^{6k}$ impair. Mais on peut le redémontrer ici dans le cas particulier de cette représentation et dans le cas d'un nombre premier p quelconque. En effet, soit f dans $\mathbf{C}[\mathbf{F}_{q^2}]$. f appartient à $\mathbf{C}[\mathbf{F}_{q^2}]^{G^+}$ si, et seulement si,pour tout (x_0, y_0, z_0) dans $\mathbf{F}_q^3$:

$$\forall x \in \mathbf{F}_{q^2}, \quad \psi(z_0 + xy_0)f(x + x_0) = f(x).$$

- En prenant x dans $\mathbf{F}_{q^2}\backslash\mathbf{F}_q$, (z_0, y_0) comme dans la question précédente et $x_0 = 0$, on obtient que si $f \in \mathbf{C}[\mathbf{F}_{q^2}]^{G^+}$ alors $\psi(z_0 + xy_0)f(x) = f(x)$, donc $f(x) = 0$ puisque $\psi(z_0 + xy_0) \neq 1$.
- En prenant maintenant $x = y_0 = z_0 = 0$, x_0 quelconque dans $\mathbf{F}_q$, on obtient $f(x_0) = \psi(z_0 + xy_0)f(x + x_0) = f(0)$.

Ainsi, f est constante sur $\mathbf{F}_q$ et nulle sur $\mathbf{F}_{q^2}\backslash\mathbf{F}_q$. Le sous-espace vectoriel des telles fonctions est de dimension 1 et on vient de prouver qu'il contient $\mathbf{C}[\mathbf{F}_{q^2}]^{G^+}$. Donc $\mathbf{C}[\mathbf{F}_{q^2}]^{G^+}$ est de dimension au plus 1. Puisque $(\rho_\psi, \mathbf{C}[\mathbf{F}_{q^2}])$ est distinguée, on a bien prouvé que $\dim(\mathbf{C}[\mathbf{F}_{q^2}]^{G^+}) = 1$.

43. D'après les questions 29 et 7, une classe d'isomorphisme de représentations irréductibles de dimension 1 de G^+ est entièrement déterminée par un élément de $\widehat{(\mathbf{F}_q, +)}^2$. D'après la question 39, une classe d'isomorphisme de représentations irréductibles distinguées de dimension 1 de G est entièrement déterminée par un élément de $\widehat{(\mathbf{F}_{q^2}/\mathbf{F}_q, +)}^2$. Si f est un isomorphisme de $\mathbf{F}_{q^2}/\mathbf{F}_q$ dans $\mathbf{F}_q$, alors l'application $(\psi_1, \psi_2) \mapsto (\psi_1 \circ f^{-1}, \psi_1 \circ f^{-1})$ est une bijection de $\widehat{(\mathbf{F}_q, +)}^2$ dans $\widehat{(\mathbf{F}_{q^2}/\mathbf{F}_q, +)}^2$.
D'après la partie V, toute autre classe d'isomorphisme de représentations irréductibles de G^+ est entièrement déterminée par un élément de $\widehat{(\mathbf{F}_q, +)}\backslash\{1\}$; d'après la question 40, toute autre classe d'isomorphisme de représentations irréductibles distinguées de G l'est par un élément de $\widehat{(\mathbf{F}_{q^2}/\mathbf{F}_q, +)}\backslash\{1\}$, et $\psi \mapsto \psi \circ f^{-1}$ est une bijection entre $\widehat{(\mathbf{F}_q, +)}\backslash\{1\}$ et $\widehat{(\mathbf{F}_{q^2}/\mathbf{F}_q, +)}\backslash\{1\}$. Dans, les deux cas, f induit donc une bijection naturelle entre les classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de G^+ et celles des représentations irréductibles distinguées de G.

Chapitre 4

Épreuve écrite d'analyse et probabilités

4.1 Énoncé

Le sujet est disponible à l'URL https://www.devenirenseignant.gouv.fr/cid159832/sujets-rapports-des-jurys-agregation-2022.html ou sur le site https://agreg.org.

4.2 Rapport sur l'épreuve écrite d'analyse et probabilités

Rapport sur l'épreuve écrite d'Analyse et Probabilités.

Présentation du sujet.

L'objectif principal du sujet d'analyse et probabilités est la démonstration du théorème des nombres premiers. Ce théorème a été prouvé à la fin du XIXème siècle par Hadamard et de la Vallée-Poussin. De nombreuses preuves en ont depuis été données, et celle qui a été suivie dans le sujet est due à Hardy et Littlewood (en 1915), qui l'ont déduite d'un théorème taubérien qu'ils avaient eux-mêmes démontré quelques années auparavant. Karamata a par la suite trouvé une méthode basée sur des outils d'analyse fonctionnelle qui a permis de simplifier la preuve de ce théorème taubérien (et qui par ailleurs a ouvert la voie à une étude systématique de ces théorèmes) : la méthode suivie dans le sujet est une extension des méthodes de Karamata à ce contexte, due à Baran [1].

Le problème est progressif ; il permet à tous les candidats d'aborder un ensemble varié de questions testant leurs connaissances fondamentales d'analyse et de mettre en valeur leur capacité de rédaction. La partie **I** regroupe des résultats utiles pour la suite du sujet sur les fonctions Γ, ζ et l'holomorphie des séries de Dirichlet ainsi que deux exercices (l'un porte sur une sous-famille dense dans $\ell^2(\mathbb{N})$, l'autre sur le logarithme complexe).

La partie **II** étudie d'abord une variante de l'équation fonctionnelle de Cauchy, puis démontre le théorème taubérien de Karamata. L'analyse réelle, les calculs d'ensembles et de bornes supérieures, des résultats de densité et les techniques d'estimation y sont omniprésents.

La partie **III** approfondit le thème du calcul intégral, d'abord par l'étude de la transformée de Mellin : les intégrales à paramètres et la transformation de Fourier ainsi que le prolongement analytique y jouent un rôle prépondérant. Elle se termine par une application à la théorie des distributions, indépendante du reste du texte.

La partie **IV** est consacrée aux propriétés de la fonction zeta en la variable réelle, d'abord le produit eulérien prouvé par voie probabiliste, puis une estimation du logarithme de la fonction ζ au voisinage du point 1. Ces estimations sont ensuite étendues au plan complexe et affinées lors de la difficile partie **V**, qui est le cœur technique de la démonstration du théorème des nombres premiers, laquelle est finalisée en partie **VI**, grâce en particulier au théorème taubérien de Karamata établi en partie **II**.

Nous recommandons la lecture du livre de Choimet-Queffélec [3] en particulier pour son chapitre sur les théorèmes taubériens, [2] pour une exposition de la méthode de Karamata ; les livres de Davenport [4], de Jameson [6], [8] pour une initiation à la théorie analytique des nombres avant d'aborder ceux de Tenenbaum [7] et d'Iwaniec-Kowalski [5], références incontournables de la théorie analytique des nombres moderne (en incluant l'étude des formes modulaires pour ce dernier).

Bibliographie

[1] M. Baran : *A Karamata Method I. Elementary Properties and Applications*. Canadian Mathematical Bulletin, 34(2), 147-157, 1991 doi :10.4153/CMB-1991-025-5

[2] N.H. Bingham, C.M. Goldies & J.L. Teugels : *Regular Variation*, Encyclopedia of mathematics and its applications 27, Cambridge University Press 1987.

[3] D. Choimet, H. Queffélec : *Analyse mathématique : grands théorèmes du vingtième siècle*, Paris : Calvage & Mounet, 2009.

[4] H. Davenport, *Multiplicative number theory*. 3rd ed. New York, NY : Springer, 2000.

[5] H. Iwaniec, E. Kowalski : *Analytic number theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications 53, American Mathematical Society, Providence RI, 2004.

[6] G. J. O. Jameson, *The prime number theorem*. Cambridge University Press, 2003.

[7] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*. 2ème éd. Paris : Société Mathématique de France, 1995.

[8] E.C Titchmarsh. *The Theory of the Riemann Zeta-function*, Oxford science publications, Clarendon Press 1986.

Remarques générales sur les copies.

Le sujet d'Analyse et Probabilités était très long. Cela s'explique par l'objectif (ambitieux) fixé initialement par le texte et la nécessité de tester le candidat sur des thèmes variés, tout en demeurant progressif.

Il n'était pas nécessaire de s'avancer très loin dans le sujet pour obtenir une note tout à fait convenable. Le jury apprécie les copies qui n'esquivent pas les difficultés pour se concentrer uniquement sur les questions les plus faciles du sujet. Les premières parties permettaient d'évaluer la solidité des connaissances et la maîtrise des thèmes élémentaires. Une rédaction précise, efficace et soignée y est particulièrement attendue.

Un candidat à l'Agrégation Externe de Mathématiques doit faire un effort particulier dans la rédaction : un futur professeur se doit d'avoir des qualités pédagogiques, et d'être soucieux d'être compris du lecteur. Pour autant, il n'est pas nécessaire d'écrire des paragraphes interminables : la clarté et la brièveté de l'argument facilitent la compréhension d'un raisonnement, par la mise en avant des arguments essentiels, et ce au bon moment, tout en libérant un temps précieux pour avancer efficacement dans le problème.

En début de copie en particulier, il est important de soigner sa rédaction afin d'établir un lien de confiance avec le correcteur. Le jury attend de la part du candidat qu'il montre comment il raisonne, qu'il explique ce qu'il fait, qu'il vérifie soigneusement les hypothèses d'un théorème qu'il utilise, ou qu'il les mentionne au moins lorsque la vérification est évidente, afin que le correcteur n'ait aucun doute de la démarche du candidat.

D'un point de vue technique, le jury a noté des progrès importants de la part des candidats concernant la convergence des intégrales et des séries. Cette session, le jury a lu beaucoup moins de démonstrations de l'intégrabilité sur $[a,+\infty[$ d'une fonction f continue par morceaux en prouvant l'existence d'un M tel que $|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t| \leqslant M$. Les candidats dans leur grande majorité travaillent sur la fonction f elle même, et ont le bon réflexe de comparer la quantité $|f(x)|$ à des fonctions de référence. Il en va de même pour la convergence des séries numériques. Il y a néanmoins des erreurs techniques à déplorer : les plus marquantes sont détaillées ci-dessous.

En revanche, le jury a été très surpris du faible nombre de candidats traitant correctement un certain nombre des toutes premières questions. En particulier, trois difficultés ont attiré son attention :
• l'intégration par parties impropre, faite sans aucune précaution de convergence,
• la dérivation terme à terme d'une série de fonctions, par «linéarité», comme s'il s'agissait d'une somme finie, ou en invoquant seulement la convergence uniforme de la série,
• l'encadrement série-intégrale, tout simplement ignoré (ou énoncé sous la forme d'une égalité entre somme d'une série et d'une intégrale).
Il s'agit là de questions de cours élémentaires, traitées en L2, dont la maîtrise est importante. Or plus de la moitié des candidats a été mise en grande difficulté par ces techniques.

Remarques individuelles sur les questions.

I-1) De nombreux candidats pensent qu'une fonction continue sur un intervalle est nécessairement intégrable ; beaucoup semblent ne pas avoir conscience que, pour la fonction proposée, il y a «un problème» en 0, et nombre d'entre eux ne semblent pas distinguer le fait qu'une fonction soit bien définie en un point de la continuité en ce point.

I-2a) Seul un tiers des copies a obtenu la totalité des points à cette question, et moins de la moitié des copies dépasse la moitié des points ! La propriété de linéarité de la dérivation ne permet pas de dériver terme à terme une somme *infinie*. On a même lu des preuves par holomorphie sur un intervalle de la droite réelle !

Le jury profite de cette occasion pour rappeler que la limite d'une suite de fonctions toutes de classe C^1 peut très bien ne pas être dérivable. Ainsi, il existe des fonctions continues sur $[0,1]$ mais dérivables en aucun point : une telle fonction est limite uniforme d'une suite de polynômes.

Enfin, le jury attendait une démonstration de la convergence normale de la série des dérivées. Entre les copies affirmant une convergence normale sur $]1,+\infty[$, celles invoquant une convergence uniforme sans la justifier entièrement, le jury a lu bien peu de copies proposant une solution complète de cette question.

I-2b) Seul 65% des copies aborde cette question, et parmi celles qui l'ont fait seule la moitié obtient la moitié des points !

I-3a) De nombreuses copies ont produit des graphes très brouillons, ce qui est étonnant de la part de candidats à un concours d'enseignement. Seule 52% des copies ont obtenu la moitié des points.

Quelques candidats ont pris trop de temps et se sont lancés dans de longues études de fonctions (qui n'étaient pas demandées). Signalons en passant qu'en un point où sa dérivée s'annule une fonction n'atteint pas forcément un extrémum : l'étude du signe d'une dérivée ne peut se faire que par la résolution d'une inéquation.

I-3d) Le calcul de $\Lambda_\alpha(\mathtt{m}_p)$ a été peu réussi : beaucoup d'intégrations par parties peu utiles qui se concluent confusément en faisant comme si α était entier.

I-4a) Cette question n'a pas été très bien réussie. Dans les copies qui avaient repéré que $\psi(x) = \psi(\lfloor x \rfloor)$ (ce qui n'était pas toujours explicitement écrit), la suite du raisonnement a été très rarement rédigée correctement avec des passages de x à n mystérieux, et donc peu convaincants.

I-4b, 4d) Il a été très rarement mentionné dans l'argumentation que si une limite existe, elle est égale à la limite inférieure. Dans une fraction significative de copies, les candidats présupposent l'existence de la limite de $x^{-1}\pi(x)\log x$.

I-5b) Les candidats ayant abordé cette question ont quasiment toujours eu l'idée des intégrations par parties. En revanche la gestion des crochets a été souvent mal traitée. De nombreuses copies invoquent le fait qu'une fonction intégrable tend nécessairement vers 0 en $\pm\infty$: les fonctions serpents ou en dents de scie, non bornées en $+\infty$, fournissent des contrexemples qu'un candidat à l'Agrégation se doit de connaître.

I-6c) Environ 40% des copies ont abordé cette question et parmi celles-ci 50 % ont eu plus que la moyenne.

Une fraction significative de copies ne donne aucun argument. Une bonne part de réponses correctes utilise l'argument de la convergence normale pour intervertir somme et limite mais sous une forme parfois incantatoire : les nombreux candidats ayant raisonné à la question précédente avec des compacts inclus dans $\mathbf{H}_{\sigma_0}$ n'ont en fait pas démontré la convergence normale sur $\mathbf{H}_{\sigma_0}$ dont on a besoin ici. Invoquer un théorème sans le citer et surtout sans se donner la peine d'en vérifier ses hypothèses ne rapporte pas de point !

I-6d) Le jury regrette l'oubli quasi-systématique des hypothèses (connexité, point d'accumulation) dans l'application du principe des zéros isolés.

II-1) Cette question a été abordée par 52% des copies ; parmi celles-ci 50% ont eu plus de la moyenne.

De nombreuses copies parviennent à montrer la $\mathbf{Q}$-linéarité (en oubliant souvent le cas des entiers négatifs cependant), mais de nombreuses copies invoquent, pour le passage aux réels par densité, une continuité qui n'est pas supposée.

II-2a) La non-vacuité de $J(x)$ a souvent été justifiée correctement. En revanche le caractère minoré de $J(x)$ a donné lieu a des erreurs (parfois de logique). Seulement $24,5\%$ des copies ont tous les points à cette question.

II-2b) La croissance de f a été dans l'ensemble bien traitée, ce qui est positif. En revanche la continuité à droite a été rarement justifiée correctement. Cela a souvent donné lieu à des rédactions très fautives montrant le manque d'aisance des candidats avec la notion de borne inférieure.

II-2c) Trop de copies manquent de soin logique pour montrer l'égalité des ensembles.

II-3b) Pour prouver l'existence de h, des copies donnent une formule dont la bonne définition est très souvent éludée. Parfois la propriété de multiplicativité est également oubliée. L'unicité n'a pas toujours été traitée. Un raisonnement par «analyse-synthèse» était tout à fait envisageable.

III-1d Un raisonnement complet n'apparaît que dans les bonnes copies. Les candidats n'ont souvent pas conscience de ne montrer que l'inclusion $D_\varphi \subset]0,\infty[$ et non l'égalité.

III-1e La preuve suggérée par l'énoncé n'a été fournie que par les bonnes copies. Il est étonnant que nombre de copies procèdent par une récurrence initialisée grâce à **I-1)** sans remarquer que le paramètre est désormais complexe.

IV-1 La sigma-additivité n'a pas toujours été invoquée et certains candidats traduisent mal la définition de l'indépendance.

Moins de 5% des copies ont traité des questions ultérieures.

4.3 Corrigé de l'épreuve écrite d'analyse et probabilité

Corrigé de l'épreuve d'Analyse-Probabilités 2022.

Partie I.

I-1 La fonction $f : x \mapsto e^{-x}x^{\sigma-1}$ est d'abord continue par morceaux sur $\mathbf{R}_+^*$, donc localement intégrable. On a

- $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^{\sigma-1}$ qui est intégrable en 0 car $\sigma - 1 > -1$ et
- $f(x) = \mathrm{o}_{x\to+\infty}(1/x^2)$ et $x \mapsto 1/x^2$ est intégrable en $+\infty$.

Ces deux estimations assurent l'intégrabilité de f sur $\mathbf{R}_+^*$.

Variante : On peut dire également que f est mesurable sur $\mathbf{R}_+^*$, que $|f(x)| \leqslant x^{\sigma-1}$ pour $x \in]0,1]$, $|f(x)| \leqslant C/x^2$ avec $C = \sup_{x\in[1,+\infty[} x^{\sigma+1}e^{-x}$ si $x \geqslant 1$, ce qui donne $|f(x)| \leqslant x^{\sigma-1}\mathbb{1}_{]0,1]}(x) + C\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)/x^2$ et par majoration f est intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$.

Une intégration par parties impropre, obtenue (à bon droit par convergence du crochet par croissance comparée en $+\infty$, ou tout simplement par la convergence des deux intégrales apparaissant de part et d'autre) en dérivant la fonction $x \mapsto x^\sigma$ qui est C^1 et en primitivant la fonction $x \mapsto e^{-x}$ qui est C^0 sur $\mathbf{R}_+^*$, fournit la relation $\Gamma(\sigma+1) = \sigma\Gamma(\sigma)$.

La fonction f est en outre positive et continue sur $\mathbf{R}_+^*$. Si l'intégrale $\int_{\mathbf{R}_+^*} f$ était nulle, on aurait $f = 0$ partout, ce qui est absurde puisque f est en fait partout > 0. D'où $\Gamma(\sigma) > 0$ pour tout σ.

Variante : On peut dire également que f est mesurable et positive, et que l'hypothèse $\int_{\mathbf{R}_+^*} f = 0$ entraînerait f nulle presque partout, ce qui n'est pas le cas.

I-2a Posons $u_n(\sigma) = n^{-\sigma}$.
• Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, u_n est C^1 sur $]1, +\infty[$ par composition vu que $u_n(\sigma) = \exp(-\sigma \log n)$,
• la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$ comme cela est rappelé (règle dite de Riemann relative aux séries numériques),
• pour tout $\sigma \in [a, b] \subset]1, +\infty[$, on a $|u_n'(x)| = \log n.n^{-\sigma} \leqslant \log n.n^{-a} = o(n^{-(a+1)/2})$, terme général (indépendant de x) d'une série absolument convergente. On a donc convergence normale, donc uniforme, de $\sum u_n'$ sur tous les segments de $]1, +\infty[$.
Ces trois propriétés assurent la préservation du caractère C^1 pour la somme, ainsi que la relation, pour tout $\sigma > 1$, $\zeta'(\sigma) = -\sum_{n=1}^{\infty} \log n.n^{-\sigma}$.
Par positivité des termes, on a $\zeta(\sigma) \geqslant u_1(\sigma) = 1$, donc ζ est à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$.

I-2b Notons, pour tout $t \geqslant 1$ et $\sigma > 0$, $f(t) = t^{-\sigma-1}$
La fonction f est décroissante et continue par morceaux sur $[1, +\infty[$ de sorte que pour tout $n \geqslant 1$ on a l'encadrement

$$\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\sigma n^\sigma} = \int_1^n f(x) \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^n f(k) \leqslant f(1) + \int_1^n f(x) \mathrm{d}x = 1 + \frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\sigma n^\sigma}$$

En faisant tendre n vers l'infini, par conservation des inégalités larges il vient

$$\frac{1}{\sigma} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \zeta(1+\sigma) \leqslant 1 + \frac{1}{\sigma}$$

En multipliant cet encadrement par σ qui est > 0 on obtient l'équivalent souhaité $\zeta(\sigma+1) \underset{\sigma \to 0}{\sim} 1/\sigma$.
Remarque : On peut dire également que la série $\sum f(k)$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} f$ sont de même nature, par décroissance et positivité de f, donc en l'occurrence convergente puisque la série l'est, d'où l'encadrement

$$\int_1^{+\infty} f \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \zeta(1+\sigma) \leqslant f(1) + \int_1^{+\infty} f.$$

On finit en calculant l'intégrale (qui vaut $1/\sigma$) et on conclut comme précédemment. Cette variante évite le passage à la limite sur n, mais il ne faut pas oublier de justifier correctement l'existence des objets présents dans l'inégalité.

I-3a Il était attendu (ou espéré) de voir distinctement sur les copies le comportement en les bornes, ainsi que les éventuelles tangentes (horizontales, verticales) en 0 et en 1.

I-3b • On suppose que $\alpha > 1$. On observe que $\lim_{t \to 0^+} t^{\frac{1}{2(\alpha-1)}} \log 1/t = 0$. Donc la fonction $t \in]0, 1] \mapsto \sqrt{t}(-\log t)^{\alpha-1}$ est continue positive et prolongeable par continuité à droite en 0 : le prolongement

est une fonction continue positive sur $[0,1]$: elle est majorée. On note alors c_α sa borne supérieure et on obtient l'inégalité voulue.
• Si $\alpha=1$, on a $\sqrt{t}(-\log t)^{\alpha-1}=\sqrt{t}$ et il suffit de choisir $c_1=1$.
• On suppose $\alpha\in\,]0,1[$. On observe d'une part que $\lim_{t\to0^+}(1-t)^{1-\alpha}(-\log t)^{\alpha-1}=0$. D'autre part, $\lim_{t\to1-}(1-t)^{1-\alpha}(-\log t)^{\alpha-1}=1$, car $\log t/(1-t)$ tend vers la dérivée de log en 1 lorsque $t\to 1-$. Donc la fonction $t\in\,]0,1[\,\mapsto(1-t)^{1-\alpha}(-\log t)^{\alpha-1}$ est continue positive prolongeable par continuité à droite en 0 et à gauche en 1 : le prolongement est une fonction continue positive sur $[0,1]$: elle est donc majorée. On note alors c'_α sa borne supérieure et on obtient l'inégalité voulue.

I-3c Notons $g(t)=f(t)(-\log t)^{\alpha-1}$.
• La fonction g est continue par morceaux sur $]0,1[$ (donc localement intégrable).
• Si $\alpha\geqslant1$, on a la majoration $|g(t)|\leqslant\|f\|_\infty c_\alpha/\sqrt{t}$. La fonction $t\mapsto1/\sqrt{t}$ est intégrable sur $]0,1]$ (sa primitive $t\mapsto\sqrt{t}$ a une limite finie en 0) et donc g l'est aussi par majoration.
• Si $\alpha\in]0,1[$, on a cette fois la majoration $|g(t)|\leqslant\|f\|_\infty c'_\alpha(1-t)^{-1+\alpha}$ et l'intégrabilité de $t\mapsto(1-t)^{1-\alpha}$ sur $[0,1[$ (sa primitive $t\mapsto-(1-t)^{-\alpha}/\alpha$ a une limite finie en 1^-) assure celle de g.
Variante proposée par un candidat : on procède au changement de variable $t=e^{-u}$ qui donne (dans $\overline{\mathbf{R}}_+$)

$$\int_0^1|f(t)(-\log t)^{\alpha-1}|\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}|f(e^{-u}))|u^{\alpha-1}e^{-u}\mathrm{d}u.$$

L'intégrande du membre de droite se majore en $\|f\|_{\infty,[0,1]}u^{\alpha-1}e^{-u}$ qui est intégrable par la question **I-1)**.

I-3d • La linéarité de Λ_α vient de la linéarité de l'intégrale (sur l'espace des fonctions intégrables).
• On fixe $b\in\,]0,1/2[$. Par le changement de variable $s=-\log t$ qui est bien un C^1-difféomorphisme, on obtient

$$\int_b^{1-b}t^p(-\log t)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t=\int_{-\log(1-b)}^{-\log b}e^{-(p+1)s}s^{\alpha-1}\mathrm{d}s\,.$$

En effectuant le changement de variable $r=(p+1)s$, on obtient ensuite

$$\int_b^{1-b}t^p(-\log t)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t=(p+1)^{-\alpha}\int_{-(p+1)\log(1-b)}^{-(p+1)\log b}e^{-r}r^{\alpha-1}\mathrm{d}r$$

et en faisant tendre b vers 0, on obtient par les questions **3c)** et **1)**

$$\int_0^1t^p(-\log t)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t=(p+1)^{-\alpha}\int_0^\infty e^{-r}r^{\alpha-1}\mathrm{d}r=(p+1)^{-\alpha}\Gamma(\alpha)\,.$$

Donc $\Lambda_\alpha(\mathtt{m}_p)=(p+1)^{-\alpha}$.
Remarque : Il est également possible de travailler directement sur l'intégrale $\int_0^1t^p(-\log t)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t$, à condition de préciser qu'un changement de variable C^1 bijectif préserve la convergence des intégrales (ou l'intégrabilité).

I-3e Pour tout $t\in\,]0,1[$, on a $|f(t)(-\log t)^{\alpha-1}|\leqslant\|f\|_\infty(-\log t)^{\alpha-1}$. Donc par l'inégalité triangulaire et **3d**, on a

$$|\Lambda_\alpha(f)|\leqslant\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1|f(t)(-\log t)^{\alpha-1}|\mathrm{d}t\leqslant\frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(-\log t)^{\alpha-1}\mathrm{d}t=\|f\|_\infty\Lambda_\alpha(\mathtt{m}_0)=\|f\|_\infty.$$

I-3f On prend f_ε continue, nulle sur $[0, e^{-1}]$, coïncidant avec J sur l'intervalle $[e^{-1}+\varepsilon, 1]$ et affine sur $[e^{-1}, e^{-1}+\varepsilon]$; on choisit g_ε continue, nulle sur $[0, e^{-1}-\varepsilon]$, coïncidant avec J sur l'intervalle $[e^{-1}, 1]$ et affine sur $[e^{-1}-\varepsilon, e^{-1}]$.

Explicitement (mais dans ce cas, un dessin clair vaut mieux qu'une formule) : pour tout $t \in [0, e^{-1}-\varepsilon]$, on pose $h_\varepsilon(t) = f_\varepsilon(t) = J(t) = 0$. Pour tout $t \in [e^{-1}-\varepsilon, e^{-1}]$, on pose $f_\varepsilon(t) = 0$ et $h_\varepsilon(t) = e\varepsilon^{-1}(t - e^{-1} + \varepsilon)$. Pour tout $t \in [e^{-1}, e^{-1}+\varepsilon]$, on pose $h_\varepsilon(t) = J(t) = 1/t$ et $f_\varepsilon(t) = J(e^{-1}+\varepsilon)\varepsilon^{-1}(t - e^{-1})$. Enfin pour tout $t \in [e^{-1}+\varepsilon, 1]$, on pose $h_\varepsilon(t) = f_\varepsilon(t) = J(t) = 1/t$.

I-3g On observe que $e^{-1} - \varepsilon > e^{-2}$ et comme $e^{-1/2} - e^{-1} > e^{-1} - e^{-2} > \varepsilon$, on a $e^{-1} + \varepsilon < e^{-1/2}$. Autrement dit, si $\varepsilon \in]0, e^{-1} - e^{-2}[$ et si $t \in [e^{-1}-\varepsilon, e^{-1}+\varepsilon]$, alors $e^{-2} < t < e^{-1/2}$ et donc $1/2 < -\log t < 2$.

Si $\alpha \geqslant 1$, $y \mapsto y^{\alpha-1}$ croît et donc $(-\log t)^{\alpha-1} \leqslant 2^{\alpha-1} \leqslant 2^{\alpha+1}$. Si $\alpha \in]0,1[$, $y \mapsto y^{\alpha-1}$ decroît et donc $(-\log t)^{\alpha-1} \leqslant (1/2)^{\alpha-1} = 2^{1-\alpha} \leqslant 2^{\alpha+1}$. Dans les deux cas on a $(-\log t)^{\alpha-1} \leqslant 2^{\alpha+1}$.

Par positivité de $t \in]0,1[\longmapsto (-\log t)^{\alpha-1}$, la forme linéaire Λ_α est positive et comme $f \leqslant J \leqslant h_\varepsilon \leqslant f_\varepsilon + e\mathbf{1}_{[e^{-1}-\varepsilon, e^{-1}+\varepsilon]}$, on a grâce à **I-3c)**

$$\Lambda_\alpha(f_\varepsilon) \leqslant \Lambda_\alpha(J) \leqslant \Lambda_\alpha(h_\varepsilon) \leqslant \Lambda_\alpha(f_\varepsilon) + \frac{e2^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \mathbf{1}_{[e^{-1}-\varepsilon, e^{-1}+\varepsilon]}(t)\, \mathrm{d}t = \Lambda_\alpha(f_\varepsilon) + \frac{e2^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha)}\varepsilon\,,$$

ce qui est le résultat souhaité.

I-4a On observe que $\psi(x) = \psi(\lfloor x \rfloor)$, ainsi $\frac{\psi(x)}{x} = \frac{\psi(\lfloor x \rfloor)}{\lfloor x \rfloor}\frac{\lfloor x \rfloor}{x}$ et on conclut grâce à l'encadrement $1 - 1/x = \frac{x-1}{x} \leqslant \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \leqslant 1$ que $\frac{\lfloor x \rfloor}{x}$ tend vers 1 et donc que $\psi(x)/x$ tend vers 1 quand $x \to +\infty$.

I-4b Soit $p \in \mathscr{P}$. On note que $p^k \leqslant x$ si et seulement si $k \leqslant \log_p x$. Donc $\#\big([0,x] \cap \{p^k ; k \in \mathbf{N}^*\}\big) = \lfloor \log_p x \rfloor$. Par définition, pour tout $p \in \mathscr{P}$, $\{n \in [1,x] \cap \mathbf{N} : \Lambda(n) = \log p\} = [0,x] \cap \{p^k ; k \in \mathbf{N}^*\}$ donc

$$\psi(x) = \sum_{p \in \mathscr{P}(x)} \log p \,.\, \#\big(\{n \in [1,x] \cap \mathbf{N} : \Lambda(n) = \log p\}\big) = \sum_{p \in \mathscr{P}(x)} \lfloor \log_p x \rfloor \log p\,.$$

Puisque $\lfloor \log_p x \rfloor \log p \leqslant \log x$, l'égalité précédente entraîne $\psi(x) \leqslant \pi(x) \log x$ et donc $x^{-1}\pi(x)\log x \geqslant \psi(x)/x$. La conservation des inégalités larges par passage à la limite inférieure implique que $\liminf_{x\to+\infty}(x^{-1}\pi(x)\log x) \geqslant \liminf_{x\to+\infty} \psi(x)/x = 1$ par la question précédente (quand la limite existe, elle est égale à la limite inférieure).

I-4c Soit $\beta \in]0,1[$. On observe que si $x \geqslant p \geqslant x^\beta$, alors d'une part $\log p \geqslant \log x^\beta$ et d'autre part $\log_p x \geqslant 1$, donc $\lfloor \log_p x \rfloor \geqslant 1$. On en déduit

$$\psi(x) - \psi(x^\beta) \geqslant \sum_{p \in \mathscr{P}(x) \backslash \mathscr{P}(x^\beta)} \lfloor \log_p x \rfloor \log p \geqslant \#\big(\mathscr{P}(x) \backslash \mathscr{P}(x^\beta)\big) \log x^\beta.$$

Or d'une part $\#\big(\mathscr{P}(x) \backslash \mathscr{P}(x^\beta)\big) = \pi(x) - \pi(x^\beta)$ et d'autre part, il est clair que $\pi(x^\beta) \leqslant x^\beta$. Donc

$$\psi(x) \geqslant \psi(x) - \psi(x^\beta) \geqslant (\pi(x) - \pi(x^\beta))\log x^\beta \geqslant (\pi(x) - x^\beta)\beta \log x\,,$$

qui implique l'inégalité voulue.

En particulier on a

$$x^{-1}\pi(x)\log x \leqslant \beta^{-1}x^{-1}\psi(x) + x^{-(1-\beta)}\log x$$

on passe à la limite supérieure, qui est sous-additive et conserve les inégalités larges :

$$\limsup_{x\to+\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} \leqslant \limsup_{x\to+\infty} \left(\beta^{-1}\frac{\psi(x)}{x} + \frac{\log x}{x^{1-\beta}}\right) \leqslant \beta^{-1} \limsup_{x\to+\infty} \frac{\psi(x)}{x} + \limsup_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^{1-\beta}} = \beta^{-1}$$

par $(\mathcal{E}q_2)$ puisque la limite supérieure coïncide avec la limite quand celle-ci existe.

I-4d La question précédente donne en faisant tendre β vers 1 : $\limsup_{x\to+\infty} x^{-1}\pi(x)\log x \leqslant 1$. Combiné à la question **4b)**, cela entraîne que $1 \leqslant \limsup_{x\to+\infty} x^{-1}\pi(x)\log x \leqslant \liminf_{x\to+\infty} x^{-1}\pi(x)\log x \leqslant 1$ donc que les limites supérieures et inférieures sont toutes deux égales à 1, donc que la limite quand $x \to +\infty$ de $x^{-1}\pi(x)\log x$ existe et vaut 1. D'où $(\mathcal{E}q_1)$.

I-5a Par hypothèse $C = \sup_{t\in\mathbf{R}} t^2\big(|f(t)|+|f'(t)|+|f''(t)|\big)$ est une quantité finie. Pour tout $i = 0, 1, 2$, et tout $t \in \mathbf{R}$, on a $|f^{(i)}(t)| \leqslant \mathbf{1}_{[-1,1]}(t)|f^{(i)}(t)| + Ct^{-2}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(|t|)$. Le membre de droite est une fonction intégrable sur $\mathbf{R}$, d'où l'intégrabilité par majoration de la fonction mesurable (ou continue par morceaux) $|f^{(i)}|$.
Variante : Il est également correct de dire que les fonctions $f^{(i)}$ étant continues par morceaux sur $\mathbf{R}$, leur intégrabilité est assurée par l'estimation $f^{(i)} = \mathrm{O}_{|t|\to+\infty}(1/t^2)$, selon la règle dite de Riemann.

I-5b On fixe $x \in \mathbf{R}$. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a $e^{-2i\pi xt}f''(t) - 2i\pi x e^{-2i\pi xt}f'(t) = (e^{-2i\pi xt}f'(t))'$. Donc pour tout réel $y > 0$, on a

$$\int_{-y}^{y} e^{-2i\pi xt}f''(t)\mathrm{d}t - 2i\pi x\int_{-y}^{y} e^{-2i\pi xt}f'(t)\mathrm{d}t = e^{-2i\pi xy}f'(y) - e^{2i\pi xy}f'(-y)\ .$$

L'hypothèse sur f implique que $f'(y)$ et $f'(-y)$ tendent vers 0 lorsque $y \to +\infty$, puisque dominées par $1/y^2$. Comme f' et f'' sont intégrables leur transformée de Fourier est bien définie et en faisant $y \to +\infty$ dans l'égalité précédente, on obtient

$$\widehat{(f'')}(x) - 2i\pi x\widehat{(f')}(x) = 0\ .$$

On raisonne de même avec f' pour obtenir $\widehat{(f')}(x) - 2i\pi x\widehat{f}(x) = 0$. Donc $\widehat{(f'')}(x) = -4\pi^2x^2\widehat{f}(x)$.

I-5c On pose $c = \int_{-\infty}^{+\infty}|f''(t)|\mathrm{d}t$ qui est donc une quantité finie par **5a)**. La question précédente et l'inégalité triangulaire impliquent pour tout $x \in \mathbf{R}$, que

$$4\pi^2x^2|\widehat{f}(x)| = \big|\widehat{(f'')}(x)\big| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f''(t)e^{-2i\pi xt}|\mathrm{d}t = c\ .$$

Donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $|\widehat{f}(x)| \leqslant \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)|\widehat{f}(x)| + c(2\pi x)^{-2}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(|x|)$. Comme $\widehat{f}$ est continue sur $\mathbf{R}$ elle est intégrable sur $[-1,1]$. La fonction $x \in \mathbf{R} \mapsto \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)|\widehat{f}(x)|+c(2\pi x)^{-2}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(|x|)$ est donc intégrable sur $\mathbf{R}$ et il en est de même pour $\widehat{f}$.
Variante : On peut également dire que $\widehat{f}$ étant continue, elle est localement intégrable et son intégrabilité sur $\mathbf{R}$ se déduit de l'estimation $\widehat{f}(x) = \mathrm{O}_{x\to+\infty}(1/x^2)$ par la régle de Riemann.

I-6a Soit $s \in \mathbf{H}_{\sigma_0}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $|a_nn^{-s}| \leqslant |a_n|n^{-\mathrm{Re}(s)} \leqslant |a_n|n^{-\sigma_0}$. Cela montre que la série de terme général $(a_nn^{-s})_{n\in\mathbf{N}^*}$ est convergente.

I-6b On a $\sup_{s\in \mathbf{H}_{\sigma_0}} |a_n n^{-s}| \leqslant |a_n| n^{-\sigma_0}$. Par conséquent la série de fonctions de terme général $s \mapsto a_n n^{-s}$, $n \geqslant 1$, est normalement convergente sur $\mathbf{H}_{\sigma_0}$ et a fortiori sur tout compact de $\mathbf{H}_{\sigma_0}$. Par un résultat rappelé en début de problème, cela implique que $\varphi_{\mathbf{a}}$ est holomorphe sur $\mathbf{H}_{\sigma_0}$.

I-6c Notons $u_n(\sigma) = a_n n^{-\sigma}$ pour $n \geqslant 1$ et $\sigma \geqslant \sigma_0$. On a
- À $n \geqslant 1$ fixé, $\lim_{\sigma\to+\infty} u_n(\sigma) = \ell_n = 0$ si $n \geqslant 2$, $= a_1$ si $n = 1$,
- $\sum u_n$ converge uniformément, car normalement, au voisinage de $+\infty$ (par la majoration $|u_n(\sigma)| \leqslant |a_n| n^{-\sigma_0}$ de la question précédente).

Ainsi, le théorème de la double limite assure la convergence de $\sum \ell_n$, qui est ici évidente, et le fait que $\lim_{\sigma\to+\infty} \varphi_{\mathbf{a}}(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \ell_n$, soit ici $\lim_{\sigma\to+\infty} \varphi_{\mathbf{a}}(\sigma) = a_1$ comme voulu.

Variante 1 : En s'appuyant sur le théorème de convergence dominée. En notant μ la mesure de comptage sur $\mathbf{N}^*$ et $f(\sigma, t) = u_t(\sigma)$ pour $t \in \mathbf{N}^*$, on peut en effet écrire

$$\varphi_{\mathbf{a}}(\sigma) = \int_{\mathbf{N}^*} f(\sigma, t) \mathrm{d}\mu(t)$$

Comme à $t \in \mathbf{N}^*$ fixé, on a $\lim_{\sigma\to+\infty} f(\sigma, t) = a_1$ si $t = 1$, 0 si $t \geqslant 2$ et qu'on a la domination $|f(t, \sigma)| \leqslant h(t) = |a_t| t^{-\sigma_0}$ dès que $\sigma \geqslant \sigma_0$ avec h intégrable sur $\mathbf{N}^*$ (par hypothèse faite sur σ_0), on a par théorème de convergence dominée

$$\lim_{\sigma\to+\infty} \int_{\mathbf{N}^*} f(\sigma, t) \mathrm{d}\mu(t) = a_1$$

Variante 2 : on note que pour tout $n \geqslant 2$, on a $|a_n| n^{-\sigma} \leqslant |a_n| n^{-\sigma_0} 2^{-\sigma+\sigma_0}$ par décroissance de $n \mapsto n^{-\sigma+\sigma_0}$, ce qui donne par inégalité triangulaire

$$|\varphi_{\mathbf{a}}(\sigma) - a_1| \leqslant 2^{-\sigma+\sigma_0} \sum_{n\geqslant 2} |a_n| n^{-\sigma_0} = \mathrm{O}_{\sigma\to+\infty}(2^{-\sigma})$$

d'où le résultat.

Sous l'hypothèse que les a_k sont nuls pour $k = 1, \dots, n_0 - 1$, on pose $v_n(\sigma) = a_n (n/n_0)^{-\sigma}$ pour $n \geqslant n_0$ et $\sigma \geqslant \sigma_0$. Comme ci-dessus :
- à $n \geqslant 1$ fixé, $\lim_{\sigma\to+\infty} v_n(\sigma) = \ell_n = 0$ si $n \geqslant n_0 + 1$, $= a_{n_0}$ si $n = n_0$,
- $\sum u_n$ converge uniformément, car normalement, au voisinage de $+\infty$ (par la majoration $|v_n(\sigma)| \leqslant |a_n| (n/n_0)^{-\sigma_0}$ cette fois).

On conclut par le même théorème que $\lim_{\sigma\to+\infty} n_0^{\sigma} \varphi_{\mathbf{a}}(\sigma) = a_{n_0}$.

I-6d Comme $\mathbf{H}_{\sigma_0}$ est un ouvert connexe et qu'un ouvert non vide possède un point d'accumulation au moins (chacun de ses points !), le principe des zéros isolés appliqué à la fonction holomorphe $\varphi_{\mathbf{b}} - \varphi_{\mathbf{a}}$ implique que $\varphi_{\mathbf{b}} - \varphi_{\mathbf{a}} = 0$. On pose $c_n = b_n - a_n$ et $\mathbf{c} = (c_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$. Cela implique que $\varphi_{\mathbf{c}} = \varphi_{\mathbf{b}} - \varphi_{\mathbf{a}}$ est identiquement nulle sur $\mathbf{H}_{\sigma_0}$. La question précédente montre alors que $c_1 = \lim_{\sigma\to+\infty} \varphi_{\mathbf{a}'}(\sigma) = 0$.

Soit $n_0 \in \mathbf{N}^*$. Supposons que $c_1 = \dots = c_{n_0-1} = 0$. La question précédente implique que $c_{n_0} = \lim_{\sigma\to+\infty} n_0^{\sigma} \varphi_{\mathbf{c}}(\sigma) = 0$.

Cela montre, par récurrence, que $c_n = 0$ c'est-à-dire $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

I-7a On a $|e_n(k)|^2 = n^{-2}$ et donc $\sum_{n\geqslant 1} |e_n(k)|^2 = \sum_{n\geqslant 1} n^{-2} < +\infty$.

I-7b Pour tout $\sigma_0 > 1/2$, on a par Cauchy-Schwarz

$$\sum_{n\geqslant 1} |a_n| n^{-\sigma_0} \leqslant \Big(\sum_{n\geqslant 1} |a_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{n\geqslant 1} n^{-2\sigma_0}\Big)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Par les questions précédentes, la série de Dirichlet $\varphi_{\mathbf{a}}$ de $\mathbf{a}$ est bien définie et holomorphe sur $\mathbf{H}_{\sigma_0}$. Comme σ_0 peut être choisi arbitrairement proche de $1/2$, $\varphi_{\mathbf{a}}$ est bien définie et holomorphe sur $\mathbf{H}_{1/2} = \bigcup_{\sigma_0>1/2} \mathbf{H}_{\sigma_0}$.

Variante proposée par un candidat : on utilise l'inégalité $|xy| \leqslant (x^2+y^2)/2$ pour tous x, y réels, avec $x = |a_n|$ et $y = n^{-\sigma_0}$. On en tire la majoration $|a_n|n^{-\sigma_0} \leqslant |a_n|^2/2 + n^{-2\sigma_0}/2$ et on conclut par critère de majoration.

I-7c L'hypothèse implique en particulier que $(\mathbf{a}, \mathbf{e}(k)) = 0$, c'est-à-dire

$$0 = (\mathbf{e}(k), \mathbf{a}) = \sum_{n\geqslant 1} a_n n^{-1+\frac{1}{k}i} = \varphi_{\mathbf{a}}\big(1 - \tfrac{1}{k}i\big)\ .$$

Donc $\varphi_{\mathbf{a}}$, holomorphe sur $\mathbf{H}_{1/2}$, s'annule sur l'ensemble infini $\{1 - \frac{1}{k}i\,;\, k \in \mathbf{N}^*\}$ de points admettant $1 \in \mathbf{H}_{1/2}$ comme point d'accumulation. Le principe des zéros isolés implique que $\varphi_{\mathbf{a}}$ est identiquement nulle et la question **6d)** entraîne que $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. On a montré que si $\mathbf{a}$ est orthogonale à V dans $\ell_2(\mathbf{N}^*)$ alors $\mathbf{a}$ est (identiquement) nulle. Ainsi V est un sous-espace dense de $\ell_2(\mathbf{N}^*)$, puisque celui-ci est un espace de Hilbert.

I-8 Soit un réel $\sigma_0 > 1$. Puisque la série de terme général $(n^{-\sigma_0})_{n\geqslant 1}$ converge dans $\mathbf{R}_+$ (sa somme est $\zeta(\sigma_0)$), la question **6b)** montre que ζ se prolonge en la fonction holomorphe $s \in \mathbf{H}_{\sigma_0} \mapsto \sum_{n\geqslant 1} n^{-s}$. Si une autre fonction $g : \mathbf{H}_{\sigma_0} \to \mathbf{C}$ prolongeait ζ, alors $g - \zeta$ s'annulerait sur $]\sigma_0, +\infty[$ et comme $\mathbf{H}_{\sigma_0}$ est connexe et qu'un intervalle non trivial possède au moins un point d'accumulation, le principe des zéros isolés impliquerait que $g - \zeta$ est nulle sur $\mathbf{H}_{\sigma_0}$. Par conséquent, le prolongement de ζ à $\mathbf{H}_{\sigma_0}$ est unique. Comme σ_0 peut être pris arbitrairement proche de 1, cela montre de même que ζ se prolonge de manière unique par une fonction holomorphe sur $\mathbf{H}_1 = \bigcup_{\sigma_0>1} \mathbf{H}_{\sigma_0}$.

Soit un réel $\sigma_0 > 1$. On observe que $|\mathbf{1}_{\mathscr{P}}(n) n^{-\sigma_0}| \leqslant n^{-\sigma_0}$ donc $s \in \mathbf{H}_{\sigma_0} \mapsto \sum_{n\geqslant 1} n^{-s} \mathbf{1}_{\mathscr{P}(n)} = \sum_{n\geqslant 1} p_n^{-s}$ définit bien une fonction holomorphe par la question **6b)**.

On observe ensuite que $\lim_{n\to+\infty} n^{-(\sigma_0-1)/2} \log n = 0$. Donc $C = \max_{n\geqslant 1} n^{-(\sigma_0-1)/2} \log n$ est une quantité finie. On a donc $\Lambda(n) n^{-\sigma_0} \leqslant n^{-\sigma_0} \log n \leqslant C n^{-(1+\sigma_0)/2}$ et la série de terme général $(\Lambda(n) n^{-\sigma_0})_{n\geqslant 1}$ converge dans $\mathbf{R}_+$. Par conséquent $s \in \mathbf{H}_{\sigma_0} \mapsto \sum_{n\geqslant 1} \Lambda(n) n^{-s}$ définit bien une fonction holomorphe, toujours par la question **6b)**. Comme σ_0 peut être choisi arbitrairement proche de 1, Z et Φ sont bien définies et holomorphes sur $\mathbf{H}_1 = \bigcup_{\sigma_0>1} \mathbf{H}_{\sigma_0}$.

I-9a La fonction exponentielle est holomorphe sur $\mathbf{C}$. Par composition des fonctions holomorphes, h est holomorphe sur $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}_-$. Par ailleurs, la fonction identité sur $\mathbf{C}$ est holomorphe sur $\mathbf{C}$ et donc en particulier sur l'ouvert $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}_-$. Sur $\mathbf{R}_+^*$, h et l'identité coïncident. Puisque $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}_-$ est connexe, par le principe des zéros isolés, h et l'identité coïncident donc sur $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}_-$.

I-9b Soit $z \in \mathbf{C}\backslash\mathbf{R}_-$. Il existe $\theta_0 \in \mathbf{R}$ tel que $z = |z| e^{i\theta_0}$. On a

$$|z| e^{i\theta_0} = z = \exp(\log z) = \exp(\mathrm{Re}\,(\log z)) \exp(i \mathrm{Im}\,(\log z))\ .$$

En prenant le module, on obtient $|z| = \exp(\mathrm{Re}\,(\log z))$ et comme sur $\mathbf{R}_+^*$ la fonction logarithme (népérien) est la fonction réciproque de l'exponentielle, on obtient $\log|z| = \mathrm{Re}\,(\log z)$.
De même on a $z/|z| = e^{i\theta_0} = \exp(i\mathrm{Im}\,(\log z))$.

I-9c Comme $|z| > 0$, on a $|z|e^{i\theta} \in \mathbf{R}_- \Leftrightarrow e^{i\theta} \in \mathbf{R}_- \Leftrightarrow \theta \equiv \pi \pmod{2\pi}$.
Comme on suppose $\theta \in]-\pi, \pi[$, on a $|z|e^{i\theta} \in \mathbf{C}\backslash\mathbf{R}_-$, donc $\log(|z|e^{i\theta})$ est bien définie et f également.
Le résultat de la question précédente donne

$$\exp\left(i\mathrm{Im}(\log(|z|e^{i\theta}))\right) = |z|e^{i\theta}/||z|e^{i\theta}| = e^{i\theta}$$

et donc en faisant le quotient il vient $e^{if(\theta)} = 1$. Par conséquent $f(\theta) \in 2\pi\mathbf{Z}$.
Comme f est continue par composition d'applications continues, elle est constante car $2\pi\mathbf{Z}$ est discret. Or elle vaut 0 en 0. Donc f est nulle et donc pour pour tout $\theta \in]-\pi, \pi[$, on a $\mathrm{Im}(\log(|z|e^{i\theta})) = \theta$.
En notant $\theta \in]-\pi, \pi]$ l'argument principal de z, on a $\theta \neq \pi$ puisque z n'est pas un réel négatif. Ce qui précède montre alors que $\mathrm{Im}(\log z) = \mathrm{Im}(\log(|z|e^{i\theta})) = \theta$, ce qui fournit comme voulu $\log z = \log(|z|) + i\arg(z)$.

I-9d On pose $z_1 = z_2 = e^{3i\pi/4}$. On a $z_1z_2 = e^{3i\pi/2} = -i = e^{-i\pi/2} \in \mathbf{C}\backslash\mathbf{R}_-$. Donc $\log z_1z_2 = -i\pi/2 \neq i3\pi/2 = \log z_1 + \log z_2$.

I-9e Soit $z \in \mathbf{C}\backslash\mathbf{R}_-$. On pose $\theta = \mathrm{Im}(\log z)$. Ce qui précède montre que $-\pi/4 = \mathrm{Im}(\log z_0)$. Soit θ_1 l'unique réel de $]-\pi, \pi[$ tel que $\theta_0 + \theta - \theta_1 \in 2\pi\mathbf{Z}$. On a $zz_0 = |zz_0|e^{i\theta_1}$ et donc $\mathrm{Im}(\log(zz_0)) = \theta_1$, $\mathrm{Im}(\log z) = \theta$ et $\mathrm{Im}(\log z_0) = -\pi/4$. Donc on a $\log(z_0z) = \log z + \log z_0$ si et seulement si $\theta_1 = \theta - \frac{1}{4}\pi$, autrement dit si et seulement si $-\pi < \theta - \frac{1}{4}\pi < \pi$. Comme $\theta \in]-\pi, \pi[$, on a que $\log(z_0z) = \log z + \log z_0$ si et seulement si $-\frac{3}{4}\pi < \theta < \pi$.
Géométriquement, cet ensemble est le plan complexe privé du secteur angulaire délimité par la demie-droite $\mathbf{R}_-$ des réels négatifs et par la demie-droite D image de $\mathbf{R}_-$ par la rotation d'angle $\pi/4$.

Partie II.

II-1 • Soit d'abord $r \in \mathbf{Q}$. Il existe $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{N}^*$ tels que $r = p/q$. Par ($\mathcal{E}q_5$), on a $f(r) = f(pq^{-1}) = f(q^{-1} + \ldots + q^{-1}) = pf(q^{-1})$. Comme on a également $f(1) = f(qq^{-1}) = qf(q^{-1})$ on obtient que $f(q^{-1}) = q^{-1}f(1)$. Cela montre que $f(r) = pq^{-1}f(1) = rf(1)$.
• Soit maintenant $x \in \mathbf{R}$. Il existe une suite de rationnels $(r_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ qui tend en décroissant vers x et une suite de rationnels $(r'_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ qui tend en croissant vers x. Comme f est croissante on a $f(r'_n) \leqslant f(x) \leqslant f(r_n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. Le premier point implique ensuite que $r'_nf(1) \leqslant f(x) \leqslant r_nf(1)$. On passe à la limite et on obtient alors $f(x) = xf(1)$ par encadrement.

II-2a • Comme G est dense dans $\mathbf{R}$, il existe $s_0 \in G$ tel que $s_0 > x$ et donc $g(s_0) \in J(x)$. Autrement dit, $J(x)$ n'est pas vide.

• Par densité de G dans $\mathbf{R}$, il existe $s_1 \in G$ tel que $s_1 \leqslant x$. Soit $c \in J(x)$. Par définition de $J(x)$, il existe $s \in G$ tel que $s > x$ et tel que $g(s) = c$. On a donc $s_1 \leqslant x < s$ et puisque g est une fonction croissante $g(s_1) \leqslant g(s) = c$. On a donc montré que pour tout $c \in J(x)$, $c \geqslant g(s_1)$. Autrement dit, $g(s_1)$ est un minorant de $J(x)$.

L'ensemble $J(x)$ est donc un ensemble non-vide et minoré par $g(s_1)$, la borne inférieure de $J(x)$ est donc un réel bien défini.

II-2b • Soient deux réels $x < y$. Il est clair que $J(y) \subset J(x)$. Soit alors m un minorant de $J(x)$: l'inclusion précédente assure que m est également un minorant de $J(y)$, et donc que $m \leqslant f(y)$. En prenant $m = f(x)$ il vient $f(x) \leqslant f(y)$, ce qui montre que f est croissante.

• Soit $x_0 \in \mathbf{R}$ et $\varepsilon > 0$: il s'agit de montrer l'existence de $\alpha > 0$ tel que $f(x) \leqslant f(x_0) + \varepsilon$ pour tout $x \in [x_0, x_0 + \alpha[$ par croissance de f. Or $f(x_0) + \varepsilon$ n'est pas un minorant de $J(x_0)$ par définition de la borne inférieure. Ceci assure donc l'existence de $s_0 \in J(x_0)$ tel que $g(s_0) < f(x_0) + \varepsilon$. Prenons alors $\alpha = s_0 - x_0$. Pour $x \in [x_0, x_0 + \alpha[$, on a en particulier $x < s_0$ et donc $f(x) \leqslant g(s_0) < f(x_0) + \varepsilon$, ce que nous voulions.

II-2c • Soit $s \in G$ tel que $s > x + t$. On pose $s' = s - t$. C'est un élément de G car G est un sous-groupe additif de $\mathbf{R}$. On vérifie immédiatement que $s' > x$. Donc $\{s \in G : s > x + t\} \subset \{s' + t; s' \in G : s' > x\}$. Soit $s' \in G$ tel que $s' > x$. On pose $s = s' + t$. C'est un élement de G car G est un sous-groupe additif de $\mathbf{R}$ et on a bien $s > x + t$. Cela prouve donc que $\{s' + t; s' \in G : s' > x\} \subset \{s \in G : s > x + t\}$ et donc $\{s \in G : s > x + t\} = \{s' + t; s' \in G : s' > x\}$.

• On en déduit donc que $J(x + t) = \{g(s' + t); s' \in G : s' > x\}$. Comme $g(s' + t) = g(s') + g(t)$, on voit donc que $J(x + t)$ est l'ensemble $J(x)$ translaté par $g(t)$ ce qui entraîne facilement que $\inf J(x + t) = g(t) + \inf J(x)$, c'est-à-dire $f(x + t) = g(t) + f(x)$.

II-2d Soient $x, y \in \mathbf{R}$. Par définition de la borne inférieure, il existe une suite $(t_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ à valeurs dans $G \cap]y, +\infty[$ telle que $\lim_{n \to +\infty} g(t_n) = f(y)$. Comme g croît, sans perte de généralité on peut supposer que $(t_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge vers y (par exemple, on peut remplacer t_n par $t'_n \in G$ tel que $y < t'_n \leqslant y + 2^{-n} \min(1, t_n - y) \leqslant t_n$ et on a $f(y) \leqslant g(t'_n) \leqslant g(t_n)$). Comme f est continue à droite $\lim_{n \to +\infty} f(x + t_n) = f(x + y)$. Or la question précédente montre que $f(x + t_n) = f(x) + g(t_n)$, ce qui implique $(\mathcal{E}q_5)$ en passant à la limite.

Variante : Soit (y_n) une suite de G tendant vers y en décroissant.

Je dis d'abord que $g(y_n) \to f(y)$: soit en effet $\varepsilon > 0$, $f(y) + \varepsilon$ n'est pas un minorant de $J(y)$ donc il existe $t \in G \cap]y, +\infty[$ tel que $g(t) < f(y) + \varepsilon$. Comme $t > y$, on a $t > y_n$ à partir d'un certain rang, d'où $g(t) \geqslant g(y_n)$ aussi, et donc $g(y_n) < f(y) + \varepsilon$ à partir du même rang.

Faisons tendre n vers l'infini dans l'égalité $f(y_n + x) = g(y_n) + f(x)$. Le membre de gauche tend vers $f(y + x)$ continuité à droite de f, et le membre de droite tend vers $f(y) + f(x)$ d'où le résultat.

II-2e • Par $(\mathcal{E}q_5)$, on a $f(0) = f(0 + 0) = 2f(0)$ donc $f(0) = 0$. En prenant $x = 0$ à la question **2c)**, on voit que $f(t) = g(t)$ pour tout $t \in G$. Donc f prolonge g.

Variante : pour prouver que f prolonge g, on peut montrer directement que $g(x) = \inf J(x)$ pour $x \in G$, mais ce fait n'est nullement évident, ni ne découle directement de la monotonie de g. Comme $g(x)$ est un minorant de $J(x)$ par croissance de g, on a directement $g(x) \leqslant f(x)$ et il suffit de montrer l'autre inégalité. Soit donc $\varepsilon > 0$ et $\gamma \in G_+^*$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe $\varepsilon_n \in]0, \gamma/n[\cap G$: on a alors $x + \varepsilon_n \in G$ et donc $g(x + \varepsilon_n) = g(x) + g(\varepsilon_n)$. En outre, $n\varepsilon_n < \gamma$, ce qui donne $ng(\varepsilon_n) \leqslant g(\gamma)$, et donc $g(x + \varepsilon_n) \leqslant g(x) + g(\gamma)/n < g(x) + \varepsilon$ à partir d'un certain rang. Ceci assure que $g(x)+\varepsilon$ n'est pas un minorant de $J(x)$ et donc que $f(x) \leqslant g(x)+\varepsilon$, d'où $f(x) \leqslant g(x)$ en faisant $\varepsilon \to 0$.

• Par la question **1)**, il existe $\alpha \in \mathbf{R}_+$ tel que $f(x)=\alpha x$. Le fait que f prolonge g permet de conclure.

II-3a • On a $\ell_1^2=\ell_1$ et donc $\ell_1=0$ ou 1. Si $\ell_1=0$, alors $\ell_p=\ell_{p.1}=\ell_p.\ell_1$ $(\ell_p)_{p\geqslant 1}$ est identiquement nulle or on a supposé le contraire. Donc $\ell_1=1$.

• Supposons ensuite qu'il existe $p_0 \geqslant 2$ tel que $\ell_{p_0}=0$. Comme $(\ell_p)_{p\geqslant 1}$ décroît et est positive, cela implique que $\ell_p=0$ pour tout $p\geqslant p_0$. Soit m, un entier entre 2 et p_0-1. Il existe $k\geqslant 2$ el que $m^k \geqslant p_0$ et donc $\ell_m^k=\ell_{m^k}=0$. Cela implique que $\ell_m=0$. On a montré que s'il existe $p_0\geqslant 2$ tel que $\ell_{p_0}=0$, alors $\ell_p=0$ pour tout entier $p\geqslant 2$, ce qui est le résultat voulu.

II-3b Soient $r\in \mathbf{Q}_+^*$. Soient $p,p',q,q'\in \mathbf{N}^*$ tels que $p/q=p'/q'=r$. On a donc $pq'=p'q$ et donc $\ell_p\ell_{q'}=\ell_{pq'}=\ell_{p'q}=\ell_{p'}\ell_q$ qui sont des quantités strictement positives par hypothèse. On peut donc poser $h(r)=\ell_p/\ell_q=\ell_{p'}/\ell_{q'}$ qui ne dépend que du rationnel r.

Soient $r_1,r_2\in\mathbf{Q}_+^*$ et soient $p_1,p_2,q_1,q_2\in\mathbf{N}^*$ tels que $r_1=p_1/q_1$ et $r_2=p_2/q_2$. Alors

$$h(r_1r_2)=h\big((p_1p_2)/(q_1q_2)\big)=\frac{\ell_{p_1p_2}}{\ell_{q_1q_2}}=\frac{\ell_{p_1}}{\ell_{q_1}}\frac{\ell_{p_2}}{\ell_{q_2}}=h(r_1)h(r_2).$$

Cela montre l'existence d'une fonction comme dans l'énoncé.

Montrons l'unicité. Soit h_0 une fonction comme dans l'énoncé. Alors pour tout $p,q\in\mathbf{N}^*$, on a $1=\ell_1=h_0(1)=h_0(qq^{-1})=h_0(q)h_0(q^{-1})=\ell_q h_0(q^{-1})$. Donc $h_0(q^{-1})=1/\ell_q$ et donc $h_0(p/q)=h_0(p)h_0(q^{-1})=\ell_p/\ell_q=h(p/q)$, ce qui montre l'unicité.

Variante de forme : par «analyse-synthèse». Si h existe, on a nécessairement $h(nr)=h(n)h(r)$ pour tout rationnel $r>0$ et tout $n\in\mathbf{N}^*$. En écrivant $r=p/q$ et en prenant $n=q$, cela entraîne que h satisfait nécessairement $h(r)=h(p)/h(q)=\ell_p/\ell_q$, ce qui clôt la phase d'analyse. On montre alors en phase de synthèse la bonne définition de h (*i.e.* l'indépendance du choix du représentant (p,q) de r et l'équation fonctionnelle comme ci-dessus).

II-3c Soient $r_1,r_2\in\mathbf{Q}_+^*$ tels que $r_1\leqslant r_2$. Il est possible de les représenter comme des quotients d'entiers de même dénominateur ; c'est-à-dire qu'il existe $p_1,p_2,q\in\mathbf{N}^*$ tels que $r_1=p_1/q$ et $r_2=p_2/q$ ce qui implique que $p_1\leqslant p_2$. Comme la suite $(\ell_p)_{p\geqslant 1}$ décroît, on a $h(r_1)=\ell_{p_1}/\ell_q\geqslant \ell_{p_2}/\ell_q=h(r_2)$, ce qui prouve que h décroît.

II-3d On applique le groupe de questions **2)** à $G=\{\log r\,;\, r\in\mathbf{Q}_+^*\}$ et g définie par $g(\log r)=-\log h(r)$, $r\in\mathbf{Q}_+^*$.

Montrons que G est sous-groupe additif dense de $\mathbf{R}$. On observe tout d'abord que 0, élément neutre du groupe additif $\mathbf{R}$, est $\log 1$. Donc $0\in G$. De plus, pour tous $r,r'\in\mathbf{Q}_+^*$, $\log r-\log r'=\log r/r'\in G$ car $r/r'\in\mathbf{Q}_+^*$. Cela montre que G est un sous-groupe additif de $\mathbf{R}$.

On observe ensuite que pour tout $x\in\mathbf{R}$, e^x est limite de $(r_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, une suite de rationnels strictement positifs. Par continuité du logarithme, x est donc limite de la suite $(\log r_n)$ qui sont des éléments de G. Cela montre que G est dense dans $\mathbf{R}$.

Comme log croît et que h décroît, on voit que g croît. Par ailleurs, pour tout $s,t\in G$, il existe $r_1,r_2\in\mathbf{Q}_+^*$ tels que $s=\log r_1$ et $t=\log r_2$. On a donc $g(s)+g(t)=-\log h(r_1)-\log h(r_2)=-\log\left(h(r_1)h(r_2)\right)=-\log h(r_1,r_2)=g(\log(r_1r_2))=g(\log r_1+\log r_2)=g(s+t)$.

On peut donc appliquer la question **2e)** et montrer qu'il existe $\alpha\in\mathbf{R}_+$ tel que $g(\log r)=\alpha\log r$, ce qui implique que $\log h(r)=\log r^{-\alpha}$ et par conséquent $\ell_p=h(p)=p^{-\alpha}$ pour $p\in\mathbf{N}^*$.

II-4a Petite précaution avant de commencer : les a_n sont tous $\geqslant 0$ et non tous nuls, donc $D(\sigma)$ est > 0 (car minoré par tout terme de la somme), ce qui légitime le quotient.

Il est clair que $D(\sigma)/D(\sigma) = 1$ tend vers 1 lorsque $\sigma \to 0^+$. Donc $\ell_1 = 1$. Soient $p, q \in \mathbf{N}^*$. On observe que

$$\lim_{\sigma\to 0^+} \frac{D(qp\sigma)}{D(p\sigma)} = \lim_{\sigma\to 0^+} \frac{D(q\sigma)}{D(\sigma)} = \ell_q\ .$$

Comme $D(pq\sigma)/D(\sigma) = \big(D(pq\sigma)/D(p\sigma)\big)\big(D(p\sigma)/D(\sigma)\big)$, en passant à la limite lorsque $\sigma \to 0^+$, on en déduit que $\ell_{pq} = \ell_p\ell_q$.

II-4b Soit un réel $\sigma > 0$. On observe que pour tous $p, q, n \in \mathbf{N}^*$ tels que $q \geqslant p$, on a $0 \leqslant e^{-q\sigma\lambda_n} \leqslant e^{-p\sigma\lambda_n} \leqslant e^{-\sigma\lambda_n}$ car $x \mapsto e^{-x}$ décroît. On en déduit que $D(q\sigma) \leqslant D(p\sigma) \leqslant D(\sigma)$ et donc que

$$\ell_q = \lim_{\sigma\to 0^+} \frac{D(q\sigma)}{D(\sigma)} \leqslant \ell_p = \lim_{\sigma\to 0^+} \frac{D(p\sigma)}{D(\sigma)} \leqslant 1\ .$$

Cela montre que $(\ell_p)_{p\geqslant 1}$ est une suite de $[0,1]$ décroissante telle que $\ell_{pq} = \ell_p\ell_q$, pour tous $p, q \in \mathbf{N}^*$. Les résultats des questions **3a)** et **3d)** permettent donc de conclure.

II-5a Pour tout réel $\sigma > 0$ et tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $\sigma\lambda_n \geqslant 0$ est et donc $e^{-\sigma\lambda_n} \in [0,1]$. De plus, la fonction f est bornée sur $[0,1]$ et on a donc $|a_n f(e^{-\sigma\lambda_n})e^{-\sigma\lambda_n}| \leqslant \|f\|_\infty a_n e^{-\sigma\lambda_n}$ car les a_n sont positifs. Donc la série de terme général $(a_n f(e^{-\sigma\lambda_n})e^{-\sigma\lambda_n})_{n\in\mathbf{N}^*}$ est absolument convergente par majoration et donc convergente dans $\mathbf{R}$.

II-5b Soient $f, g \in \mathcal{B}([0,1],\mathbf{R})$ et $b \in \mathbf{R}$. Il est clair, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, que

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k\big(f(e^{-\sigma\lambda_k}) + bg(e^{-\sigma\lambda_k})\big)e^{-\sigma\lambda_k} = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k f(e^{-\sigma\lambda_k})e^{-\sigma\lambda_k} + b\sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k g(e^{-\sigma\lambda_k})e^{-\sigma\lambda_k}\ .$$

En passant à la limite, on obtient par continuité de la somme que $\Lambda_{\alpha,\sigma}(f + bg) = \Lambda_{\alpha,\sigma}(f) + b\Lambda_{\alpha,\sigma}(g)$, ce qui montre que $\Lambda_{\alpha,\sigma}$ est une forme linéaire sur $\mathcal{B}([0,1],\mathbf{R})$. De plus, l'inégalité triangulaire pour les séries implique que

$$D(\sigma)|\Lambda_{\alpha,\sigma}(f)| \leqslant \sum_{n\geqslant 1} |a_n f(e^{-\sigma\lambda_n})e^{-\sigma\lambda_n}| \leqslant \|f\|_\infty \sum_{n\geqslant 1} a_n e^{-\sigma\lambda_n} = \|f\|_\infty D(\sigma)\ ,$$

qui entraîne immédiatement l'inégalité voulue.

II-6a On observe que $\Lambda_{\alpha,\sigma}(\mathtt{m}_p) = D((p+1)\sigma)/D(\sigma)$. Donc $\lim_{\sigma\to 0^+} \Lambda_{\alpha,\sigma}(\mathtt{m}_p) = (p+1)^{-\alpha}$. Or il a été montré à la question **I-3d)** que $(p+1)^{-\alpha} = \Lambda_\alpha(\mathtt{m}_p)$. On a donc montré que

$$\forall p \in \mathbf{N}^*,\qquad \lim_{\sigma\to 0^+} \Lambda_{\alpha,\sigma}(\mathtt{m}_p) = \Lambda_\alpha(\mathtt{m}_p)\ .$$

Soit Q une fonction polynômiale de degré d : il existe donc $b_0, \ldots, b_d \in \mathbf{R}$ tels que $Q = b_d\mathtt{m}_d + \ldots + b_1\mathtt{m}_1 + b_0\mathtt{m}_0$. Comme montré à la question précèdente, $\Lambda_{\alpha,\sigma}$ est linéaire sur l'espace des fonctions bornées sur $[0,1]$ ce qui implique

$$\lim_{\sigma\to 0^+}\Lambda_{\alpha,\sigma}(Q)=\lim_{\sigma\to 0^+}\sum_{j=0}^{d}b_j\Lambda_{\alpha,\sigma}(\mathtt{m}_j)=\sum_{j=0}^{d}b_j\lim_{\sigma\to 0^+}\Lambda_{\alpha,\sigma}(\mathtt{m}_j)=\sum_{j=0}^{d}b_j\Lambda_\alpha(\mathtt{m}_j)=\Lambda_\alpha(Q)$$

car Λ_α est également linéaire sur l'espace des fonctions continues par morceaux sur $[0,1]$. Cela montre bien le résultat voulu.

II-6b Nous allons donner deux preuves de cette extension

- **1ère méthode :** Soit $f:[0,1]\to\mathbf{R}$, une fonction continue. Par le théorème de Weierstrass, il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de fonctions polynômiales telles que $\lim_{n\to\infty}\|f-P_n\|_\infty=0$ et on a

$$\begin{aligned}|\Lambda_{\alpha,\sigma}(f)-\Lambda_\alpha(f)| &\leqslant |\Lambda_{\alpha,\sigma}(f)-\Lambda_{\alpha,\sigma}(P_n)|+|\Lambda_{\alpha,\sigma}(P_n)-\Lambda_\alpha(P_n)|+|\Lambda_\alpha(P_n)-\Lambda_\alpha(f)| \\ &\leqslant 2\|f-P_n\|_\infty+|\Lambda_{\alpha,\sigma}(P_n)-\Lambda_\alpha(P_n)|\ .\end{aligned}\tag{4.1}$$

Soit $\varepsilon>0$. Il existe $n(\varepsilon)\in\mathbf{N}^*$ tel que $\|f-P_{n(\varepsilon)}\|_\infty<\varepsilon/3$ et il existe un réel $\sigma_\varepsilon>0$ tel que pour tout $\sigma\in\,]0,\sigma_\varepsilon[$, on ait $|\Lambda_{\alpha,\sigma}(P_{n(\varepsilon)})-\Lambda_\alpha(P_{n(\varepsilon)})|<\varepsilon/3$. L'inégalité précédente appliquée au rang $n(\varepsilon)$ montre alors que pour tout réel $\varepsilon>0$, il existe un réel $\sigma_\varepsilon>0$ tel que pour tout $\sigma\in\,]0,\sigma_\varepsilon[$, on ait $|\Lambda_{\alpha,\sigma}(f)-\Lambda_\alpha(f)|<\varepsilon$, ce qui permet de conclure.

- **2ème méthode.** On commence de même, en fixant $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ une fonction continue et en se donnant une suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de fonctions polynômiales telles que $\lim_{n\to\infty}\|f-P_n\|_\infty=0$. On pose ensuite, pour tout $n\in\mathbf{N}$ et $\sigma>0$: $g_n(\sigma)=\Lambda_{\alpha,\sigma}(P_n)$ et $g(\sigma)=\Lambda_{\alpha,\sigma}(f)$. On va appliquer le théorème de la double limite à la suite (g_n) :

— La suite (g_n) converge uniformément vers g au voisinage à droite de 0, puisqu'en fait $\|g_n-g\|_{\infty,\mathbf{R}_+^*}=\|\Lambda_{\alpha,\sigma}(P_n-f)\|_{\infty,\mathbf{R}_+^*}\leqslant\|P_n-f\|_{\infty,[0,1]}$ d'après la question **5b)**.

— À n fixé, on a $\lim_{\sigma\to 0}g_n(\sigma)=\lim_{\sigma\to 0}\Lambda_{\alpha,\sigma}(P_n)=\Lambda_\alpha(P_n)$ d'après la question **6a**.

Le théorème de la double limite assure que $g(\sigma)$ a une limite finie quand $\sigma\to 0$, et que cette limite vaut $\lim_{n\to\infty}\Lambda_\alpha(P_n)$.

Il ne reste plus qu'à justifier que $\lim_{n\to\infty}\Lambda_\alpha(P_n)=\Lambda_\alpha(f)$, ce qui est conséquence par exemple de la question **I-3e)** (continuité de la forme linéaire Λ_α sur l'espace des fonctions continues par morceaux).

II-6c Comme $0\leqslant f_\varepsilon\leqslant J\leqslant h_\varepsilon$ et puisque les a_n sont positifs on a $0\leqslant a_nf_\varepsilon(e^{-\sigma\lambda_n})e^{-\sigma\lambda_n}\leqslant a_nJ(e^{-\sigma\lambda_n})e^{-\sigma\lambda_n}\leqslant a_nh_\varepsilon(e^{-\sigma\lambda_n})e^{-\sigma\lambda_n}$ et en sommant et divisant par $D(\sigma)$, on a donc

$$0\leqslant\Lambda_{\alpha,\sigma}(f_\varepsilon)\leqslant\Lambda_{\alpha,\sigma}(J)\leqslant\Lambda_{\alpha,\sigma}(h_\varepsilon)\ .$$

Puisque f_ε et h_ε sont continues, le résultat de la question précédente implique que $\lim_{\sigma\to 0^+}\Lambda_{\alpha,\sigma}(f_\varepsilon)=\Lambda_\alpha(f_\varepsilon)$ et $\lim_{\sigma\to 0^+}\Lambda_{\alpha,\sigma}(h_\varepsilon)=\Lambda_\alpha(h_\varepsilon)$. Il existe donc un réel $\sigma_\varepsilon>0$ tel que pour tout $\sigma\in\,]0,\sigma_\varepsilon]$, on ait $|\Lambda_{\alpha,\sigma}(f_\varepsilon)-\Lambda_\alpha(f_\varepsilon)|\leqslant\varepsilon$ et $|\Lambda_{\alpha,\sigma}(h_\varepsilon)-\Lambda_\alpha(h_\varepsilon)|\leqslant\varepsilon$. Cela implique donc

$$\Lambda_\alpha(f_\varepsilon)-\varepsilon\leqslant\Lambda_{\alpha,\sigma}(J)\leqslant\Lambda_\alpha(h_\varepsilon)+\varepsilon\ .$$

En appliquant le résultat de la question **I-3g)**, on a d'une part $\Lambda_\alpha(f_\varepsilon)\geqslant\Lambda_\alpha(J)-e2^{\alpha+2}\varepsilon/\Gamma(\alpha)$ et d'autre part

$$\Lambda_\alpha(h_\varepsilon)\leqslant\Lambda_\alpha(f_\varepsilon)+\frac{e2^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha)}\varepsilon\leqslant\Lambda_\alpha(J)+\frac{e2^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha)}\varepsilon\ .$$

Combiné à l'inégalité précédente, cela implique l'inégalité voulue avec $C_\alpha=\frac{e2^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha)}+1$.

II-6d La question précédente implique que $\lim_{\sigma\to 0^+} \Lambda_{\alpha,\sigma}(J) = \Lambda_\alpha(J)$. On constate ensuite que

$$\Lambda_{\alpha,\lambda_n^{-1}}(J) = \frac{1}{D(\lambda_n^{-1})} \sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k \ .$$

Par hypothèse, $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$. Par conséquent, $\lim_{n\to\infty} \lambda_n^{-1} = 0$ et ce qui précède implique que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{D(\lambda_n^{-1})} \sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k = \Lambda_\alpha(J) \ .$$

On observe ensuite que

$$\Gamma(\alpha)\Lambda_\alpha(J) = \int_{e^{-1}}^1 (-\log t)^{\alpha-1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \left[\frac{1}{\alpha}(\log t)^\alpha\right]_{e^{-1}}^1 = \frac{1}{\alpha} \ .$$

Comme $\alpha\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha+1)$ on obtient bien que $\Lambda_\alpha(J) = 1/\Gamma(\alpha+1)$.

II-7a Soit un réel $\sigma > 0$. Pour tout $p \in \mathbf{N}$, on a $\Lambda_{0,\sigma}(\mathtt{m}_p) = D((p+1)\sigma)/D(\sigma)$, par définition. Donc $\lim_{\sigma\to 0^+} \Lambda_{0,\sigma}(\mathtt{m}_p) = 1$. En particulier, puisque $\Lambda_{0,\sigma}$ est linéaire, on obtient $\Lambda_{0,\sigma}(g) = \Lambda_{0,\sigma}(\mathtt{m}_0) - 2\Lambda_{0,\sigma}(\mathtt{m}_1) + \Lambda_{0,\sigma}(\mathtt{m}_2)$ et donc $\lim_{\sigma\to 0^+} \Lambda_{0,\sigma}(g) = 0$.

II-7b On observe que pour tout $t \in [0,1]$, on a $\mathbf{1}_{[0,1-\delta]}(t) = \mathbf{1}_{[\delta,1]}(1-t) \leqslant \delta^{-2}(1-t)^2$. On conclut au résultat souhaité par croissance et linéarité de $\Lambda_{0,\sigma}$.

II-7c On écrit d'abord par inégalité triangulaire
$D(\sigma)\big|f(1) - \Lambda_{0,\sigma}(f)\big| = \Big|\sum_{n\geqslant 1} a_n e^{-\lambda_n\sigma}\big(f(1) - f(e^{-\lambda_n\sigma})\big)\Big| \leqslant \sum_{n\geqslant 1} a_n e^{-\lambda_n\sigma}\big|f(1) - f(e^{-\lambda_n\sigma})\big|$ et l'on casse cette dernière somme en deux, en écrivant
$a_n e^{-\lambda_n\sigma}\big|f(1) - f(e^{-\lambda_n\sigma})\big| = a_n e^{-\lambda_n\sigma}\big|f(1) - f(e^{-\lambda_n\sigma})\big|\mathbf{1}_{[1-\delta,1]}(e^{-\lambda_n\sigma}) + a_n e^{-\lambda_n\sigma}\big|f(1) - f(e^{-\lambda_n\sigma})\big|\mathbf{1}_{[0,1-\delta[}(e^{-\lambda_n\sigma}$
On gère alors la première somme en majorant $\big|f(1) - f(e^{-\lambda_n\sigma})\big|$ par $\max_{t\in[1-\delta,1]}\big|f(1) - f(t)\big|$ d'où par croissance de la somme
$\sum_{n\geqslant 1} a_n e^{-\lambda_n\sigma}\big|f(1) - f(e^{-\lambda_n\sigma})\big|\mathbf{1}_{[1-\delta,1]}(e^{-\lambda_n\sigma}) \leqslant D(\sigma).\max_{t\in[1-\delta,1]}\big|f(1) - f(t)\big|$
et la deuxième en majorant $\big|f(1) - f(e^{-\lambda_n\sigma})\big|\mathbf{1}_{[0,1-\delta[}(e^{-\lambda_n\sigma})$ par $2\|f\|_\infty.\delta^{-2}g\big(e^{-\lambda_n\sigma}\big)$ via la question précédente. On obtient ainsi par croissance
$\sum_{n\geqslant 1} a_n e^{-\lambda_n\sigma}\big|f(1) - f(e^{-\lambda_n\sigma})\big|\mathbf{1}_{[0,1-\delta]}(e^{-\lambda_n\sigma}) \leqslant 2\|f\|_\infty\delta^{-2}\sum_{n\geqslant 1} a_n e^{-\lambda_n\sigma}g\big(e^{-\lambda_n\sigma}\big) \leqslant 2\|f\|_\infty\,\delta^{-2}D(\sigma)\Lambda_{0,\sigma}(g$
et on a bien l'inégalité voulue en divisant par $D(\sigma)$.
Soit un réel $\varepsilon > 0$. Comme f est continue à gauche en 1, il existe $\delta_\varepsilon \in \,]0,1[$ tel que $\max_{t\in[1-\delta_\varepsilon,1]}\big|f(1) - f(t)\big| < \varepsilon/2$. Puisque $\lim_{\sigma\to 0^+} \Lambda_{0,\sigma}(g) = 0$, il existe σ_ε tel que $0 \leqslant 2\|f\|_\infty\,\delta_\varepsilon^{-2}\Lambda_{0,\sigma}(g) < \varepsilon/2$ pour tout $\sigma \in]0,\sigma_\varepsilon[$ et l'inégalité précédente implique que $|f(1) - \Lambda_{0,\sigma}(f)| < \varepsilon$. On a donc montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe σ_ε tel que $|f(1) - \Lambda_{0,\sigma}(f)| < \varepsilon$ pour tout $\sigma \in]0,\sigma_\varepsilon[$. Autrement dit, $\lim_{\sigma\to 0^+} \Lambda_{0,\sigma}(f) = f(1)$.

II-7d On rappelle que J est continue par morceaux, donc bornée sur $[0,1]$, et continue à gauche en 1 valant 1 en 1. On rappelle également que $\Lambda_{0,\lambda_n^{-1}}(J) = D(\lambda_n^{-1})^{-1}\sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k$. Par hypothèse, $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$. Par conséquent, $\lim_{n\to\infty} \lambda_n^{-1} = 0$ et ce qui précède implique que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{D(\lambda_n^{-1})} \sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k = \lim_{\sigma\to 0^+} \Lambda_{0,\sigma}(J) = J(1) = 1 \ ,$$

ce qui est bien $(\boldsymbol{\mathcal{E}q}_6)$ dans le cas où $\alpha = 0$ car $\Gamma(1) = 1$.

Partie III.

III-1a On suppose que D_φ contient deux points distincts $\sigma_0 < \sigma_1$, sinon l'assertion est trivialement vérifiée. Soit $\sigma \in [\sigma_0, \sigma_1]$. On a $\sigma_0 - 1 \leqslant \sigma - 1 \leqslant \sigma_1 - 1$. Si $x \in [1, +\infty[$, on a $\log x \geqslant 0$, donc $(\sigma - 1)\log x \leqslant (\sigma_1 - 1)\log x$ et donc $|\varphi(x)|x^{\sigma-1} \leqslant |\varphi(x)|x^{\sigma_1-1}$. Si $x \in]0,1]$, alors $\log x \leqslant 0$ donc $(\sigma - 1)\log x \leqslant (\sigma_0 - 1)\log x$ et donc $|\varphi(x)|x^{\sigma-1} \leqslant |\varphi(x)|x^{\sigma_0-1}$. Par conséquent pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $|\varphi(x)|x^{\sigma-1} \leqslant |\varphi(x)|x^{\sigma_0-1} + |\varphi(x)|x^{\sigma_1-1}$. Cela montre que $x \in \mathbf{R}_+^* \mapsto |\varphi(x)|x^{\sigma-1}$ est majorée par une fonction intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$, elle est donc intégrable et $\sigma \in D_\varphi$. Cela prouve que D_φ est un intervalle de $\mathbf{R}$.

Variante : il est possible de prouver cette intégrabilité en rappelant que $\sigma \mapsto \varphi(x)x^{\sigma-1}$ est continue sur $\mathbf{R}_+^*$, donc localement intégrable, et qu'il suffit de prouver l'intégrabilité en 0 et en $+\infty$, par majoration (locale) comme cela a été fait, ou par relation de comparaison, par exemple $\varphi(x)x^{\sigma-1} = \mathrm{O}_{x\to 0}(\varphi(x)x^{\sigma_0-1})$ et $\varphi(x)x^{\sigma-1} = \mathrm{O}_{x\to+\infty}(\varphi(x)x^{\sigma_1-1})$.

Variante proposée par un candidat : par l'inégalité de Hölder. On prend $\sigma = t_0\sigma_0 + t_1\sigma_1$ dans $]\sigma_0, \sigma_1[$, avec $t_0 = 1 - t_1 \in]0,1[$. On note $p_i = 1/t_i$ de sorte que $1/p_0 + 1/p_1 = 1$ et on écrit

$$|x^\sigma \varphi(x)/x| = (x^{\sigma_0}|\varphi(x)|/x)^{t_0} \times (x^{\sigma_1}|\varphi(x)|/x)^{t_1}$$

L'inégalité de Hölder (avec pour exposants conjugués p_1, p_2) fournit alors, dans $\overline{\mathbf{R}}_+$ a priori

$$\int_{\mathbf{R}_+^*} x^\sigma \frac{|\varphi(x)|}{x} \mathrm{d}x \leqslant \mathcal{M}|\varphi|(\sigma_0)^{t_0} \times \mathcal{M}|\varphi|(\sigma_1)^{t_1} < +\infty$$

III-1b On observe que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $|\varphi(x)x^{s-1}| = |\varphi(x)|x^{\mathrm{Re}(s)-1}$. Donc si $\mathbf{Re}(s) \in D_\varphi$, la fonction $x \in \mathbf{R}_+^* \longmapsto \varphi(x)x^{s-1}$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$.

III-1c On pose $U = \{s \in \mathbf{C} : \sigma_0 < \mathrm{Re}(s) < \sigma_1\}$: il s'agit d'un ouvert (image réciproque de l'ouvert $]\sigma_0, \sigma_1[$ par l'application partie réelle qui est continue). Pour tout $s \in U$, comme montré à la question précédente, $x \in \mathbf{R}_+^* \longmapsto \varphi(x)x^{s-1}$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$. Pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $s \mapsto \varphi(x)x^{s-1} = \varphi(x)\exp((s-1)\log x)$ est holomorphe sur $\mathbf{C}$ et donc sur U en particulier.

Comme montré à la question **1a)**, pour tout $s \in U$ et tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, on a $|\varphi(x)x^{s-1}| \leqslant |\varphi(x)|x^{\sigma_0-1} + |\varphi(x)|x^{\sigma_1-1} = f(x)$. Comme $\sigma_0, \sigma_1 \in D_\varphi$, f est intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$ et le théorème d'holomorphie des intégrales à paramètres implique que $\mathcal{M}\varphi$ est holomorphe sur U.

III-1d D'abord la question **1)** de la partie **I** assure que $\Gamma(\sigma)$ est bien définie pour tout $\sigma > 0$, et donc que $\mathbf{R}_+^* \subset D_\varphi$.

Réciproquement, si $\sigma \leqslant 0$, la fonction $x \mapsto e^{-x}x^{\sigma-1}$ est équivalente à $x \mapsto x^{\sigma-1}$ qui n'est pas intégrable en 0 : ceci assure la non intégrabilité en 0 de $x \mapsto e^{-x}x^{\sigma-1}$ (par exemple via la minoration $e^{-x}x^{\sigma-1} \geqslant x^{\sigma-1}/2$ valide pour $x \in]0,\delta]$, avec $\delta > 0$ suffisamment petit), ce qui donne l'autre inclusion et l'égalité $D_\varphi = \mathbf{R}_+^*$.

La fonction $\mathcal{M}\varphi$ ainsi définie est holomorphe sur $\mathbf{H}_0$ par **III-1c)** (σ_0 et σ_1 pouvant être pris arbitrairement dans $\mathbf{R}_+^*$). Soit f un autre prolongement holomorphe de Γ à ce même ouvert $\mathbf{H}_0$. On aurait alors $\mathcal{M}\varphi - f$ holomorphe sur l'ouvert connexe $\mathbf{H}_0$ et nulle sur $\mathbf{R}_+^*$, ensemble contenant un point d'accumulation. Le principe du prolongement analytique entraîne $\mathcal{M}\varphi = f$ sur $\mathbf{H}_0$, d'où l'unicité de ce prolongement holomorphe.

III-1e Pour tout $s \in \mathbf{H}_0$, on pose

$$f(s) = \Gamma(s+k) - (s+k-1)(s+k-2)\dots s\Gamma(s)\ .$$

Il s'agit clairement d'une fonction holomorphe sur l'ouvert connexe $\mathbf{H}_0$ qui s'annule sur $\mathbf{R}_+^*$, par application répétée de **I-1)**. Le principe des zéros isolés permet alors de conclure.

Variante : on peut également procéder par intégration par parties répétées en prenant s complexe directement, ce qui revient à d'abord prouver que $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ pour s de partie réelle $\sigma > 0$ (le calcul se mène comme en **I-1)**, en changeant σ en s, puisque $|e^s| = e^\sigma$ pour le crochet).

III-1f On a $1 - 2|y| + y^2 = (1-|y|)^2 \geqslant 0$ et donc $2(1+y^2) \geqslant (1+|y|)^2$, ce qui montre $\sqrt{1+y^2} \geqslant 2^{-\frac{1}{2}}(1+|y|)$ pour tout $y \in \mathbf{R}$.

Soit $k \in \mathbf{N}$ et soit $s \in \mathbf{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) \geqslant 1$. On a $|s+k| = \sqrt{(k+\mathrm{Re}(s))^2 + (\mathrm{Im}(s))^2}$. Comme $k + \mathrm{Re}(s) \geqslant 1$, on en déduit que

$$|s+k| \geqslant \sqrt{1+(\mathrm{Im}(s))^2} \geqslant 2^{-\frac{1}{2}}\big(1+|\mathrm{Im}(s)|\big)$$

qui est l'inégalité désirée.

III-1g On suppose que $s \in \mathbf{C}$ est tel que $\mathrm{Re}(s) \in [1, \sigma_0]$. Une application répétée de la question **III-5e)** implique que $\Gamma(s+k+1) = s(s+1)\dots(s+k)\Gamma(s)$. Par ce qui précède on a donc, en minorant $|s|$ par 1 et les $|s+\ell|$ (pour $\ell \geqslant 1$) par $2^{-1/2}(1+|\mathrm{Im} s|)$

$$\begin{aligned}
|\Gamma(s)| &= \frac{|\Gamma(s+k+1)|}{|s|\,|s+1|\dots|s+k|} && (4.2)\\
&\leqslant 2^{k/2}\big(1+|\mathrm{Im}(s)|\big)^{-k}|\Gamma(s+k+1)| && (4.3)\\
&\leqslant 2^{k/2}\big(1+|\mathrm{Im}(s)|\big)^{-k}\int_0^{+\infty} e^{-t}|t^{s+k}|\,\mathrm{d}t && (4.4)\\
&\leqslant 2^{k/2}\big(1+|\mathrm{Im}(s)|\big)^{-k}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\mathrm{Re}(s)+k}\,\mathrm{d}t\ .
\end{aligned}$$

Or pour tout $t \in [0,1]$ on a $e^{-t}t^{\mathrm{Re}(s)+k} \leqslant 1$ et pour tout $t \in [1,+\infty[$, on a $e^{-t}t^{\mathrm{Re}(s)+k} \leqslant e^{-t}t^{\sigma_0+k}$. Donc

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\mathrm{Re}(s)+k}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 e^{-t}t^{\mathrm{Re}(s)+k}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} e^{-t}t^{\mathrm{Re}(s)+k}\,\mathrm{d}t && (4.5)\\
&\leqslant 1 + \int_1^{+\infty} e^{-t}t^{\sigma_0+k}\,\mathrm{d}t && (4.6)\\
&\leqslant 1 + \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\sigma_0+k}\,\mathrm{d}t = 1 + \Gamma(\sigma_0+k+1),
\end{aligned}$$

ce qui implique le résultat désiré.

Remarque : Il est également possible de partir de $\Gamma(s+k) = s(s+1)\dots(s+k-1)\Gamma(s)$ et de minorer tous les $|s+\ell|$ par $2^{-1/2}(1+|\mathrm{Im} s|)$. Le même calcul montre qu'en posant

$M'_{k,\sigma_0} = 2^{k/2}(1+\Gamma(\sigma_0+k))$ on a la majoration légèrement plus fine $|\Gamma(s)| \leqslant \frac{M'_{k,\sigma_0}}{(1+|\mathrm{Im}(s)|)^k}$.

III-2a On fixe un réel $y > 0$. En effectuant le changement de variable $x = e^{-2\pi v}$ pour lequel $e^{-2\pi\sigma v}\mathrm{d}v = -\frac{1}{2\pi}x^{\sigma-1}\mathrm{d}x$, on obtient

$$\int_{-y}^{y} |\Phi_\sigma(v)|\mathrm{d}v = \frac{1}{2\pi}\int_{e^{-2\pi y}}^{e^{2\pi y}} |\varphi(x)|x^{\sigma-1}\mathrm{d}x\ .$$

Comme $y \mapsto \int_{-y}^{y} |\Phi_\sigma(v)|\mathrm{d}v$ croît, Φ_σ est intégrable sur $\mathbf{R}$ si et seulement si $y \mapsto \int_{-y}^{y} |\Phi_\sigma(v)|\mathrm{d}v$ est majoré.

De même $y \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_{e^{-2\pi y}}^{e^{2\pi y}} |\varphi(x)|x^{\sigma-1}\mathrm{d}x$ croît et donc $x \mapsto |\varphi(x)|x^{\sigma-1}$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$ si et seulement si $y \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_{e^{-2\pi y}}^{e^{2\pi y}} |\varphi(x)|x^{\sigma-1}\mathrm{d}x$ est majoré. L'égalité précédente montre donc le résultat voulu.

Remarque : il est correct également d'écrire l'égalité, qui a un sens dans $\overline{\mathbf{R}}_+$ car les fonctions sont positives, $\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_\sigma(v)|\mathrm{d}v = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} |\varphi(x)|x^{\sigma-1}\mathrm{d}x$ (par changement de variables). La finitude de l'un des deux membres entraîne celle de l'autre.

III-2b On suppose $\sigma \in D_\varphi$, ce qui implique que Φ_σ est intégrable sur $\mathbf{R}$ par la question précèdente. On fixe ensuite $t \in \mathbf{R}$. Ce qui précède et la question **III-1b)** impliquent que la transformée de Mellin de φ est bien définie en $\sigma + it$. On fixe un réel $y > 0$ et on effectue le changement de variable $x = e^{-2\pi v}$ pour lequel $e^{-2i\pi tv}e^{-2\pi\sigma v}\mathrm{d}v = -\frac{1}{2\pi}x^{\sigma+it-1}\mathrm{d}x$. On obtient alors

$$\int_{-y}^{y} \Phi_\sigma(v)e^{-2i\pi tv}\mathrm{d}v = \frac{1}{2\pi}\int_{e^{-2\pi y}}^{e^{2\pi y}} \varphi(x)x^{\sigma+it-1}\mathrm{d}x\ .$$

Comme $v \in \mathbf{R} \mapsto \Phi_\sigma(v)e^{-2i\pi tv}$ est intégrable sur $\mathbf{R}$ et comme on a montré que $x \in \mathbf{R}_+^* \mapsto \varphi(x)x^{\sigma+it-1}$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$, en faisant tendre $y \to +\infty$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_\sigma(v)e^{-2i\pi tv}\mathrm{d}v = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} \varphi(x)x^{\sigma+it-1}\mathrm{d}x\ ,$$

qui est le résultat voulu.

Remarque : On peut bien entendu aussi effectuer le changement de variable $x = e^{-2\pi v}$ dans l'intégrale $\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} \varphi(x)x^{\sigma+it-1}\mathrm{d}x$, valide par intégrabilité de l'intégrande (et préservation de celle-ci par changement de variable difféomorphique).

III-2c Comme $\widehat{\Phi}_\sigma$ est supposé intégrable sur $\mathbf{R}$, on peut appliquer la formule d'inversion de Fourier qui permet d'affirmer que

$$\hat{\hat{\Phi}}_\sigma(-v) = \Phi_\sigma(v) = \varphi(e^{-2\pi v})e^{-2\pi\sigma v}.$$

Or la question précédente implique que

$$\hat{\hat{\Phi}}_\sigma(-v) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{M}\varphi(\sigma+it)e^{2i\pi tv}\mathrm{d}t\ .$$

Autrement dit, pour tout $v \in \mathbf{R}$ on a

$$\varphi(e^{-2\pi v}) = \frac{1}{2\pi} e^{2\pi\sigma v} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{M}\varphi(\sigma+it) e^{-2i\pi t v} \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{M}\varphi(\sigma+it) e^{2\pi v(\sigma+it)} \mathrm{d}t \,.$$

On remarque ensuite que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, il existe $v \in \mathbf{R}$ tel que $x = e^{-2\pi v}$ (on prend $v = -\frac{1}{2\pi}\log x$) et que $e^{-2\pi v(\sigma+it)} = x^{-\sigma-it}$. On obtient donc $\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{M}\varphi(\sigma+it) x^{-\sigma-it}\mathrm{d}t$ comme voulu.

III-2d La question **III-1d)** montre que $\mathbf{R}_+^* = D_\varphi$. On fixe $\sigma \in \mathbf{R}_+^*$. La question **III-2a)** montre que Φ_σ est intégrable sur $\mathbf{R}$, ce qui permet de définir sa transformée de Fourier. On va montrer que Φ_σ satisfait l'hypothèse de la question **I-5)**. Pour cela, on note que

$$\Phi_\sigma'(v) = 2\pi(e^{-2\pi v} - \sigma)\Phi_\sigma(v) \quad \text{et} \quad \Phi_\sigma''(v) = 4\pi^2\big((e^{-2\pi v} - \sigma)^2 - e^{-2\pi v})\big)\Phi_\sigma(v) \,.$$

Pour tout $v \in \mathbf{R}$, on pose $f(v) = v^2(|\Phi_\sigma(v)| + |\Phi_\sigma'(v)| + |\Phi_\sigma''(v)|)$. Le calcul précèdent implique qu'il existe une fonction polynômiale P de degré 2 de coefficient dominant $4\pi^2$ telle que $f(v) = P(e^{-2\pi v})v^2 e^{-2\pi\sigma v}\exp(-e^{-2\pi v})$. Lorsque v tend vers $+\infty$, $P(e^{-2\pi v})\exp(-e^{-2\pi v})$ tend vers $P(0)$ et $v^2 e^{-2\pi\sigma v}$ tend vers 0, donc $f(v)$ tend vers 0. Lorsque v tend vers $+\infty$, $P(e^{2\pi v})v^2 e^{2\pi\sigma v} \sim 4\pi^2 v^2 e^{2\pi(2+\sigma)v}$ Or $\exp(-e^{2\pi v}) = o\big(v^2 e^{2\pi(2+\sigma)v}\big)$, donc $f(-v)$ tend vers 0 lorsque $v \to +\infty$. Cela montre que

$$\lim_{v\to\pm\infty} v^2(|\Phi_\sigma(v)| + |\Phi_\sigma'(v)| + |\Phi_\sigma''(v)|) = 0 \,,$$

et la question **I-5)** implique que $\widehat{\Phi}_\sigma$ est intégrable sur $\mathbf{R}$.

III-2e On rappelle que si $\varphi(x) = e^{-x}$, alors pour tout $\sigma \in \mathbf{R}_+^*$ et tout $t \in \mathbf{R}$, on a $\mathcal{M}\varphi(\sigma+it) = \Gamma(\sigma+it)$. Les questions **III-2c)** et **2e)** impliquent la première formule. Si $\sigma > 1$, alors on a (en faisant $\sigma \leftrightarrow \sigma - 1$)

$$e^{-x} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\sigma-1+it)x^{-\sigma+1-it}\mathrm{d}t \tag{4.7}$$

$$= \frac{x}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\sigma-1+it)x^{-\sigma-it}\mathrm{d}t \tag{4.8}$$

$$= \frac{x}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Gamma(\sigma+it)}{\sigma-1+it}x^{-\sigma-it}\mathrm{d}t \,,$$

d'après l'équation fonctionnelle de Γ dans $\mathbf{H}_0$ montrée à la question **III-1e)**. Cela entraîne immédiatement le résultat voulu.

III-3 On observe que pour tout $x \in \mathbf{R}$ tel que $|x| \geqslant 1$,

$$|\varphi(x)f(x)| \leqslant C(1+|x|)^k|\varphi(x)| \leqslant C(1+|x|)^{-2}(1+|x|)^{k+2}|\varphi(x)| \leqslant C\rho_{k+2,0}(\varphi)(1+|x|)^{-2} \,.$$

De plus si $x \in [-1,1]\backslash\{0\}$, on a

$$|\varphi(x)f(x)| \leqslant \|\varphi\|_\infty|f(x)| = \rho_{0,0}(\varphi)|f(x)|$$

et donc pour tout $x \in \mathbf{R}^*$

$$|\varphi(x)f(x)| \leqslant C\rho_{k+2,0}(\varphi)(1+|x|)^{-2}\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(|x|) + \rho_{0,0}(\varphi)|f(x)|\mathbb{1}_{[0,1[}(|x|)$$

ce qui assure l'intégrabilité de φf sur $\mathbf{R}$.
On pose $C_1 = \int_{-1}^{1}|f(x)|\mathrm{d}x + C\int_{-\infty}^{+\infty}(1+|x|)^{-2}\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}|f(x)|\mathrm{d}x + 2C$. On en déduit donc que

$$\Big|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x\Big| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)\varphi(x)|\mathrm{d}x \leqslant C_1\max(\rho_{0,0}(\varphi),\rho_{k+2,0}(\varphi))\ ,$$

ce qui permet de conclure quant à la continuité de T_f.

III-4a On a $\varphi(x)/(\varepsilon^2+x^2) \leqslant \|\varphi\|_\infty/(\varepsilon^2+x^2)$. La fonction $x \mapsto 1/(\varepsilon^2+x^2)$ est intégrable sur $\mathbf{R}$ (continue sur $\mathbf{R}$ donc localement intégrable, et équivalente en $\pm\infty$ à $1/x^2$ qui l'est par Riemann) et donc $x \mapsto \varphi(x)/(\varepsilon^2+x^2)$ également. Par le changement de variable $u = x/\varepsilon$, on obtient

$$\varepsilon\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(y)}{\varepsilon^2+y^2}\,\mathrm{d}y = \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon}\frac{\varphi(\varepsilon u)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \int_{\mathbf{R}}\frac{\varphi(\varepsilon u)}{1+u^2}\mathbb{1}_{[-1/\varepsilon,1/\varepsilon]}(u)\,\mathrm{d}u$$

Comme φ est continue, pour tout $u \in \mathbf{R}$, $\lim_{\varepsilon\to0^+}\varphi(\varepsilon u)/(1+u^2)\mathbb{1}_{[-1/\varepsilon,1/\varepsilon]}(u) = \varphi(0)(1+u^2)^{-1}$. Pour tout $u \in \mathbf{R}$ et tout $\varepsilon > 0$, on a de plus $|\varphi(\varepsilon u)/(1+u^2)\mathbb{1}_{[-1/\varepsilon,1/\varepsilon]}(u)| \leqslant \|\varphi\|_\infty(1+u^2)^{-1}$ et comme $u \mapsto (1+u^2)^{-1}$ est intégrable sur $\mathbf{R}$ d'intégrale π, on a par convergence dominée

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\varepsilon u)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \varphi(0)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \pi\varphi(0),$$

qui entraîne le résultat voulu.
Variante suggérée par l'indication : on a $\varepsilon\int_{-1}^{1}\frac{1}{\varepsilon^2+x^2}\,\mathrm{d}x = 2\mathrm{Arctan}\,(1/\varepsilon)$ qui tend vers π quand $\varepsilon \to 0^+$. Pour répondre à la question, il suffit donc de montrer que $\Delta(\varepsilon) = |\varepsilon\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(x)}{\varepsilon^2+x^2}\,\mathrm{d}x - \varepsilon\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(0)}{\varepsilon^2+x^2}\,\mathrm{d}x|$ tend vers 0. On se fixe $\delta > 0$; par inégalité triangulaire pour tout $\alpha \in]0,1[$ par :

$$|\Delta(\varepsilon)| \leqslant \varepsilon\int_{-1}^{1}\frac{|\varphi(x)-\varphi(0)|}{\varepsilon^2+x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{|\varphi(x)-\varphi(0)|}{\varepsilon^2+x^2}\,\mathrm{d}x + \varepsilon\int_{|x|>\alpha}\frac{|\varphi(x)-\varphi(0)|}{\varepsilon^2+x^2}\,\mathrm{d}x$$

En prenant α assez petit pour que $|\varphi(x)-\varphi(0)| \leqslant \delta$, la première intégrale se majore par $\pi\delta$. Pour la 2è on est à l'écart de 0, on peut donc la majorer par $\varepsilon \times 2\|\varphi\|_\infty\int_{|x|>\alpha}x^{-2}\,\mathrm{d}x$, qui tend vers 0 quand $\varepsilon \to 0$. Ainsi, pour α pris assez petit on aura, dès que ε est assez voisin de 0, $|\Delta(\varepsilon)| \leqslant 2\delta$.

III-4b Il est clair que $\int_{\delta}^{1}|\log(|x|)|\mathrm{d}x = 1 + \delta\log\delta - \delta$ qui tend vers 1 lors que δ tend vers 0^+. Comme $\ell = \ell_0 + i\frac{\pi}{2}\mathtt{sgn}$, on en déduit que tout $f \in \{\ell,\ell_0,\mathtt{sgn},q_\varepsilon\}$ est intégrable sur $[-1,1]$. Par ailleurs $\lim_{x\to\pm\infty}|x|^{-1}f(x) = 0$. Cela montre que f satisfait les hypothèses de la question **III-3)** ce qui permet de conclure.

III-4c On prolonge la fonction continûment par la valeur $\varphi'(0)$ en 0. Tout autre prolongement continu W_φ de $x \mapsto \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}$ à $\mathbf{R}$ coïnciderait avec V_φ sur $\mathbf{R}^*$ qui est dense dans $\mathbf{R}$: on aurait donc $V_\varphi = VW\varphi$ sur $\mathbf{R}$.

Avec les conventions algébriques habituelles sur les bornes de l'intégrale, pour tout $x \neq 0$, on a

$$\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\right| = \left|\frac{1}{x}\int_0^x \varphi'(y)\,\mathrm{d}y\right| \leqslant \frac{1}{x}\int_0^x |\varphi'(y)|\,\mathrm{d}y \leqslant \|\varphi'\|_\infty\ .$$

On a donc

$$\left|\int_{-1}^1 V_\varphi(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant 2\|\varphi'\|_\infty = 2\rho_{0,1}(\varphi)\ .$$

D'autre part

$$\left|\frac{\varphi(x)}{x}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(|x|)\right| \leqslant \frac{\rho_{1,0}(\varphi)}{|x|(1+|x|)}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(|x|) \leqslant \rho_{1,0}(\varphi)|x|^{-2}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(|x|).$$

Cette inégalité assure la convergence absolue de $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(|x|)\,\mathrm{d}x$ et donne par inégalité triangulaire

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(|x|)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \rho_{1,0}(\varphi)\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^{-2}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(|x|).\mathrm{d}x = 2\rho_{1,0}(\varphi)\ .$$

On en déduit donc que

$$|\langle\,\mathtt{VP}\,|\,\varphi\rangle| \leqslant 2\rho_{0,1}(\varphi) + 2\rho_{1,0}(\varphi) \leqslant 4\max(\rho_{0,1}(\varphi),\rho_{1,0}(\varphi))$$

qui implique le résultat désiré.

III-4d On a d'abord $\left|\frac{\varphi(y)\mathbf{1}_{[\varepsilon,+\infty[}(|y|)}{y}\right| \leqslant \varepsilon^{-1}|\varphi(y)|$. Comme φ est intégrable sur $\mathbf{R}$, cela implique que $x\mapsto x^{-1}\varphi(x)1_{[\varepsilon,+\infty[}(|x|)$ est intégrable sur $\mathbf{R}$.
Ensuite on observe que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(y)\mathbf{1}_{[\varepsilon,+\infty[}(|y|)}{y}\mathrm{d}y &= \int_{-1}^1\frac{\varphi(y)\mathbf{1}_{[\varepsilon,+\infty[}(|y|)}{y}\mathrm{d}y + \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(y)\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(|y|)}{y}\mathrm{d}y &(4.9)\\ &= \int_{-1}^1\frac{\varphi(y)-\varphi(0)}{y}\mathbf{1}_{[\varepsilon,+\infty[}(|y|)\mathrm{d}y + \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(y)\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(|y|)}{y}\mathrm{d}y &(4.10)\\ &= \int_{-1}^1 V_\varphi(y)\mathbf{1}_{[\varepsilon,+\infty[}(|y|)\mathrm{d}y + \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(y)\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(|y|)}{y}\mathrm{d}y\end{aligned}$$

la seconde égalité étant justifiée par le fait que $y\mapsto y^{-1}\mathbf{1}_{[\varepsilon,+\infty[}(|y|)$ est impaire et donc d'intégrale nulle. Par application du théorème de convergence dominée sur l'intégrale $\int_{-1}^1 V_\varphi(y)\mathbf{1}_{[\varepsilon,+\infty[}(|y|)\mathrm{d}y$ (correctement grâce à la domination $|V_\varphi(y)\mathbf{1}_{[\varepsilon,+\infty[}(|y|)| \leqslant |V_\varphi(y)|$), on obtient donc que

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\mathbf{1}_{[\varepsilon,+\infty[}(|x|)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(|x|)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^1 V_\varphi(x)\mathrm{d}x = \langle\mathtt{VP}\,|\,\varphi\rangle,$$

qui est le résultat souhaité.

III-4e Soit $x\neq 0$. On observe que $\ell_0'(x) = |x|^{-1}\mathbf{sgn}(x) = x^{-1}$. Donc $(\ell_0(x)\varphi(x))' = x^{-1}\varphi(x) + \ell_0(x)\varphi'(x)$. On a donc

$$\int_\varepsilon^{+\infty} x^{-1}\varphi(x)\mathrm{d}x = -\varphi(\varepsilon)\log(\varepsilon) - \int_\varepsilon^{+\infty}\varphi'(x)\log|x|\mathrm{d}x$$

$$\text{et} \quad \int_{-\infty}^{-\varepsilon} x^{-1}\varphi(x)\mathrm{d}x = \varphi(-\varepsilon)\log(\varepsilon) - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \varphi'(x)\log|x|\mathrm{d}x,$$

ce qui entraîne le premier point.
Comme $\varphi' \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, $\varphi'\ell_0$ est intégrable sur $\mathbf{R}$ (comme montré à la question **III-3)**. Par convergence dominée, on obtient donc

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)\log(|x|)\mathbf{1}_{[\varepsilon,+\infty[}(|x|)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)\ell_0(x)\mathrm{d}x = -\langle T'_{\ell_0} \,|\, \varphi\rangle.$$

On a par ailleurs par Taylor à l'ordre 1

$$\begin{aligned}\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon) &= \varphi(0) - \varepsilon\varphi'(0) + o(\varepsilon) - \big(\varphi(0) + \varepsilon\varphi'(0) + o(\varepsilon)\big) \\ &= -2\varepsilon\varphi'(0) + o(\varepsilon).\end{aligned} \tag{4.11}$$

Comme $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon\log(\varepsilon) = 0$, on en déduit que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \Big(\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)\Big)\log(\varepsilon) = 0\ .$$

On a donc $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{-1}\varphi(x)\mathbf{1}_{[\varepsilon,+\infty[}(|x|)\mathrm{d}x = \langle T'_{\ell_0} \,|\, \varphi\rangle$ ce qui permet de conclure grâce à la question précédente.

III-4f Pour tout réel $r > 0$ et toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, on a

$$\int_{-r}^{r} \varphi'(x)\mathbf{sgn}(x)\mathrm{d}x = -\int_{-r}^{0} \varphi'(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{r} \varphi'(x)\mathrm{d}x \tag{4.12}$$

$$= -(\varphi(0) - \varphi(-r)) + \varphi(r) - \varphi(0) \tag{4.13}$$

$$= \varphi(-r) + \varphi(r) - 2\varphi(0).$$

On en déduit, puisque φ est nulle en $\pm\infty$, que

$$\langle T'_{\mathbf{sgn}} \,|\, \varphi\rangle = -\langle T_{\mathbf{sgn}} \,|\, \varphi'\rangle = \lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} \varphi'(x)\mathbf{sgn}(x)\mathrm{d}x = 2\varphi(0),$$

ce qui est le premier résultat souhaité.
On a $\ell = \ell_0 + i\frac{\pi}{2}\mathbf{sgn}$. On voit facilement par linéarité de l'intégrale que $T_\ell = T_{\ell_0} + +i\frac{\pi}{2}T_{\mathbf{sgn}}$. Il est ensuite facile, par dualité et linéarité de l'intégrale de voir que $T'_\ell = T'_{\ell_0} + i\frac{\pi}{2}T'_{\mathbf{sgn}}$ (ou tout simplement en appliquant les résultats au programme : la dérivation est linéaire), ce qui donne bien le résultat voulu grâce à la question **4e)**.

III-4g On a

$$\begin{aligned}
\langle T_{q_\varepsilon} \,|\, \varphi\rangle &= \int_{-1}^{1} \frac{i\varphi(x)}{ix+\varepsilon}\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i\varphi(x)}{ix+\varepsilon}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(|x|)\,\mathrm{d}x & (4.14)\\
&= \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(x)(x+i\varepsilon)}{x^2+\varepsilon^2}\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(|x|)\,\mathrm{d}x & (4.15)\\
&= \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(x)x}{x^2+\varepsilon^2}\,\mathrm{d}x + i\varepsilon\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(|x|)\,\mathrm{d}x & (4.16)\\
&= \int_{-1}^{1} \frac{(\varphi(x)-\varphi(0))x}{x^2+\varepsilon^2}\,\mathrm{d}x + i\varepsilon\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(|x|)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

car $x \mapsto x(x^2+\varepsilon^2)^{-1}$ est impaire donc d'intégrale nulle sur $[-1,1]$. Cela entraîne l'égalité voulue. Par convergence dominée, on obtient facilement

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{-1}^{1} V_\varphi(x)\frac{x^2}{x^2+\varepsilon^2}\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(|x|)\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= \int_{-1}^{1} V_\varphi(x)\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(|x|)\,\mathrm{d}x = \langle \mathtt{VP} \,|\, \varphi\rangle$$

et on en déduit que $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\langle T_{q_\varepsilon} \,|\, \varphi\rangle = \langle \mathtt{VP} + i\pi\delta_0 \,|\, \varphi\rangle$ grâce à la question **4a)** qui permet de gérer l'intégrale $i\varepsilon\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(x)\mathrm{d}x}{x^2+\varepsilon^2}\,\mathrm{d}x$.

III-5a Le résultat de la question **III-3** l'affirme par exemple, puisque $\mathbb{1}_{\mathbf{R}_+}$ est bornée et continue sauf en 0.

III-5b On a

$$\widehat{Y}_\varepsilon(x) = \lim_{r\to+\infty} 2\pi\int_0^r e^{-2\pi\varepsilon t - 2i\pi t x}\mathrm{d}t = \lim_{r\to+\infty}\left[-e^{-2\pi\varepsilon t-2i\pi tx}/(ix+\varepsilon)\right]_0^{2\pi r} = \frac{1}{ix+\varepsilon}\,.$$

puisque $|e^{-2\pi\varepsilon t-2i\pi tx}| = e^{-2\pi\varepsilon t} \to 0$ quand $t\to+\infty$.

III-5c Soit $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbf{R})$. On a $\langle T_{Y_\varepsilon} \,|\, \varphi\rangle = 2\pi\int_0^{+\infty} e^{-2\pi\varepsilon t}\varphi(t)\mathrm{d}t$.
Comme à t fixé, $\lim_{\varepsilon\to 0} e^{-2\pi\varepsilon t}\varphi(t) = \varphi(t)$, et que $|e^{-2\pi\varepsilon t}\varphi(t)| \leqslant |\varphi(t)|$ où φ est intégrable, le théorème de convergence dominée assure que $\lim_{\varepsilon\to 0}\langle T_{Y_\varepsilon} \,|\, \varphi\rangle = 2\pi\int_0^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{d}t = \langle T_{2\pi\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}} \,|\, \varphi\rangle$ comme voulu.

III-5d Soit $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbf{R})$: on rappelle que $\widehat{\varphi}$ est également dans $\mathcal{S}(\mathbf{R})$. On a

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{T}_{2\pi\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}} | \varphi\rangle &= \langle T_{2\pi\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}} | \widehat{\varphi}\rangle & (4.17)\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\langle T_{Y_\varepsilon} \,|\, \widehat{\varphi}\rangle \text{ par } \mathbf{5c} & (4.18)\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\langle \widehat{T_{Y_\varepsilon}} \,|\, \varphi\rangle \text{ par continuité de la transformation de Fourier} & (4.19)\\
&= i^{-1}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\langle T_{q_\varepsilon} \,|\, \varphi\rangle \text{ par } \mathbf{5b} \text{ et la propriété de compatibilité } \widehat{T_{Y_\varepsilon}} = T_{\widehat{Y_\varepsilon}} & (4.20)\\
&= i^{-1}\langle T'_\ell \,|\, \varphi\rangle \text{ par } \mathbf{4g},
\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

Partie IV.

IV-1a Par sigma-additivité, on a
$\mathbf{P}(q\mathbf{N}^*) = \mathbf{P}(\bigcup_{n\in\mathbf{N}^*}\{nq\}) = \sum_{n\geqslant 1}\mathbf{P}(\{qn\}) = \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\zeta(\sigma)q^\sigma n^\sigma} = \frac{1}{q^\sigma}$.

IV-1b Soit $k\geqslant 2$ et des entiers $n_k > \ldots > n_1 \geqslant 1$. On a donc

$$\mathbf{P}\big(A_{n_1}\cap\ldots\cap A_{n_k}\big) = \mathbf{P}\big((p_{n_1}\mathbf{N}^*)\cap\ldots\cap(p_{n_k}\mathbf{N}^*)\big) = \mathbf{P}\big(p_{n_1}\ldots p_{n_k}\mathbf{N}^*\big)$$

puisque, les p_i étant des nombres premiers deux à deux distincts, un entier est divisible par tous les p_i si et seulement s'il est divisible par leur produit. La question **IV-1a)** avec $q = p_{n_1}\ldots p_{n_k}$ implique que

$$\mathbf{P}\big(p_{n_1}\ldots p_{n_k}\mathbf{N}^*\big) = \frac{1}{q^\sigma} = \frac{1}{p_{n_1}^\sigma}\ldots\frac{1}{p_{n_k}^\sigma} .$$

La même question implique donc que

$$\frac{1}{p_{n_1}^\sigma}\ldots\frac{1}{p_{n_k}^\sigma} = \mathbf{P}\big(p_{n_1}\mathbf{N}^*\big)\ldots\mathbf{P}\big(p_{n_k}\mathbf{N}^*\big).$$

On a donc montré que pour tout $k\geqslant 1$ et tous entiers $n_k > \ldots > n_1 \geqslant 1$,

$$\mathbf{P}\big(A_{n_1}\cap\ldots A_{n_k}\big) = \mathbf{P}(A_{n_1})\ldots\mathbf{P}(A_{n_k}) .$$

ce qui est le résultat voulu.

IV-1c On a, d'abord parce que 1 est le seul entier naturel divisible par aucun nombre premier, ensuite par limite monotone

$$\frac{1}{\zeta(\sigma)} = \mathbf{P}(\{1\}) = \mathbf{P}\Big(\bigcap_{n\in\mathbf{N}^*} A_n^c\Big) = \lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\big(A_1^c\cap\ldots\cap A_n^c\big) .$$

À la question **1b)** on a montré l'indépendance des événements $(A_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et le cours affirme que les $(A_n^c)_{n\in\mathbf{N}^*}$ sont indépendants également : ceci donne

$$\mathbf{P}\big(A_1^c\cap\ldots\cap A_n^c\big) = \prod_{1\leqslant k\leqslant n}\mathbf{P}\big(A_k^c\big).$$

Or $\mathbf{P}(A_n^c) = 1 - \mathbf{P}(A_n) = 1 - p_n^{-\sigma}$. Donc finalement

$$\frac{1}{\zeta(\sigma)} = \lim_{n\to\infty}\prod_{1\leqslant k\leqslant n}\big(1 - p_k^{-\sigma}\big)$$

qui entraîne facilement le résultat voulu par continuité sur $\mathbf{R}_+^*$ de la fonction inverse.

IV-2 Par continuité du logarithme sur $\mathbf{R}_+^*$ et la stricte positivité de ζ sur $]1, \infty[$, on observe tout d'abord que

$$\log \zeta(\sigma) = \lim_{n\to\infty} \log\left(\prod_{1\leqslant k\leqslant n} \left(1 - p_n^{-\sigma}\right)^{-1} \right).$$

Or $\log\left(\prod_{1\leqslant k\leqslant n} \left(1 - p_n^{-\sigma}\right)^{-1} \right) = -\sum_{1\leqslant k\leqslant n} \log\left(1 - p_k^{-\sigma}\right)$. Donc

$$\log \zeta(\sigma) = -\lim_{n\to\infty} \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \log\left(1-p_k^{-\sigma}\right) = -\sum_{n\geqslant 1} \log\left(1-p_n^{-\sigma}\right).$$

Puisque ζ est C^1, la dérivée de $-\log\circ\zeta$ en σ est donc $-\zeta'(\sigma)/\zeta(\sigma)$. On observe d'autre part que
- pour tout $n\geqslant 1$, la fonction $\sigma \mapsto \log\left(1-p_n^{-\sigma}\right)$ est C^1 sur $]1, \infty[$ de dérivée $(1-p_n^{-\sigma})^{-1} p_n^{-\sigma} \log p_n$,
- Soit $\sigma_0 > 1$ et on fixe $\sigma \in [\sigma_0, +\infty[$. On observe que $p_n \geqslant 2$ et donc $p_n^{-\sigma} \leqslant 2^{-\sigma} \leqslant 2^{-1}$. Par conséquent, $1-p_n^{-\sigma} \geqslant 1/2$ et $(1-p_n^{-\sigma})^{-1} \leqslant 2$. Donc

$$0 \leqslant \frac{p_n^{-\sigma}\log p_n}{1-p_n^{-\sigma}} \leqslant 2p_n^{-\sigma}\log p_n \leqslant (p_n^{-(\sigma_0-1)/2}\log p_n)p_n^{-(\sigma_0+1)/2}.$$

Comme $\lim_{n\to\infty} p_n^{-(\sigma_0-1)/2}\log p_n = 0$, on pose $K_{\sigma_0} = \sup_{n\in\mathbf{N}^*} p_n^{-(\sigma_0-1)/2}\log p_n$ qui est une quantité finie et on a pour tout $\sigma \in [\sigma_0, +\infty[$,

$$0 \leqslant \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\log\left(1-p_n^{-\sigma}\right) \leqslant K_{\sigma_0} p_n^{-(\sigma_0+1)/2}.$$

Comme la série de terme général $(p_n^{-(\sigma_0+1)/2})$ converge (elle est à termes positifs et elle majorée par $\zeta((\sigma_0+1)/2))$, on a donc convergence normale sur $[\sigma_0, +\infty[$ de la série des dérivées.
Le critère de dérivation terme à terme des séries des fonctions implique

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} \sum_{n\geqslant 1} \log\left(1-p_n^{-\sigma}\right) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\log\left(1-p_n^{-\sigma}\right),$$

ce qui permet de conclure.

IV-3 Pour tout $m \in \mathbf{N}^*$, on pose $S_m = \{p_m^k \,;\, k \in \mathbf{N}^*\}$ et $S_0 = \mathbf{N}^* \setminus \bigcup_{m\geqslant 1} S_m$. On observe que $(S_m)_{m\in\mathbf{N}}$ est une partition de $\mathbf{N}^*$. Par théorème de sommation par paquets des familles à termes positifs , on a pour tout réel $\sigma > 1$,

$$\sum_{n\in\mathbf{N}^*} \Lambda(n) n^{-\sigma} = \sum_{m\in S_0} \Lambda(m) m^{-\sigma} + \sum_{m\geqslant 1} \left(\sum_{n\in S_m} \Lambda(n) n^{-\sigma} \right).$$

Or pour tout $n \in S_0$, $\Lambda(n) = 0$ et pour tout entier $m \geqslant 1$, on a

$$\sum_{n\in S_m} n^{-\sigma}\Lambda(n) = \sum_{k\geqslant 1} p_m^{-k\sigma}\log p_m = \frac{1}{p_m^\sigma}\log p_m \frac{1}{1-p_m^{-\sigma}} = \frac{\log p_m}{p_m^\sigma - 1}.$$

On a donc
$$\sum_{n\in\mathbf{N}^*}\Lambda(n)n^{-\sigma}=\sum_{m\geqslant 1}\frac{\log p_m}{p_m^\sigma-1}$$
et la question précédente implique que $\Phi(\sigma)=-\zeta'(\sigma)/\zeta(\sigma)$.

IV-4a À l'aide du développement en série entière du logarithme, valide pour $x\in]-1,1[$,
$$\begin{aligned}0\leqslant -\log(1-x)-x &= \sum_{k\geqslant 2}\tfrac{1}{k}x^k=\tfrac12 x^2\sum_{l\geqslant 0}\tfrac{2}{l+2}x^l && (4.21)\\ &\leqslant \tfrac12 x^2\sum_{l\geqslant 0}x^l=\tfrac12 x^2\frac{1}{1-x} && (4.22)\\ &\leqslant \tfrac12 x^2\frac{1}{1-\frac12}=x^2,\end{aligned}$$
qui est bien l'inégalité voulue.

IV-4b Pour tout réel $\sigma>1$, la question **IV-2)** implique que
$$f(\sigma)=\sum_{n\geqslant 1}\big(-p_n^{-\sigma}-\log(1-p_n^{-\sigma})\big)\,.$$
Comme $p_n^{-\sigma}\in[0,1/2]$, l'inégalité précédente implique que
$$0\leqslant f(\sigma)\leqslant\sum_{n\geqslant 1}p_n^{-2\sigma}\leqslant\sum_{n\geqslant 1}p_n^{-2}\leqslant\sum_{m\geqslant 1}m^{-2}\,.$$
Cela montre que f est positive et majorée sur $]1,+\infty[$. On observe ensuite que $x\in[0,1/2]\mapsto -\log(1-x)-x=\sum_{k\geqslant 2}k^{-1}x^k$ est une fonction croissante (par somme d'une série de fonctions croissantes). On en déduit que $\sigma\in]1,+\infty[\mapsto -p_n^{-\sigma}-\log(1-p_n^{-\sigma})$ est décroissante. Cela implique que f est décroissante.

IV-4c Pour tout $\sigma\in\mathbf{R}_+^*$, on a
$$\log\sigma^{-1}-Z(1+\sigma)=f(1+\sigma)-\log(\sigma\zeta(1+\sigma))\,.$$
Par la question précédente, on pose $C=\sup_{\sigma>0}f(1+\sigma)$: ceci est une quantité finie et on a
$$-\log(\sigma\zeta(1+\sigma))\leqslant\log\sigma^{-1}-Z(1+\sigma)\leqslant-\log(\sigma\zeta(1+\sigma))+C$$
et donc tout $\sigma\in]0,1[$,
$$-\frac{-\log(\sigma\zeta(1+\sigma))}{\log\sigma^{-1}}\leqslant 1-\frac{Z(1+\sigma)}{\log\sigma^{-1}}\leqslant\frac{C-\log(\sigma\zeta(1+\sigma))}{\log\sigma^{-1}}\,.$$
Par la question **I-2b)**, $\lim_{\sigma\to 0^+}\log(\sigma\zeta(1+\sigma))=0$ et comme $\lim_{\sigma\to 0^+}\log\sigma^{-1}=+\infty$, on en déduit que
$$\lim_{\sigma\to 0^+}\frac{-\log(\sigma\zeta(1+\sigma))}{\log\sigma^{-1}}=\lim_{\sigma\to 0^+}\frac{C-\log(\sigma\zeta(1+\sigma))}{\log\sigma^{-1}}=0\,.$$

Par le principe de l'encadrement,

$$\lim_{\sigma\to 0^+} \frac{Z(1+\sigma)}{\log \sigma^{-1}} = 1\ ,$$

qui est le résultat voulu.

IV-4d On veut appliquer ($\boldsymbol{\mathcal{E}q}_6$) à $a_n = n^{-1}\mathbf{1}_{\mathscr{P}}(n)$ et $\lambda_n = \log n$. Pour tout réel $\sigma > 0$, on a bien

$$D(\sigma) = \sum_{n\geqslant 1} a_n e^{-\lambda_n \sigma} = \sum_{n\geqslant 1} p_n^{-1-\sigma} = Z(1+\sigma)\ .$$

La question précédente montre que pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\frac{D(p\sigma)}{D(\sigma)} = \frac{\log \sigma^{-1}}{\log p^{-1} + \log \sigma^{-1}} \cdot \frac{\log\left((p\sigma)^{-1}\right) Z(1+p\sigma)}{\log\left(\sigma^{-1}\right) Z(1+\sigma)} \xrightarrow[\sigma\to 0^+]{} 1$$

et donc $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ satisfont l'hypothèse (H_0) de ($\boldsymbol{\mathcal{E}q}_6$) ce qui permet d'affirmer que

$$\lim_{n\to+\infty} D(1/\log n)^{-1} \sum_{1\leqslant k\leqslant n} k^{-1}\mathbf{1}_{\mathscr{P}}(k) = 1\ .$$

Or on a montré que $\lim_{\sigma\to 0^+} D(1/\sigma)/\log \sigma^{-1} = 1$ donc $D(1/\log n) \sim \log\log n$, ce qui permet de conclure.

Partie V.

V-1a Pour tout entier $k \geqslant 1$, l'inégalité triangulaire implique que $|Z(ks)| \leqslant \sum_{n\geqslant 1} |p_n^{-ks}| = \sum_{n\geqslant 1} p_n^{-k\mathrm{Re}(s)}$.
Par théorème de Fubini pour les séries positives, on a *a priori* dans $\overline{\mathbf{R}}_+$ d'abord

$$\sum_{k\geqslant 1}\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{kp_n^{k\mathrm{Re}(s)}} = \sum_{n\geqslant 1}\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{kp_n^{k\mathrm{Re}(s)}} = \sum_{n\geqslant 1} -\log\left(1 - p_n^{-\mathrm{Re}(s)}\right) = -\log \zeta(\mathrm{Re}(s))$$

en appliquant le résultat de la question **IV-2)**. Cela montre bien que la série de terme général $(k^{-1}Z(ks))_{k\in\mathbf{N}^*}$ est absolument convergente (pusique $-\log\zeta(\mathrm{Re}(s))$ est une quantité finie) et que $\sum_{k\geqslant 1} k^{-1}|Z(ks)| \leqslant -\log\zeta(\mathrm{Re}(s))$.

V-1b Soit K un compact tel que $K \subset \mathbf{H}_1$. Comme $\mathrm{Re}(\cdot)$ est continue (car linéaire), elle atteint son infimum sur K : il existe $s_0 \in K$ tel que $\mathrm{Re}(s_0) = \min_{s\in K} \mathrm{Re}(s)$. On pose $\sigma_0 = \mathrm{Re}(s_0)$. Puisque $s_0 \in K$, $s_0 \in \mathbf{H}_1$ et donc $\mathrm{Re}(s_0) = \sigma_0 > 1$.
Pour tout $s \in K$ et tout entier $k \geqslant 1$, on observe d'une part, par l'inégalité triangulaire, que $k^{-1}|Z(ks)| \leqslant k^{-1}Z(k\mathrm{Re}(s)) \leqslant k^{-1}Z(k\sigma_0)$ terme général d'une série convergence d'après **1a)** (car $\sum_{k\geqslant 1} k^{-1}Z(k\sigma_0) = -\log\zeta(\sigma_0) < +\infty$ puisque $\sigma_0 > 1$).

Par ailleurs, pour tout entier $k \geqslant 1$, $s \mapsto k^{-1}Z(ks)$ est holomorphe sur $\mathbf{H}_1$. Donc L est une série de fonctions holomorphes sur $\mathbf{H}_1$ convergeant normalement sur tout compact $K \subset \mathbf{H}_1$: on en déduit que $s \mapsto L(s) = \sum_{k\geqslant 1} k^{-1}Z(ks)$ est bien holomorphe sur $\mathbf{H}_1$.

Variante : On peut également s'appuyer sur le théorème d'holomorphie pour les intégrales à paramètres, avec la mesure discrète $\mu = \sum_{(k,p)\in\mathbf{N}^*\times\mathscr{P}} \frac{1}{k}\delta_{(k,p)}$ de $\Omega = \mathbf{N}^* \times \mathscr{P}$, en écrivant $L(s) = \int_\Omega p^{-ks}\mathrm{d}\mu(k,p)$.

V-1c Pour tout $s \in \mathbf{H}_1$, on pose $f(s) = \exp L(s)$. Comme exp est holomorphe sur $\mathbf{C}$ et comme L est holomorphe sur $\mathbf{H}_1$, f, par composition d'applications holomorphes ainsi que cela est rappelé en début de problème, est également une fonction holomorphe sur $\mathbf{H}_1$. Par ailleurs, pour tout réel $\sigma > 1$, le théorème de Fubini pour les sommes positives implique que

$$L(\sigma) = \sum_{k\geqslant 1}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{kp_n^{k\sigma}} = \sum_{n\geqslant 1}\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{kp_n^{k\sigma}} = \sum_{n\geqslant 1} -\log\left(1-p_n^{-\sigma}\right) = -\log\zeta(\sigma)\ .$$

Autrement dit, la fonction $f - \zeta$ qui est holomorphe sur $\mathbf{H}_1$, s'annule sur l'ensemble $]1, +\infty[$ qui contient des points d'accumulation dans l'ouvert $\mathbf{H}_1$. Comme $\mathbf{H}_1$ est connexe, le principe des zéros isolés implique que $f = \zeta$, qui est le résultat désiré.

V-1d L'exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbf{C}$.

V-1e La fonction ζ est holomorphe sur $\mathbf{H}_1$, donc sa dérivée aussi. Comme elle ne s'annule pas sur $\mathbf{H}_1$, le quotient$-\zeta'/\zeta$ est holomorphe sur $\mathbf{H}_1$. C'est aussi le cas de Φ comme démontré à la question **I-8)**. Or la question **IV-3)** montre $\zeta'/\zeta + \Phi$ s'annule sur l'ensemble $]1, +\infty[$ qui contient des points d'accumulation dans l'ouvert $\mathbf{H}_1$ (tout point de $]1, +\infty[$ en fait). Comme $\mathbf{H}_1$ est connexe, le principe des zéros isolés implique que $-\zeta'/\zeta = \Phi$ sur $\mathbf{H}_1$, qui est le résultat désiré.

V-2a On observe que $v_n(s) = n^{-s} - \int_n^{n+1} x^{-s}\mathrm{d}x$. La série de terme général (n^{-s}) est absolument convergente par la règle de Riemann ($|n^{-s}| = n^{-\mathrm{Re}(s)}$) ; par ailleurs, la série de terme général $\int_n^{n+1} x^{-s}\mathrm{d}x$ est télescopique, de somme partielle d'ordre n égale à $\int_1^{n+1} x^{-s}\mathrm{d}x = \frac{1}{s-1} - \frac{(n+1)^{-s}}{s-1}$ qui tend vers $\frac{1}{s-1}$. D'où le résultat par différence.

V-2b On procède à une intégration par parties dans la définition de $v_n(s)$, en dérivant $x \mapsto n^{-s} - x^{-s}$ et en primitivant la fonction constante égale à 1 en $x \mapsto x - (n+1)$, ce qui entraîne bien que $v_n(s) = s\int_n^{n+1}(\lceil x\rceil - x)x^{-1-s}\mathrm{d}x$, puisque le crochet est nul.

Il est ensuite clair que $|(\lceil x\rceil - x)x^{-1-s}| \leqslant x^{-1-\mathrm{Re}(s)}$. Comme $x \mapsto x^{-1-\mathrm{Re}(s)}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, on en déduit que $x \in [1, +\infty[\mapsto (\lceil x\rceil - x)x^{-1-s}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. Les questions précédentes montrent alors que

$$s\int_1^{+\infty}(\lceil x\rceil - x)\,x^{-1-s}\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} s\int_1^{n+1}(\lceil x\rceil - x)\,x^{-1-s}\mathrm{d}x \tag{4.23}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\int_k^{k+1}(\lceil x\rceil - x)\,x^{-1-s}\mathrm{d}x \tag{4.24}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{1\leqslant k\leqslant n} v_k(s) \tag{4.25}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} v_n(s) = \zeta(s) - \frac{1}{s-1}$$

qui est le résultat souhaité.

V-2c On observe que pour tout $s \in \mathbf{H}_0$, $|([x]-x)x^{-1-s}| \leqslant x^{-1-\mathrm{Re}(s)}$. Comme $x \mapsto x^{-1-\mathrm{Re}(s)}$ est (continue et) intégrable sur $[1,+\infty[$, on en déduit que $x \in [1,+\infty[\mapsto ([x]-x)x^{-1-s}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$. Pour tout $s \in \mathbf{H}_0$, on peut donc poser $f(s) = \int_1^{+\infty} ([x]-x)\, x^{-1-s}\mathrm{d}x$.

Soit K un compact tel que $K \subset \mathbf{H}_0$. Comme vu précédemment, il existe $\sigma_0 > 0$ tel que $\mathrm{Re}(s) \geqslant \sigma_0$ pour tout $s \in K$ et donc pour tout $s \in K$ et tout $x \in [1,+\infty[$, on a $|([x]-x)x^{-1-s}| \leqslant x^{-1-\mathrm{Re}(s)} \leqslant x^{-1-\sigma_0}$ avec $x \mapsto x^{-1-\sigma_0}$ intégrable sur $[1,+\infty[$.

De plus pour tout $x \in [1,+\infty[$, $s \mapsto x^{-1-s}$ est holomorphe sur $\mathbf{C}$ donc en particulier sur $\mathbf{H}_0$.

Ainsi, le théorème d'holomorphie des intégrales à paramètre s'applique et permet d'affirmer que f est holomorphe sur l'ouvert $\mathbf{H}_0$. Il est est de même pour $s \mapsto sf(s)$ qui coïncide avec $s \mapsto \zeta(s)-(s-1)^{-1}$ sur $\mathbf{H}_1$ d'après **2b)**. Le principe des zéros isolés ($\mathbf{H}_0$ est connexe) montre que $s \mapsto sf(s)$ est l'unique fonction holomorphe sur l'ouvert $\mathbf{H}_0$ prolongeant $s \in \mathbf{H}_1 \mapsto \zeta(s)-(s-1)^{-1}$, ce qui est bien ce que l'on devait montrer.

V-3a On a $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$. Donc $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$, $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$ et

$$\begin{aligned}
\cos(3\theta) &= \cos(2\theta)\cos(\theta) - \sin(2\theta)\sin(\theta) && (4.26)\\
&= (2\cos^2(\theta)-1)\cos(\theta) - 2\cos(\theta)\sin^2(\theta) && (4.27)\\
&= (2\cos^2(\theta)-1)\cos(\theta) - 2\cos(\theta)(1-\cos^2(\theta)) && (4.28)\\
&= 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
q(\theta) &= 5 + 8\cos(\theta) + 4\cos(2\theta) + \cos(3\theta) && (4.29)\\
&= 5 + 8\cos(\theta) + 4(2\cos^2(\theta)-1) + 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) && (4.30)\\
&= 4\cos^3(\theta) + 8\cos^2(\theta) + 5\cos(\theta) + 1 && (4.31)
\end{aligned}$$

La racine $-1 = \cos(\pi)$ est évidente. On factorise donc l'expression précédente par $1+\cos(\theta)$

$$\begin{aligned}
q(\theta) &= 4(\cos^3(\theta)+\cos^2(\theta)) - 4\cos^2(\theta) + 8\cos^2(\theta) + 5\cos(\theta) + 1 && (4.32)\\
&= 4(\cos^3(\theta)+\cos^2(\theta)) + 4(\cos^2(\theta)+\cos(\theta)) - 4\cos(\theta) + 5\cos(\theta) + 1 && (4.33)\\
&= 4(\cos^3(\theta)+\cos^2(\theta)) + 4(\cos^2(\theta)+\cos(\theta)) + \cos(\theta) + 1 && (4.34)\\
&= (\cos(\theta)+1)\big(4\cos^2(\theta) + 4\cos(\theta) + 1\big) && (4.35)\\
&= (\cos(\theta)+1)(2\cos(\theta)+1)^2 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Remarque : Il est également possible d'écrire $\cos k\theta = \mathrm{Re}((e^{i\theta})^k)$ et développer par le binôme de Newton l'expression $(\cos\theta + i\sin\theta)^k$, en remplaçant les $\sin^{2\ell}\theta$ ainsi produits par $(1-\cos^2\theta)^\ell$.

V-3b Pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, on pose $r(\theta) = 5 + 8e^{-i\theta} + 4e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta}$ si bien que $\mathrm{Re}(r(\theta)) = q(-\theta) = q(\theta)$. On observe que pour tous entiers $n,k \geqslant 1$ on a $p_n^{-k(\sigma+it)} = p_n^{-k\sigma}\exp(-itk\log p_n)$. Donc

$$p_n^{-k\sigma} + 8p_n^{-k(\sigma+it)} + 4p_n^{-k(\sigma+2it)} + p_n^{-k(\sigma+3it)} = p_n^{-k\sigma} r\big(tk\log p_n\big)\ .$$

La question **V-1c)** implique alors que

$$\zeta(\sigma)^5\zeta(\sigma+it)^8\zeta(\sigma+2it)^4\zeta(\sigma+3it) = \exp\Big(\sum_{k\geqslant 1}\sum_{n\geqslant 1}\frac{r(kt\log p_n)}{kp_n^{k\sigma}}\Big).$$

Comme la partie réelle est linéaire (et donc également continue) on a

$$|\zeta(\sigma)^5\zeta(\sigma+it)^8\zeta(\sigma+2it)^4\zeta(\sigma+3it)| = \exp\Big(\mathrm{Re}\Big(\sum_{k\geqslant 1}\sum_{n\geqslant 1}\frac{r(kt\log p_n)}{kp_n^{k\sigma}}\Big)\Big) \tag{4.36}$$

$$= \exp\Big(\sum_{k\geqslant 1}\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mathrm{Re}(r(kt\log p_n))}{kp_n^{k\sigma}}\Big) \tag{4.37}$$

$$= \exp\Big(\sum_{k\geqslant 1}\sum_{n\geqslant 1}\frac{q(kt\log p_n)}{kp_n^{k\sigma}}\Big).$$

Comme $q(kt\log p_n))/(kp_n^{k\sigma}) \geqslant 0$, d'après la question précédente, on a

$$\sum_{k\geqslant 1}\sum_{n\geqslant 1}\frac{q(kt\log p_n)}{kp_n^{k\sigma}} \geqslant 0 \quad \text{et donc} \quad \exp\Big(\sum_{k\geqslant 1}\sum_{n\geqslant 1}\frac{q(kt\log p_n)}{kp_n^{k\sigma}}\Big) \geqslant \exp(0) = 1\ ,$$

ce qui permet de conclure.

V-3c On écrit pour $\sigma > 1$
$\zeta(\sigma)\zeta(\sigma+it_0) = (\sigma-1)\zeta(\sigma)\frac{\zeta(\sigma+it_0)-\zeta(1+it_0)}{\sigma-1} \to 1.\zeta'(1+it_0)$ par **I-2b**.
On poursuit alors en regroupant les termes :
$(\zeta(\sigma)|\zeta(\sigma+it_0)|)^5 \times |\zeta(\sigma+it_0)|^3 \times \zeta(\sigma+2it_0)^4|\zeta(\sigma+3it_0)| \to 0$ quand $\sigma \to 1^+$ par produit de limite (le 2nd terme $|\zeta(\sigma+it_0)|^3$ tend en effet vers 0 tandis que tous les autres ont une limite finie). Ceci contredit la minoration par 1 obtenue en **3b**.

V-4a Par **V-2b**, on a
$|\zeta(\sigma+it)| \leqslant \frac{1}{|\sigma-1+it|} + |\sigma+it|\int_1^{+\infty} |[x]-x|\,|x^{-1-\sigma-it}|\mathrm{d}x$ par inégalité triangulaire
$\leqslant \frac{1}{|t|} + (\sigma+|t|)\int_1^{+\infty} x^{-1-\sigma}\,\mathrm{d}x$ vu que $|\sigma-1+it|^2 = (\sigma-1)^2+t^2 \geqslant t^2$
$\leqslant 1 + \frac{\sigma+|t|}{\sigma} = 2+\sigma^{-1}|t| \leqslant 2+|t| \leqslant 3|t|$ en calculant l'intégrale et en usant que σ et $|t|$ sont $\geqslant 1$
ce qui est l'inégalité voulue.

V-4b On dérive l'équation 10 (correctement par théorème de dérivation holomorphe sous le signe intégrale) pour obtenir pour tout $s \in \mathbf{H}_1$

$$\zeta'(s) = -\frac{1}{(s-1)^2} + \int_1^{+\infty}([x]-x)\,x^{-1-s}\mathrm{d}x - s\int_1^{+\infty}([x]-x)\,x^{-1-s}\log x\mathrm{d}x\ .$$

En argumentant comme dans la question précédente on obtient

$$|\zeta'(\sigma+it)| \leqslant \frac{1}{|\sigma-1+it|^2} + \int_1^{+\infty} x^{-1-\sigma}\mathrm{d}x + |\sigma+it|\int_1^{+\infty} x^{-1-\sigma}\log x\mathrm{d}x \tag{4.38}$$

$$= \frac{1}{t^2} + \frac{1}{\sigma} + (\sigma+|t|)\int_1^{+\infty} x^{-1-\sigma}\log x\mathrm{d}x\ .$$

On procède alors à une intégration par parties (correcte par convergence du crochet) qui donne

$$\int_1^{+\infty} x^{-1-\sigma}\log x \mathrm{d}x = \big[-\sigma^{-1}x^{-\sigma}\log x\big]_1^{+\infty} + \frac{1}{\sigma}\int_1^{+\infty} x^{-1-\sigma}\mathrm{d}x$$

et donc

$$|\zeta'(\sigma+it)| \leqslant \frac{1}{t^2}+\frac{1}{\sigma}+\frac{\sigma+|t|}{\sigma^2} \leqslant 3+\sigma^{-2}|t| \leqslant 3+|t| \leqslant 4|t| \ ,$$

qui est l'inégalité voulue.

V-5a C'est une conséquence immédiate de l'égalité

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\zeta(x+it)}\right) = -\frac{\zeta'(x+it)}{\zeta^2(x+it)}$$

et du théorème fondamental du calcul intégral.

V-5b On procède comme en **I-2b)** :

$$0 \leqslant \zeta(\sigma+1)-1-2^{-1-\sigma} = \sum_{n\geqslant 2}(n+1)^{-1-\sigma} \leqslant \sum_{n\geqslant 2}\int_n^{n+1} x^{-1-\sigma}\mathrm{d}x = \int_2^{+\infty} x^{-1-\sigma}\mathrm{d}x = \frac{2^{-\sigma}}{\sigma},$$

ce qui est la première inégalité voulue. Comme $\sigma \geqslant 1$, on a

$$0 \leqslant \zeta(\sigma+1)-1 \leqslant 2^{-1-\sigma}+\sigma^{-1}2^{-\sigma} \leqslant 2^{-2}+2^{-1} = \tfrac{3}{4} \ .$$

On a ensuite

$$|\zeta(\sigma+1+it)| = |1+(\zeta(\sigma+1+it)-1)| \geqslant 1-|\zeta(\sigma+1+it)-1|$$

Or

$$|\zeta(\sigma+1+it)-1| = \Big|\sum_{n\geqslant 2} n^{-\sigma-1-it}\Big| \leqslant \sum_{n\geqslant 2}|n^{-\sigma-1-it}| = \sum_{n\geqslant 2} n^{-\sigma-1} = \zeta(\sigma+1)-1 \leqslant \tfrac{3}{4}$$

et donc

$$|\zeta(\sigma+1+it)| \geqslant 1-|\zeta(\sigma+1+it)-1| \geqslant 1-\tfrac{3}{4} = \tfrac{1}{4},$$

qui implique l'inégalité voulue.

V-5c On part de **V-3b** que l'on écrit en prenant la racine quatrième

$$(*)\ |\zeta(x+it)|^{-2} \leqslant \zeta(x)^{5/4}|\zeta(x+2it)|.|\zeta(x+3it)|^{1/4}$$

En utilisant **V-4a**, on obtient $|\zeta(x+2it)| \leqslant 3.2|t|$ et $|\zeta(x+3it)| \leqslant 3.3|t|$;
par ailleurs par encadrement série-intégrale, on a (pour $x \in]1,3]$)

$$\zeta(x) \leqslant 1+\int_1^{+\infty} t^{-x}dt = 1+1/(x-1) = x/(x-1) \leqslant 3/(x-1),$$

ce qui donne, en réinjectant ceci dans $(*)$
$|\zeta(x+it)|^{-2} \leqslant (3/(x-1))^{5/4}.3.2|t|.(3.3|t|)^{1/4} = 2.3^{11/4}|t|^{5/4}(x-1)^{-5/4}$ comme voulu.

V-5d Pour ce faire, on part de **V-5a** : l'inégalité triangulaire donne
$|\zeta(\sigma+it)|^{-1} \leqslant 4+\int_\sigma^{\sigma+1}\left|\frac{\zeta'(x+it)}{\zeta(x+it)^2}\right|dx \leqslant 4+4|t|\times C.|t|^{5/4}\int_\sigma^{\sigma+1}(x-1)^{-5/4}dx$ en notant $C=2.3^{11/4}$: on s'est servi ici de la majoration $|\zeta'(x+it)|\leqslant 4|t|$ vue en **5b)** et de la majoration $|\zeta(x+it)|^{-2}\leqslant C|t|^{5/4}(x-1)^{-5/4}$ obtenue à la question **5c**.
On primitive $(x-1)^{-5/4}$ en $-4(x-1)^{-1/4}$ et la première majoration vient.
Comme le 2ème terme est clairement plus grand que 4 (produit de $2^5\geqslant 2^2$ et de termes tous $\geqslant 1$), on peut conclure quant à la dernière inégalité en prenant le double du plus grand terme).

V-5e L'idée est la suivante : on procède comme **5-d)**, en utilisant la majoration $|\zeta(x+it)|^{-1}\leqslant C|t|^{9/4}(x-1)^{-1/4}$ (au lieu de la majoration $|\zeta(x+it)|^{-1}\leqslant C|t|^{9/4}(x-1)^{-5/4}$ obtenue en **5c)**). En élevant au carré, un $(x-1)^{-1/2}$ apparaît, qui se primitive en $2(x-1)^{1/2}$: c'est ainsi qu'un terme borné vis à vis de x apparaît enfin.
La petite difficulté qu'il faut lever est que pour obtenir in fine une majoration uniforme en $\sigma\in]1,2]$, on a besoin d'intégrer **5d)** selon $x\in[\sigma,\sigma+1]$: la variable d'intégration x varie entre 1 et 3, et donc **5d** doit être connue pour $\sigma\in]1,3]$. Reprenons donc :
• Les inégalités de **5b)** sont valides pour tous $\sigma\geqslant 1$ et $t\in\mathbf{R}$
• Concernant **5c)**, prenons $x\in]1,4]$. Les majorations $|\zeta(x+2it)|\leqslant 3.2|t|$ et $|\zeta(x+3it)|\leqslant 3.3|t|$ demeurent vraies; il faut par contre adapter l'encadrement série intégrale puisqu'on a (pour $x\in]1,4]$)

$$\zeta(x)\leqslant 1+\int_1^{+\infty}t^{-x}dt = 1+1/(x-1) = x/(x-1)\leqslant 4/(x-1),$$

ce qui donne en procédant comme en **5c)** ci dessus
$|\zeta(x+it)|^{-2}\leqslant (4/(x-1))^{5/4}.3.2|t|.(3.3|t|)^{1/4} = 2^{7/2}.3^{6/4}|t|^{5/4}(x-1)^{-5/4}$ pour tout $x\in]1,4]$.
• On en déduit la version attendue de **5d)**, valide pour $\sigma\in]1,3]$ cette fois, en procédant comme on l'avait fait en **5d)**, partant de **5a)** et en usant des majorations $|\zeta'(x+it)|\leqslant 4|t|$ du **5b)** et $|\zeta(x+it)|^{-2}\leqslant C|t|^{5/4}(x-1)^{-5/4}$ qu'on vient d'obtenir pour tout $x\in]1,4]$ et $|t|\geqslant 1$:
$|\zeta(\sigma+it)|^{-1}\leqslant 4+\int_\sigma^{\sigma+1}\left|\frac{\zeta'(x+it)}{\zeta(x+it)^2}\right|dx\leqslant 4+4|t|\times C.|t|^{5/4}\int_\sigma^{\sigma+1}(x-1)^{-5/4}dx$ avec cette fois $C=2^{7/2}.3^{6/4}$.
On obtient ainsi, pour tout $\sigma\in]1,3]$ cette fois :
$|\zeta(\sigma+it)|^{-1}\leqslant 4+4|t|\times C.|t|^{5/4}\Big[-4(x-1)^{-1/4}\Big]_\sigma^{\sigma+1}\leqslant 4+4^2C|t|^{9/4}(\sigma-1)^{-1/4}$. Encore une fois, on a $4\leqslant 4^2C|t|^{9/4}(\sigma-1)^{-1/4}$ vu que $(\sigma-1)^{-1/4}\geqslant 2^{-1/4}$ et $|t|\geqslant 1$, on en tire donc $|\zeta(\sigma+it)|^{-1}\leqslant 2^5C|t|^{9/4}(\sigma-1)^{-1/4}$ pour tout $\sigma\in]1,3]$. En posant $D=2^5C$, on en tire donc : **5d)**-bis pour tout $x\in]1,3]$, $|\zeta(x+it)|^{-2}\leqslant D^2|t|^{9/2}(x-1)^{-1/2}$
Cette fois, on peut écrire en réinjectant cette inégalité **5d)**-bis que pour tout $\sigma\in]1,2]$
$|\zeta(\sigma+it)|^{-1}\leqslant 4+\int_\sigma^{\sigma+1}\left|\frac{\zeta'(x+it)}{\zeta(x+it)^2}\right|dx$
$\leqslant 4+4|t|\times D^2.|t|^{9/2}\int_\sigma^{\sigma+1}(x-1)^{-1/2}dx$
$=4+4D^2.|t|^{11/2}\Big[2(x-1)^{1/2}\Big]\sigma^{\sigma+1}\leqslant 4+8D^2.|t|^{7/2}$ et donc pour tout $\sigma\in]1,2]$ et tout t réel tel que $|t|\geqslant 1$

$$|\zeta(\sigma+it)|^{-1}\leqslant 4^2D^2.|t|^{11/2}$$

Ainsi le réel $M=(4D)^2$ convient.

V-5 Tout d'abord, la fonction ζ prolongée à $\mathbf{H}_0$ est en particulier continue sur l'ensemble fermé F

de la question, puisqu'elle est holomorphe au voisinage de chacun des points de F. Il en est de même pour ζ'. Comme par ailleurs ζ ne s'annule pas sur F, on en déduit que le quotient ζ'/ζ est bien défini, et donc continu par quotient, sur F.
On ne le demandait pas, mais F est bien fermé dans $\mathbf{C}$ en tant qu'image réciproque du fermé $[1,+\infty[^2$ de $\mathbf{R}^2$ par l'application $s \mapsto (\mathrm{Re}(s), |\mathrm{Im} s|)$.
Par la question **V-1e)** on a $|\Phi(\sigma+it)| = |\zeta'(\sigma+it)|/|\zeta(\sigma+it)|$. Par la question précédente et la question **V-4b)** on obtient donc

$$|\Phi(\sigma+it)| \leqslant M|t|^{11/2}|\zeta'(\sigma+it)| \leqslant 4M|t|^{13/2} ,$$

qui est l'inégalité voulue.

Partie VI.

VI-1 On observe que $\Lambda(n)e^{-nx} \leqslant e^{-nx}\log n$. La suite $(e^{-nx/2}\log n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est bornée car elle tend vers 0. On pose $C = \max_{n\in\mathbf{N}^*} e^{-nx/2}\log n$ qui est donc une quantité positive finie et on observe que $0 \leqslant \Lambda(n)e^{-nx} \leqslant Ce^{-nx/2}$ comme la série géométrique de raison $e^{-x/2} \in]-1,1[$ converge absolument, cela implique que la série de terme général $(e^{-nx}\Lambda(n))_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge.
Remarque : On peut également procéder par la règle de d'Alembert, ou encore écrire que $e^{-nx}\log n = \mathrm{o}(ne^{-nx})$ qui est le terme général d'une série convergente (par exemeple via la série entière dérivée $\sum nz^n$).
Soit $x_0 \in \mathbf{R}_+^*$. Comme $x \mapsto e^{-nx}\Lambda(n)$ décroît et est positive, on a $\sup_{x\in[x_0,+\infty[} |\Lambda(n)e^{-nx}| = \Lambda(n)e^{-nx_0}$. Cela entraîne que la série de fonctions continues $x \mapsto \Lambda(n)e^{-nx}$ est normalement convergente sur $[x_0,+\infty[$, ce qui implique que φ est continue sur $[x_0,+\infty[$. Comme x_0 peut être choisi arbitrairement proche de 0, cela montre que φ est continue sur $\mathbf{R}_+^*$.

VI-2 Soit $s \in \mathbf{H}_1$ de partie réelle σ. Soit $n \geqslant 1$. Le changement de variable $y = nx$ implique que $\int_0^{+\infty} e^{-nx}x^{s-1}\mathrm{d}x = n^{-s}\Gamma(s)$; on a en particulier $\int_0^{+\infty} e^{-nx}x^{\sigma-1}\mathrm{d}x = n^{-\sigma}\Gamma(\sigma)$. Par l'interversion série-intégrale des fonctions positives, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} |\varphi(x)x^{s-1}|\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} \varphi(x)x^{\sigma-1}\mathrm{d}x && (4.39)\\ &= \sum_{n\geqslant 1}\Lambda(n)\int_0^{+\infty} e^{-nx}x^{\sigma-1}\mathrm{d}x && (4.40)\\ &= \Gamma(\sigma)\sum_{n\geqslant 1}\Lambda(n)n^{-\sigma} = \Gamma(\sigma)\Phi(\sigma)\end{aligned}$$

qui est une quantité finie. Cela montre que $]1, +\infty[\subset D_\varphi$ et donc que $\mathcal{M}\varphi$ est bien définie sur $\mathbf{H}_1$. L'interversion série-intégrale pour des fonctions intégrables s'applique donc et montre que pour tout $s \in \mathbf{H}_1$, $\mathcal{M}\varphi(s) = \Gamma(s)\Phi(s)$.

VI-3 On fixe $\sigma \in]1, 2]$. On pose $C_\sigma = \max_{t\in[-1,1]} |\Gamma(\sigma + it)\Phi(\sigma + it)|$ (par continuité sur le compact $[-1, 1]$) et pour tout $t \in \mathbf{R}$ tel que $|t| \geqslant 1$, la question **V-6)** implique que $|\Phi(\sigma + it)| \leqslant 4M|t|^{13/2}$ et la question **III-1g)** appliquée à $k = 8$ et $\sigma_0 = 2$ implique que $|\Gamma(\sigma + it)| \leqslant 2^4 M_{8,2}(1 + |t|)^{-8}$. On a donc, par la question précédente,

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbf{R}, \quad |\mathcal{M}\varphi(\sigma + it)| &= |\Gamma(\sigma + it)\Phi(\sigma + it)| && (4.41)\\
&\leqslant C_\sigma \mathbf{1}_{[-1,1]}(t) + 2^6 M M_{8,2} \frac{|t|^{13/2}}{(1 + |t|)^8} \mathbf{1}_{[1,+\infty[}(|t|) && (4.42)\\
&\leqslant C_\sigma \mathbf{1}_{[-1,1]}(t) + 2^6 M M_{8,2} |t|^{-3/2} \mathbf{1}_{[1,+\infty[}(|t|)\,.
\end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto \mathcal{M}\varphi(\sigma + it)$, qui est bien entendu continue sur $\mathbf{R}$ par produit de telles fonctions, est donc intégrable sur $\mathbf{R}$.

VI-4 C'est une conséquence de l'inversion de Mellin (question **III-2c**) et du fait que $\Phi(\sigma + it) = -\zeta'(\sigma + it)/\zeta(\sigma + it)$ (question **V-1e)**.

VI-5a Le résultat de la question **V-2c** assure que l'on peut écrire $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + f(s)$, avec f holomorphe sur $\mathbf{H}_0$. On a ainsi $\zeta'(s) = -\frac{1}{(s-1)2} + f'(s)$ pour tout $s \in \mathbf{H}_0$, et donc pour tout $s \in \mathbf{H}_0$ on a $h(s) = \frac{(s-1)f'(s)+f(s)}{(s-1)\zeta(s)}$, qui est donc un quotient de fonctions continues sur l'ensemble fermé F des s de partie réelle $\geqslant 1$ (en tant que quotient de fonctions holomorphes sur $\mathbf{H}_0$), dont le dénominateur ne s'annule pas sur F.

VI-5b Soit $\sigma \in [1, 2]$ et $t \in \mathbf{R}$. On suppose d'abord que $|t| \geqslant 1$. Dans ce cas $\sigma + it \neq 1$ et

$$h(\sigma + it) = \frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} + \frac{1}{\sigma - 1 + it} = -\Phi(\sigma + it) + \frac{1}{\sigma - 1 + it},$$

par la question **V-1e)**. La question **V-6)** entraîne alors les inégalités suivantes

$$\begin{aligned}
|h(\sigma + it)| &\leqslant |\Phi(\sigma + it)| + \frac{1}{|\sigma - 1 + it|} && (4.43)\\
&\leqslant 4M|t|^{13/2} + \frac{1}{|t|} && (4.44)\\
&\leqslant 4M|t|^{13/2} + 1 \leqslant (4M + 1)|t|^{13/2}
\end{aligned}$$

Soit $t \in [-1, 1]$. Comme montré à la question précédente h se prolonge continûment à $[1, 2]\times[-1, 1]$ qui est compact et donc (en notant toujours h ce prolongement) $C = \max_{s\in[1,2]\times[-1,1]} |h(s)|$ est une quantité finie.

On pose alors $K_1 = \max(C, (4M+1))$ et on a pour tout $\sigma \in [1,2]$ et tout $t \in \mathbf{R}$,

$$|h(\sigma+it)| \leqslant C\mathbf{1}_{[-1,1]}(t) + (4M+1)|t|^{13/2}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(|t|) \leqslant K_1(1+|t|^{13/2}) ,$$

qui est l'inégalité voulue.

VI-5c Soit $(\sigma,t) \in [1,2]\times\mathbf{R}$. Par la question **III-1g)** appliquée à $\sigma_0 = 2$ et $k = 8$, on a $|\Gamma(\sigma+it)| \leqslant 2^4 M_{8,2}(1+|t|)^{-8}$. Combiné à l'inégalité de la question précédente on a

$$\begin{aligned} |\Gamma(\sigma+it)h(\sigma+it)| &\leqslant 2^4 M_{8,2}K_1(1+|t|^{13/2})(1+|t|)^{-8} \quad (4.45)\\ &\leqslant 2^4 M_{8,2}K_1(1+|t|)^{13/2}(1+|t|)^{-8} = 2^4 M_{8,2}K_1(1+|t|)^{-3/2}, \end{aligned}$$

qui est l'inégalité voulue avec $K_2 = 2^4 M_{8,2}K_1$. On en déduit pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$ et tout $\sigma \in [1,2]$, que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad |\Gamma(\sigma+it)h(\sigma+it)x^{-\sigma-1-it}| \leqslant x^{-1-\sigma}K_2(1+|t|)^{-3/2}.$$

Comme $t \mapsto (1+|t|)^{-3/2}$ est intégrable sur $\mathbf{R}$, c'est aussi le cas de $t \in \mathbf{R} \mapsto \Gamma(\sigma+it)h(\sigma+it)x^{-(\sigma+it)}$ puisque cette dernière fonction est également continue, et ceci est le résultat voulu.

VI-5d Les questions précédentes, plus précisément

- la question précédente pour le membre de gauche
- la question **III-2e)** pour la première intégrale du membre de droite, et la question **VI-3)** pour la dernière

montrent que les intégrales suivantes sont absolument convergentes et donnent les égalités

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(\sigma+it)h(\sigma+it)x^{-(\sigma+it)}\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Gamma(\sigma+it)}{\sigma-1+it}x^{-(\sigma+it)}\mathrm{d}t \quad (4.46)\\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(\sigma+it)\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}x^{-(\sigma+it)}\mathrm{d}t \quad (4.47)\\ &= \frac{e^{-x}}{x} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(\sigma+it)\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}x^{-(\sigma+it)}\mathrm{d}t \quad (4.48)\\ &= \frac{e^{-x}}{x} - \sum_{n\geqslant 1}\Lambda(n)e^{-nx} = I(x) , \end{aligned}$$

qui est le résultat voulu.

VI-5e On fixe $x \in \mathbf{R}^*$ et pour tous $(\sigma,t)\in[1,2]\times\mathbf{R}$, on pose $g_\sigma(t) = \Gamma(\sigma+it)h(\sigma+it)x^{-(\sigma+it)}$.

La question **VI-5a)** montre que $\lim_{\sigma\to1^+} g_\sigma(t) = g_1(t)$, pour tout $t \in \mathbf{R}$.

La question **VI-5c)** montre ensuite que pour tout $(\sigma,t) \in [1,2]\times\mathbf{R}$, on a $|g_\sigma(t)| \leqslant f(t)$ où $f(t) = K_2(1+|t|)^{-3/2}$. Comme f est intégrable sur $\mathbf{R}$, le théorème de convergence dominée implique que $\lim_{\sigma\to1^+}\int_{-\infty}^{+\infty} g_\sigma(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(t)\mathrm{d}t$. Or la question précédente montre que pour tout $\sigma \in]1,2]$, on a $I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_\sigma(t)\mathrm{d}t$. Donc $I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(t)\mathrm{d}t$. On a donc

$$xI(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(1+it)h(1+it)x^{-it}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(1+it)h(1+it)e^{-it\log x}\mathrm{d}t ,$$

qui est l'égalité voulue.

VI-6 Le théorème de Riemann-Lebesgue implique que

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(1+it)h(1+it)e^{it\lambda}\mathrm{d}t=0$$

par intégrabilité sur $\mathbf{R}$ (démontrée en **VI-5c)**) de la fonction $t\mapsto\Gamma(1+it)h(1+it)$.
Appliqué à $\lambda=-\log x$ lorsque $x\to 0^+$, il entraîne le résultat voulu grâce à la question précédente.

VI-7 La question précédente implique que $\lim_{x\to 0^+} x\sum_{n\geqslant 1}\Lambda(n)e^{-nx}=1$. On utilise ($\boldsymbol{\mathcal{E}q}_6$) avec $a_n=\Lambda(n)$, $\lambda_n=n$, $n\geqslant 1$. On a alors $D(\sigma)=\sum_{n\geqslant 1}\Lambda(n)e^{-nx}$ et donc pour tout $p\in\mathbf{N}^*$, on a

$$p\frac{D(p\sigma)}{D(\sigma)}=\frac{(p\sigma)\sum_{n\geqslant 1}\Lambda(n)e^{-n(p\sigma)}}{\sigma\sum_{n\geqslant 1}\Lambda(n)e^{-n\sigma}}\xrightarrow[\sigma\to 0^+]{}1$$

et donc $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ satisfont l'hypothèse (H_1) de ($\boldsymbol{\mathcal{E}q}_6$) qui permet d'affirmer que

$$\lim_{n\to+\infty}D(1/n)^{-1}\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\Lambda(n)=1/\Gamma(2)=1\ .$$

Or on a montré que $\frac{1}{n}D(\frac{1}{n})=\frac{1}{n}\sum_{k\geqslant 1}\Lambda(k)e^{-k/n}$ tend vers 1 lorsque $n\to+\infty$. Cela prouve bien ($\boldsymbol{\mathcal{E}q}_2$). La question **I-4d)** entraîne alors ($\boldsymbol{\mathcal{E}q}_1$)

Chapitre 5

Épreuves orales de leçons

5.1 Liste des leçons.

Liste des leçons d'analyse 2023

201 Espaces de fonctions. Exemples et applications.

203 Utilisation de la notion de compacité.

204 Connexité. Exemples et applications.

205 Espaces complets. Exemples et applications.

206 Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse.

208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

209 Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples et applications.

213 Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

219 Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

220 Équations différentielles ordinaires. Exemples de résolution et d'études de solutions en dimension 1 et 2.

221 Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

223 Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

224 Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

228 Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

234 Fonctions et espaces de fonctions LEBESGUE-intégrables.

235 Problèmes d'interversion en analyse

236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

241 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

243 Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

245 Fonctions d'une variable complexe. Exemples et applications.

246 Séries de FOURIER. Exemples et applications.

250 Transformation de FOURIER. Applications.

253 Utilisation de la notion de convexité en analyse.

261 Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.

262 Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.

264 Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

265 Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.

266 Illustration de la notion d'indépendance en probabilités.

267 Exemples d'utilisation de courbes en dimension 2 ou supérieure.

Liste des leçons d'algèbre

101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

102 Groupe des nombres complexes de module 1. Racines de l'unité. Applications.

103 Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

104 Groupes finis. Exemples et applications.

105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

120 Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

121 Nombres premiers. Applications.

122 Anneaux principaux. Exemples et applications.

123 Corps finis. Applications.

125 Extensions de corps. Exemples et applications.

126 Exemples d'équations en arithmétique.

141 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

142 PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.

144 Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.

148 Exemples de décompositions de matrices. Applications.

149 Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.

151 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

152 Déterminant. Exemples et applications.

153 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

154 Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

155 Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

156 Exponentielle de matrices. Applications.

157 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

158 Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

159 Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

160 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

161 Distances dans un espace affine euclidien. Isométries.

162 Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

170 Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

171 Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

181 Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

191 Exemples d'utilisation de techniques d'algèbre en géométrie.

5.2 Présentation des épreuves

Modalités. Pour les épreuves de leçons, les candidats tirent au sort un couple de sujets. Le candidat est libre de choisir le sujet qui lui plaît parmi ces deux sujets proposés, celui où il se sent le plus à même de mettre en valeur ses connaissances. Il n'a pas à justifier ou commenter son choix.

Les candidats préparent l'interrogation pendant 3 heures. Durant tout ce temps, ils ont libre accès aux livres de la bibliothèque de l'agrégation ou à leurs propres ouvrages. Seuls sont autorisés les ouvrages avec un numéro ISBN et jouissant d'une véritable diffusion commerciale. L'attention des candidats est attirée sur le fait que l'ISBN ne suffit pas, une « diffusion commerciale avérée »est tout autant importante. Ainsi, un polycopié de cours, propre à un établissement, même muni d'un ISBN, pourra être refusé. Cette restriction est motivée par le principe d'égalité des candidats : les ressources documentaires autorisées doivent être facilement accessibles à tout candidat au concours. Les ouvrages imprimés par les candidats eux-mêmes (ou les bibliothèques universitaires, ou les préparations universitaires) ne sont pas autorisés et les livres doivent être vierges d'annotation. Tous les ouvrages personnels peuvent être interdits, lors de l'oral, sur simple décision du représentant du directoire présent lors de la préparation. Il n'est pas autorisé non plus de venir avec des livres dont certaines pages auraient été marquées au préalable, fût-ce de manière amovible, au moyen de post-it par exemple. (Il est toutefois possible de se munir de tels marque-pages à apposer durant la préparation.) Le représentant du directoire présent lors de la préparation peut interdire tout ouvrage personnel ou envoyé par une préparation universitaire. Les notes personnelles, manuscrites ou dactylographiées, ne sont autorisées ni pendant l'épreuve proprement dite, ni pendant la préparation. Il est possible, et même recommandé, de venir muni d'un exemplaire du rapport du jury de l'agrégation externe de mathématiques, relié et sans annotation. Quelques exemplaires du rapport sont à disposition des candidats dans chaque salle de préparation. Les candidats n'ont pas accès à Internet et la possession d'un dispositif de communication ou de stockage de données (téléphone, calculatrice, clé USB, montre connectée,...) serait considérée comme une tentative de fraude, susceptible d'entraîner l'exclusion du concours. Le temps de préparation est décompté dès l'ouverture des enveloppes contenant les sujets. A l'issue des trois heures de préparation, les plans des leçons sont ramassés pour être photocopiés à l'intention des jurys. Pendant le temps nécessaire à cette reproduction, les candidats sont invités à ranger leurs affaires et à prendre quelques minutes de repos.

Les plans sont donc des documents manuscrits, communiqués à la commission d'interrogation. Ils comportent *au maximum 3 pages* au format A4, éventuellement complétées par une page de figures. Les candidats doivent veiller à la lisibilité de leur document, en tenant en compte le fait qu'ils vont être photocopiés : écrire suffisament gros, soigner la présentation, faire apparaître des titres, éviter l'utilisation de couleurs et les encres très claires... Le candidat doit clairement signaler sur ce plan les résultats qu'il estime significatifs, représentatifs de la leçon et qu'il propose de développer devant le jury.

L'épreuve s'organise en trois temps, prévus pour une durée totale de *55 minutes environ* : une présentation du plan de la leçon éventuellement suivie d'une brève discussion, un développement de 15 minutes maximum et enfin une partie consacrée au dialogue et aux questions. *Le candidat peut utiliser sa copie du plan pendant toute l'épreuve*. Pendant la première phase de l'interrogation consacrée à la présentation du plan, il peut utiliser toutes les notes manuscrites produites durant la préparation. Le développement doit quant à lui se faire sans utiliser ces notes manuscrites ; si le plan comporte lui-même trop de détails sur les développements proposés, le jury peut restreindre l'utilisation de ce document durant cette seconde phase de l'épreuve.

Commentaires généraux. Le jury met en garde contre plusieurs écueils qui peuvent altérer les performances des candidats :

— *le hors-sujet*. Le hors-sujet se manifeste de deux manières, qui dans tous les cas sont lourdement sanctionnées. Quelques candidats prennent des libertés quant au libellé de la leçon et s'en écartent notablement : les titres des leçons définissent le champ précis qu'il faut traiter. Par ailleurs, le jury constate l'abus de « recyclage »de thèmes plus ou moins classiques, mais qui ne sont pas exploités avec à propos dans les leçons et qui, parfois, prennent une place sans commune mesure avec leur importance mathématique.

— *le manque d'autonomie et de maîtrise du sujet*. Probablement dûe à une mauvaise évaluation des attentes et un manque de lucidité, trop de candidats proposent plan ou développements qu'ils ne peuvent défendre. Des connaissances des bases fermement maîtrisées et intelligemment utilisées valent mieux qu'un étalage de savoirs emmagasinés sans recul et à peine digérés, voire pas assimilés du tout. Une maîtrise avérée et solide des bases assure déjà une note très convenable, certainement de nature à permettre l'admission, en l'état du concours.

— *la fatigue et le stress*. Une grande majorité des candidats se présente avec une forte charge émotionnelle, à la mesure de l'enjeu et de leur investissement personnel, qui peut nuire à l'expression de leurs connaissances. Cela est d'autant plus vrai que l'épreuve ne se réduit pas à la simple récitation d'un cours mais à un échange avec le jury et donc, là encore, à une réflexion personnelle, à une prise de hauteur et à la démonstration, dans un temps court, non seulement de la maîtrise technique mais aussi de l'aptitude à construire un raisonnement. Le jury est pleinement conscient de ces difficultés et s'emploie à en réduire les effets négatifs en mettant en pratique une posture de bienveillance constante. Le jury ne cherche en rien à déstabiliser le candidat pendant l'épreuve, mais au contraire cherche à valoriser les connaissances du candidat. Les premières questions, parfois très simples, visent souvent à préciser une notation, un point du plan ou du développement, pour que le jury s'assure de la compréhension par le candidat des notions qu'il vient d'exposer et non pour lui tendre un quelconque piège. Mettre le candidat en confiance, le respecter, l'écouter, poser des questions ouvertes, permettre au candidat déstabilisé de se reprendre sans l'acculer au silence, stimuler le dialogue sont autant d'objectifs que s'assignent les membres du jury.

Une liste d'énoncés, quelque sophistiqués qu'ils soient, ne peut suffire à convaincre le jury. Il faut savoir motiver ces énoncés et pouvoir expliquer comment ils s'enchaînent et en quoi ils sont pertinents. Les leçons doivent donc être illustrées avec des exemples judicieusement choisis. De nombreux titres de leçons se terminent d'ailleurs par « exemples et applications » : le jury attend donc que le plan soit riche en exemples et applications et/ou que le candidat puisse en développer lors de la présentation de son plan.

Recommandations. On trouvera ci-dessous des commentaires sur chaque leçon de la session 2023.

La rédaction des commentaires sur les leçons tente de distinguer les notions « de base », incontournables pour l'intitulé proposé et dont la maîtrise est attendue des candidats, et des suggestions d'ouverture. Ces suggestions sont de niveaux variés et peuvent concerner des champs différents, par exemple qui trouvent leurs motivations dans des problématiques propres aux options de modélisation. Certaines pistes se placent aussi aux frontières du programme et peuvent faire écho à des sujets spécialisés abordés durant la formation du candidat. Il ne s'agit là que de propositions qui ne revêtent aucun caractère obligatoire, introduites par des formulations comme « pour aller plus loin »ou « si les candidats le désirent » ; le jury n'attend certainement pas un balayage exhaustif de ces indications et il n'est pas nécessaire de développer les éléments les plus sophistiqués pour obtenir une note élevée. Enfin, certains commentaires font part de l'expérience du jury pour évoquer le dosage pas toujours approprié entre théorie et exemples, souligner des points de faiblesse qui méritent une attention particulière ou mettre en garde contre de possibles écueils (oublis, hors-sujets, erreurs fréquentes, positionnement mal à propos, etc). Le jury espère que candidats et préparateurs sauront se saisir de ces indications pour proposer des développements originaux : il n'y a pas de format standard et des manières différentes d'aborder les leçons peuvent toutes permettre d'obtenir d'excellents résultats.

Les leçons proposées ont toutes leurs spécificités qu'un principe unique ne saurait résumer ou englober. Une partie des sujets sont très délimités, alors que certains intitulés de leçons sont très ouverts et obligent le candidat à opérer des choix thématiques et de points de vue. Ces sujets sont pensés pour offrir de multiples points d'entrée, avec une échelle de niveaux techniques assez large, l'objectif étant de permettre à l'ensemble des candidats de s'exprimer au mieux et de mettre en valeur leurs connaissances. La pertinence des choix adoptés et leur motivation au regard de l'intitulé de la leçon entrent alors tout particulièrement dans l'appréciation, ainsi, bien entendu, que la maîtrise du contenu proposé. Ces leçons de synthèse exigent certainement un important recul ; elles réclament un effort conséquent de réflexion et méritent tout particulièrement d'être préparées en amont du concours. En retour, elles permettent de consolider un matériel mathématique qui peut être réinvesti avec profit dans d'autres thèmes.

5.2.1 Première partie : présentation de la leçon

Dans cette première phase de l'épreuve, le candidat est convié à utiliser son temps de parole, *6 minutes maximum*, pour présenter, argumenter, mettre en valeur et faire une synthèse de sa leçon.

Pour cette partie de l'épreuve, le candidat devrait s'imaginer dans la situation où il doit introduire à un auditoire, pendant 6 minutes, une leçon destinée ensuite à être développée sur plusieurs séances. Quel est l'intérêt du sujet ? Comment se positionne-t-il dans un paysage mathématique plus large ? Comment s'articulent les différentes sections qui composent la leçon ? Comment s'expliquent et se motivent les enchaînements ? Comment se hiérarchisent les résultats et les difficultés ? Il s'agit aussi de s'interroger sur les enjeux didactiques de la leçon, c'est-à-dire dans quel ordre et comment présenter les choses pour que le tout soit cohérent, compréhensible et pédagogiquement efficace. De plus, cette présentation gagne à être illustrée. Des exemples peuvent être utilisés pour mettre en évidence les difficultés, faire ressortir le rôle des hypothèses et décrire des applications met en valeur l'intérêt des résultats. Enfin, des figures peuvent aussi contribuer à expliquer les idées maîtresses. Si l'enjeu principal est d'argumenter la construction du plan de la leçon, il est aussi parfois pertinent de mettre en valeur les liens logiques et l'intérêt des notions présentées dans d'autres domaines (sans forcément les introduire dans le plan écrit).

Le rapport du concours indique des pistes pour chaque leçon ; il ne s'agit que de suggestions que le candidat n'est pas tenu de suivre et qui ne constituent pas une trame obligatoire pour le plan. Notamment le rapport distingue clairement le cœur des leçons et des extensions dont le contenu peut être techniquement plus exigeant. La vocation de ces commentaires n'est donc pas d'être repris de manière exhaustive ; il ne s'agit que de guider les candidats dans leur auto-évaluation et les encourager à présenter des notions avec lesquelles ils sont à l'aise. Notamment, ils peuvent tout à fait exploiter des notions ou des applications qui trouvent leur motivation dans les options de modélisation qu'ils ont choisies.

Le jury ne cherche pas des plans absolument originaux, le plus important est que le plan soit bien structuré, maîtrisé par le candidat et qu'y figure une quantité substantielle d'exemples et de mathématique. Le jury attend que le candidat fasse preuve d'un investissement personnel sur le sujet et qu'il explique pourquoi il adopte cette présentation. Le jury s'émeut du nombre important de candidats qui utilisent un plan *tout fait* disponible dans la littérature et se trouvent ensuite, faute de regard critique et d'appropriation suffisante, en difficulté de pouvoir l'expliquer, le commenter et le défendre. Le jury cherche aussi à vérifier la capacité à penser par soi-même et à réfléchir de manière autonome. Face à ce qui peut ressembler à une dérive, les livres contenant des plans rédigés seront interdits en 2023. Le jury invite les candidats, durant leur année de préparation, à ne pas craindre de faire preuve de curiosité et de diversifier leurs lectures, afin de produire des plans à la fois plus synthétiques et plus hiérachisés, proposant des résultats et des exemples réellement maîtrisés et analysés.

Le jury se désole par ailleurs du très petit nombre de candidats qui ont le réflexe de faire un dessin,lorsque c'est pertinent, notamment durant le développement. C'est pourtant un moyen extrêmement efficace pour faire saisir l'idée d'une preuve ou motiver une méthode.

Il s'agit d'une épreuve *orale*. Le document écrit transmis au jury se justifie pour servir de base pour la discussion et constitue un fil conducteur qui guide le jury pour mener la partie consacrée au dialogue et aux questions. Ce plan ne doit être ni une énumération d'énoncés, ni un cours ou un exposé complet avec développement des démonstrations. En revanche, il doit définir avec suffisamment de précision les notions mathématiques introduites, donner les énoncés complets (notamment les hypothèses) des résultats fondamentaux, citer des exemples et des applications. Le plan est important puisqu'il calibre l'ensemble de la leçon, il détermine l'orientation et le niveau choisis par le candidat. Les choix doivent être motivés lors de la présentation et éventuellement lors de la discussion avec le jury. Il est nécessaire d'être en mesure de démontrer les résultats importants et de pouvoir les illustrer avec des exemples simples. Soigner la présentation d'un document écrit qui sert de support pour un cours est une compétence professionnelle importante du métier d'enseignant. Aussi, la formalisation mathématique et le français doivent être soignés, ainsi que la mise en forme, autant que possible dans le temps de préparation imparti : ces éléments ne peuvent que faciliter les interactions avec le jury. Il est inutile, voire contre-productif, de chercher à remplir à tout prix les 3 feuilles autorisées, surtout avec des éléments que le candidat ne maîtrise manifestement pas.

Pendant les 6 minutes de présentation, le candidat doit tenter de faire une synthèse de son plan en en expliquant les grandes lignes et les articulations. Il est inutile de recopier le plan au tableau, puisque le jury dispose d'une copie de ce document. Toutefois le jury encourage les candidats à exploiter le tableau comme support pédagogique. Faire apparaître la structure de la leçon, illustrer une difficulté technique ou le principe d'une démonstration par une figure... permet au candidat de s'affranchir de ses notes et rend l'exposé plus vivant. La présentation orale, la qualité d'expression, la compréhension synthétique, la plus-value de l'exposé par rapport au plan écrit, la capacité du candidat à intéresser son auditoire sur une leçon donnée, constituent des éléments importants d'évaluation. Le jury se réjouit d'ailleurs des progrès constatés sur cette partie de l'épreuve.

Le jury attache une grande importance à la *maîtrise du plan* qui intervient de manière substantielle dans la grille de notation. Le plan ne peut être considéré comme maîtrisé si l'exposé ressemble à une récitation. Les résultats exposés doivent être compris ainsi que l'organisation d'ensemble de la leçon. Il est souhaitable que le candidat connaisse dans leurs grandes lignes les démonstrations des résultats figurant au programme du concours. Il est indispensable que le candidat ait une idée assez claire de la difficulté des démonstrations des résultats qu'il évoque dans son plan. Le jury rappelle qu'il n'est pas nécessaire de s'aventurer au-delà des contours du programme pour prétendre à une très bonne note ! Plus généralement, il vaut mieux se cantonner à un niveau où l'on se sait solide plutôt que de chercher à placer des énoncés débordant du programme mais sans le recul, ni l'assurance technique nécessaires. Bien entendu, réussir cette partie de l'épreuve ne s'improvise pas et le discours doit avoir été réfléchi durant la préparation de l'épreuve, et plus largement tout au long du parcours qui conduit les candidats jusqu'au concours.

À la fin de cette présentation de la leçon, le jury peut éventuellement questionner très brièvement le candidat et aborder quelques points techniques, sans entrer dans des détails qui retarderaient le début du développement.

5.2.2 Deuxième partie : le développement

Le jury demande au candidat de proposer *deux développements au moins*. Il s'agit de résultats représentatifs de la leçon que le candidat est en mesure d'exposer en détail et sans notes.

Proposer un seul développement ou des développements de niveaux trop disparates conduit à une minoration de la note. Ces propositions de développements doivent être clairement mentionnées sur le plan écrit et non pas vaguement évoquées à l'oral. Dans cet esprit, le candidat doit pouvoir motiver le choix des développements qu'il propose et en quoi ces résultats ou énoncés sont centraux ou jouent à ses yeux un rôle particulier sur le sujet. Le candidat doit aussi préciser, sur son plan écrit, ce qu'il va démontrer et, le cas échéant, les résultats de son plan qu'il va admettre pour mener à bien son développement. Il faut prendre garde dans ce choix à ne pas déclarer admis un énoncé majeur qui, une fois acquis, rend l'objet du développement trivial. De même il faut prendre garde aux « raisonnements circulaires »en faisant appel à un énoncé qu'on interpréterait comme une conséquence de celui qu'on cherche à démontrer. De telles maladresses sont perçues comme un défaut de maîtrise et de recul qui est pénalisé.

Le jury choisit le développement qui va être effectivement exposé par le candidat. Le candidat dispose de 15 minutes (maximum) pour mener à bien son développement. La gestion du temps est une des difficultés de l'épreuve. Un exposé trop court est le signe d'un sujet mal choisi, inapproprié au concours ; une démonstration inachevée dans le temps imparti témoigne d'un manque de maîtrise. Le jury demande au candidat de bien gérer son tableau, en particulier le candidat doit demander aux membres du jury l'autorisation d'effacer. Lors du développement, le jury attend du candidat des explications sur la preuve et sur l'utilisation pertinente des notions développées durant l'exposé oral ; il peut être opportun, lors du développement, de se référer explicitement au plan présenté. Trop peu de candidats commencent leur développement par une rapide synthèse des grandes idées ou des étapes qui le composent. Expliquer l'approche adoptée, et les difficultés, au début du développement est une démarche pédagogique appréciée. Un ou plusieurs dessins peuvent aider à clarifier la discussion technique. Il est inutile de se précipiter ou de parler trop vite ; on veillera au contraire à préciser ses notations, à soigner sa présentation, à placer sa voix et à regarder de temps en temps le jury. Le développement ressemble parfois à une succession plus ou moins convaincante de résultats intermédiaires *ad hoc*. Cette phase de l'épreuve vise à mettre en valeur des qualités pédagogiques autant que techniques et l'exposé doit faire la preuve de la compréhension du sujet par le candidat. La récitation mécanique d'un développement ne peut pas être convaincante ; le jury veille à ce que les futurs enseignants comprennent ce qu'ils exposent et sachent exposer ce qu'ils comprennent. C'est une qualité essentielle d'un futur agrégé. Un choix judicieux des notations utilisées contribuent à la clarté de l'exposé ; par exemple il peut être maladroit de noter deux polynômes P et P'... surtout si on doit travailler avec les dérivées de ceux-ci. Enfin, même si le jury laisse évoluer le candidat durant son développement, en intervenant le moins possible, il peut, en cas de lacunes ou d'erreurs manifestes, interrompre le candidat pour demander des explications. Cette intervention ne donne pas droit à une extension du temps consacré au développement.

Le jury veille à la cohérence du plan et des propositions de développements. Il est souhaitable que le candidat recherche une adéquation entre le niveau auquel il souhaite se placer et les développements proposés. Un candidat ne sera pas avantagé s'il présente un développement non maîtrisé, manifestement mal compris. Si le niveau de l'agrégation ne peut se cantonner aux notions abordées dans une classe de Terminale ou une première année post-bac, trop de candidats se lancent, curieusement, dans des propositions, parfois aux limites du programme, qui dépassent largement leur niveau technique. Dans un cas comme dans l'autre, il en résulte une appréciation négative. Le développement doit être en lien direct avec le thème de la leçon présentée. L'utilisation d'un résultat qui n'apparaît pas dans le plan écrit doit être explicitement signalée par le candidat. Toute utilisation d'un lemme non démontré et enfermant l'essence de la preuve est sanctionnée. Le jury peut exiger la démonstration d'un lemme admis, si celui-ci est essentiellement le cœur du développement. Il faut éviter de présenter ou d'utiliser un résultat préliminaire ou intermédiaire sans explication convaincante. Dans le cas d'un développement difficile, il ne faut pas négliger les cas élémentaires et les détails utiles à la compréhension du jury. Le jury déplore l'abus de certains développements plus ou moins classiques, qui ne sont pas toujours utilisés à bon escient et qui occupent parfois une place disproportionnée (l'ellipsoïde de John, la décomposition de Dunford, le théorème de Bernstein, le processus de Galton-Watson,...). Trop de candidats ont tendance à replacer exagérément et de manière inappropriée de tels développements et se retrouvent ainsi hors sujet, impair qui est sévèrement sanctionné. Il faut aussi veiller au fait que des thèmes peuvent être exploités dans des leçons différentes... mais avec des points de vue différents, qu'il faut savoir mettre en exergue.

Le programme du concours comprend maintenant un chapitre spécifique consacré aux méthodes numériques. Les candidats sont invités à explorer ce champ, éventuellement en s'appuyant sur leurs connaissances spécifiques à l'option de modélisation qu'ils ont choisie, pour proposer des développements originaux en lien avec l'analyse d'algorithmes de calcul. La description des leçons indique quelques pistes dans cette direction. Le jury se réjouit qu'un nombre croissant de candidats saisisse ces opportunités et espère que cette tendance, qui enrichit les contenus, se renforcera.

La pertinence des explications, le souci pédagogique, la capacité à mener à bien et complètement le sujet dans le temps imparti, l'aisance technique sont des éléments importants d'appréciation. Par ailleurs, le candidat doit s'attendre à être interrogé lors de la période de discussion sur des applications ou illustrations élémentaires de son développement. Il est donc essentiel qu'il soit capable de reconnaître dans une question donnée un cas particulier simple du résultat général qu'il vient d'exposer.

5.2.3 Troisième partie : questions et dialogue

Le jury teste systématiquement la maîtrise du plan présenté. Une part importante de la discussion porte donc sur le plan, ou trouve sa source dans le plan présenté par le candidat. Il faut éviter que ce plan dépasse largement le niveau que l'on maîtrise. Le candidat doit se préparer à des questions élémentaires voire considérées comme « évidentes »sur tout énoncé mis dans son plan, questions auxquelles il doit répondre avec précision. Des candidats après des prestations relevées ont parfois pu être surpris par de telles questions portant sur les bases ; elles sont pourtant quasi-systématiques, le jury souhaitant précisément s'assurer de la maîtrise de ces bases. Le jury peut aussi proposer des calculs illustrant les notions évoquées par le plan.

Cette phase de l'épreuve requiert un certain recul qui ne peut être que le fruit d'un travail de préparation approfondi en amont du concours où l'on doit se demander si on est capable de mettre en œuvre des énoncés sur des situations simples et, pour certains théorèmes, réfléchir à des exemples ou des contre-exemples.

Les réponses aux questions des examinateurs ne prennent pas forcément une forme unique et ceux-ci se placent dans une posture de dialogue avec le candidat. Le jury pose aussi des exercices en rapport direct avec la leçon et le plan proposé mais ne s'attend pas à ce que le candidat trouve une solution immédiatement. Ces exercices ont plutôt pour objectif de voir évoluer le futur agrégé dans une démarche scientifique rigoureuse et méthodique. Le candidat doit réfléchir, utiliser son plan et rattacher l'exercice à sa leçon. Le fait de ne pas résoudre un exercice ne doit pas être perçu comme un échec et le candidat ne doit pas se décourager : plus qu'achever l'exercice, ce sont les réactions du candidat qui importent (par exemple en identifiant l'énoncé de la leçon qui permettrait de traiter le problème et en se demandant si les hypothèses d'application sont satisfaites). Dans cette partie de l'épreuve le candidat doit faire preuve de capacité d'écoute, qui est aussi évaluée ; il doit rester attentif aux suggestions du jury. Il est souvent utile d'exploiter le tableau pour bien reformuler la question, formaliser les pistes de réflexion et donner un support écrit à l'échange. Pendant cette discussion, le jury veille à laisser un temps raisonnable au candidat pour réfléchir, sans le submerger de questions.

Enfin, l'objet du concours étant de recruter de futurs enseignants, le jury peut aussi, comme l'indique l'article 8 de l'arrêté du 25 juillet 2014, poser toute question qu'il juge utile *lui permettant d'apprécier la capacité du candidat, en qualité de futur agent du service public d'éducation, à prendre en compte dans le cadre de son enseignement la construction des apprentissages des élèves et leurs besoins, à se représenter la diversité des conditions d'exercice du métier, à en connaître de façon réfléchie le contexte, les différentes dimensions (classe, équipe éducative, établissement, institution scolaire, société) et les valeurs qui le portent, dont celles de la République. Le jury peut, à cet effet, prendre appui sur le référentiel des compétences professionnelles des métiers du professorat et de l'éducation fixé par l'arrêté du 1er juillet 2013.*

5.3 Épreuve orale d'algèbre et géométrie

Comme y invite clairement l'intitulé de l'épreuve, les exemples et applications motivés par la géométrie sont particulièrement bienvenus. Les thèmes relevant de la théorie des groupes se prêtent tout particulièrement à de telles illustrations. De plus, les connaissances spécifiques à chacune des trois options A, B et C fournissent des exemples d'applications très appréciés par le jury.
Les notions de quotients sont importantes, il est important de savoir utiliser la projection canonique et de maîtriser le passage au quotient dans le cadre d'un morphisme.
La théorie des représentations est naturellement reliée à bon nombre de leçons, en particulier dans les leçons 101, 102, 103, 104, 105, 106, 151 et 154.

101 : Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

Dans cette leçon, au-delà de la présentation du matériel théorique indispensable, le choix, l'organisation et la pertinence des illustrations sont des éléments forts de l'appréciation. Les deux facettes de l'action d'un groupe G sur un ensemble X doivent être maîtrisées : l'application de $G \times X$ vers X et le morphisme de G vers $\mathfrak{S}(X)$. La relation entre orbite et stabilisateur qui en découle est incontournable ainsi que des exemples de son utilisation. Il faut savoir utiliser des actions bien choisies pour obtenir des informations soit sur un ensemble X donné, soit sur un groupe G donné et faire apparaître des sous-groupes intéressants de G comme stabilisateurs. Par ailleurs, la présentation doit illustrer comment l'étude des orbites de certaines actions revient à classifier certains objets, soit en trouvant un représentant simple de chaque orbite, soit en dégageant des invariants caractérisant les orbites. Les actions de groupes interviennent aussi efficacement dans des problèmes de dénombrements, notamment via la formule de Burnside.

Les exemples peuvent être internes à la théorie des groupes (action naturelle de $\mathfrak{S}_n$ sur $\{1, ..., n\}$, action par translation ou par conjugaison, etc). Mais il est souhaitable d'emprunter aussi à d'autres domaines (action sur des anneaux, des espaces de matrices ou des espaces de polynômes, représentations de groupes, groupes d'isométries, etc). La géométrie fournit aussi de nombreux exemples pertinents (groupes d'isométries d'un solide ou d'un polygone régulier).

Pour aller plus loin, on peut aborder l'action de $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{K})$ sur la droite projective menant au birapport ou celle de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ sur le demi-plan de Poincaré ou les preuves par actions de groupes des théorèmes de Sylow ou encore d'autres actions donnant lieu à des isomorphismes exceptionnels. Il est aussi possible de s'intéresser aux aspects topologiques ou différentiels liés à certaines actions.

102 : Groupe des nombres complexes de module 1. Racines de l'unité. Applications.

Cette leçon ne peut faire l'impasse sur les aspects élémentaires du sujet (définitions, exponentielle complexe, trigonométrie, etc.), mais elle ne doit s'y cantonner. Elle doit aborder l'aspect « groupe »de S^1 en considérant son lien avec $(\mathbf{R}, +)$ et en examinant ses sous-groupes (en particulier finis). Il faut aussi envisager des applications en géométrie plane. Plus généralement, la leçon invite à expliquer où et comment les nombres complexes de module 1 et les racines de l'unité apparaissent dans divers domaines des mathématiques : spectres de matrices remarquables, polynômes cyclotomiques, représentations de groupes, etc. On peut également s'intéresser aux sous-groupes compacts de $\mathbf{C}^*$

Pour aller plus loin, on peut s'intéresser aux nombres de module 1 et aux racines de l'unité dans $\mathbf{Q}[i]$, ou à la dualité des groupes abéliens finis (notamment la preuve du théorème de structure par prolongement de caractère) ou encore aux transformées de Fourier discrètes et rapides.

Des aspects analytiques du sujet peuvent être évoqués (théorème de relèvement, logarithme complexe, analyse de Fourier sur $\mathbf{R}^n$) mais ne doivent occuper ni le coeur de l'exposé, ni l'essentiel d'un développement.

103 : Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

Dans cette leçon, le jury souhaite que les candidats mettent tout d'abord l'accent sur la conjugaison dans un groupe. Ensuite, ils doivent expliciter la structure de groupe obtenue sur le quotient d'un groupe par un sous-groupe distingué.

La notion de conjugaison doit être illustrée dans des situations variées : groupes de petit cardinal, groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$, groupe linéaire d'un espace vectoriel, groupe affine d'un espace affine, groupe orthogonal, etc. On donne des exemples où la conjugaison aide à résoudre certains problèmes (par exemple, en transformant un élément en un autre plus simple à manipuler ou en considérant l'action par conjugaison). L'étude des classes de conjugaison de divers groupes peut être menée. Dans le cadre d'une action d'un groupe, il faut savoir que les stabilisateurs d'éléments d'une même orbite sont conjugués. On peut aussi illustrer et utiliser le principe du « transport par conjugaison » voulant que hgh^{-1} ait la même « nature géométrique » que g et que ses caractéristiques soient les images par h des caractéristiques de g (conjugaison d'une transvection, d'une translation, d'une réflexion, etc.).

Concernant la notion de sous-groupe distingué, il faut indiquer en quoi c'est précisément la notion qui permet de munir le quotient d'une structure de groupe héritée. Cette notion permet aussi de donner une caractérisation interne des produits directs. Le lien entre sous-groupe distingué et noyau de morphisme ϕ est incontournable ainsi que l'isomorphisme $G/\mathrm{Ker}\phi \cong \mathrm{Im}\phi$. Des exemples bien choisis mettent en évidence comment certains problèmes portant sur l'un des deux groupes G ou G/H peuvent être résolus en utilisant l'autre (par exemple, le lien entre les sous-groupes de l'un et de l'autre). L'examen de la simplicité de certains groupes peut être proposé.

Il est important de s'attarder sur l'utilité des notions présentées. Les applications en arithmétique sont nombreuses, mais il est pertinent de présenter aussi des applications en géométrie ou en algèbre linéaire. On peut ainsi expliquer comment l'étude des classes de conjugaison permet de démontrer la simplicité de certains groupes comme SO_n, étudier le groupe des homothéties-translations distingué dans le groupe affine, établir que les groupes orthogonaux de formes quadratiques congruentes sont conjugués ou encore qu'un sous groupe compact de $\mathrm{GL}(n)$ est conjugué à un sous groupe de $\mathrm{O}(n)$. En algèbre linéaire, des propriétés topologiques de la classe de conjugaison d'un endomorphisme permettent d'établir son caractère diagonalisable ou nilpotent. Enfin, on peut interpréter le discriminant d'une forme quadratique non-dégénérée comme élément du quotient $\mathbf{K}^\times/(\mathbf{K}^\times)^2$.

S'ils le désirent, les candidats peuvent poursuivre en illustrant ces notions en théorie des représentations des groupes finis (classes de conjugaison et nombres de représentations irréductibles, treillis des sous-groupes distingués lu dans la table de caractères, liens entre représentations de G et de G/H, etc.). La notion de produit semi-direct et les théorèmes de SYLOW débordent du programme. Il est possible de les évoquer, mais en veillant à les illustrer par des exemples et des applications.

104 : Groupes finis. Exemples et applications.

La richesse de cette leçon ne doit pas nuire à sa présentation. Le candidat devra sans doute faire des choix qu'il doit être en mesure de justifier.

La notion d'ordre (d'un groupe, d'un élément et d'un sous-groupe) est très importante dans cette leçon ; le théorème de LAGRANGE est incontournable. Les groupes $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et $\mathfrak{S}_n$ sont des exemples très pertinents. Pour ces groupes, il est indispensable de savoir proposer un générateur ou une famille de générateurs. Dans $\mathfrak{S}_n$, il faut savoir calculer un produit de deux permutations et savoir décomposer une permutation en produit de cycles à supports disjoints. Le théorème de structure des groupes abéliens finis doit figurer dans cette leçon. Sa démonstration est techniquement exigeante, mais il faut que l'énoncé soit bien compris, en particulier le sens précis de la clause d'unicité, et être capable de l'appliquer dans des cas particuliers. Il est important de connaître les groupes d'ordre premier ainsi que les groupes d'ordre inférieur à 7.

Les exemples doivent figurer en bonne place dans cette leçon. L'étude des groupes d'isométries laissant fixe un polygone (ou un polyèdre) régulier peut être opportunément exploitée sous cet intitulé. Afin d'illustrer leur présentation, les candidats peuvent aussi s'intéresser à des groupes d'automorphismes ou à des représentations de groupes, ou étudier les groupes de symétries $\mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}_4, \mathfrak{A}_5$ et relier sur ces exemples géométrie et algèbre.

Pour aller plus loin, les candidats peuvent s'attarder sur la dualité dans les groupes abéliens finis. Comme application, la cyclicité du groupe multiplicatif d'un corps fini est tout à fait adaptée. Des exemples de caractères, additifs, ou multiplicatifs dans le cadre des corps finis, sont les bienvenus. Il est aussi possible de s'intéresser aux sommes de GAUSS. S'ils le désirent, les candidats peuvent ensuite introduire la transformée de FOURIER discrète qui pourra être vue comme son analogue analytique, avec ses formules d'inversion, sa formule de PLANCHEREL. Ainsi, la leçon peut mener à introduire la transformée de FOURIER rapide sur un groupe abélien dont l'ordre est une puissance de 2 ainsi que des applications à la multiplication d'entiers, de polynômes et éventuellement au décodage de codes via la transformée de HADAMARD.

105 : Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

Parmi les attendus, il faut savoir relier la leçon avec les notions d'orbites et d'actions de groupes. Il faut aussi savoir décomposer une permutation en cycles à supports disjoints, tant sur le plan théorique (preuve du théorème de décomposition), que pratique (sur un exemple). Il est important de savoir déterminer les classes de conjugaisons du groupe symétrique par la décomposition en cycles, d'être capable de donner des systèmes de générateurs. L'existence du morphisme signature est un résultat non trivial mais ne peut pas constituer, à elle seule, l'objet d'un développement. Il est bon d'avoir en tête que tout groupe fini se plonge dans un groupe symétrique et de savoir calculer la signature des permutations ainsi obtenues dans des cas concrets. Les applications sont nombreuses, il est très naturel de parler du déterminant, des polynômes symétriques ou des fonctions symétriques des racines d'un polynôme. On peut également parler du lien avec les groupes d'isométries des solides.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en s'intéressant par exemple aux automorphismes du groupe symétrique, à des problèmes de dénombrement, aux représentations des groupes des permutations ou encore aux permutations aléatoires.

106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

Cette leçon ne doit pas se résumer à un catalogue de résultats épars sur $\mathrm{GL}(E)$. Il est important de savoir faire correspondre les sous-groupes du groupe linéaire avec les stabilisateurs de certaines actions naturelles (sur des formes quadratiques, sur des drapeaux, sur une décomposition en somme directe, etc.). On doit présenter des systèmes de générateurs de $\mathrm{GL}(E)$ et étudier la topologie de ce groupe en précisant pourquoi le choix du corps de base est important. Les liens avec le pivot de GAUSS sont à détailler. Il faut aussi savoir réaliser $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathrm{GL}(n, \mathbf{K})$ et faire le lien entre signature et déterminant. S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en remarquant que la théorie des représentations permet d'illustrer l'importance de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ et de son sous-groupe unitaire. Ils peuvent également étudier les sous-groupes compacts maximaux et les sous-groupes fermés de $\mathrm{GL}(n)$.

108 : Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

La description ensembliste du groupe engendré par une partie doit être connue et les groupes monogènes et cycliques doivent être évoqués. C'est une leçon qui doit être illustrée par des exemples très variés. Il est indispensable de donner des parties génératrices pour tous les exemples proposés. Les groupes $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ fournissent des exemples naturels tout comme les groupes de permutations, les groupes linéaires ou leurs sous-groupes (par exemple $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$, $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ ou $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$). Ainsi, on peut s'attarder sur l'étude du groupe des permutations avec différents types de parties génératrices en discutant de leur intérêt (ordre, simplicité de $\mathcal{A}_5$ par exemple). On peut présenter le groupe $\mathrm{GL}(E)$ généré par des transvections et des dilatations en lien avec le pivot de Gauss, le calcul de l'inverse ou du rang (par action sur $M_{n,p}(\mathbf{K})$), le groupe des isométries d'un triangle équilatéral qui réalise S_3 par identifications des générateurs. Éventuellement, il est possible de discuter des conditions nécessaires et suffisantes pour que $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times$ soit cyclique ou la détermination de générateurs du groupe diédral.

On illustre comment la connaissance de parties génératrices s'avère très utile dans certaines situations, par exemple pour l'analyse de morphismes de groupes, ou pour montrer la connexité par arcs de certains sous-groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

S'il le souhaite, le candidat peut s'intéresser à la présentation de certains groupes par générateurs et relations. Pour aller plus loin, il est également possible de parler du logarithme discret et de ces applications à la cryptographie (algorithme de Diffie-Hellman, cryptosystème de El Gamal).

120 : Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

On construit rapidement $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, puis on en décrit les éléments inversibles, les diviseurs de zéro et les idéaux. Ensuite, le cas où l'entier n est un nombre premier doit être étudié. La fonction indicatrice d'Euler ainsi que le théorème chinois et sa réciproque sont incontournables.

Les applications sont très nombreuses. Les candidats peuvent, par exemple, choisir de s'intéresser à la résolution d'équations diophantiennes (par réduction modulo n bien choisi) ou bien au cryptosystème RSA. Si des applications en sont proposées, l'étude des morphismes de groupes de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ ou le morphisme de Frobenius peuvent figurer dans la leçon.

S'ils le désirent, les candidats peuvent poursuivre en donnant une généralisation du théorème chinois lorsque deux éléments ne sont pas premiers entre eux, ceci en faisant apparaître le PGCD et le PPCM de ces éléments.

Enfin, les candidats peuvent aller plus loin en s'intéressant au calcul effectif des racines carrées dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, au logarithme discret, ou à la transformée de Fourier rapide.

121 : Nombres premiers. Applications.

Le sujet de cette leçon, souvent appréciée des candidats, est très vaste. Elle doit donc être abordée en faisant des choix qui devront être clairement motivés. Des conjectures classiques ont aussi leur place dans cette leçon. On peut définir certaines fonctions importantes en arithmétique, les relier aux nombres premiers et illustrer leurs utilisations. Il est particulièrement souhaitable de s'intéresser aussi aux aspects algorithmiques du sujet (tests de primalité). En plus d'une étude purement interne à l'arithmétique des entiers, il est important d'exhiber des applications dans différents domaines : théorie des corps finis, théorie des groupes, arithmétique des polynômes, cryptographie, etc. La réduction modulo p n'est pas hors-sujet et constitue un outil puissant pour résoudre des problèmes arithmétiques simples. La répartition des nombres premiers doit être évoquée : certains résultats sont accessibles dans le cadre du programme du concours, d'autres peuvent être admis et cités pour leur importance culturelle.

122 : Anneaux principaux. Applications.

Comme l'indique son intitulé, cette leçon ne doit pas se cantonner aux aspects théoriques. L'arithmétique des anneaux principaux doit être décrite et les démonstrations doivent être maîtrisées (lemme d'Euclide, théorème de Gauss, décomposition en irréductibles, PGCD et PPCM, etc.). Les anneaux euclidiens représentent une classe importante d'anneaux principaux et l'algorithme d'Euclide a toute sa place dans cette leçon pour effectuer des calculs. Les applications en algèbre linéaire ne manquent pas et doivent être mentionnées (par exemple, le lemme des noyaux ou la notion de polynôme minimal pour un endomorphisme, pour un endomorphisme relativement à un vecteur ou pour un nombre algébrique). Si les anneaux classiques $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{K}[X]$ doivent impérativement figurer, il est possible d'en évoquer d'autres (décimaux, entiers de Gauss $\mathbf{Z}[i]$ ou d'Eisenstein $\mathbf{Z}[e^{2i\pi/3}]$) accompagnés d'une description de leurs inversibles, de leurs irréductibles et éventuellement d'applications à des problèmes arithmétiques (équations diophantiennes).

S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en s'intéressant à l'étude des réseaux, à des exemples d'anneaux non principaux, mais aussi à des exemples d'équations diophantiennes résolues à l'aide d'anneaux principaux. À ce sujet, il sera fondamental de savoir déterminer les unités d'un anneau, et leur rôle au moment de la décomposition en facteurs premiers. De même, le calcul effectif des facteurs invariants de matrices à coefficients dans un anneau principal peut être présenté.

123 : Corps finis. Applications.

Une construction des corps finis doit être connue et une bonne maîtrise des calculs dans les corps finis est indispensable. Les injections des divers $\mathbf{F}_q$ doivent être connues. Des applications des corps finis (y compris pour $\mathbf{F}_q$ avec q non premier !) ne doivent pas être oubliées. Par exemple, l'étude de polynômes à coefficients entiers et de leur irréductibilité peut figurer dans cette leçon. Le calcul des degrés des extensions et le théorème de la base téléscopique sont incontournables. La structure du groupe multiplicatif doit aussi être connue. L'étude des carrés dans un corps fini et la résolution d'équations de degré 2 sont envisageables.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en détaillant des codes correcteurs ou en étudiant l'irréductiblilité des polynômes à coefficients dans un corps fini.

125 : Extensions de corps. Exemples et applications.

Le théorème de la base téléscopique et ses applications à l'irréductibilité de certains polynômes, ainsi que les corps finis, sont incontournables. De même il faut savoir calculer le polynôme minimal d'un élément algébrique dans des cas simples, notamment pour quelques racines de l'unité. La leçon peut être illustrée par des exemples d'extensions quadratiques et leurs applications en arithmétique, ainsi que par des extensions cyclotomiques.

S'ils le désirent, les candidats peuvent montrer que l'ensemble des nombres algébriques forme un corps algébriquement clos, par exemple en expliquant comment l'utilisation du résultant permet de calculer des polynômes annulateurs de sommes et de produits de nombres algébriques. Pour aller plus loin, les candidats peuvent parler des nombres constructibles à la règle et au compas, et éventuellement s'aventurer en théorie de Galois.

126 : Exemples d'équations en arithmétique.

Dans cette leçon, il est indispensable de s'intéresser à des équations sur $\mathbf{Z}$ mais aussi des équations dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et dans les corps finis. On doit présenter les notions de bases servant à aborder les équations de type $ax+by=d$ (identité de Bezout, lemme de Gauss). On doit présenter des exemples d'utilisation effective du lemme chinois.

Ensuite, la méthode de descente de Fermat et l'utilisation de la réduction modulo un nombre premier p méritent d'être mis en œuvre. La leçon peut aussi dériver vers la notion de factorialité, illustrée par des équations de type Mordell, Pell-Fermat, et même Fermat (pour $n = 2$, ou pour les nombres premiers de Sophie Germain). La résolution des systèmes linéaires sur $\mathbf{Z}$ peut être abordée. Il est de plus naturel de s'intéresser à la résolution des systèmes de congruences, à la recherche de racines carrées dans les corps finis. Les candidats peuvent plus généralement aborder la recherche des racines des polynômes dans les corps finis.

S'ils le désirent, les candidats peuvent étudier les coniques sur les corps finis et la recherche de points sur ces coniques.

141 : Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

La présentation du bagage théorique permettant de définir corps de rupture, corps de décomposition, ainsi que des illustrations dans différents types de corps (réel, rationnel, corps finis) sont inévitables. Les corps finis peuvent être illustrés par des exemples de polynômes irréductibles de degré 2, 3, 4 sur $\mathbf{F}_2$ ou $\mathbf{F}_3$. Il est nécessaire de présenter des critères d'irréductibilité de polynômes et des polynômes minimaux de quelques nombres algébriques.

Il est bon de savoir montrer que l'ensemble des nombres algébriques sur le corps $\mathbf{Q}$ des rationnels est un corps algébriquement clos. Le théorème de la base téléscopique, ainsi que les utilisations arithmétiques (utilisation de la divisibilité) que l'on peut en faire dans l'étude de l'irréductibilité des polynômes, est incontournable.

Des applications du corps de décomposition doivent être mentionnées, par exemple en algèbre linéaire.

142 : PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.

Le champ d'étude de cette leçon ne peut se limiter au cas de $\mathbf{Z}$; il s'agit de définir et manipuler les notions de PGCD et PPCM dans un anneau factoriel et comme générateurs de sommes/intersections d'idéaux dans un anneau principal. Le candidat doit prendre soin de différencier le cadre théorique des anneaux factoriels ou principaux dans lequel sont définis les objets et dans lequel s'appliquent les énoncés des théorèmes proposés et le cadre euclidien fournissant les algorithmes. Bien sûr, la leçon peut opportunément s'illustrer d'exemples élémentaires d'anneaux euclidiens, comme $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{K}[X]$.

Une part substantielle de la leçon doit être consacrée à la présentation d'algorithmes : algorithme d'Euclide, algorithme binaire, algorithme d'Euclide étendu. Dans le cas des polynômes, il faut étudier l'évolution de la suite des degrés et des restes. On peut évaluer le nombre d'étapes de ces algorithmes dans les pires cas et faire le lien avec les suites de Fibonacci.

Des applications élémentaires sont particulièrement bienvenues : calcul de relations de Bezout, résolutions d'équations diophantiennes linéaires, inversion modulo un entier ou un polynôme, calculs d'inverses dans les corps de ruptures, les corps finis. On peut aussi évoquer le théorème chinois effectif, la résolution d'un système de congruences et faire le lien avec l'interpolation de Lagrange.

Pour aller plus loin, on peut évoquer le rôle de algorithme d'Euclide étendu dans de nombreux algorithmes classiques en arithmétique (factorisation d'entiers, de polynômes, etc). Décrire l'approche matricielle de l'algorithme d'Euclide et l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ sur $\mathbf{Z}^2$ est tout à fait pertinent. On peut aussi établir l'existence d'un supplémentaire d'une droite dans $\mathbf{Z}^2$, ou d'un hyperplan de $\mathbf{Z}^n$, la possibilité de compléter un vecteur de $\mathbf{Z}^n$ en une base.

La leçon peut amener à étudier les matrices à coefficients dans un anneau principal ou euclidien, et, de manière plus avancée, la forme normale d'Hermite et son application à la résolution d'un système d'équations diophantiennes linéaires. De même, aborder la forme normale de Smith, et son application au théorème de la base adaptée, permet de faire le lien avec la réduction des endomorphismes *via* le théorème des invariants de similitude.

La leçon invite aussi, pour des candidats familiers de ces notions, à décrire le calcul de PGCD dans $\mathbf{Z}[X]$ et $\mathbf{K}[X, Y]$, avec des applications à l'élimination de variables. On peut rappeler les relations entre PGCD et résultant et montrer comment obtenir le PGCD en échelonnant la matrice de Sylvester. Sur l'approximation diophantienne, on peut enfin envisager le développement d'un rationnel en fraction continue et l'obtention d'une approximation de Padé-Hermite à l'aide de l'algorithme d'Euclide, la recherche d'une relation de récurrence linéaire dans une suite ou le décodage des codes BCH.

144 : Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications

Dans cette leçon, il est indispensable de bien définir l'ordre de multiplicité d'une racine (définition algébrique et analytique, quand c'est possible). Les fonctions symétriques élémentaires et les relations entre cœfficients et racines doivent être maîtrisées et pouvoir être mises en œuvre. Des méthodes, même élémentaires, de localisation des racines ont toute leur place et peuvent déboucher sur des résultats de topologie à propos de la continuité des racines.

Il peut être pertinent d'introduire la notion de polynôme scindé et de citer le théorème de d'Alembert-Gauss. Il est apprécié de faire apparaître le lien entre la recherche des racines d'un polynôme et la réduction des matrices. Les candidats peuvent également s'intéresser aux racines des polynômes orthogonaux, ou aux règles des signes de Descartes et de Sturm. L'étude des propriétés des nombres algébriques peuvent trouver leur place dans cette leçon. La théorie des corps et le cas particulier des corps finis peuvent aussi être évoqués de façon pertinente.

S'ils le désirent, les candidats peuvent s'intéresser à des problèmes de localisation des valeurs propres, comme les disques de Gershgorin ou au calcul effectif d'expressions polynomiales symétriques des racines d'un polynôme.

Il ne s'agit par contre en aucun cas d'adapter le plan de la leçon 141 : l'irréductibilité des polynômes peut être évoquée mais ne doit pas être l'élément central de la leçon.

148 : Exemples de décompositions de matrices. Applications.

Dans cette leçon, le candidat choisit quelques exemples de décompositions de matrices qu'il présente avec quelques applications significatives. Citons les plus classiques : décomposition LU, décomposition de Dunford, décomposition de Frobenius, décomposition de Jordan, décomposition QR, décomposition polaire, décomposition de Cholesky... Il ne s'agit pas d'établir un catalogue complet, mais plutôt de faire un choix avec des méthodes et des domaines d'applications variées. Les aspects de constructions effectives ou approchèes algorithmiques doivent être abordès. Les relations entre les différentes décompositions proposées , s'il y en a, doivent être connues.

149 : Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.

Cette leçon doit aborder la notion de vecteurs propres et de valeurs propres de façon générale et mettre en lumière l'exploitation de techniques d'algèbre ou d'analyse pour aborder leur recherche. Après avoir exploré la détermination théorique exacte des éléments propres, on s'intéresse à des exemples de matrices dont les éléments propres sont remarquables (matrices compagnons, matrices circulantes, matrices d'ordre fini...) et donné des exemples de situations où la connaissance d'éléments propres s'avère utile. On doit connaître les limites du calcul exact, même si le cadre mathématique nécessaire est non exigible et hors programme et introduire sur **R** ou **C** une ou plusieurs méthodes itératives, dont on démontre la convergence. Les notions de norme matricielle, de rayon spectral doivent être maîtrisées. Le lien avec la convergence des suites du type $X_{n+1} = AX_n$ doit être connu et illustré. On peut s'intéresser à la localisation des valeurs propres. La problématique du conditionnement doit être abordée en distinguant le problème général et le cas particulier des matrices auto-adjointes. Parmi les points intéressants à développer, on peut citer les méthodes de la puissance, puissance inverse et QR pour la recherche d'éléments propres. S'ils le désirent, les candidats peuvent s'intéresser aux liens qui peuvent aussi être fait avec la théorie des représentations et la transformée de FOURIER rapide, ainsi qu' au comportement de la suite des itérées de matrices stochastiques ou plus généralement de matriices à coefficients positifs, au moins dans des cas particuliers.

151 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

Dans cette leçon, il est indispensable de présenter les résultats fondateurs de la théorie des espaces vectoriels de dimension finie en ayant une idée de leurs preuves. Ces théorèmes semblent simples car ils ont été très souvent pratiqués, mais leur preuve demande un soin particulier. Il est important de savoir justifier pourquoi un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est aussi de dimension finie.

On peut montrer, sur des exemples, comment la dimension finie intervient dans la démonstration de certains résultats (récurrence sur la dimension, égalité de sous-espaces par inclusion et égalité des dimensions, isomorphisme par injectivité et dimension, etc.). À cette occasion, on pourra signaler des résultats qui ne subsistent pas en dimension infinie. Le pivot de GAUSS ainsi que les diverses notions et caractérisations du rang trouvent leur place dans cette leçon. Les applications sont nombreuses : existence de polynômes annulateurs, dimension de l'espace des formes n-linéaires alternées en dimension n, isomorphisme avec le dual dans le cadre euclidien et théorème de RIESZ, espaces de solutions d'équations différentielles ordinaires, caractérisation des endomorphismes diagonalisables, décomposition d'isométries en produits de réflexions, dimensions des représentations irréductibles d'un groupe fini, théorie des corps finis, etc.

Les caractérisations du rang peuvent aussi être utilisées pour démontrer l'invariance du rang par extension de corps, ou pour établir des propriétés topologiques (sur **R** ou **C**). S'ils le désirent, les candidats peuvent déterminer des degrés d'extensions dans la théorie des corps ou s'intéresser aux nombres algébriques. Il est également possible d'explorer des applications en analyse comme les extrémas liés. Dans un autre registre, il est pertinent d'évoquer la méthode des moindres carrés dans cette leçon, par exemple en faisant ressortir la condition de rang maximal pour garantir l'unicité de la solution et s'orienter vers les techniques de décomposition en valeurs singulières pour le cas général. On peut alors naturellement analyser l'approximation d'une matrice par une suite de matrices de faible rang.

152 : Déterminant. Exemples et applications.

Dans cette leçon, il faut commencer par définir correctement le déterminant. et savoir démontrer ses propriétés fondamentales (en particulier le fait que l'espace des formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n est de dimension 1). La distinction entre le déterminant d'une famille de vecteurs dans une base donnée et le déterminant d'un endomorphisme doit être comprise. L'interprétation en termes de volume est essentielle. Le calcul explicite est important, mais le jury ne peut se contenter d'un déterminant de VANDERMONDE ou d'un déterminant circulant. Les opérations élémentaires permettant de calculer des déterminants doivent être présentées et illustrées. Le polynôme caractéristique est incontournable (on prendra garde que $A-XI_n$ est à coefficients dans $\mathbf{K}[X]$ qui n'est pas un corps). Parmi les autres applications possibles, on peut penser aux déterminants de GRAM (permettant des calculs de distances), au déterminant jacobien (utile en calcul intégral et en probabilités), à l'utilisation du déterminant en géométrie (coordonnées barycentriques, colinéarité, etc.) ou encore à son rôle dans l'étude des formes quadratiques. Il est bienvenu d'illustrer la continuité du déterminant par une application. On pourra aussi s'intéresser à sa différentielle.

Pour aller plus loin, les candidats peuvent s'intéresser aux calculs de déterminants sur $\mathbf{Z}$. Le résultant et les applications simples à l'intersection ensembliste de deux courbes algébriques planes peuvent aussi trouver leur place dans cette leçon pour des candidats ayant une pratique de ces notions.

153 : Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

Cette leçon ne doit pas être un catalogue de résultats autour de la réduction qui est ici un moyen pour démontrer des théorèmes ; les polynômes d'endomorphismes doivent y occuper une place importante. Il faut consacrer une courte partie de la leçon à l'algèbre $\mathbf{K}[u]$ et aux liens entre réduction de l'endomorphisme u et structure de l'algèbre $\mathbf{K}[u]$. Il faut connaître la dimension de $\mathbf{K}[u]$ sans hésitation. Il est ensuite possible de s'intéresser aux propriétés globales de cette algèbre (inversibles, condition nécessaire et suffisante assurant que ce soit un corps...). De même il est important de mettre en évidence les liens entre les idempotents et la décomposition en somme de sous-espaces caractéristiques.

Le lemme des noyaux, les polynômes caractéristiques et minimaux doivent figurer dans la leçon. Il faut bien préciser que, dans la réduction de DUNFORD, les composantes sont des polynômes en l'endomorphisme, et en connaître les conséquences théoriques et pratiques. L'aspect *applications* est trop souvent négligé. Il est possible, par exemple, de mener l'analyse spectrale de matrices stochastiques. On attend d'un candidat qu'il soit en mesure, pour une matrice simple de justifier la diagonalisabilité et de déterminer un polynôme annulateur (voire minimal). Il est bien sûr important de ne pas faire de confusion entre diverses notions de multiplicité pour une valeur propre λ donnée (algébrique ou géométrique). Enfin, calculer A^k ne nécessite pas, en général, de réduire A (la donnée d'un polynôme annulateur de A suffit souvent). Il est possible d'envisager des applications aux calculs d'exponentielles de matrices.

S'il le souhaite, le candidat pourra étudier des équations matricielles et de calcul fonctionnel, avec par exemple l'étude de l'extraction de racines ou du logarithme.

154 : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Dans cette leçon, il faut présenter des propriétés de l'ensemble des sous-espaces stables par un endomorphisme. Des études détaillées sont les bienvenues, par exemple dans le cas d'une matrice diagonalisable ou dans le cas d'une matrice nilpotente d'indice maximum.

L'étude des endomorphismes cycliques et des endomorphismes semi-simples trouvent tout à fait leur place dans cette leçon. Dans le cas des corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, on pourra, si on le souhaite, caractériser ces derniers par la fermeture de leur orbite.

La réduction des endomorphismes normaux et l'exemple de résolutions d'équations matricielles peuvent être présentés en applications.

La décomposition de FROBENIUS constitue également une application intéressante de cette leçon. Il ne faut pas oublier d'examiner le cas des sous-espaces stables par des familles d'endomorphismes. Ceci peut déboucher par exemple sur des endomorphismes commutants entre eux ou sur la théorie des représentations.

155 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Dans cette leçon, on attend des exemples naturels d'endomorphismes diagonalisables et des critères de diagonalisabilité. On doit notamment savoir expliquer pourquoi l'application induite par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace stable est encore diagonalisable. Il ne faut pas oublier de parler du cas des endomorphismes symétriques. On peut étudier certaines propriétés topologiques en prenant le soin de donner des précisions sur le corps $\mathbf{K}$ et la topologie choisie pour $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Les candidats doivent disposer de méthodes efficaces de calcul de l'exponentielle d'un endomorphisme diagonalisable. On peut dénombrer les endomorphismes diagonalisables dans les corps finis, ou possédant des propriétés données, liées à la diagonalisation.

S'ils le désirent, les candidats peuvent s'intéresser aux liens qui peuvent aussi être fait avec la théorie des représentations et la transformée de Fourier rapide.

156 : Exponentielle de matrices. Applications.

Bien que ce ne soit pas une leçon d'analyse, il faut toutefois pouvoir justifier clairement la convergence de la série exponentielle.

Les questions de surjectivité ou d'injectivité doivent être abordées. Par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle l'exponentielle d'une matrice à coefficients réels ? La matrice définie par blocs $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ est-elle l'exponentielle d'une matrice à coefficients réels ?

La décomposition de Dunford multiplicative (décomposition de Jordan) de $\exp(A)$ trouve toute son utilité dans cette leçon. L'exponentielle fait bon ménage avec la décomposition polaire dans bon nombre de problèmes sur les sous-groupes du groupe linéaire. L'étude du logarithme (quand il est défini) peut être menée dans cette leçon.

Il est bon de connaître l'image par exponentielle de certains sous-ensembles de matrices (ensemble des matrices symétriques, hermitiennes, ou antisymétriques).

Les applications aux équations différentielles méritent d'être présentées sans toutefois constituer l'essentiel de la leçon. On pourra par exemple faire le lien entre réduction et comportement asymptotique, mais le jury déconseille aux candidats de proposer ce thème dans un développement de cette leçon, sauf à avoir bien compris comment les apports algébriques permettent ici de simplifier les conclusions analytiques.

S'ils le désirent, les candidats peuvent s'aventurer vers les sous-groupes à un paramètre du groupe linéaire (on peut alors voir si ces sous-groupes constituent des sous-variétés fermées de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$) ou vers les algèbres de Lie.

157 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Il est indispensable de connaître les polynômes caractéristiques et minimaux d'un endomorphisme nilpotent et de savoir justifier son caractère trigonalisable. Il est bon de savoir expliquer pourquoi l'application induite par un endomorphisme trigonalisable (respectivement nilpotent) sur un sous-espace stable est encore trigonalisable (respectivement nilpotent). L'utilisation des noyaux itérés est fondamentale dans cette leçon, par exemple pour déterminer si deux matrices nilpotentes sont semblables. Il est intéressant de présenter des conditions suffisantes de trigonalisation simultanée ; l'étude des endomorphismes cycliques a toute sa place dans cette leçon. L'étude des nilpotents en dimension 2 débouche naturellement sur des problèmes de quadriques et l'étude sur un corps fini donne lieu à de jolis problèmes de dénombrement.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aussi présenter la décomposition de Frobenius, ou des caractérisations topologiques des endomorphismes nilpotents, ou encore des propriétés topologiques de l'ensemble des endomorphismes nilpotents.

158 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

Le théorème spectral est indispensable dans cette leçon. Une place importante mérite d'être faite au cas particulier des matrices symétriques positives et définies positives ; les candidats doivent connaître leurs propriétés fondamentales, leur rôle, et la structure de leur ensemble. La notion de signature pourra être présentée en montrant comment elle détermine la classe de congruence d'une matrice symétrique réelle. L'action du groupe linéaire et du groupe orthogonal sur l'espace des matrices symétriques peut donner un cadre naturel à cette leçon. Le lien avec les formes quadratiques et les formes hermitiennes est incontournable. L'orthogonalisation simultanée est un résultat important de cette leçon. Il faut en connaître les applications géométriques aux quadriques.

Les candidats familiers avec ces notions pourront illustrer la leçon en évoquant le cas des matrices de covariance de vecteurs aléatoires et discuter les conditions en assurant le caractère inversible.

Une discussion de la décomposition de Cholesky, qui a de nombreuses applications pour le calcul scientifique (en lien avec la résolution de systèmes linéaires ou de problèmes de moindres carrés) ou en probabilités (construction d'un vecteur gaussien de matrice de covariance donnée à partir d'un vecteur gaussien de matrice de covariance identité), peut mériter sa place dans cette leçon. On poura également évoquer la décomposition en valeurs singulières d'une matrice (particulièrement importante pour le traitement massif de données).

159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

Il est important de bien placer la thématique de la dualité dans cette leçon ; celle-ci permet de mettre en évidence des correspondances entre un morphisme et son morphisme transposé, entre un sous-espace et son orthogonal (canonique), entre les noyaux et les images ou entre les sommes et les intersections. Bon nombre de résultats d'algèbre linéaire se voient dédoublés par cette correspondance. Les liens entre base duale et fonctions de coordonnées doivent être parfaitement connus. Le passage d'une base à sa base duale ou antéduale, ainsi que les formules de changement de base, doivent être maîtrisés. On pourra s'intéresser aux cas spécifiques où l'isomorphisme entre l'espace et son dual est canonique (cas euclidien, cas des matrices).

Savoir calculer la dimension d'une intersection d'hyperplans via la dualité est important dans cette leçon. L'utilisation des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes permet facilement d'obtenir les équations d'un sous-espace vectoriel ou d'exhiber une base d'une intersection d'hyperplans.

Cette leçon peut être traitée sous différents aspects : géométrique, algébrique, topologique ou analytique. Il faut que les développements proposés soient en lien direct avec la leçon. Enfin rappeler que la différentielle d'une fonction à valeurs réelles est une forme linéaire semble incontournable.

Il est possible d'illustrer la leçon avec un point de vue probabiliste, en rappelant que la loi d'un vecteur aléatoire X est déterminée par les lois unidimensionnelles de $X \cdot u$ pour tout vecteur u.

160 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

Dans cette leçon, le caractère euclidien de l'espace est essentiel pour que l'endomorphisme soit remarquable. Le théorème spectral pour les auto-adjoints et la réduction des endomorphismes orthogonaux sont des résultats incontournables. Le jury met les candidats en garde sur le fait que le lemme des noyaux ou la décomposition de Dunford ne sont pas des développements adaptés à cette leçon. En revanche, l'utilisation du fait que l'orthogonal d'un sous-espace stable par un endomorphisme est stable par l'adjoint doit être mis en valeur. De même la réduction d'endomorphismes normaux peut être évoquée.

L'étude des projections orthogonales (en lien ave le calcul de distances), des rotations, des réflexions, des renversements, etc. fournit des exemples dignes d'intérêt. Une illustration pertinente peut s'appuyer sur la description de problèmes de moindres carrés en faisant ressortir le rôle de l'hypothèse de rang plein de A sur le caractère inversible de $A^\intercal A$.

161 : Distances et isométries d'un espace affine euclidien.

Cette leçon ne doit pas se restreindre aux seuls cas des dimensions 2 et 3, même s'il est naturel que ceux-ci y occupent une place importante. La classification des isométries en dimension 2 et 3 est exigible. En dimension 3, il faut savoir classifier les rotations et connaître les liens avec la réduction. On peut aussi penser aux isométries laissant stables certains objets en dimension 2 et 3. Il faut savoir prouver qu'une isométrie est affine, pouvoir donner des générateurs du groupe des isométries affines et savoir composer des isométries affines.

Les candidats peuvent en outre parler de la définition de la distance, de la distance à un sous-espace vectoriel et de déterminant de Gram. Les groupes de similitude peuvent également être abordés.

S'ils le désirent, les candidats peuvent évoquer l'interprétation de l'écart-type comme une distance, et présenter la matrice de covariance comme un exemple pertinent de matrice de Gram. Ainsi, les déterminants de Gram permettent de calculer l'erreur commise dans le cadre de prédictions affines.

162 : Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

Dans cette leçon, les techniques liées au simple pivot de Gauss constituent l'essentiel des attendus. Il est impératif de faire le lien avec la notion de système échelonné (dont on donnera une définition précise et correcte) et de situer l'ensemble dans le contexte de l'algèbre linéaire, sans oublier la dualité. Un point de vue opératoire doit accompagner l'étude théorique et l'intérêt algorithmique des méthodes présentées doit être expliqué, éventuellement en l'illustrant par des exemples simples (où l'on attend parfois une résolution explicite).

Parmi les conséquence théoriques, les candidats peuvent notamment donner des systèmes de générateurs de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$. Ils est aussi pertinent de présenter les relations de dépendance linéaire sur les colonnes d'une matrice échelonnée qui permettent de décrire simplement les orbites de l'action à gauche de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{K})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ donnée par $(P, A) \mapsto PA$.

S'ils le désirent, les candidats peuvent exploiter les propriétés des systèmes d'équations linéaires pour définir la dimension des espaces vectoriels et obtenir une description de l'intersection de deux sous-espaces vectoriels donnés par des systèmes générateurs, ou d'une somme de deux sous-espaces vectoriels donnés par des équations.

De même, des discussions sur la résolution de systèmes sur $\mathbf{Z}$ et la forme normale de Hermite peuvent trouver leur place dans cette leçon. Enfin, il est possible de présenter les décompostions LU et de Choleski, en évaluant le coût de ces méthodes ou encore d'étudier la résolution de l'équation normale associée aux problèmes des moindres carrés et la détermination de la solution de norme minimale par la méthode de décomposition en valeurs singulières.

170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

L 'intitulé implique implicitement que le candidat ne doit pas se contenter de travailler sur $\mathbf{R}$. On peut par exemple adopter le point de vue de l'action par congruence du groupe linéaire sur l'espace des matrices symétriques, ce qui permet de dégager quelques invariants (rang, discriminant), de s'interroger sur le nombre et la structure des orbites, L'algorithme de GAUSS doit être énoncé et pouvoir être mis en œuvre sur une forme quadratique simple. En ajoût de la a classification sur $\mathbf{R}$, le candidat pourra parler de la classification des formes quadratiques sur le corps des complexes. Il est aussi possible de s'intéresser à la classification sur les corps finis. On peut s'intéresser au groupe orthogonal (générateurs, structure du groupe quand l'espace est de dimension 2). Le lien avec la dualité des espaces vectoriels permet de comprendre le sens de la décomposition de Gauss et de comparer les notions de sous-espace orthogonal, en s'interrogeant sur les conditions pour que que l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel en soit un supplémentaire.

Les notions d'isotropie et de cône isotrope doivent être connues. On pourra rattacher cette notion à la géométrie différentielle. Pour aller plus loin, l'étude de la géométrie d'un espace vectoriel muni d'une forme quadratique de signature (p,q) peut-être envidagée, notamment la structure du cône de lumière de l'espace-temps de Minkowski, avec la traduction géométrique de la notion d'orthogonal dans ce cas et des propriétés du groupe O(p,q).

171 : Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

Dans cette leçon, la loi d'inertie de SILVESTER doit être présentée ainsi que l'orthogonalisation simultanée. L'algorithme de GAUSS doit être énoncé et pouvoir être expliqué sur une forme quadratique de $\mathbf{R}^3$; le lien avec la signature doit être clairement énoncé et la signification géométrique des deux entiers r et s composant la signature d'une forme quadratique réelle doit être expliqué. La différentielle seconde d'une fonction de plusieurs variables est une forme quadratique importante qui mérite d'être présentée dans cette leçon.

La définition et les propriétés classiques des coniques d'un plan affine euclidien doivent être connues. On peut présenter les liens entre la classification des formes quadratiques et celles des coniques ; de même il est intéressant d'évoquer le lien entre le discriminant de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ et la signature de la forme quadratique $ax^2 + bxy + cy^2$.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aussi aller vers la théorie des représentations et présenter l'indicatrice de SCHUR-FROBENIUS qui permet de réaliser une représentation donnée sur le corps des réels.

181 : Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

Dans cette leçon, la notion de coordonnées barycentriques est incontournable ; des illustrations dans le triangle (coordonnées barycentriques de certains points remarquables) sont envisageables. Les candidats doivent savoir reconnaître des lignes de niveau et des lieux de points en utilisant des coordonnées barycentriques. Il est important de parler d'enveloppe convexe et de savoir dessiner l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points dans le plan ; le théorème de GAUSS-LUCAS trouve parfaitement sa place dans cette leçon. Il semble approprié d'évoquer les points extrémaux, ainsi que des applications qui en résultent. Par ailleurs, il est important d'avoir compris le lien entre fonctions convexes et ensembles convexes.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en présentant le lemme de FARKAS, le théorème de séparation de HAHN-BANACH, les théorèmes de HELLY et de CARATHEODORY, ou parler des sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

géométrie.

190 : Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

Il est nécessaire de dégager clairement différentes méthodes de dénombrement et de les illustrer d'exemples significatifs. De nombreux domaines de mathématiques sont concernés par des problèmes de dénombrement, cet aspect varié du thème de la leçon doit être mis en avant. L'utilisation de séries génératrices est un outil puissant pour le calcul de certains cardinaux. De plus, il est naturel de calculer des cardinaux classiques et certaines probabilités. Il est important de connaître l'interprétation ensembliste de la somme des coefficients binomiaux et ne pas se contenter d'une justification par le binôme de Newton. L'introduction des corps finis (même en se limitant aux cardinaux premiers) permet de créer un lien avec l'algèbre linéaire. Les actions de groupes peuvent également conduire à des résultats remarquables.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aussi présenter des applications de la formule d'inversion de Möebius ou de la formule de Burnside. Des candidats ayant un bagage probabiliste pourront explorer le champ des permutations aléatoires, en présentant des algorithmes pour générer la loi uniforme sur le groupe symétrique S_n et analyser certaines propriétés de cette loi uniforme (points fixes, cycles, limite $n \to +\infty$...).

Une nouvelle leçon est ouverte pour la session 2020 :

191 : Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie

Le jury souhaite proposer une leçon qui offre une ouverture large autour du thème de la géométrie. Avec cet intitulé, les candidats sont libres de présenter des résultats et des exemples très variés en lien avec la géométrie. L'objectif n'est pas de couvrir le plus d'aspects possible, mais plutôt d'en proposer certains suffisamment consistants et variés. À partir du moment où ils sont de nature géométrique, tous les éléments du programme peuvent être pertinents. En contrepartie de cette liberté laissée aux candidats, une difficulté est de structurer la présentation des objets et des notions choisies. Ainsi, plusieurs approches sont possibles pour organiser cette leçon, par exemple :

- en regroupant les outils par « famille » : outils matriciels (repérage des points par des matrices colonnes, des transformations par des matrices, rang, réduction, etc.), outils polynomiaux (formes quadratiques, déterminant, résultant, etc.), outils structurels (groupes, corps) ;
- ou par niveau d'abstraction/de généralité (nombres réels, complexes, matrices, groupes...) ;
- ou par type d'objectifs (identifier des objets géométriques, les mesurer, les classifier, démontrer des résultats en utilisant des transformations géométriques...)

Il est aussi possible de se focaliser sur un seul type d'outils (par exemple algèbre linéaire, géométrie affine ou groupes) en détaillant plusieurs applications en géométrie ou sur une question géométrique fouillée à l'aide de diverses techniques (par exemple sur des problèmes impliquant des figures géométriques comme les cercles et triangles, les polygones et polyèdres réguliers, etc.). Des situations « élémentaires », dans le plan, permettent certainement de mettre en valeur des connaissances et un recul mathématique. Il faut bien éviter l'écueil d'un catalogue fastidieux ou celui qui consisterait à recycler directement le contenu d'une autre leçon avec un vague habillage géométrique.

Parmi les nombreux éléments qui peuvent être discutés, on peut indiquer :

- les notions de distance, aire, volume. Notamment les propriétés de la matrice de Gram, le lien entre déterminant et aire d'un parallélogramme ou volume d'un parallélépipède, la construction du produit vectoriel et du produit mixte,... peuvent être exploités avec pertinence dans cette leçon. On peut ainsi être amené à étudier l'aire balayée par un arc paramétré du plan, la position d'un point par rapport à un cercle circonscrit à un triangle, etc. Le déterminant de CAYLEY-MENGER permet de mettre en évidence des conditions pour que $n+1$ points de $\mathbf{R}^n$ forment une base affine, ou que $n+2$ points de $\mathbf{R}^n$ soient cocycliques. Dans une autre direction, la division euclidienne dans $\mathbf{Z}$ donne une preuve d'une forme du théorème de la base adaptée, avec pour conséquence le calcul du volume (d'une maille élémentaire) d'un sous réseau de $\mathbf{Z}^n$ comme étant le déterminant d'un système générateur dans la base canonique.

— l'apport de l'algèbre linéaire à la géométrie. On peut ainsi exploiter le calcul matriciel et les techniques de réduction pour mettre en évidence des informations de nature géométrique (avec les exemples fondamentaux des homothéties, projections, symétries, affinités, rotations, la classification des isométries vectorielles, etc.). On peut être alors amené à présenter le théorème de CARTAN-DIEUDONNÉ sur la décomposition d'isométries euclidiennes en produit de réflexions ou encore évoquer une (ou des) interprétation(s) géométrique(s) de la décomposition en valeurs singulières. Dans cette même veine, la leçon peut être orientée vers la géométrie affine, en s'adossant à la théorie des espaces vectoriels pour définir certains objets (espaces et sous-espaces affines, applications affines, repères affines, etc), ce qui permet, par exemple, d'établir ainsi certains résultats classiques, comme les théorèmes de THALÈS, PAPPUS, DESARGUES,...
— l'analyse des formes quadratiques permet d'aborder des problèmes géométriques : étude des coniques, quadriques, classification des quadriques de $\mathbf{R}^n$, interprétation géométrique de la signature, application des méthodes de réduction, etc.
— la théorie des groupes est un champ naturel pour cette leçon (mais qui n'est cependant pas indispensable) : groupes de transformations (isométries, déplacements, similitudes, translations), composition de transformations, mise en évidence d'invariants fondamentaux (angle, birapport, excentricité d'une conique). Il est possible de se focaliser sur des groupes de transformations préservant une certaine structure géométrique et en distinguant parmi eux les groupes finis (groupes d'isométries classiques), les groupes discrets infinis (avec des translations, groupes de pavages) et, pour aller plus loin, les groupes continus (groupes de LIE).
— les techniques de convexité constituent aussi un champ fructueux : le théorème de séparation par un hyperplan dans $\mathbf{R}^n$ de HAHN-BANACH et, en corollaire, le théorème de HELLY permettent par exemple d'établir des propriétés intéressantes sur les cordes de convexes compacts.
— certains candidats peuvent trouver intérêt à aborder les questions d'intersection de courbes polynomiales, qui permettent notamment de mettre en œuvre le théorème de BEZOUT et des méthodes exploitant la notion de résultant.
— un grand nombre de problèmes de géométrie peuvent être traités en exploitant le formalisme des nombres complexes. Il est tout à fait approprié d'évoquer l'étude des inversions et, en particulier la possibilité de ramener un cercle à une droite et inversement ; la formule de PTOLÉMÉE illustre bien l'utilisation de cet outil. On peut parler des suites définies par récurrence par une homographie et leur lien avec la réduction dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ et aborder la construction de la sphère de RIEMANN.
— les problématiques de la construction à la règle et au compas constituent un autre axe pertinent pour cette leçon, avec le théorème de WANTZEL, et peuvent conduire à s'intéresser à des extensions de corps.

Comme dans le cas des autres leçons, il est tout à fait bienvenu de chercher à illustrer cette leçon par des exemples issus de l'analyse, des probabilités, de la statistique (par exemple en évoquant l'interprétation géométrique de l'analyse en composantes principales), du calcul formel (par exemple avec les applications du résultant) ou du calcul scientifique (par exemple en présentant des problématiques de géométrie computationnelle, comme le calcul d'enveloppe convexe, les algorithmes de triangulation DELAUNAY, les diagrammes de VORONOI...). Les thèmes en lien avec la géométrie projective ou la géométrie algébrique peuvent permettre à certains candidats de présenter des résultats très avancés. Cette leçon nécessite une préparation très personnelle et réfléchie de la part des candidats. Les exemples et les résultats qui y sont présentés ont vocation à inciter les candidats à enrichir les autres leçons de cette épreuve d'exemples issus de la géométrie.

5.4 Épreuve orale d'analyse et probabilités

201 : Espaces de fonctions. Exemples et applications.

Sans sortir du programme, le candidat dispose d'au moins deux thèmes très riches pour nourrir son plan : espaces de fonctions continues sur un compact, espaces L^p sur le cercle ou sur la droite réelle.
Sur le premier sujet, le jury attend des candidats une bonne familiarité avec la convergence uniforme et son utilisation pour justifier des régularités. Le théorème de Stone-Weierstrass est évidemment incontournable, dans ses différentes versions, constructives ou non. La complétude peut également être exploitée, par exemple en lien avec les équations différentielles ou intégrales.
Sur le second, la convolution et ses applications, ainsi que l'analyse de Fourier fournissent un large terrain d'exploration.
Plusieurs prolongements s'offrent aux candidats solides : théorème de Baire et ses innombrables applications, espaces de fonctions holomorphes (théorème de Montel et ses applications, espaces de Hardy, etc.), espaces de fonctions régulières (fonctions lipschitziennes, C^k, classe de Schwartz), algèbres de Banach de fonctions (algèbre de convolution $L^1(\mathbf{R})$, algèbre du disque, algèbre de Wiener des séries de Fourier absolument convergentes, etc.), étude des parties compactes de $C(K)$ (K compact) voire de L^p.

203 : Utilisation de la notion de compacité.

Cette leçon ne porte pas sur la compacité en général mais sur son *utilisation*. On peut songer à plusieurs thèmes : théorèmes d'existence exploitant la compacité, utilisation de la compacité pour obtenir des uniformités.
Sur le premier sujet, on pourra s'intéresser à l'utilisation, dans les espaces compacts ou les espaces normés de dimension finie, des valeurs d'adhérence pour prouver des convergences ou des continuités, et bien sûr aux problèmes d'extrema. Un exemple est le théorème d'équivalence des normes sur un espace de dimension finie, qui repose sur un argument de compacité qu'il faut avoir bien compris.
Sur le second, on pourra explorer quelques unes des innombrables applications du théorème de Heine (intégrabilité au sens de Riemann des fonctions continues sur un segment, continuité des translations dans L^p, etc), mais aussi l'utilisation de sous-recouvrements finis (par exemple pour passer du local au global).
Les candidats solides pourront s'intéresser à la caractérisation des espaces normés de dimension finie par la compacité de la boule unité fermée (éventuellement assortie d'applications), aux équations différentielles non linéaires (phénomène de sortie de tout compact), à l'équicontinuité (théorème d'Ascoli), aux familles normales (théorème de Montel), aux opérateurs compacts.

204 : Connexité. Exemples et applications.

Dans cette leçon, il convient de mettre en évidence le fait que la connexité formalise l'idée d'espace « d'un seul tenant », que la connexité par arcs permet d'illustrer géométriquement. Du point de vue opérationnel, les deux idées maîtresses sont la préservation de la connexité par image continue, et

l'utilisation de la connexité pour passer du local au global.
La seconde sera abondamment illustrée dans le domaine du calcul différentiel, des équations différentielles non linéaires (passage d'une unicité locale à une unicité globale), des fonctions holomorphes (principe du prolongement analytique ou du maximum).
En cas de non-connexité, la notion pertinente est celle de composante connexe, dont une première application est la structure des ouverts de $\mathbf{R}$, et leur mesure. Les exemples issus de l'algèbre linéaire sont bien entendu les bienvenus, à condition de ne pas trop détourner la leçon...
Pour les candidats solides, de bons prolongements sont le théorème de Runge, l'ensemble triadique de Cantor comme prototype d'espace métrique compact, parfait et totalement discontinu, la notion de simple connexité.

205 : Espaces complets. Exemples et applications.

L'un des intérêts essentiels de la complétude est de fournir des théorèmes d'existence. Les illustrations ne manquent pas : existence de limites, utilisation de la convergence absolue ou normale, théorème du point fixe de Picard-Banach, prolongement des applications uniformément continues à valeurs dans un espace métrique complet, et leurs innombrables applications.
Le cas particulier des espaces de Hilbert est un riche terrain d'exploration : théorème de projection sur un convexe fermé et ses applications, analyse de Fourier sur le cercle ou sur la droite réelle.
Les espaces L^p peuvent être abordés dans le cadre de cette leçon, mais sous leur angle spécifique d'espaces de Banach.
Pour les candidats solides, le théorème de Baire fournit d'innombrables applications passionnantes. Ils pourront également songer à la théorie des algèbres de Banach, notamment l'algèbre de Wiener des séries de Fourier absolument convergentes, ou à l'espace des fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbf{C}$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

206 : Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse.

Cette leçon d'exemples sera pour le candidat l'occasion d'une réflexion sur de nombreuses parties du programme.
En topologie, il s'agit bien sûr des propriétés spécifiques aux espaces normés de dimension finie, notamment l'utilisation des valeurs d'adhérence, l'équivalence des normes ou encore l'identité entre parties compactes et parties fermées et bornées. D'autres champs d'application sont : la théorie de la mesure (mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^d$), le calcul différentiel (utilisation de matrices jacobiennes, espaces tangents, extrema liés, etc.), les équations différentielles linéaires, les séries de Fourier et plus généralement l'approximation dans un espace préhilbertien séparable par projection sur des sous-espaces de dimension finie.
Les candidats solides pourront aborder la question de l'unicité de la meilleure approximation uniforme d'une fonction continue sur un segment par des polynômes de degré au plus égal à d, ou les liens entre la régularité et la qualité de l'approximation par des polynômes (algébriques ou trigonométriques) voire des fonctions rationnelles. D'autres pistes possibles sont l'étude des propriétés spectrales des opérateurs compacts, ou le théorème de Grothendieck sur les sous-espaces fermés de L^p contenus dans L^∞.

207 : Prolongement de fonctions. Exemples et applications.

Leçon supprimée.

208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

Cette leçon est particulièrement vaste, et sera pour le candidat une occasion de faire des choix. Il est inutile de commencer systématiquement le plan de cette leçon par de longs rappels sur les normes : comme toutes les autres, cette leçon ne doit pas tomber dans le formalisme, mais bien proposer des résultats significatifs illustrés par des exemples bien choisis, en particulier de normes équivalentes ou non, ou de calculs de normes subordonnées. En ce qui concerne le contenu, le programme offre de nombreuses possibilités : cas de la dimension finie, intervention de la complétude (en particulier le cas hilbertien), étude de la compacité de la boule unité fermée, lien entre continuité d'une forme linéaire (ou plus généralement, d'une application linéaire de rang fini) et fermeture du noyau.
Pour les candidats solides, des prolongements possibles sont : les conséquences du théorème de Baire dans le cadre des espaces de Banach (tout particulièrement le théorème de Banach-Steinhaus et son utilisation pour construire des objets pathologiques), le théorème de Hahn-Banach et ses conséquences, la théorie de algèbres de Banach, la détermination de duals topologiques.

209 : Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples et applications.

Le programme offre aux candidats plusieurs pistes très riches pour nourrir cette leçon : l'approximation uniforme par des polynômes algébriques ou trigonométriques, la régularisation par convolution. Mais on pourra également penser à l'approximation des fonctions intégrables sur la droite réelle par des fonctions continues à support compact.
Les séries de Fourier s'intègrent parfaitement à cette leçon, mais le jury a constaté lors de la session 2022 que la théorie L^2 était très rarement abordée par les candidats. Dans la même thématique, on peut citer le théorème de Fejér (dans ses versions L^p ou $C(\mathbf{T})$) et ses applications.
Voici enfin quelques pistes à réserver aux candidats solides : le théorème de Runge, le théorème taubérien de Littlewood, l'unicité de la meilleure approximation uniforme d'une fonction continue sur un segment par des polynômes de degré au plus égal à d, les liens entre la régularité et la qualité de l'approximation par des polynômes (algébriques ou trigonométriques) voire des fonctions rationnelles, l'approximation uniforme par des fonctions lipschitziennes.

213 : Espaces de HILBERT. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

L'analyse de Fourier, sur le cercle où la droite réelle, est évidemment une illustration fondamentale des résultats de ce chapitre. Le jury a noté que rares étaient les candidats qui maîtrisaient correctement la théorie L^2 des séries de Fourier.
Le fait que les polynômes constituent une base hilbertienne de l'espace des fonctions de carré intégrable relativement à certains poids est présenté quasi systématiquement en développement. Peut-être faudrait-il songer à trouver d'autres sources d'inspiration, d'autant que la preuve n'est pas toujours parfaitement comprise, et que de nombreux candidats sont incapables d'en déduire une base hilbertienne de $L^2(\mathbf{R})$.
Les candidats solides pourront s'intéresser aux propriétés spectrales des opérateurs autoadjoints compacts d'un espace de Hilbert, à la minimisation de fonctionnelles convexes et coercives sur un espace de Hilbert, ou encore au théorème de Paley-Wiener qui caractérise les fonctions de $L^2(\mathbf{R})$ dont la transformée de Fourier est à support compact, ou encore au théorème d'échantillonnage de Shannon.

214 : Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

Les deux théorèmes fondamentaux auxquels cette leçon est consacrée offrent bien sûr une belle utilisation de la complétude, qu'on ne passera pas sous silence. Pour autant, pour traiter l'intégralité du sujet, il faut se garder d'un point de vue trop formel, et proposer des applications significatives aussi bien en analyse qu'en géométrie : étude locale de courbes, de surfaces ou d'intersection de surfaces, problèmes d'optimisation sous contraintes (si possible autres que la preuve de l'inégalité arithmético-géométrique), régularité des racines d'un polynôme en fonction des coefficients, etc.
Une bonne compréhension de la méthode des multiplicateurs de Lagrange requiert celle de la notion d'espace tangent, qui en donne une justification beaucoup plus claire que certains raisonnements purement matriciels.
Les candidats solides pourront s'intéresser à l'étude locale d'applications suffisamment régulières (submersions, immersions, théorème du rang constant, lemme de Morse), au lemme de Sard, ainsi qu'aux sous-variétés de $\mathbf{R}^n$.

215 : Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

L'idée de base de cette leçon est qu'une fonction suffisamment régulière se comporte localement comme une application linéaire. De nombreuses différentielles usuelles (notamment issues de l'algèbre linéaire) peuvent ainsi être obtenues en calculant directement un développement limité. Sur ce point, une aisance raisonnable est attendue des candidats.
Un cas particulier important est la caractérisation des fonctions holomorphes parmi les fonctions différentiables, et son interprétation géométrique.
Les candidats semblent en général peu familiers avec les propriétés élémentaires des fonctions harmoniques, qui fournissent pourtant un riche champ d'applications.
Les candidats solides pourront s'intéresser à la différentielle de l'exponentielle matricielle, ainsi qu'aux points où celle-ci est un difféomorphisme local.
Pour ce qui concerne les applications, de nombreux thèmes relatifs aux leçons 214 ou 219 sont ici appropriés.

219 : Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

Cette leçon offre aux candidats une multitude d'approches possibles : utilisation de la topologie, du calcul différentiel, de la convexité (fonctions convexes, projection sur un convexe fermé et leurs multiples applications), de l'holomorphie.
Les candidats pourront proposer des problèmes d'optimisation sous contraintes, si possible autres que la preuve de l'inégalité arithmético-géométrique. À ce sujet, une bonne compréhension de la méthode des multiplicateurs de Lagrange requiert celle de la notion d'espace tangent, qui en donne une justification beaucoup plus claire que certains raisonnements purement matriciels.
Les algorithmes de recherche d'extremums ont également leur place dans cette leçon (méthode de Newton, du gradient à pas optimal, problème des moindres carrés, etc).
Les candidats solides pourront s'intéresser aux diverses versions du principe du maximum (fonctions holomorphes ou harmoniques, équations aux dérivées partielles), au calcul des variations, ou réfléchir à l'unicité de la meilleure approximation dans divers espaces fonctionnels, à commencer par celle des fonctions continues sur un segment par des polynômes de degré au plus égal à d.

220 : Équations différentielles ordinaires. Exemples de résolution et d'études de solutions en dimension 1 et 2.

Cette leçon nécessite d'être soigneusement préparée. Bien entendu, la théorie de Cauchy-Lipschitz non linéaire y occupe une place centrale. Elle comporte plusieurs points subtils (passages du local au global, phénomènes d'explosion en temps fini) qui requièrent une attention particulière.
Cette leçon ne doit pas être abordée avec un point de vue purement formel, en se limitant aux énoncés et preuves des théorèmes fondamentaux. L'intitulé appelle clairement des études qualitatives d'équations différentielles non linéaires d'ordre 1 ou 2, sans forcément toujours se limiter au pendule ou au modèle de Lotka-Volterra.
Il est important d'avoir compris comment l'étude d'une équation d'ordre 2 se ramène à celle d'un système différentiel d'ordre 1.
Dans les exemples d'études proposés, on aura tout intérêt à mettre en évidence l'utilisation d'éléments géométriques : champs de vecteurs, points d'équilibre, barrières, isoclines, intégrales premières. Et, bien sûr, à faire des dessins ! Le cas autonome mérite une attention particulière, avec en particulier la recherche de trajectoires périodiques.

221 : Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

La théorie de Cauchy-Lipschitz linéaire constitue une porte d'entrée obligée pour cette leçon. Elle constitue un des premiers triomphes historiques de l'utilisation de la complétude (méthode des approximations successives), et un exemple fondamental d'intervention de la dimension finie en analyse. Sans que cet aspect devienne trop envahissant, les candidats pourront proposer quelques exemples de résolutions explicites : cas des coefficients constants (qui mobilise fortement la réduction des endomorphismes), utilisation de séries entières, variation des constantes, etc.
Même dans le cadre linéaire, les études qualitatives présentent un grand intérêt et fournissent de nombreuses possibilités aux candidats : étude du comportement asymptotique des solutions (pour lequel le lemme de Gronwall est un outil d'une grande efficacité), de la distribution des zéros, etc.
Les candidats solides pourront s'intéresser à la linéarisation d'équations non linéaires au voisinage d'un point d'équilibre, proposer des exemples de problèmes aux limites (théorie de Sturm-Liouville) ou d'études d'équations aux dérivées partielles linéaires.

222 : Exemples d'étude d'équations différentielles linéaires

Nous proposons de supprimer cette leçon, redondante avec 221.

223 : Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications

Cette leçon est limitée aux suites réelles ou complexes.
L'utilisation des valeurs d'adhérence pour montrer des convergences ou des continuités, ainsi que celle des limites inférieures et supérieures d'une suite réelle (qui permettent des rédactions expurgées d'epsilons superflus) sont des thèmes centraux.
Sans se limiter aux cas convergents, les candidats pourront également présenter des exemples d'études asymptotiques de suites définies par des sommes, des relations de récurrence, voire implicitement.
D'autres pistes sont les différentes méthodes d'approximation des réels par des irrationnels ou la résolution numérique d'équations.

Les candidats solides pourront s'intéresser par exemple à l'équirépartition, à l'accélération de la convergence, aux procédés de sommation des séries divergentes et aux théorèmes taubériens qui en découlent.

224 : Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

Cette leçon est exclusivement consacrée à des exemples : on n'attend aucun exposé systématique sur les notions de développement asymptotique ou d'échelle de comparaison. Presque toutes les parties du programme peuvent être mises à contribution : suites définies par une relation de récurrence ou implicitement, estimation asymptotique de sommes partielles ou de restes, fonctions définies par une série ou une intégrale (comportement de la fonction ζ au voisinage de 1, méthode de Laplace, etc), mais aussi solutions d'équations différentielles dont on pourra étudier le comportement à l'infini ou la distribution des zéros.
Il ne s'agit pas de présenter un grand nombre d'exemples triviaux, mais quelques exemples significatifs bien choisis et diversifiés, pour lesquels on analysera avec soin les idées essentielles des méthodes utilisées.

226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

L'intitulé de la leçon permet de se placer dans des contextes variés : $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^n$, voire certains espaces de Banach fonctionnels.
En ce qui concerne le cadre réel, on pourra présenter des exemples d'études asymptotiques (si possible autres que $u_{n+1} = \sin u_n$), étudier l'itération d'une fonction suffisamment régulière au voisinage d'un point fixe, ou encore présenter des exemples de méthodes de résolution approchée d'équations. En ce qui concerne l'étude asymptotique des suites récurrentes, le jury souligne le fait que la mise en œuvre d'une analogie discret-continu permet souvent de faire surgir naturellement la suite auxiliaire adaptée, plutôt que de la parachuter.
En se plaçant dans $\mathbf{R}^n$, on peut aborder par exemple l'étude des suites vérifiant une relation de récurrence d'ordre $\geqslant 2$, la convergence en loi de chaînes de Markov à espace d'états fini, ou encore l'extension à ce cadre de la méthode de Newton ou plus généralement les méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires.
Dans le cadre banachique enfin, les applications de la méthodes des approximations successives ne manquent pas, qu'il s'agisse de la construction de solutions d'équations différentielles, intégrales, ou fonctionnelles.

228 : Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

Au delà des théorèmes de base, le programme offre de nombreuses pistes aux candidats pour élaborer leur plan : utilisations de la continuité uniforme, fonctions convexes et leur régularité, approximation par des fonctions régulières, utilisations des formules de Taylor, liens entre caractère C^∞ et analycité, etc.
Des exemples explicites de fonctions continues et nulle part dérivables, de fonctions continues et croissantes à dérivée nulle presque partout, de fonctions C^∞ à dérivées en un point prescrites, etc. sont les bienvenus dans cette leçon.
Les candidats solides pourront s'intéresser à la dérivabilité des fonctions monotones ou lipschitziennes

ou à celle de l'intégrale indéfinie d'une fonction intégrable, proposer diverses applications du théorème de Baire (continuité d'une limite simple de fonctions continues, points de continuité d'une dérivée, généricité des fonctions nulle part dérivables parmi les fonctions continues ou des fonctions nulle part analytiques parmi les fonctions C^∞, etc.)

229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

L'existence de limite à droite et à gauche pour les fonctions monotones ainsi que la régularité des fonctions convexes doivent bien sûr être abordées. La convexité est évidemment également une source inépuisable d'inégalités, dans divers domaines y compris les probabilités.
Si la monotonie concerne les fonctions réelles d'une seule variable réelle, la convexité concerne également les fonctions définies sur une partie convexe de $\mathbf{R}^n$. La recherche de leurs extrema constitue un riche thème d'étude.
Une autre piste est l'étude et l'utilisation des fonctions de répartition en probabilités.
Les candidats solides pourront s'intéresser à la dérivabilité des fonctions monotones, ou à la continuité, voire la différentiabilité, des fonctions convexes définies sur un ouvert convexe de $\mathbf{R}^n$.

230 : Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

Dans cette leçon, il faut se garder de proposer un interminable catalogue de propriétés et de « règles » illustrées de quelques rares exemples triviaux (Riemann, Bertrand). Mieux vaut se limiter à quelques résultats fondamentaux bien choisis et mis en perspective, et accompagnés de quelques exemples significatifs.
Plutôt que de se limiter à la seule étude de la convergence de séries, les candidats pourront par exemple s'intéresser à l'estimation de sommes partielles (pour laquelle la comparaison entre somme et intégrale, en présence ou non de monotonie, est un outil particulièrement efficace), à l'étude asymptotique de suites récurrentes (si possible autres que $u_{n+1} = \sin u_n$), ou encore à l'itération d'une fonction régulière au voisinage d'un point fixe.
L'utilisation de séries entières ou de séries de Fourier pour calculer la somme de certaines séries, le calcul de l'espérance d'une variable aléatoire discrète fournissent également de riches thèmes d'étude.
Les candidats solides pourront s'intéresser aux procédés de sommation des séries divergentes (qui interviennent naturellement dans la théorie des séries de Fourier, entre autres) ainsi qu'aux théorèmes taubériens qui s'y rapportent.

234 : Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.

Cette leçon est orientée vers l'étude et l'utilisation de l'espace L^1 (voire L^p) associé à la mesure de Lebesgue (supposée construite), voire d'autres mesures.
Les grands théorèmes de la théorie (permutation limite-intégrale, Fubini, etc.) sont évidemment incontournables, mais il faut éviter de s'en tenir à une liste désincarnée d'énoncés en proposant des exemples d'application significatifs.
Le thème de l'approximation (approximation des fonctions intégrables sur $\mathbf{R}$ par des fonctions continues à support compact, utilisation de la convolution) fournit de nombreuses applications, ainsi que celui de l'analyse de Fourier sur le cercle ou la droite réelle.
Les candidats solides pourront s'intéresser à la transformée de Fourier dans $L^2(\mathbf{R})$, la dualité dans L^p $(1 \leqslant p < \infty)$, les liens entre intégration et dérivation, les procédés de sommation presque partout des

séries de Fourier, l'algèbre de convolution $L^1(\mathbf{R})$, l'étude des parties compactes de L^p.

235 : Problèmes d'interversion en analyse.

L'intitulé de cette leçon a été volontairement élargi afin de permettre explicitement aux candidats d'aborder des problèmes plus diversifiés de permutations de symboles, qu'il s'agisse de limites, d'intégrales, de dérivées, d'espérances. Le choix est large !
Les candidats pourront également inclure dans leur leçon des exemples de permutations de quantificateurs, obtenus par des arguments de compacité ou (pour les candidats aguerris) utilisant le théorème de Baire.
Dans tous les cas, on évitera de présenter un catalogue désincarné d'énoncés, en privilégiant les exemples et applications significatifs.

236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

Les exemples proposés par les candidats pourront cette leçon devront mettre en œuvre des techniques diversifiées : méthodes élémentaires, intégrales dépendant d'un paramêtre, utilisation de la formule des résidus, de sommes de Riemann, voire de la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbf{R})$ ou $L^2(\mathbf{R})$.
Il est attendu des candidats qu'ils proposent quelques exemples significatifs de calculs d'intégrales multiples (utilisation du théorème de Fubini, de changements de variables, de la formule de Green-Riemann, etc.).
Pour éviter de donner à la leçon un tour trop « académique », les candidats pourront également proposer des résultats dont la preuve *utilise* un calcul d'intégrale, comme par exemple (purement indicatif) celle du théorème d'inversion de Fourier utilisant la transformée de Fourier d'une gaussienne.
Il est enfin loisible de proposer quelques méthodes de calcul approché d'intégrales. La théorie des probabilités fournit également un champ d'applications fertile.

239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Le programme fournit aux candidats de multiples pistes pour élaborer leur plan : théorèmes usuels bien sûr (incluant celui d'holomorphie sous le signe somme) et qui devront absolument être illustrés par des exemples significatifs, transformée de Fourier, convolution.
Les candidats pourront également s'intéresser à la transformée de Laplace ou à certaines fonctions « spéciales » définies par une intégrale, ou proposer des études asymptotiques de fonctions définies par des intégrales.
Enfin, la notion de fonction caractéristique en probabilités a toute sa place dans cette leçon et fournit un riche champ d'applications.
Les candidats aguerris pourront s'intéresser aux théorèmes taubériens relatifs à la transformée de Fourier ou de Laplace.

241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

L'étude des différentes modes de convergence et leur utilisation ne doit pas donner lieu à un catalogue formel de théorèmes, mais être illustrée par des exemples significatifs et diversifiés.

Les fonctions « spéciales » définies par une série sont légion et fournissent aux candidats de multiples possibilités, sans éluder le champ complexe qui leur confère souvent leur pleine signification. Des exemples de sommes de séries continues nulle part dérivables, ou croissantes non constantes et à dérivée nulle presque partout pourront également être proposés.
Les candidats peuvent bien sûr aborder les séries entières (qui ont des applications combinatoires pouvant donner lieu à des études asymptotiques intéressantes), les fonctions génératrices des variables aléatoires à valeurs entières ou les séries de Fourier. Ils préféreront dans ce cas en présenter quelques applications significatives plutôt qu'un cours formel.
Les candidats solides pourront aborder l'étude des séries de variables aléatoires indépendantes, la formule sommatoire de Poisson et ses applications aux fonctions spéciales (fonction θ de Jacobi, etc.), la théorie des séries de Dirichlet et ses utilisations en théorie des nombres.

243 : Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

Dans cette leçon, il faut se garder de présenter un interminable catalogue de définitions, règles et propriétés accompagnées de quelques rares exemples triviaux.
Le problème du domaine de convergence devra bien sûr être abordé, ainsi que celui des différents modes de convergence.
Les liens avec l'holomorphie doivent être connus et compris. En particulier, peu de candidats ont les idées claires sur les liens entre analycité et holomorphie. Or, l'existence de nombreux développements en série entière peut être établie de manière immédiate par cet argument, avec en prime une information sur le rayon de convergence, voire sur l'ordre de grandeur des coefficients.
Le théorème radial (ou non tangentiel) d'Abel est souvent proposé comme développement, mais de nombreux candidats pensent qu'il s'agit d'un théorème de prolongement, alors qu'il s'agit en réalité d'un résultat de continuité. En proposer comme application le calcul de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ n'est pas absolument pertinent, ce résultat pouvant être obtenu par un argument beaucoup plus direct. En réalité, ce théorème débouche naturellement sur la question plus générale des procédés de sommation des séries divergentes.
Les séries entières ont également des applications combinatoires pouvant donner lieu à des études asymptotiques très intéressantes. Les fonctions génératrices des variables aléatoires à valeurs entières ont également toute leur place dans cette leçon.
Les candidats solides pourront s'intéresser aux théorèmes taubériens relatifs aux séries entières, au problème du prolongement analytique de la somme d'une série entière, aux séries entières aléatoires ou encore aux fonctions C^∞ nulle part analytiques.

245 : Fonctions d'une variable complexe. Exemples et applications.

L'intitulé de cette leçon permet de l'aborder sous l'angle moins intimidant des séries entières, pour lesquelles on renvoie à la leçon 243.
Au niveau de l'agrégation toutefois, on est en droit d'attendre des candidats une compréhension des résultats les plus fondamentaux de la théorie des fonctions holomorphes, ainsi qu'une autonomie raisonnable dans leur mise en œuvre. Ce thème devra donc être abordé, et il peut l'être à différents niveaux, les candidats les plus aguerris pouvant aborder par exemple les théorèmes de Rouché ou de Hurwitz, le problème de la représentation conforme, l'équation fonctionnelle de la fonction ζ et ses conséquences, le théorème de Paley-Wiener, etc.

246 : Séries de Fourier. Exemples et applications.

Dans cette leçon, la théorie L^2 est incontournable, et son interpétation en terme d'isométrie doit être mise en évidence. Les candidats doivent pouvoir écrire l'identité de Parseval pour exprimer le produit scalaire de deux fonctions de $L^2(\mathbf{T})$.
En ce qui concerne la convergence simple, ou uniforme ou en norme L^p au sens de Cesàro, les propriétés cruciales des noyaux utilisés devront être clairement explicitées.
Un autre thème important est le lien entre régularité de la fonction et vitesse de convergence vers 0 de ses coefficients de Fourier.
Il est important d'illustrer cette leçon de quelques unes des innombrables applications des séries de Fourier : calculs de sommes de séries, équations aux dérivées partielles (équation de la chaleur, problème de Dirichlet sur le disque unité, etc.), inégalité de Bernstein, formule sommatoire de Poisson et ses applications, inégalité isopérimétrique, etc.
Les candidats solides pourront s'intéresser à la divergence des séries de Fourier dans divers contextes, soit en exhibant des contre-exemples, soit en utilisant la théorie de Baire. Mais aussi aux procédés de sommation presque partout des séries de Fourier, aux séries de Fourier lacunaires, à l'algèbre de Wiener des séries de Fourier absolument convergentes, la convergence de la série de Fourier d'une fonction α-höldérienne si $\alpha > \frac{1}{2}$, etc.

250 : Transformation de Fourier. Applications.

Cette leçon est consacrée à l'analyse de Fourier sur la droite réelle. Au niveau de l'agrégation, elle peut être abordée dans trois cadres : L^1, classe de Schwartz des fonction C^∞ à décroissance rapide, ou L^2. Les deux derniers points de vue sont les plus satisfaisants du point de vue de la symétrie obtenue, le dernier étant le plus délicat. Cette leçon exige donc une préparation soigneuse.
Les candidats ne manqueront pas d'illustrer leur leçon par quelques applications significatives : formule sommatoire de Poisson et ses applications, résolution d'équations aux dérivées partielles, etc. Bien entendu, les fonctions caractéristiques et leurs applications en probabilités ont toute leur place dans cette leçon.
Le fait que les polynômes constituent une base hilbertienne de l'espace des fonctions de carré intégrable relativement à certains poids est présenté quasi systématiquement en développement. Peut-être faudrait-il songer à trouver d'autres sources d'inspiration, d'autant que la preuve n'est pas toujours parfaitement comprise, et que de nombreux candidats sont incapables d'en déduire une base hilbertienne de $L^2(\mathbf{R})$.
De nombreux candidats proposent comme développement le théorème d'échantillonage de Shannon, ce qui est pertinent, à condition d'avoir bien compris qu'il traduit une isométrie entre deux espaces de Hilbert.
Les candidats solides pourront s'intéresser aux vecteurs propres de la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbf{R})$, à la non-dérivabilité de la fonction de Weierstrass dans le cas le plus général, à l'algèbre de convolution $L^1(\mathbf{R})$, au théorème de Paley-Wiener qui caractérise les fonctions de $L^2(\mathbf{R})$ dont la transformée de Fourier est à support compact, aux principes d'incertitude, etc.

253 : Utilisation de la notion de convexité en analyse.

La convexité intervient dans plusieurs parties du programme, offrant ainsi aux candidats plusieurs pistes très riches pour élaborer leur leçon : convexité dans les espaces vectoriels réels, fonctions convexes (d'une ou plusieurs variables réelles), caractérisation parmi les fonctions C^1 ou C^2 sur un ouvert convexe de $\mathbf{R}^n$, projection sur un convexe fermé d'un espace de Hilbert, méthodes d'optimisation en dimension

finie. Les applications de ces thèmes sont innombrables : inégalités classiques, optimisation, critère de densité d'un sous-espace vectoriel d'un espace de Hilbert, etc.
Les candidats solides pourront s'intéresser à la continuité, voire à la différentiabilité d'une fonction convexe définie sur un ouvert convexe de $\mathbf{R}^n$, aux points extrémaux d'une partie convexe d'un espace vectoriel réel de dimension finie, à la minimisation de fonctionnelles convexes et coercives sur un espace de Hilbert, aux applications du théorème de Hahn-Banach, à la notion d'uniforme convexité et son application à l'existence d'un vecteur normant pour une forme linéaire continue.

261 : Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.

Cette leçon concerne bien entendu les diverses lois du programme, leurs interactions et leurs propriétés de stabilité, et appelle donc des illustrations concrètes. Le théorème de transfert, qui calcule $\mathbf{E}(f(X))$ à l'aide de la loi de X, les vecteurs aléatoires à coordonnées indépendantes, ainsi que la caractérisation de la loi par la fonction génératrice ou caractéristique, sont au cœur de cette leçon. Les candidats pourront également aborder la convergence en loi en l'illustrant d'exemples variés.
Les candidats aguerris pourront aborder le problème de la caractérisation de la loi par les moments, les vecteurs gaussiens, le théorème central limite dans $\mathbf{R}^d$, les chaînes de Markov, les processus de Poisson.

262 : Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.

Les liens entre les différents modes de convergence d'une suite de variables aléatoires devront être illustrés par des exemples et contre-exemples variés. Les théorèmes de convergence du programme (lois des grands nombres, théorème central limite) sont bien sûr au cœur de cette leçon, et la preuve de la loi forte des grands nombres, éventuellement sous des hypothèses de confort, pourra être présentée.

Les candidats aguerris pourront aborder la convergence des séries de variables aléatoires indépendantes, les marches aléatoires, la loi du logarithme itéré, le théorème central limite dans $\mathbf{R}^d$, les chaînes de Markov, les lois stables ou infiniment divisibles.

264 : Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Les techniques spécifiques aux variables discrètes, notamment à valeurs entières (caractérisation de la convergence en loi, notion de fonction génératrice) devront être mises en évidence et illustrées par des exemples variés. La marche aléatoire symétrique sur $\mathbf{Z}$ ou le processus de Galton-Watson fournissent des exemples à la fois élémentaires et riches.
Les candidats aguerris pourront aborder la loi du logarithme itéré (par exemple dans le cas de la marche aléatoire symétrique), les chaînes de Markov, les processus de Poisson.

265 : Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.

Si les fonctions usuelles élémentaires (logarithme, exponentielles, fonctions trigonométriques, etc) font partie de la leçon et doivent être maîtrisées par les candidats, le jury attend un panel d'exemples plus ambitieux. Il ne s'agit bien sûr pas d'être exhaustif, et l'on se gardera de présenter une leçon catalogue. Il s'agit plutôt de proposer un choix pertinent de fonctions spéciales rencontrées dans divers domaines des mathématiques (fonction Γ en analyse complexe, densités de lois variées en probabilités, fonctions ζ, η ou séries L en théorie des nombres, etc.) avec des applications significatives. On peut très bien organiser l'exposé en fonction des techniques mathématiques utilisées, ou selon les applications envisagées.

Pour les candidats solides, la résolution d'équations aux dérivées partielles, la théorie analytique des nombres, les propriétés de stabilité de certaines lois en probabilités, les applications diverses des polynômes orthogonaux, etc., sont des sources d'inspiration possibles pour cette leçon.

266 : Illustration de la notion d'indépendance en probabilités.

L'indépendance est centrale en probabilités et démarque cette théorie de celle de l'intégration. À partir de la notion élémentaire de probabilité conditionnelle, on pourra introduire l'indépendance de deux événements, l'indépendance mutuelle d'une suite d'événements, voire celle d'une suite de tribus, puis l'indépendance de familles de variables aléatoires. Le programme fournit plusieurs utilisations élémentaires de l'indépendance : lien avec l'espérance, la variance et la covariance, loi faible des grands nombres, lemmes de Borel-Cantelli, stabilité de certaines lois (normale, Cauchy). Pour aller plus loin, on pourra aborder la loi forte des grands nombres ou le théorème central limite, ou l'étude de la marche aléatoire symétrique sur $\mathbf{Z}$.
Les candidats aguerris pourront aborder la loi du 0-1 de Kolmogorov, la convergence des séries de variables aléatoires indépendantes, la loi du logarithme itéré, les vecteurs gaussiens.

267 : Exemples d'utilisations de courbes en dimension 2 ou supérieure.

Cette leçon de synthèse a pour objectif de mettre en évidence la variété et la richesse des interventions et des utilisations des courbes en mathématiques.
Le programme fournit au candidat de multiples angles d'attaque pour aborder cette leçon : géométrie (arcs paramétrés, études métriques, etc.), topologie (connexité par arcs), calcul différentiel (lien entre les différentes définitions d'une courbe, courbes définies comme intersection de deux surfaces, espace tangent), équations différentielles (tracé de trajectoires d'un système différentiel autonome plan), analyse complexe (intégrale curviligne, indice, théorème des résidus, etc.)
Les candidats solides pourront s'intéresser à l'homotopie, à la simple connexité, au théorème de Jordan, aux problèmes isopérimétriques, à la méthode du col en analyse asymptotique, à des exemples de courbes de Peano ou fractales.

Chapitre 6

Épreuves orales de modélisation

6.1 Présentation des épreuves de Modélisation

Lors de l'inscription au concours, trois options sont proposées :

A. Probabilités et Statistiques,
B. Calcul scientifique,
C. Algèbre et Calcul formel.

L'épreuve de modélisation est composée d'une première période de préparation de quatre heures et d'une seconde période d'interrogation d'une heure environ, elle-même subdivisée en un exposé de 35 minutes et d'un échange avec le jury de 25 minutes. Ces modalités s'appliqueront encore pour la session 2023. Les candidats commencent par tirer au sort un couple de textes. Le candidat a accès aux deux textes durant sa préparation et il est libre de choisir celui qu'il souhaite étudier et présenter durant la période d'interrogation.

Cette épreuve permet aux candidats de mettre en avant diverses qualités : les connaissances mathématiques, leur mise en perspective, l'aptitude à les appliquer à des problèmes concrets de modélisation, la réflexion, la pertinence des illustrations informatiques, les qualités pédagogiques de mise en forme d'un exposé construit et cohérent, la capacité à faire preuve d'initiative pour s'exprimer et manifester des qualités pédagogiques et de synthèse. L'aptitude des candidats à répondre aux questions fait partie intégrante de l'évaluation de cette épreuve. Comme pour l'ensemble des oraux, les exposés dynamiques et vivants sont particulièrement appréciés.

6.1.1 Textes

L'épreuve de modélisation repose sur l'exploitation d'un texte d'environ 5 à 6 pages que les candidats choisissent parmi les deux qui leur sont proposés lors du tirage et qu'ils pourront consulter en ligne dans la salle de préparation.

Le texte fourni est la base pour construire et exposer un traitement mathématique d'un problème « concret » en s'appuyant sur les éléments, généralement partiels, disséminés dans le texte. Les candidats doivent utiliser leurs connaissances mathématiques pour justifier les points de leur choix parmi ceux évoqués dans le texte, proposer un retour sur la problématique étudiée ainsi qu'une conclusion. Les textes peuvent présenter des arguments rapides, voire heuristiques, qui sont dans ce cas signalés comme tels, mais ils ne contiennent pas d'assertion délibérément trompeuse et se concluent par une liste de suggestions. Les principaux attendus de l'épreuve sont rappelés dans un bandeau surmontant chaque texte.

Même si la plupart des textes s'appuient sur des problématiques issues de sciences autres que les mathématiques, aucune connaissance dans ces domaines n'est exigée par le jury. Discuter la modélisation proposée par un texte consiste donc avant tout à dégager les comportements qualitatifs du modèle, la manière dont il dépend d'éventuels paramètres et s'il semble apte à rendre compte des phénomènes qu'il est censé représenter. Toutefois, le jury s'attend à ce que les candidats ne se contentent pas d'un exposé intégralement qualitatif et démontrent certains résultats évoqués dans le texte ; il apprécie particulièrement, sans toutefois l'exiger, qu'un candidat montre sa compréhension du modèle en exhibant par exemple les conséquences d'une variation de paramètres ou de données, notamment dans l'illustration informatique. *A contrario*, des interprétations qualitatives du comportement des modèles sont trop souvent absentes des exposés. Pourtant, montrer que l'on comprend un modèle ne se réduit pas à prouver un théorème, et nécessite d'exposer des expérimentations informatiques à fin d'illustration.

Chaque année, des textes sont rendus publics et sont disponibles sur le site de l'agrégation de mathématiques https://agreg.org. Ces textes sont représentatifs de l'épreuve et permettent aux candidats de se familiariser avec le format des textes, de se faire une idée des attentes du jury et de réfléchir à des illustrations numériques pertinentes dans le cadre du texte.

6.1.2 Période de préparation

Durant les quatre heures de préparation, les candidats ont accès à une bibliothèque numérique et disposent d'un ordinateur dont la configuration est décrite sur le site de l'agrégation de mathématiques, à l'adresse https://agreg.org. Les candidats retrouveront le même environnement sur l'ordinateur de la salle d'interrogation. Il n'est évidemment pas réaliste de découvrir les logiciels à disposition des candidats le jour de l'épreuve : la configuration informatique utilisée pour le concours et sa documentation sont accessibles et téléchargeables depuis le site https://agreg.org et permettent de se familiariser avec l'environnement offert lors de l'épreuve. Durant la période de préparation, les candidats ont à disposition une bibliothèque numérique dont la liste est disponible en fin de ce rapport ; ils peuvent également utiliser leurs propres ouvrages, dans les mêmes conditions que pour les épreuves de leçons.

Les candidats sont priés de ne pas écrire sur le texte imprimé qui leur est distribué car il est destiné à être utilisé à nouveau pendant la session.

Il est recommandé aux candidats de consacrer une partie de leur temps de préparation à s'interroger sur le discours qu'ils tiendront, sur l'exploitation du tableau, sur l'utilisation de l'outil informatique et sur le temps qu'ils vont consacrer à chacune des parties de leur plan, ce qui leur permettra de mettre au mieux en valeur leurs connaissances et leur compréhension du texte ou d'une partie de celui-ci. Proposer un exposé structuré et cohérent ne peut s'improviser au moment de l'oral et doit faire l'objet d'une réflexion préalable durant la préparation. Il est également conseillé aux candidats de consacrer quelques minutes à la fin de leur préparation à une prise de recul sur leur plan. Ce dernier est un élément important pour le jury, qui pourra, en s'y référant, aider les candidats dans leur gestion du temps de l'exposé, notamment en leur rappelant, si ce n'est fait avant les dernières minutes, que l'illustration informatique doit être présentée au cours de la présentation et non pendant le temps d'échange.

6.1.3 Période d'interrogation

Au début de l'interrogation, le jury rappelle les modalités de l'épreuve, puis invite les candidats à vérifier que les fichiers qu'ils ont créés lors de la préparation ont bien été transférés sur la machine servant pour l'épreuve (dont l'environnement est identique à celui de la salle de préparation). La période d'interrogation dure une heure et est scindée en deux temps : un exposé de 35 minutes maximum suivi d'échanges avec le jury jusqu'à la fin de l'heure impartie.

Exposé. Les candidats ont la recommandation de commencer par donner la structure de leur présentation sous forme d'un plan et le déroulement de l'exposé doit être en cohérence avec cette structure. Grâce à ce plan, le jury pourra ainsi avoir une vision globale de l'exposé et aider, si besoin, les candidats à gérer leur temps. Comme les candidats se le voient rappeler en début d'épreuve, l'exposé doit être accessible à un public qui découvre les problématiques du texte et doit permettre d'en faire comprendre les enjeux à un public qui ne le connaîtrait pas. Ainsi, le jury n'est pas censé connaître le texte présenté par le candidat, mais chaque membre dispose néanmoins d'un exemplaire papier, afin que les candidats puissent y faire référence pour éviter de recopier les notations, les énoncés complets ou certaines formules. Le jury, tout en étant conscient des difficultés du concours, attend un minimum d'aisance au tableau, la manifestation d'une certaine volonté de capter l'attention de l'auditoire et un discours clair et précis.

Durant l'exposé, les candidats disposent de leurs notes, d'un tableau et d'un ordinateur. Ils peuvent alterner, quand bon leur semble, entre un exposé oral, quelques éléments rédigés au tableau de façon propre et lisible et la présentation de ce qui a été préparé à l'aide de l'outil informatique. Les candidats doivent gérer correctement le tableau et demander, si besoin, au jury les parties qu'ils peuvent effacer, ce dernier pouvant souhaiter conserver certains passages et y revenir lors des échanges avec les candidats. Même si les programmes informatiques ne fonctionnent pas comme ils l'auraient souhaité ou si les simulations numériques n'ont pas abouti, les candidats sont invités à expliquer ce qu'ils voulaient mettre en œuvre, illustrer ou programmer. Si, lors de la phase d'exposé, les candidats n'ont pas du tout utilisé l'ordinateur dix minutes avant la fin du temps qui leur est imparti, le jury les en alertera.

Comme dans tout oral, la construction de l'exposé doit être une préoccupation importante des candidats : l'exposé doit s'appuyer sur un dosage cohérent et harmonieux entre introduction motivée de modèles, preuves mathématiques, illustrations informatiques, critiques éventuelles du texte, réponses aux questions, mise en lumière des connaissances. Une réflexion s'impose afin de produire un tout cohérent et intelligible par un public qui, dans l'esprit de l'épreuve, découvre le texte à travers l'exposé des candidats.

Les candidats sont libres de la gestion de leur exposé : il n'y a pas de « format type » pour cette épreuve. Sur un même texte, des formats très différents de prestation ont été valorisés : certains s'éloignant du découpage opéré par le texte et arrangeant les éléments autrement ; d'autres présentant un survol du problème, de la méthode et des résultats obtenus avant de détailler des aspects plus mathématiques ; d'autres au contraire suivant de près la progression du texte mais en y apportant les éclairages et les illustrations nécessaires. De bons exposés ont parfois choisi d'aller loin dans le texte pour en décrire la dynamique globale et l'aboutissement (quitte à ne pas traiter toutes les démonstrations) ; d'autres exposés, tout aussi bons, ont traité un passage plus limité du texte mais de manière détaillée et en fournissant tous les arguments pertinents.

Le jury est sensible à l'honnêteté du discours. Tenter de faire semblant de connaître une notion ou d'avoir compris un passage du texte est pénalisé. Un regard critique (« il faudrait prouver que... mais je n'ai pas réussi à le faire », « les hypothèses du théorème de XXX que je connais pour aborder des problèmes similaires ne sont pas satisfaites dans le cas présent »...) est une attitude bien plus payante.

Échanges avec le jury. Durant 25 minutes, le jury revient sur certains propos des candidats qui méritent précision. Il peut demander un énoncé précis d'un théorème utilisé pour démontrer une assertion ou des éléments de démonstration d'un résultat énoncé par les candidats. Les échanges peuvent également porter sur la modélisation ou les illustrations informatiques.

6.2 Recommandations du jury communes aux trois options

6.2.1 Organisation de l'exposé

L'exercice de l'exposé en temps limité nécessite un certain entraînement. Il est malheureusement fréquent de voir des exposés un peu trop lents pendant les 20 à 25 premières minutes qui accélèrent brutalement dans les 10 dernières minutes et que les candidats peinent à conclure dans le temps imparti.

La rigueur et la clarté de l'organisation, la gestion du temps, la pertinence des choix opérés parmi les différentes questions soulevées par le texte sont des éléments de l'évaluation. Les qualités de synthèse sont aussi appelées à s'exprimer : il vaut mieux indiquer les étapes cruciales d'un raisonnement que de se lancer dans un long calcul fastidieux qu'on aura du mal à mener à bien et à mettre en valeur.

Par ailleurs, si le jury sanctionne un exposé significativement trop bref, la démarche consistant à « jouer la montre » est encore plus sévèrement pénalisée. Utiliser une portion excessive du temps de parole pour recycler un chapitre de cours ou un développement d'une leçon d'Analyse et Probabilités ou d'Algèbre et Géométrie, en s'éloignant des enjeux du texte, est considéré comme un hors sujet et est sévèrement sanctionné. Enfin, l'aspect pédagogique de l'exposé, même si le texte n'est restitué que partiellement mènera à une note bien plus élevée qu'un catalogue de type paraphrase.

Une brève introduction à la problématique avant de s'engager dans une longue digression sans lien avec le problème de départ ne peut conduire à une prestation jugée comme satisfaisante et sera sanctionnée par le jury. De même, un exposé se réduisant à la présentation de la problématique du texte et à des illustrations informatiques, ou à l'énumération linéaire des suggestions proposées par le texte, sans contribution des candidats, ne peut conduire au mieux qu'à un résultat médiocre. Plutôt qu'un survol superficiel de l'intégralité du texte sans apport mathématique ou critique scientifique, les candidats doivent préférer traiter le texte de façon partielle mais substantielle et en profondeur, ce qui peut aboutir à une bonne note.

6.2.2 Contenu de l'exposé

Le jury rappelle que, même s'il s'agit d'une épreuve plus appliquée ou moins académique que les deux autres épreuves orales, cela ne dispense en aucun cas les candidats de faire preuve de la rigueur mathématique requise : quand on utilise un théorème, il faut impérativement être capable d'en restituer un jeu d'hypothèses. Par jeu d'hypothèses correct, on entend que le théorème soit vrai et qu'il s'applique effectivement au contexte considéré. Le jury n'attend pas nécessairement un énoncé avec les hypothèses les plus générales possibles.

Le jury regrette de ne pas voir davantage de dessins (soignés) ou schémas explicatifs qui peuvent rendre l'argumentation plus claire et convaincante. La capacité à revenir sur le problème de départ et à conclure quant à l'efficacité de l'approche mathématique proposée pour y répondre est une qualité très appréciée.

Pour enrichir leur propos, les candidats sont invités à mobiliser leurs connaissances sur des aspects variés du programme, en étayant les arguments seulement esquissés dans le texte par des énoncés précis. Il est totalement illusoire de chercher à impressionner le jury par une logorrhée de mots savants : les textes proposés peuvent être discutés en exploitant un bagage technique qui n'utilise pas les éléments les plus sophistiqués du programme. En particulier, le jury ne manque pas de s'attarder sur toute notion amenée par les candidats durant leur présentation et il est toujours dommageable de s'aventurer sur des terrains méconnus. Bien plus qu'une démonstration de virtuosité technique, le jury attend que les candidats montrent leur maîtrise d'énoncés relativement simples « en situation » : c'est là que réside une des difficultés principales de l'épreuve. Nombre de candidats peinent à formaliser précisément des notions de base du programme ou à mettre en œuvre certaines de leurs connaissances.

6.2.3 Illustration informatique

Le jury rappelle son fort attachement à cet aspect de l'épreuve, dont les ambitions sont clairement délimitées. Il ne s'agit en aucun cas, et pour aucune des trois options, d'un exercice de programmation. L'objectif est d'être capable d'utiliser l'outil informatique pour illustrer, de façon pertinente, le contenu du texte.

La réalisation de cet objectif constitue une part incompressible de la note finale attribuée à l'épreuve. Une très bonne évaluation peut résulter d'une exploitation judicieuse de programmes simples, reposant largement sur les routines standards des logiciels fournis. La forme et la nature des illustrations proposées n'obéissent à aucun format préétabli. En revanche, elles doivent faire la preuve d'une véritable réflexion scientifique et être agrémentées de commentaires, sur les résultats et les méthodes. En particulier, le choix des jeux de paramètres d'entrée pour leurs codes doit être pertinent. Les illustrations informatiques devraient plus souvent permettre de faire un retour sur la problématique du texte et il convient de commenter les résultats obtenus dans le cadre du modèle proposé par le texte. Des illustrations peuvent mettre en valeur les limites du modèle étudié et le jury apprécie particulièrement que les candidats aient un regard critique sur le texte et ne prennent pas celui-ci pour vérité absolue.

Si un bel effort est produit par la majorité des candidats, un nombre très limité d'entre eux rechignent encore à toucher à l'outil informatique. Cette stratégie, dont on pourrait naïvement penser qu'elle permet de consacrer plus de temps à l'analyse du texte et à la préparation de l'exposé oral, est fortement sanctionnée.

Il est important de se rappeler qu'il s'agit d'une illustration. Les candidats peuvent choisir de présenter leur code, s'ils le souhaitent, mais ils doivent réfléchir à en extraire les points clés ; une présentation exhaustive et linéaire est préjudiciable à l'exposé, car elle risque d'empiéter sur le temps à consacrer à la restitution du texte. Cependant, le jury peut demander des précisions sur un point du code. Dans le cas d'une représentation graphique, il est important de préciser, au moins oralement, ce qui est représenté en abscisses et ordonnées.

Pour finir, le jury est tout à fait conscient de la difficulté de l'utilisation de l'outil informatique en temps limité et en situation de stress. Il reste bienveillant face aux candidats dont les illustrations informatiques n'ont pas abouti au résultat souhaité. Dans une telle situation les candidats sont encouragés à expliquer ce qu'ils ont fait et quel type de résultats ils espéraient obtenir. Le jury sait prendre en compte dans sa notation la démarche suivie lorsqu'elle est clairement argumentée et permettrait, avec des aménagements mineurs, de mettre en évidence des aspects intéressants du texte.

6.3 Option A : Probabilités et Statistiques

6.3.1 Généralités

Les textes proposés à l'option A abordent indifféremment des thèmes provenant des probabilités ou des statistiques, ils peuvent même aborder les deux avec une pondération plus ou moins grande selon les textes. Une préparation homogène sur l'ensemble du programme de l'option A est donc attendue.

Le jury a encore noté en option A un niveau global toujours en progrès depuis 2019 : les candidates ou candidats maîtrisent mieux les notions essentielles, et l'outil informatique est en général plus pertinent. Les rapports des sessions précédentes ont visiblement été bien lus et les attentes de l'épreuves semblent mieux comprises. Le professionnalisme moyen est croissant et certaines prestations ont été exceptionnelles.

Il faut garder en tête que toute étude mathématique d'une situation réelle passe par une étape de modélisation, laquelle implique des choix d'outils mathématiques adaptés à l'étude. Il est ainsi apprécié de justifier la pertinence de l'introduction d'une chaîne de Markov dans un modèle. Il en va de même pour le choix d'une loi géométrique (premier succès), exponentielle (absence de mémoire), normale (accumulation d'erreurs indépendantes) ou de Poisson (événements rares), etc. pour modéliser certaines variables aléatoires.

Naturellement, le candidat peut mener une réflexion critique sur les choix du modèle (par exemple : des hypothèses d'indépendance pour certaines lois) tant qu'elle n'est pas gratuite et qu'elle reste argumentée.

6.3.2 Recommandations spécifiques

Le jury signale ici quelques points du programme sur lesquels des progrès ont été notables sur la session 2022, ou a contrario, pour lesquels des problèmes récurrents apparaissent. Des suggestions d'illustrations informatiques de ces notions figurent dans la section suivante.

— **La loi des grands nombres et le théorème central limite** (attention à la confusion variance/écart-type) sont des résultats essentiels qui, comme on l'a dit, semblent mieux maîtrisés (hypothèses et modes de convergence).
— **Convergences de suites de variables aléatoires.** Le jury rappelle qu'il en existe différents modes (presque-sûre, dans L^p, en probabilité, en loi). Leurs définitions, caractérisations et liens sont des questions fréquemment soulevées : elles posent toujours quelques problèmes.
— **Intervalles de confiance.** La maîtrise de cette notion essentielle (savoir estimer un paramètre du modèle) est très hétérogène : certains sont capables de donner l'intervalle immédiatement, tout en maîtrisant chaque étape sa de construction. Pour d'autres, la notion même d'intervalle de confiance reste floue et la démarche qui y mène est de plus en plus confondue avec la pratique d'un test statistique. Le lemme de Slutsky, qui peut mener à des intervalles asymptotiques, est en général connu.
  Signalons encore qu'un intervalle de confiance ne relève pas systématiquement du théorème central limite, certains intervalles peuvent être exacts : dans le contexte gaussien par exemple, où avec l'utilisation de l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff si la variance de l'estimateur est connue ou majorée.
— Plus largement, les définitions sur les **estimateurs** (convergence, biais, risque quadratique, etc.) doivent être connues et utilisées pour savoir hiérarchiser des estimateurs d'un même paramètre.
— **Chaînes de Markov.** Depuis 2021, le programme inclus les propriétés de Markov faible ou forte. La propriété faible est assez connue, mais il est difficile d'obtenir un énoncé correct de la

forte. En revanche, les définitions et résultats associées aux chaînes de Markov : états récurrents, irréductibilité, apériodicité, théorèmes limites (ergodique, sur l'eventuelle probabilité invariante), etc. semblent mieux connus pour cette session 2022.

— **Vecteurs gaussiens.** On observe toujours des lacunes étonnantes sur les vecteurs gaussiens, surtout dans le cas d'une dimension $\geqslant 2$. Le théorème central limite vectoriel pose donc des problèmes dès son énoncé. La définition de la matrice de covariance d'un vecteur gaussien doit être connue ainsi que la loi d'un vecteur gaussien par une transformation affine $X \mapsto AX + B$. Au contraire, le théorème de Cochran, très utile pour donner la loi de certaines statistiques, semble mieux connu sur la session 2022.

— **Processus de Poisson.** Le jury a observé une amélioration sensible des connaissances sur cette partie du programme, autrefois très méconnue : les propriétés de ce processus, l'allure typique de ses trajectoires, une idée de sa construction à partir de variables exponentielles sont à connaître.

— **Tests statistiques.** C'est certainement l'un des points les plus problématiques du programme pour beaucoup, alors que deux tests y figurent explicitement (χ^2 et Kolmogorov-Smirnov). Les candidats doivent en connaître le principe, le contexte où ils peuvent être appliqués et, surtout, être capable d'expliquer comment mener un test. Il n'est pas rare d'avoir des discours confus qui mélange la pratique d'un test et la détermination d'un intervalle de confiance, la distinction doit être travaillée. La notion de p-valeur, parfois abordée dans certains exposés (voir la partie informatique), semble embarrasser celles ou ceux qui l'utilisent quand on demande son interprétation. Elle semble très souvent confondue avec les risques de première ou deuxième espèce.

6.3.3 Mise en œuvre informatique

Les possibilités d'utilisation de l'outil informatique pour une illustration pertinente de résultats probabilistes ou statistiques sont nombreuses et nous ne pouvons pas espérer en donner une liste exhaustive. Le logiciel Python est devenu prédominant par rapport à Scilab en 2022. Dans tous les cas, les compétences en informatique sont en progrès constants ces dernières années.

Nous donnons ici quelques conseils et les exemples les plus importants.

— **Les candidats peuvent choisir de présenter leur code informatique** s'ils le souhaitent (surtout en cas de dysfonctionnement à l'exécution), mais alors de manière synthétique afin de ne pas porter préjudice au déroulement de l'exposé.

— **tout tracé d'un graphique devrait être accompagné d'une légende explicite** à l'adresse du jury. Si c'est un graphe, il faut systématiser l'emploi de labels sur les axes : qui est en abscisse, qui est en ordonnée ?

— Les **convergences en loi** peuvent être facilement illustrées par des confrontations graphiques d'histogrammes contre la densité d'une loi limite, ou de fonctions de répartition empiriques contre fonction de répartition limite. La plupart des candidats privilégient les histogrammes, en se contentant d'une appréciation visuelle de l'adéquation, mais sans que sa pertinence soit expliquée ou quantifiée. Il faut avoir à l'esprit que la comparaison des fonctions de répartition peut trouver son ancrage dans le théorème de Glivenko-Cantelli, et que le test de Kolmogorov-Smirnov peut prolonger cette discussion.

— Les candidats peuvent également prendre l'initiative de valider une convergence en loi par des **tests statistiques (χ^2 ou Kolmogorov-Smirnov)**. Ils peuvent le faire de manière classique en se donnant un risque α (classiquement $\alpha = 0.05$), en définissant une statistique et une région de rejet permettant de conclure. Certaines routines ou modules de logiciels offrent la possibilité de réaliser très rapidement des tests à partir d'un échantillon, et nombre d'entre eux renvoient la p-valeur qui a déjà été évoquée dans ce rapport : les candidats abordant cette notion doivent s'attendre à des questions dessus, et ne doivent donc pas se retrouver en situation d'improvisation pour leurs réponses le jour de l'oral.

- Les chaînes de Markov donnent lieu à d'intéressantes possibilités de simulation : simulation de trajectoires et analyse asymptotique. Dans des cas simples (marche aléatoire sur trois sites par exemple), on peut se voir demander comment programmer des itérations d'une chaîne à partir de variables aléatoires uniformes sur $[0,1]$. La convergence presque-sûre de moyennes $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i)$, la vérification de convergence en loi (ou pas) vers une mesure stationnaire donnent lieu à des illustrations informatiques de choix.

Le jury rappelle que certains textes sont assortis d'un jeu de données numériques sur lequel les candidats sont invités à mettre en œuvre des illustrations. Le jury se réjouit de l'augmentation du nombre de candidats traitant effectivement ces données. Cela constitue une réelle plus-value pour l'exposé. Signalons que ces textes sont accompagnés d'une notice expliquant comment ouvrir les fichiers de données avec les logiciels Python, Scilab, Octave et R, logiciels que le jury estime les mieux adaptés à l'option A.

6.4 Option B : Calcul scientifique

6.4.1 Généralités

Si les modalités et les attentes de cette épreuve semblent connues par une fraction croissante des candidats admissibles, une part d'entre eux ne maîtrisent pas suffisamment les rudiments du programme général intervenant dans les textes. Quelques notions sont centrales pour cette option et reviennent, sous une forme ou une autre, dans un grand nombre de textes. S'exercer à les manipuler et à énoncer les principaux résultats afférents permet d'aborder sereinement les textes proposés. Le jury attend des candidats de :

- connaître le théorème de Cauchy-Lipschitz et être en mesure de l'appliquer pour des systèmes différentiels simples en citant correctement toutes les hypothèses nécessaires à son utilisation.
- construire la méthode d'Euler explicite et en analyser les propriétés de convergence.
- connaître les principes des méthodes directes de résolution de systèmes linéaires (pivot de Gauss, LU), la notion de conditionnement, la recherche d'éléments propres de matrices, analyser et mettre en œuvre la méthode de la puissance.
- analyser et mettre en œuvre la méthode de Newton (cas vectoriel).
- construire la matrice correspondant à la discrétisation par différences finies de $(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2})$ et connaître ses propriétés.
- être capable d'énoncer et appliquer le théorème des extrema liés (typiquement pour des problèmes de minimisation de fonctionnelles convexes sur $\mathbb{R}^N$ avec contraintes linéaires), analyser et mettre en œuvre un algorithme du gradient.
- maîtriser les outils d'analyse de Fourier.
- connaître les méthodes de quadratures classiques.

Le jury souligne que les textes exploitent ces notions dans leurs versions les plus élémentaires et ne requièrent aucun raffinement technique. Un énoncé précis des théorèmes utilisés est exigible, on prendra par ailleurs soin à citer des énoncés adaptés à la problématique plutôt que des résultats trop généraux ou des listes de mots-clefs sans rapport direct avec le texte.

6.4.2 Recommandations spécifiques

Le jury émet les recommandations plus spécifiques suivantes :

- **Quadratures numériques.** L'erreur commise par la méthode des rectangles doit être connue et une preuve élémentaire est exigible des candidats.
- **Analyse des équations différentielles ordinaires et calcul différentiel.** La dérivation de fonctions de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$, et notamment le calcul de la différentielle des applications linéaires, bilinéaires et des applications composées, ne devrait pas poser de difficulté au niveau de l'agrégation. Les formules de développements de TAYLOR contiennent généralement un terme de reste, dont l'analyse est un point souvent crucial. La lecture de la moindre équation différentielle ordinaire devrait déclencher des automatismes. Par exemple, un texte indiquant « la solution de l'équation différentielle [...] est définie pour tout temps et reste positive » doit amener à :
  1. énoncer de façon précise le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ le plus adapté au problème (version linéaire si le problème est linéaire, version globale quand elle s'applique,...) et donner une définition claire de la notion de solution utilisée.
  2. expliquer comment il s'applique dans le contexte présent (détailler explicitement la fonction $(t, X) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \mapsto f(t, X) \in \mathbb{R}^n$ qui permet de mettre le problème sous la forme $X'(t) = f(t, X(t))$, distinguer la variable vectorielle X et la fonction $X : t \mapsto X(t)$ sont malheureusement des obstacles majeurs pour certains candidats).
  3. exploiter les critères classiques garantissant la positivité de la solution et sa globalité en temps. Le jury attend des candidats une bonne maîtrise de la notion de solution maximale.
- **Schémas numériques pour les équations différentielles.** Le jury considère la description des schémas d'EULER comme un élément central du programme de l'option B. Les candidats doivent être capables de présenter clairement les principes guidant l'écriture de ces schémas et l'analyse de leurs propriétés de convergence, ainsi que les avantages et inconvénients des méthodes explicites et implicites. Le jury note un effort pour énoncer des définitions claires qui distinguent l'approximation X_n de l'évaluation $X(t_n)$, et permettent de relier le nombre de points de discrétisation et le pas Δt. Néanmoins, de nombreux candidats se contentent ensuite de citer les notions de consistance, stabilité et convergence sans les définir rigoureusement, ni les mettre en lien avec les méthodes proposées pour illustrer le texte. La mise en œuvre de ces méthodes peut être l'occasion de discuter des difficultés potentielles liées à la stabilité et aux contraintes portant sur le pas de temps.
- **Equations aux dérivées partielles.** Le jury précise que les textes qui évoquent des problèmes d'équations aux dérivées partielles peuvent être abordés avec des outils rudimentaires et ne nécessitent *a priori* aucune connaissance sur la théorie des distributions, bien que ces notions figurent programme commun, ni ne réclament de dextérité particulière d'analyse fonctionnelle. Il est néanmoins important de savoir faire la différence entre un problème aux limites et un problème de CAUCHY, et d'utiliser la discrétisation adaptée au type de problème considéré. Le jury s'attend à ce que les matrices associées à la discrétisation de $(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2})$ par différences finies pour des conditions aux limites classiques (DIRICHLET, NEUMANN, périodiques) soient connues.
- **Algèbre linéaire.** Des lacunes profondes et inquiétantes sont relevées chez certains candidats. Au grand étonnement du jury, les candidats ne font pas toujours le lien entre matrices symétriques et formes quadratiques. Les raisonnements liés à la réduction des matrices peuvent être extrêmement laborieux et les méthodes pratiques de calcul (résolution de systèmes, calcul de puissance et d'exponentielle de matrice, inverse d'une matrice,...) méconnues. La notion de conditionnement est bien souvent trop imprécise et les liens entre rayon spectral et normes matricielles doivent être maîtrisés.
- **Optimisation.** Les théorèmes de base se rapportant aux extrema doivent être connus. On s'attend à ce que les candidats soient capables de préciser les hypothèses requises pour :
  1. obtenir l'existence d'un extremum,

2. obtenir l'unicité,
3. caractériser l'extremum (sans contrainte ou avec contraintes d'égalité).

— **Analyse de Fourier.** Le jury s'étonne que de nombreux candidats aient du mal à préciser les hypothèses de régularité assurant la convergence de la série de Fourier. Le lien entre la régularité de la fonction et le comportement asymptotique de ses coefficients de Fourier doit être connu.

6.4.3 Mise en œuvre informatique

Le jury de l'option B rappelle qu'une illustration réalisée avec les routines de base des logiciels fournis est tout à fait satisfaisante si elles sont clairement présentées, motivées et discutées. En particulier, la programmation d'une méthode d'Euler dans une illustration informatique n'est nullement un passage obligé. `Scilab` ou `Python` sont certainement les langages les mieux adaptés à l'esprit de l'épreuve. Par ailleurs, le jury insiste sur le fait qu'il est important de commenter les résultats informatiques (courbes, solutions, erreurs...) obtenus et de les relier au problème de modélisation traité par le texte ou à des résultats mathématiques sous-jacents. Une présentation `libreoffice` ne pourra pas être considérée comme une illustration informatique.

6.5 Option C : Algèbre et Calcul formel

6.5.1 Généralités

La ligne directrice de l'option C est dans un premier temps la recherche de l'*effectivité*, puis de l'*efficacité* (souvent en temps, parfois en espace) du calcul algébrique. Cela va des aspects les plus élémentaires (algèbre linéaire, groupes, calcul avec les entiers, les polynômes, les entiers modulo) aux aspects plus avancés (élimination, géométrie effective, codes correcteurs d'erreurs). Si l'option dispose d'un programme spécifique, les textes peuvent traiter de toute notion au programme, en particulier au programme d'algèbre. De fait, il est tout à fait possible qu'un texte parle de réduction d'endomorphismes ou de groupes, même si ces notions ne sont pas mentionnées dans le programme spécifique de l'option.

6.5.2 Recommandations spécifiques

Le programme de l'option est résolument orienté sur les problématiques du calcul algébrique effectif. Lorsqu'un énoncé du texte affirme l'existence d'un objet (scalaire, vecteur, matrice, élément d'un groupe, entier, polynôme, etc...), le jury apprécie que le candidat mène la réflexion suivante :

— peut-on calculer cet objet ?
— si oui, par quelle(s) méthodes ?
— ces méthodes sont-elles efficaces ? quel est leur coût ?

Si la démarche reste rare, le jury observe une progression du nombre de candidats se saisissant spontanément d'une question de complexité. Cette démarche est perçue très positivement par le jury. Pour prendre un exemple, quand le texte parle de cryptographie, comparer le coût des opérations de chiffrement et déchiffrement du système proposé avec le coût d'une attaque, même naïve, est une initiative intéressante et valorisée. Une telle étude est beaucoup plus à sa place qu'un exposé détaillé de RSA plaqué sur un texte qui n'en parle pas – la mention rapide de RSA dans un texte introduisant un système de chiffrement pour comparer des complexités restant bien sûr pertinente.

Sur les aspects mathématiques et la maîtrise des éléments du programme, les principales observations du jury sont les suivantes.

- **Algorithmes et complexité.** Il s'agit d'un point fondamental de l'option C que les candidats ne peuvent négliger. Il est malheureusement encore trop rare de voir des candidats prendre spontanément l'initiative d'analyser la complexité d'un algorithme pendant leur exposé. Le jury observe toutefois une progression des connaissances dans ce domaine même si certains points restent méconnus :
  - si l'algorithme d'EUCLIDE est bien connu des candidats, la plupart d'entre eux ne savent obtenir des relations de BÉZOUT qu'en effectuant l'algorithme d'EUCLIDE classique puis en procédant à une laborieuse « remontée ». Rappelons que l'algorithme d'EUCLIDE *étendu* est explicitement au programme de l'option.
  - pour analyser une complexité en temps, il faut compter des opérations et il est donc nécessaire dans un premier temps de bien identifier l'anneau dont on compte les opérations. Pour donner un exemple simple, le produit de deux polynômes de degré n dans $\mathbf{K}[X]$ coûte une seule opération dans $\mathbf{K}[X]$, mais en coûte $O(n^2)$ dans $\mathbf{K}$.
- **Codes correcteurs d'erreurs.** Depuis quelques années, le jury constate une sensible progression des connaissances des candidats sur le sujet. Les codes correcteurs sont une partie limitée du programme et très peu de connaissances sont exigibles et exigées. Toutefois, il est nécessaire de s'y être confronté pour se familiariser avec les problématiques sous-jacentes. À savoir, typiquement qu'un bon code correcteur a une grande dimension et grande distance minimale par rapport à sa longueur.

  Si les définitions de base (codes, distance de HAMMING, distance minimale) sont souvent connues, les candidats peinent toujours à en donner une interprétation pratique. Par exemple, peu de candidats sont capables d'interpréter le ratio k/n pour un code de dimension k dans $\mathbf{F}_q^n$ comme un rendement ou un taux d'information. Certains candidats ne savent même pas expliquer comment utiliser concrètement un code donné et que le nombre d'erreurs suit un modèle probabiliste. Enfin il faut être conscient que la méconnaissance des corps finis est souvent rédhibitoire pour ce sujet.
- **Corps finis.** Sur cette notion, les connaissances des candidats sont très inégales. Tout d'abord, il n'est pas acceptable de n'avoir pas d'autres exemples de corps finis en tête que $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. La construction d'extensions de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ doit être connue ainsi que la manière dont les opérations de corps s'effectuent. Par ailleurs, il est important de savoir différentier les structures algébriques sous-jacentes : par exemple, savoir que $\mathbf{F}_{p^n}$ est isomorphe en tant que $\mathbf{F}_p$-espace-vectoriel à $\mathbf{F}_p^n$ mais pas en tant que corps.
- **Résultant.** Le jury regrette de constater que cette notion est boudée par les candidats. Rappelons que si le résultant ne fait plus partie du programme de mathématiques générales, il continue à figurer parmi les notions au programme de l'option.

6.5.3 Mise en œuvre informatique

Quasiment tous les candidats sont maintenant en mesure d'utiliser l'outil informatique durant leur présentation. Il est important que les programmes et les calculs effectués avec l'outil informatique s'intègrent de façon pertinente dans l'exposé. L'aptitude à présenter, discuter et mettre en valeur les résultats d'exécution d'un programme puis à les relier à certains énoncés du texte est une démarche qui sera bien plus valorisée que la dextérité en programmation.

Le jury attire particulièrement l'attention sur les points suivants :

- les candidats sont libres de leur choix en ce qui concerne le logiciel parmi ceux présents dans la `ClefAgreg`. Nous avons constaté que les candidats ont tenu compte de l'invitation du jury à réfléchir sur le choix d'un logiciel adapté à l'épreuve : nous incitons les futurs candidats à continuer sur cette voie.

— le jury est parfois surpris de voir des candidats développer de longs et fastidieux calculs au tableau alors que l'utilisation de l'outil informatique leur aurait permis de gagner en temps et en clarté.

— certains textes présentent des algorithmes pour résoudre efficacement un problème donné. De nombreux candidats se contentent de les tester pour une valeur d'entrée très petite, ce qui présente un intérêt moindre. Nous encouragerons les futurs candidats à tester leurs algorithmes sur plusieurs entrées de taille différente.

Chapitre 7

La bibliothèque de l'agrégation

7.1 Liste des livres disponibles

Le jury attire l'attention des candidats sur le fait que l'organisation du concours met à leur disposition une bibliothèque complète, bien ordonnée, avec des livres faciles à trouver. Cette bibliothèque fait l'objet d'achats réguliers qui permettent de proposer des ouvrages de référence modernes et adaptés. La liste sera mise à jour sur le site du jury avant les épreuves orales.

AEBISCHER B.	L2 Analyse fonctions de plusieurs variables et géométrie analytique – **1 ex.** –	VUIBERT
AEBISCHER B.	L3 Géometrie – **1 ex.** –	VUIBERT
AHUÉS M. **CHATELIN F.**	Exercices de valeurs propres de matrices – **2 ex.** –	MASSON
ALDON G.	Mathématiques dynamiques – **2 ex.** –	HACHETTE
ALESSANDRI M.	Thèmes de géométrie – **1 ex.** –	DUNOD
ALLAIRE G.	Analyse numérique et optimisation – **2 ex.** –	EDITIONS DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ALLANO-CHEVALIER M. **OUDOT X.**	Analyse et géométrie différentielle – **1 ex.** –	HACHETTE

ALLOUCHE J. P. **SHALLIT J.**	Automatic sequences theory, applications, generalizations – **1 ex.** –	Cambridge
AMAR E. **MATHERON É.**	Analyse complexe – **2 ex.** –	Cassini
ANDLER M. **BLOCH J. D.** **MAILLARD B.**	Exercices corrigés de Mathématiques — Tome 1A - Topologie – **5 ex.** – — Tome 1B - Fonctions numériques – **6 ex.** – — Tome 2 - Suites et séries numériques – **7 ex.** – — Tome 3 - Analyse fonctionnelle – **6 ex.** – — Tome 5 - Algèbre générale, polynômes – **4 ex.** – — Tome 6 - Algèbre linéaire, première partie – **6 ex.** – — Tome 7 - Algèbre linéaire, deuxième partie – **7 ex.** –	Ellipses
ANDREWS G.	Number Theory – **1 ex.** –	Dover
APPEL W.	Probabilités pour non probabilistes – **1 ex.** –	H & K
ARIBAUD F. **VAUTHIER J.**	Mathématiques. Première année de DEUG – **1 ex.** –	ESKA
ARNAUDIÈS J-M. **BERTIN J.**	Groupes, Algèbres et Géométrie — Tome I – **1 ex.** – — Tome II – **1 ex.** –	Ellipses
ARNAUDIÈS J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus d'analyse – **8 ex.** –	Dunod
ARNAUDIÈS J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus d'algèbre bilinéaire et géométrie du cours de Mathématiques tome 4 – **5 ex.** –	Dunod

ARNAUDIÈS J-M. **FRAYSSE H.**	Cours de Mathématiques — 1. Algèbre – **11 ex.** – — 2. Analyse – **6 ex.** – — 3. Compléments d'analyse – **8 ex.** – — 4. Algèbre bilinéaire et géométrie – **5 ex.** –	DUNOD
ARNAUDIÈS J.-M. **LELONG-FERRAND J.**	Cours de Mathématiques — Tome 1 pour M-M' : Algèbre – **5 ex.** – — Tome 1 pour A-A' : Algèbre – **1 ex.** – — Tome 2 : Analyse – **7 ex.** – — Tome 3 : Géométrie et cinématique – **5 ex.** – — Tome 4 : Equations différentielles, intégrales multiples – **4 ex.** –	DUNOD
ARNOLD V.	Chapitre supplémentaire de la théorie des équations différentielles ordinaires – **2 ex.** –	MIR
ARNOLD V.	Équations différentielles ordinaires – **3 ex.** –	MIR
ARNOLD V.	Lectures on partial differential equations – **1 ex.** –	SPRINGER
ARTIN E.	Algèbre géométrique – **5 ex.** –	GAUTHIER-VILLARS
ARTIN E.	Algèbre géométrique – **1 ex.** –	GABAY
ARTIN M.	Algebra – **2 ex.** –	PRENTICE HALL
AUBIN J.P.	Analyse fonctionnelle appliquée — Tome 1 – **0 ex.** – — Tome 2 – **1 ex.** –	PUF
AUDIN M.	Géométrie de la licence à l'agrégation – **1 ex.** –	BELIN
AVEZ A.	Calcul différentiel – **1 ex.** –	MASSON
AVEZ A.	La leçon de gométrie à l'oral de l'agrégation	MASSON

AVEZ A.	La leçon d'analyse à l'oral de l'agrégation	Masson
BAILLY-MAITRE G.	Arithmétique et cryptologie – **1 ex.** –	Ellipses
BAKHVALOV N.	Méthodes numériques – **2 ex.** –	MIR
BARANGER J.	Analyse numérique – **1 ex.** –	Hermann
BARBE Ph. **LEDOUX M.**	Probabilité (De la licence à l'agrégation) – **1 ex.** –	Belin
BARRET M. **BENIDIR M.**	Stabilité des filtres et des systèmes linéaires – **1 ex.** –	Dunod
BASILI B. **PESKINE C.**	Algèbre – **1 ex.** –	Diderot, éditeur Arts et Sciences
BASS J.	Cours de Mathématiques — Tome 1 – **2 ex.** – — Tome 2 – **2 ex.** –	Masson
BAUER F. L.	Decrypted secrets. Methods and maxims of cryptology – **1 ex.** –	Springer
BECK V. **MALICK J.** **PEYRÉ G.**	Objectif Agregation – **3 ex.** –	HK
BENAÏM M. **EL KAROUI N.**	Promenade aléatoire – **1 ex.** –	Les éditions de l'X
BENDER C. **ORSZAG S.**	Advanced mathematical methods for scientists and engineers – **3 ex.** –	Mc Graw Hill
BENIDIR M. **BARRET M.**	Stabilité des filtres et des systèmes linéaires – **1 ex.** –	Dunod
BENOIST J. *et al*	Math L2, Cours complet avec 700 tests et exercices corrigés – **1 ex.** –	Pearson Education

BENOIST J. **SALINIER A.**	Exercices de calcul intégral – **2 ex.** –	Dunod
BENZONI-GAVAGE S.	Calcul différentiel et équations différentielles – **2 ex.** –	Dunod
BERCU B. **CHAFAÏ D.**	Modélisation stochastique et simulation – **1 ex.** –	Dunod
BERGER M.	Géométrie — Index – **3 ex.** – — 1. Action de groupes, espaces affines et projectifs – **3 ex.** – — 2. Espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères – **1 ex.** – — 3. Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes – **2 ex.** – — 4. Formes quadratiques, quadriques et coniques – **2 ex.** – — 5. La sphère pour elle-même, géométrie hyperbolique, l'espace des sphères – **2 ex.** –	Cédic/Nathan
BERGER M.	Géométrie tome 2 – **1 ex.** –	Nathan
BERGER M.	Géométrie vivante – **2 ex.** –	Cassini
BERGER M. **BERRY J-P.** **PANSU P.** **SAINT RAYMOND X.**	Problèmes de géométrie commentés et rédigés – **3 ex.** –	Cédic/Nathan
BERGER M. **GOSTIAUX B.**	Géométrie différentielle – **2 ex.** –	Armand Colin
BERHUY G.	Algèbre, le grand combat – **1 ex.** –	Calvage & Mounet
BERLINE N. **SABBAH C.**	Groupes finis, journées X-UPS 2000 – **1 ex.** –	Editions de l'X
BERTHELIN F.	Equations différentielles – **3 ex.** –	Cassini

BHATIA R.	Matrix Analysis – **1 ex.** –	Springer
BICKEL P.J. **DOKSUM K.A.**	Mathematical statistics – **1 ex.** –	Prentice Hall
BIGGS N. L.	Discrete mathematics – **1 ex.** –	Oxford Science Publications
BINET G.	Traitement du signal – **2 ex.** –	Ellipse
BILLINGSLEY P.	Probability and measure – **2 ex.** –	Wiley
BLANCHARD A.	Les corps non commutatifs – **5 ex.** –	PUF
BLOMME T. **GASSOT L.** **GUIGNARD Q.** **RANDÉ B.**	Les clefs pour l'oral – **1 ex.** –	Calvage& Mounet
BOAS R.	A primer of real functions – **1 ex.** –	Mathematical association of America
BOCCARA N.	Distributions – **2 ex.** –	Ellipses
BOISSONAT J.-D. **YVINEC M.**	Géométrie algébrique – **1 ex.** –	Ediscience
BON J.-L.	Fiabilité des systèmes – **1 ex.** –	Masson
BONNANS J.-F. **GILBERT J.C.** **LEMARÉCHAL C.** **SAGASTIZABAL C.** **PENNEQUIN D.**	Optimisation numérique – **2 ex.** –	Springer
BONY J.-M.	Cours d'analyse – **5 ex.** –	Editions de l'École polytechnique

BONY J.-M.	Méthodes mathématiques pour les sciences physiques – **3 ex.** –	Editions de l'École polytechnique
BORIES-LONGUET F.	Graphes et combinatoire – **2 ex.** –	Ellipse
BOUALEM H. **BROUZET J.C.** **ELSNER B.** **KACZMAREK L.**	Mathématique L1 – **1 ex.** –	Pearson Education
BOURBAKI N.	Éléments de Mathématique — Topologie générale, chapitres V à X – **2 ex.** – — Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à VII – **1 ex.** – — Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à III – **2 ex.** – — Fascicule XIII Intégration, chapitres I à IV – **2 ex.** –	Hermann
BOURGADE P.	Annales des Olympiades internationales de mathématiques 1976-2005 – **1 ex.** –	Cassini
BOUVIER A. **RICHARD D.**	Groupes – **3 ex.** –	Hermann
BRÉMAUD P.	Introduction aux probabilités – **1 ex.** –	Springer
BRÉZIS H.	Analyse fonctionnelle, théorie et applications – **7 ex.** –	Masson
BRIANE M. **PAGÈS G.**	Théorie de l'intégration Cours et exercices, 3ème édition – **3 ex.** –	Vuibert
BROUSSE P.	Mécanique MP - PC.- Spéciales A. A'. B. B'. – **2 ex.** –	Armand Colin
CABANE R. **LEBOEUF C.**	Algèbre linéaire — 1. Espaces vectoriels , Polynômes – **4 ex.** – — 2. Matrices et réduction – **3 ex.** –	Ellipses

CABANNES H.	Cours de Mécanique générale – **2 ex.** –	Dunod
CALAIS J.	Éléments de théorie des anneaux – **1 ex.** –	PUF
CALAIS J.	Éléments de théorie des groupes – **1 ex.** –	PUF
CALDERO P. **GERMONI J.**	Histoires hédonistes de groupes et de géométries – **7 ex.** –	Calvage et Mounet
CALVO B.	Cours d'analyse II – **1 ex.** –	Armand Colin
CANDELPERGHER B.	Calcul intégral – **1 ex.** –	Cassini
CANDELPERGHER B.	Théorie des probabilités – **2 ex.** –	Calvage et Mounet
CARREGA J.C.	Théorie des corps – **1 ex.** –	Hermann
CARRIEU H.	Probabilités : exercices corrigés – **1 ex.** –	EDP Sciences
CARTAN H.	Calcul différentiel (1971) – **5 ex.** –	Hermann
CARTAN H.	Formes différentielles – **4 ex.** –	Hermann
CARTAN H.	Théorie élémentaire des fonctions analytiques – **6 ex.** –	Hermann
CASAMAYOU A. **et al.**	Calcul mathématique avec SAGE – **1 ex.** –	Copyrighted material
CASTI J.L.	Realty Rules : Picturing the world in mathematics I – **1 ex.** –	Wiley Interscience
CASTI J.L.	Realty Rules : Picturing the world in mathematics II – **1 ex.** –	Wiley Interscience

CASTLEMAN K.R.	Digital image processing – **1 ex.** –	Prentice Hall
CHABANOL M.-L. **RUCH J.-J.**	Probabilités et statistiques pour l'épreuve de modélisation à l'agrégation de mathématiques – **2 ex.** –	Ellipse
CHABAT B.	Introduction à l'analyse complexe – **1 ex.** –	Mir
CHAMBERT-LOIR A.	Algèbre corporelle – **1 ex.** –	Editions de l'X
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation — Analyse 2 – **1 ex.** – — Analyse 3 – **2 ex.** –	Masson
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.** **MAILLOT V.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Analyse 1 (seconde édition revue et corrigée) – **3 ex.** –	Masson
CHARLES J. **MBEKHTA M.** **QUEFFÉLEC H.**	Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs – **5 ex.** –	Dunod
CHARPENTIER E. **NIKOLSKI N.**	Leçons de mathématiques d'aujourd'hui — Vol 1 – **3 ex.** – — Vol 2 – **1 ex.** – — Vol 3 – **2 ex.** – — Vol 4 – **1 ex.** –	Ellipses
CHILDS L.	A concrete introduction to Higher Algebra – **2 ex.** –	Springer Verlag
CHOIMET D. **QUEFFÉLEC H.**	Analyse mathématique – **2 ex.** –	Cassini
CHOQUET G.	Cours d'analyse Tome II : Topologie – **6 ex.** –	Masson
CHOQUET G.	L'enseignement de la géométrie – **4 ex.** –	Hermann
CHOQUET-BRUHAT Y.	Distributions. Théories et problèmes – **1 ex.** –	Masson

CHRISTOL G. **PILIBOSSIAN P.** **YAMMINE S.**	— Algèbre 1 – **1 ex.** – — Algèbre 2 – **2 ex.** –	Ellipses
CHIRON D.	chemins d'analyse Tome 1 – **1 ex.** –	Eyrolles
CIARLET P.G.	Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation – **2 ex.** –	Masson
COGIS O. **ROBERT C.**	Au-delà des ponts de Könisberg. Théorie des graphes. Problèmes, théorie, algorithmes – **1 ex.** –	Vuibert
COHN P.M.	Algebra Volume 1 – **1 ex.** –	John Wiley
COLLET H. **GIRARD B.** **PERRIER C.**	Mathématique BTS industriel – **1 ex.** –	Nathan
COLLET P.	Modeling binary data – **1 ex.** –	Chapman and Hall
COLLET J.-F.	Discrete stochastic processes and applications – **2 ex.** –	Springer
COLMEZ P.	Éléments d'analyse et d'algèbre – **2 ex.** –	Editions de l'X
COMBROUZE A.	Probabilités et statistiques – **1 ex.** –	PUF
CORTELLA A.	Théorie des groupes – **2 ex.** –	Vuibert
COTRELL M. **GENON-CATALOT V.** **DUHAMEL C.** **MEYRE T.**	Exercices de probabilités – **2 ex.** –	Cassini
COURANT R. **HILBERT D.**	Methods of Mathematical Physics — Volume 1 – **1 ex.** – — Volume 2 – **1 ex.** –	John Wiley

DACUNHA-CASTELLE D. **DUFLO M.**	— Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe – **3 ex.** – — Exercices de Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe – **1 ex.** –	MASSON
DACUNHA-CASTELLE D. **REVUZ D.** **SCHREIBER M.**	Recueil de problèmes de calcul des probabilités – **1 ex.** –	MASSON
DANTZER J.F.	Mathématiques pour l'agrégation interne – **3 ex.** –	VUIBERT
DEBREIL A.	Groupes finis et treillis de leurs sous-groupes – **1 ex.** –	CALVAGE & MOUNET
DEBREIL A. **EIDEN J.-D.** **MNEIMNÉ R.** **NGUYEN T.-H.**	Formes quadratiques et géométrie : Une introduction, et un peu plus – **1 ex.** –	CALVAGE & MOUNET
DE BIÈVRE S.	Face au jury du CAPES : Préparer les leçons d'Analyse, l'oral du CAPES de mathématiques – **1 ex.** –	ELLIPSES
DEHEUVELS P.	L'intégrale – **4 ex.** –	PUF
DEHEUVELS R.	Formes quadratiques et groupes classiques – **3 ex.** –	PUF
DE KONNINCK J.M. **MERCIER A.**	Introduction à la théorie des nombres – **1 ex.** –	MODULO
DELCOURT J.	Théorie des groupes – **2 ex.** –	DUNOD
DELTHEIL R. **CAIRE D.**	Géométrie et compléments – **2 ex.** –	JACQUES GABAY
DEMAILLY J.P.	Analyse numérique et équations différentielles – **2 ex.** –	PU GRENOBLE
DEMAZURE M.	Catastrophes et bifurcations – **1 ex.** –	ELLIPSES

DEMAZURE M.	Cours d'algèbre : primalité, divisibilité, codes – **5 ex.** –	CASSINI
DEMBO A. **ZEITOUNI O.**	Large deviations techniques and applications – **1 ex.** –	SPRINGER
DESCHAMPS C. **WARUSFEL A.** *et al.*	Mathématiques, cours et exercices corrigés — 1ère année MPSI, PCSI, PTSI – **2 ex.** – — 2ème année MP, PC, PSI – **1 ex.** –	DUNOD
DESCOMBES R.	Éléments de théorie des nombres – **2 ex.** –	PUF
DE SEGUINS PAZZIS C.	Invitation aux formes quadratiques – **3 ex.** –	CALVAGE & MOUNET
DESPRÉS B.	Lois de conservations euleriennes, lagrangiennes et méthodes numériques – **2 ex.** –	SPRINGER
DEVANZ C. **ELHODAIBI M.**	Exercices corrigés de Mathématiques posés à l'oral des Ensi, Tome 2 – **4 ex.** –	ELLIPSES
DI MENZA L.	Analyse numérique des équations aux dérivées partielles – **2 ex.** –	CASSINI
DIEUDONNÉ J.	Algèbre linéaire et géométrie élémentaire – **4 ex.** –	HERMANN
DIEUDONNÉ J.	Calcul infinitésimal – **3 ex.** –	HERMANN
DIEUDONNÉ J.	Sur les groupes classiques – **1 ex.** –	HERMANN
DIEUDONNÉ J.	Éléments d'Analyse. — Fondements de l'analyse moderne – **5 ex.** – — Éléments d'Analyse Tome 2. – **5 ex.** –	GAUTHIER-VILLARS
DIXMIER J.	Cours de Mathématiques du premier cycle — Première année – **3 ex.** – — Deuxième année – **3 ex.** –	GAUTHIER-VILLARS

DOUCHET J.	Analyse complexe – **2 ex.** –	PRESSES POLY-TECHNIQUES ET UNIV. ROMANDES
DOUCHET J.	Analyse : recueil d'exercices et aide-mémoire, volume 1 – **2 ex.** –	PRESSES POLY-TECHNIQUES ET UNIV. ROMANDES
DOUCHET J.	Analyse : recueil d'exercices et aide-mémoire, volume 2 – **2 ex.** –	PRESSES POLY-TECHNIQUES ET UNIV. ROMANDES
DOUCHET J. **ZWALHEN B.**	Calcul différentiel et intégral – **2 ex.** –	PRESSES POLY-TECHNIQUES ET UNIV. ROMANDES
DRAPPER N. **SCHMITH H.**	Applied regression analysis – **1 ex.** –	WILEY
DUBERTRET G.	Initiation à la cryptographie – **1 ex.** –	PUF
DUBUC S.	Géométrie plane – **4 ex.** –	PUF
DUGAC P.	Histoire de l'analyse. Autour de la notion de limite et de ses voisinages – **1 ex.** –	VUIBERT
DUMAS L. .	Modélisation á l'oral de calcul scientifique – **1 ex.** –	ELLIPSES
DUMMIT D.	Abstract Algebra – **1 ex.** –	WILEY
DUPONT G.	Probabilités et statistiques – **2 ex.** –	DUNOD
DYM H. **McKEAN H.P.**	Fouriers series and integrals – **1 ex.** –	ACADEMICS PRESS

EBBINGHAUS H. *et al.*	Les Nombres – **2 ex.** –	VUIBERT
EIDEN J.D.	Géométrie analytique classique – **3 ex.** –	CALVAGE ET MOUNET
EIDEN J.D.	Le jardin d'Eiden – **1 ex.** –	CALVAGE ET MOUNET
EL KACIMI ALAOUI A. **QUEFFÉLEC H.** **SACRÉ C.** **VASSALLO V.**	Quelques aspects des mathématiques actuelles – **3 ex.** –	ELLIPSES
ENGEL A.	Solutions d'expert — Vol 1 – **1 ex.** – — Vol 2 – **1 ex.** –	CASSINI
ÉPISTEMON L. **(OVAERT J.L.** **VERLEY J.L.)**	Exercices et problèmes — Analyse. Volume 1 – **1 ex.** – — Algèbre. – **3 ex.** –	CÉDIC/NATHAN
ESCOFIER J.-P.	Théorie de Galois : Cours et exercices corrigés – **2 ex.** –	DUNOD
ESKIN G.	Lectures on linear partial differential equations – **2 ex.** –	AMS
EXBRAYAT J.M. **MAZET P.**	Notions modernes de mathématiques — Algèbre 1 : Notions fondamentales de la théorie des ensembles – **3 ex.** – — Analyse 1 : Construction des espaces fondamentaux de l'analyse – **3 ex.** – — Analyse 2 : Éléments de topologie générale – **3 ex.** –	HATIER
FADDEEV D. **SOMINSKI I.**	Recueil d'exercices d'Algèbre Supérieure – **3 ex.** –	MIR
FAIRBANK X. **BEEF C.**	POX - Exercices posés au petit oral de l'X – **7 ex.** –	ELLIPSES
FARAUT J.	Analyse sur les groupes de Lie – **3 ex.** –	CALVAGE ET MOUNET

FARAUT J. **KHALILI E.**	Arithmétique Cours, Exercices et Travaux Pratiques sur Micro-Ordinateur – **1 ex.** –	Ellipses
FELLER W.	An introduction to probability theory and its applications — Volume 1 – **2 ex.** – — Volume 2 – **2 ex.** –	John Wiley
FERRIER J.P.	Mathématiques pour la licence – **2 ex.** –	Masson
FILBET F.	Analyse numérique – **2 ex.** –	Dunod
FLORY G.	Exercices de topologie et analyse avec solutions — Tome 1 - Topologie – **10 ex.** – — Tome 2 - Fonctions d'une variable réelle – **6 ex.** – — Tome 3 - Fonctions différentiables, intégrales multiples – **7 ex.** – — Tome 4 - Séries, équations différentielles – **8 ex.** –	Vuibert
FOISSY L. **NINET A.**	Algèbre et calcul formel – **2 ex.** –	Ellipses
FONTANEZ F. **RANDÉ B.**	Les clefs pour les Mines – **2 ex.** –	Calvage et Mounet
FRANCHINI J. **JACQUENS J-C.**	Mathématiques Spéciales — Algèbre – **1 ex.** – — Analyse 1 – **1 ex.** –	Ellipses
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Algèbre 1 – **7 ex.** –	Cassini
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Algèbre 2 – **1 ex.** –	Cassini
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Algèbre 3 – **4 ex.** –	Cassini

FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Analyse 1 – **3 ex.** –	CASSINI
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Analyse 2 – **4 ex.** –	CASSINI
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Analyse 3 – **5 ex.** –	CASSINI
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Analyse 4 – **1 ex.** –	CASSINI
FRANCINOU S. **GIANELLA H.**	Exercices de Mathématiques Algèbre 1 – **2 ex.** –	MASSON
FRENKEL J.	Géométrie pour l'élève-professeur – **1 ex.** –	HERMANN
FRESNEL J.	Méthodes modernes en géométrie – **1 ex.** –	HERMANN
FRESNEL J. **MATIGNON M.**	Algèbre et géométrie – **2 ex.** –	HERMANN
FUHRMANN P.	A polynomial approach to linear algebra – **1 ex.** –	SPRINGER
FULTON W.	Algebraic Topology A first course – **1 ex.** –	SPRINGER
GABRIEL P.	Matrices, géométrie, algèbre linéaire – **3 ex.** –	CASSINI
GALLOUET T. **HERBIN R.**	Mesure, Intégration, Probabilités – **3 ex.** –	ELLIPSES
GANTMACHER F.R.	Théorie des matrices — Tome 1 – **1 ex.** – — Tome 2 – **1 ex.** –	DUNOD
GARET O.	Probabilités et processus stochastiques – **2 ex.** –	COPYRIGHTED MATERIAL

GARET O. **KURTZMANN A.**	De l'intégration aux probabilités – **5 ex.** –	Ellipses
GARNIER J.-M.	Groupes et géométrie pour l'agrégation – **4 ex.** –	Ellipses
GATHEN (von zur) J. **GERHARD .J**	Modern computer algebra – **1 ex.** –	Cambridge University press
GENET J.	Mesure et intégration. Théorie élémentaire. Cours et exercices résolus – **2 ex.** –	Vuibert
GHIDAGLIA J.M.	Petits problèmes d'analyse – **1 ex.** –	Springer
GINDIKIN S.	Histoires de mathématiciens et de physiciens – **1 ex.** –	Cassini
GOBLOT R.	Algèbre commutative – **2 ex.** –	Masson
GOBLOT R.	Thèmes de géométrie – **1 ex.** –	Masson
GODEMENT R.	Analyse — Tome 1 – **1 ex.** – — Tome 2 – **4 ex.** – — Tome 3 – **1 ex.** –	Springer
GODEMENT R.	Cours d'Algèbre – **4 ex.** –	Hermann
GOLUB G.H. **VAN LOAN C.F.**	Matrix computations – **1 ex.** –	Wiley
GONNORD S. **TOSEL N.**	Thèmes d'Analyse pour l'agrégation — Topologie et Analyse fonctionnelle – **1 ex.** – — Calcul différentiel – **1 ex.** –	Ellipses

GOSTIAUX B.	Cours de mathématiques spéciales — Tome 1 - Algèbre – **1 ex.** – — Tome 2 - Topologie et analyse réelle – **1 ex.** – — Tome 3 - Analyse fonctionnelle et calcul différentiel – **1 ex.** – — Tome 4 - Géométrie affine et métrique – **1 ex.** – — Tome 5 - Géométrie : arcs et nappes – **1 ex.** –	PUF
GOUDON T.	Mathématiques pour la modélisation et le calcul scientifique – **2 ex.** –	ISTE
GOUDON T.	Intégration – **2 ex.** –	ELLIPSES
GOURDON X.	Les maths en tête, mathématiques pour M' — Algèbre – **5 ex.** – — Analyse – **6 ex.** –	ELLIPSES
GRAHAM R. **KNUTH D.** **PATASHNIK O.**	Concrete mathematics – **1 ex.** –	ADISON-WESLEY
GRAMAIN A.	Géométrie élémentaire – **2 ex.** –	HERMANN
GRAMAIN A.	Intégration – **1 ex.** –	HERMANN
GREUB W.	Linear Algebra – **2 ex.** –	SPRINGER VERLAG
GRIFONE J.	Algèbre linéaire – **3 ex.** –	CEPADUES
GRIMMET G. **WELSH D.**	Probability (an introduction) – **1 ex.** –	OXFORD
GUININ D. **ZAUBONNET F.** **JOPPIN B.**	Cours et exercices résolus — Algèbre-Géométrie MPSI – **1 ex.** – — MP – **1 ex.** –	BRÉAL
GUIGNARD Q. **RANDE B.**	Les clés pour l'or al MP Mathématiques – **1 ex.** –	CALVAGE ET MOUNET

GUJARATI D. N.	Basic Econometrics – **1 ex.** –	WILEY
HABSIEGER L. **MARTEL V.**	Exercices corrigés posés à l'oral des ENSI Tome 1 Analyse – **7 ex.** –	ELLIPSES
HALMOS P.	Problèmes de mathématiciens petits et grands – **1 ex.** –	CASSINI
HAMMAD P.	Cours de probabilités – **3 ex.** –	CUJAS
HAMMAD P. **TARANCO A.**	Exercices de probabilités – **2 ex.** –	CUJAS
HARDY G.H. **WRIGHT E.M.**	An introduction to the theory of numbers – **2 ex.** –	OXFORD
HAUCHECORNE B.	Les contre-exemples en mathématiques – **2 ex.** –	ELLIPSES
HENNEQUIN P.L. **TORTRAT A.**	Théorie des probabilités et quelques applications – **2 ex.** –	MASSON
HENRICI P.	Applied and Computational Complex Analysis — Volume 1 – **1 ex.** – — Volume 2 – **1 ex.** – — Volume 3 – **2 ex.** –	WILEY-INTERSCIENCE
HERBIN R. **GALLOUËT T.**	Mesures, intégration, probabilités – **3 ex.** –	ELLIPSES
HERVÉ M.	Les fonctions analytiques – **4 ex.** –	PUF
HINDRY M.	Arithmétique – **2 ex.** –	CALVAGE ET MOUNET
HIRSCH F. **LACOMBE G.**	Eléments d'analyse fonctionnelle – **3 ex.** –	MASSON
HOCHART M. **SCIUTO G.**	Algèbre Analyse Géométrie (MPSI/PCSI) – **1 ex.** –	VUIBERT
HOUZEL C.	Analyse mathématique : cours et exercices – **1 ex.** –	BELIN

HUBBARD J. **HUBERT F.**	Calcul scientifique T1 – **3 ex.** –	Vuibert
HUBBARD J. **HUBERT F.**	Calcul scientifique T2 – **3 ex.** –	Vuibert
INGRAO B.	Coniques projectives, affines et métriques – **2 ex.** –	Calvage et Mounet
IRELAND K. **ROSEN M.**	A Classical Introduction to Modern Numbers Theory – **2 ex.** –	Springer Verlag
ISAAC R.	Une initiation aux probabilités (Trad. R. Mansuy) – **1 ex.** –	Vuibert-Springer
ITARD J.	Les nombres premiers – **1 ex.** –	Que sais-je ? PUF
JACOBSON N.	Basic Algebra — Tome I – **2 ex.** – — Tome II – **2 ex.** –	Freeman and Co
JACOD J. **PROTTER P.**	L'essentiel en théorie des probabilités – **2 ex.** –	Cassini
JAUME M.	Éléments de mathématiques discrètes – **2 ex.** –	Ellipses
KAHANE J.P. **GILLES P.**	Séries de Fourier et ondelettes – **4 ex.** –	Cassini
KERBRAT Y. **BRAEMER J.-M.**	Géometrie des courbes et des surfaces – **1 ex.** –	Hermann
KERNIGHAN B. **RITCHIE D.**	Le langage C – **1 ex.** –	Dunod
KLOECKNER B.	Un bref aperçu de la géométrie projective – **1 ex.** –	Calvage et Mounet

KNUTH D.E.	The art of computer programming — Volume 1 : Fundamental algorithms – **1 ex.** – — Volume 2 : Seminumerical algorithms – **1 ex.** – — Volume 3 : Sorting and Searching – **1 ex.** –	ADDISON-WESLEY
KOBLITZ N.	A course in number theory and cryptography – **1 ex.** –	SPRINGER
KOLMOGOROV A. **FOMINE S.**	Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle – **1 ex.** –	ELLIPSES
de KONNINCK J.M. **MERCIER A.**	Introduction à la théorie des nombres – **1 ex.** –	MODULO
KÖRNER T.W.	Fourier analysis – **1 ex.** –	CAMBRIDGE
KOURIS E.	Une année de colle en maths en MPSI – **1 ex.** –	CALVAGE ET MOUNET
KREE P.	Introduction aux Mathématiques et à leurs applications fondamentales M.P.2 – **1 ex.** –	DUNOD
KRIVINE H.	Exercices de Mathématiques pour physiciens – **2 ex.** –	CASSINI
KRIVINE J.-L.	Théorie axiomatique des ensembles – **2 ex.** –	PUF
KRIVINE J.-L.	Théorie des ensembles – **2 ex.** –	CASSINI
KUNG J.P.S. **ROTA G-C.** **YAN C.H.**	Combinatorics : the Rota way – **1 ex.** –	CAMBRIDGE
LAAMRI E. H.	Mesures, intégration et transformée de Fourier des fonctions – **1 ex.** –	DUNOD
LAFONTAINE J.	Introduction aux variétés différentielles – **1 ex.** –	PUF

LANG S.	Algèbre linéaire — Tome 1 – **1 ex.** – — Tome 2 – **1 ex.** –	InterEditions
LANG S.	Algebra – **5 ex.** –	Addison-Wesley
LANG S.	Linear Algebra – **5 ex.** –	Addison-Wesley
LAROCHE F.	Escapades arithmétiques – **1 ex.** –	Ellipses
LASCAUX T. **THÉODOR R.**	Analyse matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur, tomes 1 & 2 – **2 ex.** –	Dunod
LAVILLE G.	Courbes et surfaces – **1 ex.** –	Ellipses
LAVILLE G.	Géométrie pour le CAPES et l'Agrégation – **2 ex.** –	Ellipses
LAX P. D.	Functional analysis – **1 ex.** –	Wiley
LAX P. D.	Linear Algebra – **1 ex.** –	Wiley
LEBOEUF C. **GUÉGAND J.** **ROQUE J.L.** **LANDRY P.**	Exercices corrigés de probabilités – **1 ex.** –	Ellipses
LEBORGNE D.	Calcul différentiel et géométrie – **3 ex.** –	PUF
LEBOSSÉ C. **HÉMERY C.**	Géométrie. Classe de Mathématiques – **1 ex.** –	Jacques Gabay
LEHMANN D. **SACRÉ C.**	Géométrie et topologie des surfaces – **1 ex.** –	PUF

LEHNING H.	Mathématiques supérieures et spéciales — Tome 1 : Topologie – **8 ex.** – — Tome 2 : Dérivation – **8 ex.** – — Tome 3 : Intégration et sommation – **5 ex.** – — Tome 4 : Analyse en dimension finie – **8 ex.** – — Tome 5 : Analyse fonctionnelle – **5 ex.** –	MASSON
LEICHTNAM E. **SCHAUER X.**	Exercices corrigés de mathématiques posés aux oraux X-ENS — Tome I - Algèbre 1 – **2 ex.** – — Tome 3 - Analyse 1 – **4 ex.** – — Tome 4 - Analyse 2 – **9 ex.** –	ELLIPSES
LELONG-FERRAND J.	Géométrie différentielle – **3 ex.** –	MASSON
LELONG-FERRAND J.	Les fondements de la géométrie – **2 ex.** –	PUF
LELONG-FERRAND J.	exercices résolus d'analyse – **1 ex.** –	DUNOD
LESIEUR L. **MEYER Y.** **JOULAIN C.** **LEFEBVRE J.**	Algèbre linéaire, géométrie – **1 ex.** –	ARMAND COLIN
LIRET F.	Maths en pratiques – **1 ex.** –	DUNOD
LIRET F. **MARTINAIS D.**	Algèbre 1 – **1 ex.** –	DUNOD
LION G.	Algèbre pour la licence Cours et exercices (2ème édition) – **1 ex.** –	VUIBERT
LION G.	Géométrie du plan Cours complet avec 600 exercices résolus – **1 ex.** –	VUIBERT
MAC LANE S. **BIRKHOFF G.**	Algèbre — 1 : Structures fondamentales – **4 ex.** – — 2 : Les grands théorèmes – **4 ex.** –	GAUTHIER-VILLARS

MACKI J. **STRAUSS A.**	Introduction to optimal control theory – **1 ex.** –	SPRINGER
MADÈRE K.	Leçons d'analyse – **2 ex.** –	ELLIPSE
MADÈRE K.	Leçons d'algèbre – **1 ex.** –	ELLIPSE
MAKAROV B.M. **GOLUZINA M.G.** **LODKIN A.A.** **PODKORYTOV A.N.**	Problèmes d'analyse réelle – **1 ex.** –	CASSINI
MALLIAVIN M. P.	Les groupes finis et leurs représentations complexes – **2 ex.** –	MASSON
MALLIAVIN P.	Géométrie différentielle intrinsèque – **2 ex.** –	HERMANN
MALLIAVIN M. P. **WARUSFEL A.**	Algèbre linéaire et géométrie classique. Exercices – **3 ex.** –	MASSON
MANIVEL L.	Cours spécialisé – **1 ex.** –	SMF
MANSUY R. **MNEIMNÉ R.**	Algèbre linéaire réduction des endomorphismes – **1 ex.** –	VUIBERT
MANSUY R. **RANDÉ B.**	Les clefs pour l' X – **2 ex.** –	CALVAGE ET MOUNET
MARCO J.P. *et al.*	Analyse L3 – **1 ex.** –	PEARSON
MASCART H. **STOKA M.**	Fonctions d'une variable réelle — Tome 2 : Exercices et corrigés – **1 ex.** – — Tome 3 : Exercices et corrigés – **1 ex.** – — Tome 4 : Exercices et corrigés – **1 ex.** –	PUF
MAURY B.	Analyse fonctionnelle, Exercices et problèmes corrigés – **15 ex.** –	ELLIPSES
MAWHIN J.	Analyse : fondements, technique, évolutions – **2 ex.** –	DE BOECK UNIVERSITÉ

MENEZES A.J. **van OORSCHOT P.C.** **VANSTONE S.A.**	Handbook of applied cryptography – **1 ex.** –	CRC Press
MERINDOL J.-Y.	Nombres et algèbre – **2 ex.** –	EDP Sciences
MERKIN D.	Introduction to the theory of stability – **1 ex.** –	Springer
MÉTIVIER M.	Probabilités : dix leçons d'introduction. École Polytechnique – **2 ex.** –	Ellipses
MEUNIER P.	Agrégation interne de Mathématiques Exercices d'oral corrigés et commentés — Tome 2 – **1 ex.** – — Tome 3 – **1 ex.** –	PUF
MEYRE T.	Probabilités, cours et exercices corrigés – **2 ex.** –	Calvage & Mouret
MIGNOTTE M.	Mathématiques pour le calcul formel – **1 ex.** –	PUF
MILHAUD X.	Statistique – **1 ex.** –	Belin
MNEIMNÉ R.	Eléments de géométrie : action de groupes – **3 ex.** –	Cassini
MNEIMNÉ R.	Réduction des endomorphismes – **2 ex.** –	Calvage et Mounet
MNEIMNÉ R. **TESTARD F.**	Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques – **5 ex.** –	Hermann
MOISAN J. **VERNOTTE A.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales Analyse : topologie et séries – **3 ex.** –	Ellipses
MOISAN J. **VERNOTTE A.** **TOSEL N.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales Analyse : suites et séries de fonctions – **2 ex.** –	Ellipses

MONIER J.M.	Cours de mathématiques — Analyse 2 MPSI, PCSI, PTSI – **1 ex.** – — Analyse 3 MP, PSI, PC, PT – **1 ex.** – — Analyse 4 MP, PSI, PC, PT – **1 ex.** – — Algèbre 1 MPSI, PCSI, PTSI – **2 ex.** – — Algèbre 2 MP, PSI, PC, PT – **1 ex.** – — Exercices d'analyse MPSI – **1 ex.** – — Exercice d'algèbre et géométrie MP – **1 ex.** –	DUNOD
MUTAFIAN C.	Le défi algébrique — Tome 1 – **3 ex.** – — Tome 2 – **3 ex.** –	VUIBERT
NAGEL E. **NEWMAN J. R.** **GÖDEL K.** **GIRARD J. Y.**	Le théorème de Gödel – **1 ex.** –	SEUIL
NAUDIN P. **QUITTE C.**	Algorithmique algébrique avec exercices corrigés – **1 ex.** –	MASSON
NEVEU J.	Base mathématique du calcul des probabilités – **1 ex.** –	MASSON
NEVEU J.	Martingales à temps discret – **1 ex.** –	MASSON
NIVEN I.	Irrational numbers – **2 ex.** –	MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA
NORRIS J.R.	Markov chains – **1 ex.** –	CAMBRIDGE
NOURDIN Y.	Leçons d'analyse, probabilités, algèbre et géométrie – **1 ex.** –	DUNOD
OPREA J.	Differential geometry – **1 ex.** –	PRENTICE HALL
OUVRARD J.Y.	— Probabilités 1 (capes, agrégation) – **3 ex.** – — Probabilités 2 (maîtrise, agrégation) – **1 ex.** –	CASSINI

PABION J.F.	Elements d'analyse complexe – **2 ex.** –	ELLIPSE
PAPINI O. **WOLFMANN J.**	Algèbre discrète et codes correcteurs – **2 ex.** –	SPRINGER
PARDOUX E.	Processus de Markov et applications – **1 ex.** –	DUNOD
PEDOE D.	Geometry- A comprehensive course – **1 ex.** –	DOVER
PERKO L.	Differential equation and dynamical systems – **1 ex.** –	SPRINGER
PERRIN D.	Cours d'Algèbre – **3 ex.** –	ELLIPSES
PERRIN D.	Cours d'Algèbre – **1 ex.** –	ENSJF
PERRIN D.	Mathématiques d'école – **1 ex.** –	CASSINI
PERRIN D.	Nombres, mesures et géométrie – **1 ex.** –	ELLIPSE
PERRIN-RIOU B.	Algèbre, arithmétique et MAPLE – **3 ex.** –	CASSINI
PETROVŠEK M. **WILF H.S.** **ZEILBERGER D.**	A=B – **1 ex.** –	A.K. PETERS
PEVZNER P.	Computational molecular biology- an algorithmic approach – **1 ex.** –	MIT PRESS
PEYRÉ G.	L'algèbre discrète de la transformée de Fourier – **3 ex.** –	ELLIPSE
PÓLYA G. **SZEGŐ G.**	Problems and Theorems in Analysis — Volume I – **3 ex.** – — Volume II – **3 ex.** –	SPRINGER VERLAG

POMMELLET A.	Agrégation de Mathématiques. Cours d'Analyse – **1 ex.** –	Ellipses
PRASOLOV V.	Polynomials – **1 ex.** –	Springer
PRASOLOV V.	Problèmes et théorèmes d'algèbre linéaires – **3 ex.** –	Cassini
PREPARATA F.P. **SHAMOS M.I.**	Computational geometry - an introduction – **1 ex.** –	Springer
PRESS W. **FLANNERY B.** **TEUKOLSKI S.** **VETTERLING W.**	Numerical recipes in Pascal – **1 ex.** –	Cambridge
QUATERONI A. **SACCO R.** **SALERI F.**	Méthodes numériques – **2 ex.** –	Springer
QUATERONI A. **SALERI F.** **GERVASIO P.**	Calcul scientifique – **2 ex.** –	Springer
QUEFFÉLEC H.	Topologie – **1 ex.** –	Dunod
QUEFFÉLEC H. **ZUILY C.**	Éléments d'analyse – **2 ex.** –	Dunod
QUEFFÉLEC H. **QUEFFELEC M..**	Analyse complexe et applications – **1 ex.** –	Calvage et Mounet
QUEFFÉLEC H. **ZUILY C.**	Analyse pour l'agregation – **4 ex.** –	Dunod
RALSTON A. **RABINOWITCH P**	A first course in numerical analysis – **3 ex.** –	Internatinal Student Edition

RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Cours de Mathématiques spéciales — 1- Algèbre – **7 ex.** – — 2- Algèbre et applications à la géométrie – **8 ex.** – — 3- Topologie et éléments d'analyse – **13 ex.** – — 4- Séries et équations différentielles – **9 ex.** – — 5- Applications de l'analyse à la géométrie – **8 ex.** –	Masson
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Exercices avec solutions — Algèbre – **2 ex.** – — Analyse 1 – **5 ex.** – — Analyse 2 – **7 ex.** –	Masson
RAMIS J.P. **WARUSFEL A.**	Mathématiques - Tout en un pour la licence Niveau 1 – **2 ex.** –	Dunod
RAMIS J.P. **WARUSFEL A.**	Mathématiques - Tout en un pour la licence Niveau 2 – **2 ex.** –	Dunod
RAMIS J.P. **WARUSFEL A.**	Mathématiques - Tout en un pour la licence Niveau 3 – **2 ex.** –	Dunod
RAO C.R.	Linear statistical inference and its application – **1 ex.** –	Wiley
RANDÉ B.	Les carnets indiens de Srinivasa Ramanujan – **1 ex.** –	Cassini
RANDÉ B. **MANSUY R.**	Les clefs pour l'X (2) – **1 ex.** –	Calvage Mounet
RANDÉ B. **TAIEB F.**	Les clefs pour l'X – **1 ex.** –	Calvage Mounet
REINHARDT F. **SOEDER H.**	Atlas des mathématiques – **1 ex.** –	Livre de Poche
REMMERT R.	Classical topics in complex function theory – **1 ex.** –	Springer
RIDEAU F.	Exercices de calcul différentiel – **1 ex.** –	Hermann

RIESZ F. **NAGY SZ. B.**	Leçons d'analyse fonctionnelle – **2 ex.** –	GAUTHIER-VILLARS
RIO E.	Théorie asymptotique des processus aléatoires faiblement dépendants – **2 ex.** –	SPRINGER
RITTAUD, B.	Newton implique Kepler – **2 ex.** –	ELLIPSES
RIVAUD J.	Algèbre (Tome 2) – **1 ex.** –	VUIBERT
RIVOIRARD V. **STOLTZ G.**	Statistique mathématique en action – **3 ex.** –	DUNOD
ROBERT C.	Contes et décomptes de la statistique - Une initiation par l'exemple – **1 ex.** –	VUIBERT
ROLLAND R.	Théorie des séries 2- Séries entières – **1 ex.** –	CÉDIC/NATHAN
ROMAN S.	Field theory – **1 ex.** –	SPRINGER-VERLAG
ROMBALDI J.-E.	Thèmes pour l'agrégation de mathématiques algèbre et géometrie – **4 ex.** –	EDP SCIENCES
ROMBALDI J.-E.	Analyse réelle – **2 ex.** –	EDP SCIENCES
ROMBALDI J.-E.	Mathématiques pour l'agrégation – **2 ex.** –	DEBOECK SUP.
ROTMAN J. J.	An introduction to the theory of groups – **1 ex.** –	SPRINGER-VERLAG
ROUDIER H.	Alèbre linéaire. Cours et exercices – **1 ex.** –	VUIBERT
ROUSSEAU Y. **SAINT-AUBIN Y.**	Mathématiques et technologie – **1 ex.** –	SPRINGER (SUMAT)
ROUVIÈRE F.	Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation – **4 ex.** –	CASSINI

ROUX J.	Initiation à la théorie des graphes – **1 ex.** –	ELLIPSES
RUAUD J.F. **WARUSFEL A.**	Exercices de Mathématiques Algèbre 3 – **2 ex.** –	MASSON
RUDIN W.	Analyse réelle et complexe – **4 ex.** –	MASSON
RUDIN W.	Functional analysis – **3 ex.** –	MC GRAW HILL
RUDIN W.	Real and complex analysis – **2 ex.** –	MC GRAW HILL
SA EARP R. **TOUBIANA E.**	Introduction à la Géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann – **1 ex.** –	CASSINI
SAINSAULIEU L.	Calcul scientifique – **1 ex.** –	DUNOD
SAINT RAYMOND J.	Topologie, calcul différentiel et variable complexe – **1 ex.** –	CALVAGE ET MOUNET
SAKAROVITCH J.	Eléments de théorie des automates – **1 ex.** –	VUIBERT
SAKS S. **ZYGMUND A.**	Fonctions analytiques – **2 ex.** –	MASSON
SAMUEL P.	Géométrie projective – **1 ex.** –	PUF
SAMUEL P.	Théorie algébrique des nombres – **3 ex.** –	HERMANN
SARMANT M.C. **MERLIER T.** **PILIBOSSIAN Ph.** **YAMMINE S.**	Analyse 1 – **1 ex.** –	ELLIPSES
SAVIOZ J.C.	Algèbre linéaire, cours et exercices – **1 ex.** –	VUIBERT
SCHATZMAN M.	Analyse numérique, une approche mathématique – **2 ex.** –	DUNOD

SCHNEIER B.	Applied cryptography – **1 ex.** –	WILEY
SCHWARTZ L.	Analyse — I Topologie générale et analyse fonctionnelle – **4 ex.** – — II Calcul différentiel et équations différentielles – **1 ex.** –	HERMANN
SCHWARTZ L.	Cours d'Analyse — Tome 1 – **2 ex.** – — Tome 2 – **3 ex.** –	HERMANN
SCHWARTZ L.	Méthodes Mathématiques pour les sciences physiques – **1 ex.** –	HERMANN
SEGUINS PAZZIS (de) C.	Invitation aux formes quadratiques – **1 ex.** –	CALVAGE ET MOUNET
SELBERHERR S. **STIPPEL H.** **STRASSER E.**	Simulation of semi-conductor devices and processes – **1 ex.** –	SPRINGER
SERRE D.	Les matrices, théorie et pratique – **3 ex.** –	DUNOD
SERRE J.P.	Cours d'arithmétique – **3 ex.** –	PUF
SHAPIRO H.N.	Introduction to the theory of numbers – **1 ex.** –	DOVER
SIDLER J.C.	Géométrie Projective – **1 ex.** –	DUNOD
SILVESTER J. R.	Geometry, ancient and modern – **1 ex.** –	OXFORD UNIV. PRESS
SKANDALIS G.	Topologie et analyse – **1 ex.** –	DUNOD
SKANDALIS G.	Agrégation interne : Algèbre générale, algèbre linéaire et un peu de géométrie – **2 ex.** –	CALVAGE & MOUNET
STANLEY R.P.	Enumerative combinatorics Volume I – **2 ex.** –	WADDWORTH AND BROOKS

STEIN E.	Functional Analysis – **2 ex.** –	PRINCETON
STEIN E.	Complex Analysis – **2 ex.** –	PRINCETON
STEIN E.	Fourier Analysis – **2 ex.** –	PRINCETON
STEIN E.	Real Analysis – **2 ex.** –	PRINCETON
STEWART I.	Galois theory – **2 ex.** –	CHAPMAN AND HALL
SZPIRGLAS A.	Exercices d'algèbre – **1 ex.** –	CASSINI
SZPIRGLAS A. *et al.*	Mathématiques : Algèbre L3 – **1 ex.** –	PEARSON
TAUVEL P.	Cours de Géométrie – **1 ex.** –	DUNOD
TAUVEL P.	Cours d'algèbre – **1 ex.** –	DUNOD
TAUVEL P.	Corps commutatifs et théorie de Galois – **1 ex.** –	CALVAGE ET MOUNET
TAUVEL P.	Mathématiques générales pour l'agrégation – **1 ex.** –	MASSON
TAUVEL P.	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Algèbre 2 – **2 ex.** –	MASSON
TAUVEL P.	Analyse complexe pour la licence – **2 ex.** –	DUNOD
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres T 1 – **1 ex.** –	S. M. F.
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres – **2 ex.** –	BELIN

TENENBAUM G. **MENDÈS-FRANCE M.**	Les nombres premiers – **1 ex.** –	QUE SAIS-JE ? PUF
TENENBAUM G. **WU J.**	Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres T 2 – **1 ex.** –	S. M. F.
TESTARD F.	Analyse mathématique – **3 ex.** –	CALVAGE ET MOUNET
TEYTAUD O. **ANTONINI C.** **BORGNAT P.** **CHATEAU A.** **LEBEAU E.**	Les maths pour l'agreg – **1 ex.** –	DUNOD
TISSERON C.	Géométries affine, projective et euclidienne – **1 ex.** –	HERMANN
TISSIER A.	Mathématiques générales : exercices avec solutions – **4 ex.** –	BRÉAL
TITCHMARSH E.C.	The theory of functions – **2 ex.** –	OXFORD UNIV. PRESS
TORTRAT A.	Calcul des probabilités et introduction aux processus aléatoires – **1 ex.** –	MASSON
TRIGNAN J.	Constructions géométriques et courbes remarquables – **1 ex.** –	VUIBERT
TRUSS J.-K..	Foundations of mathematical analysis – **1 ex.** –	OXFORD
ULMER F.	Théorie des groupes – **3 ex.** –	ELLIPSES
ULMER F.	anneaux, corps, résultant – **2 ex.** –	ELLIPSES
VALIRON G.	Cours d'analyse mathématique — I Théorie des fonctions – **2 ex.** – — II Équations fonctionnelles - Applications – **2 ex.** –	MASSON
VAUTHIER J. **PRAT J-J.**	Cours d'Analyse Mathématique de l'Agrégation – **3 ex.** –	MASSON

VERGNAUD D.	Exercices et problèmes de cryptographie – **2 ex.** –	DUNOD
VINBERG E. B.	A course in algebra – **1 ex.** –	AMS
WAGSCHAL C.	Distributions, analyse microlocale, équations aux dérivées partielles – **2 ex.** –	HERMANN
WARUSFEL A.	Structures algébriques finies – **2 ex.** –	CLASSIQUES HACHETTE
WARUSFEL A. **ATTALI P.** **COLLET M.** **GAUTIER C.** **NICOLAS S.**	Mathématiques — Analyse – **1 ex.** – — Arithmétique – **1 ex.** – — Géométrie – **1 ex.** – — Probabilités – **1 ex.** –	VUIBERT
WEST D. B.	Introduction to graph theory – **1 ex.** –	PRENTICE HALL
WHITTAKER E.T. **WATSON G.N.**	A course of modern analysis – **3 ex.** –	CAMBRIDGE
WILF H.	Generatingfunctionology – **1 ex.** –	ACADEMIC PRESS
WILF H.	Algorithms and complexity – **1 ex.** –	A.K. PETERS
WILLEM M.	Analyse fonctionnelle élémentaire – **3 ex.** –	CASSINI
WILLEM M.	Principes d'analyse fonctionnelle – **3 ex.** –	CASSINI
YALE P.B.	Geometry and Symmetry – **1 ex.** –	DOVER
YGER A.	Analyse complexe – **2 ex.** –	ELLIPSES
YGER A. *et al.*	Mathématiques appliquées L3 – **1 ex.** –	PEARSON

YOUNG D.M. **GREGORY R.T.**	A survey of numerical mathematics – **1 ex.** –	DOVER
ZAVIDOVIQUE M.	Un max de math – **1 ex.** –	CALVAGE ET MOUNET
ZÉMOR G.	Cours de cryptographie – **3 ex.** –	CASSINI
ZUILY C.	Éléments de distributions et d' équations aux dérivées partielles – **2 ex.** –	DUNOD
ZUILY C. **QUEFFÉLEC H.**	Éléments d'analyse pour l'agrégation – **1 ex.** –	MASSON
ZUILY C. **QUEFFÉLEC H.**	Problèmes de distributions – **3 ex.** –	CASSINI

7.2 Bibliothèque numérique

Pour l'épreuve de leçons de mathématiques, les candidats peuvent utiliser la bibliothèque du concours. La liste des ouvrages disponibles se trouve dans le rapport du concours externe. En 2021, les candidats ont pu utiliser une bibliothéque numérique pendant la préparation de l'épreuve de modélisation. La liste des livres disponibles actualisée en 2022 est décrite ci-dessous.

- Grégoire Allaire : Analyse numerique et optimisation (Éditions de l'École polytechnique)
- Gilles Bailly-Maitre : Arithmétique et cryptologie (Ellipses, 2e édition)
- Philippe Barbe et Michel Ledoux - Probabilité (EDP Sciences)
- Sylvie Benzoni-Gavage : Calcul différentiel et équations différentielles (Dunod, 2e édition)
- Florent Berthelin : Équations différentielles (Cassini)
- Frédéric Bertrand, Myriam Maumy Bertrand : Initiation à la statistique avec R (Dunod)
- Alin Bostan et al. : Algorithmes efficaces en calcul formel (Hal.inria.fr)
- Richard Brent, Paul Zimmermann : Modern Computer Arithmetic (Cambridge University Press)
- Hervé Carrieu : Probabilité (EDP Sciences)
- Alexandre Casamayou et al. : Calcul mathématique avec Sage
- Marie-Line Chabanol, Jean-Jacques Ruch : Probabilités et statistiques (Ellipses)
- Djalil Chafai, Pierre-André Zitt : Probabilités, préparation à l'agrégation interne
- Djalil Chafai, Florant Malrieu : Recueil de modèles aléatoires (HAL Id : hal-01897577, version 3)
- Jean-Pierre Demailly - Analyse numérique et équations différentielles (EDP Sciences, 4e édition)
- Michel Demazure : Cours d'algèbre (Cassini)
- Laurent di Menza : Analyse numérique des équations aux dérivées partielles (Cassini)
- Jérôme Escoffier : Probabilités et statistiques (Ellipses, 3e édition)
- Francis Filbet : Analyse numérique (Dunod, 2e édition)
- Loïc Foissy et Alain Ninet : Algèbre et calcul formel (Ellipses)
- Olivier Garet et Aline Kurtzmann : De l'intégration aux probabilités (Ellipses, 2e édition)
- Thierry Goudon : Mathématiques pour la modélisation et le calcul scientifique (ISTE)
- Jean-Baptiste Hiriart-Urruty : Optimisation et analyse convexe (EDP Sciences)
- John Hubbard, Beverly West : équations différentielles et systèmes dynamiques (Cassini)
- Laurent Le Floch et Frédéric Testard : Probabilités 1 (Calvage et Mounet)
- Thierry Meyre : Probabilités, cours et exercices corrigés. Tome 1 (Calvage et Mounet
- Thierry Meyre : Probabilités, cours et exercices corrigés. Tome 2 (Calvage et Mounet)
- Jean-Yves Ouvrard : Probabilités. tome 1 (Cassini, 2e édition)
- Jean-Yves Ouvrard : Probabilités. tome 2 (Cassini, 2e édition)
- Jean-Étienne Rombaldi : Analyse matricielle (EDP Sciences, 2e édition)
- François Rouvière : Petit guide de calcul différentiel (Cassini, 4e édition)
- Victor Shoup : Computational introduction to number theory and algebra (Cambride University Press)
- Damien Vergnaud : Exercices et problèmes de cryptographie (Dunod, 3e édition)