MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE,
DE LA JEUNESSE
ET DES SPORTS

*Liberté*
*Égalité*
*Fraternité*

**Concours de recrutement du second degré**

**Rapport de jury**

**Concours : Agrégation externe**

**Section : Mathématiques**

**Session 2021**

Rapport de jury présenté par : Claudine Picaronny
Présidente du jury

# Table des matières

# Chapitre 1

# Introduction

Le rapport de jury répond à deux objectifs : le premier est d'établir un compte-rendu de la session passé, le second est de préparer la prochaine session. Aussi, le lecteur y trouvera

- un bilan de la session 2021 qui restitue, au travers de quelques statistiques, la physionomie d'ensemble des candidats et des admis, en termes de profils et de performances.
- une description de l'esprit dans lequel le jury entend aborder le concours de l'agrégation externe de mathématiques et la manière dont il conçoit les épreuves.
- un commentaire détaillé de chacune des épreuves, discutant les réalisations de l'année et détaillant les attentes du jury.

Ce rapport peut être vu comme un guide pratique; il se veut utile aux futurs candidats afin de les aider à se préparer au mieux pour les épreuves qui les attendent. S'il mentionne des lacunes et défauts constatés sur lesquels des efforts spécifiques mériteraient d'être faits, il cherche surtout à faire comprendre la nature des attentes, avec l'intention d'accompagner la préparation au concours. *Le jury considère que ce rapport est précis et détaillé quant à ses attentes et l'engage dans son évaluation.* Le jury recommande donc aux candidats de tous profils, ainsi qu'aux centres de préparation et à leurs intervenants, d'en faire une lecture attentive et de bien tenir compte des prescriptions qui y sont faites.

Le site officiel de l'agrégation externe de mathématiques est accessible à l'adresse agreg.org. Il est régulièrement mis à jour en fonction de l'actualité du concours. Les visiteurs y trouveront des conseils, des liens pertinents, des archives (notamment les sujets d'écrits et leurs corrigés) et des renseignements pratiques concernant la session à venir. En particulier, les futurs candidats peuvent trouver sur ce site la `ClefAgreg` qui leur permettra de se familiariser avec l'environnement informatique qu'ils rencontreront pour l'épreuve de modélisation [1]. Cette épreuve, sur texte et où la production d'illustrations informatiques est attendue, est assez spécifique; s'y préparer suffisamment tôt permet de bien appréhender ses spécificités et aide nécessairement à renforcer les capacités de synthèse sur l'ensemble du programme. De plus, il est aussi possible d'y consulter une série de vidéos, réalisée par le jury, qui détaille le déroulement des épreuves de leçons et en précise les attentes.

Enfin, le jury rappelle qu'une réunion est traditionnellement organisée en début d'année universitaire sous l'égide des sociétés savantes de mathématiques et d'informatique (Société Mathématique de France, Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles, Société Informatique de France) pour évoquer le bilan et les perspectives du concours. Cette réunion est publique, préparateurs et candidats de tous horizons y sont bienvenus.

1. Précisément, on trouvera à l'URL http://clefagreg.dnsalias.org/8.0/ un guide décrivant de manière détaillée les étapes de construction de cette clef.

# Chapitre 2

# Déroulement du concours et statistiques

## 2.1 Déroulement du concours

Le concours comprend deux épreuves écrites d'admissibilité — une composition de mathématiques générales et une composition d'analyse-probabilités — et trois épreuves orales d'admission : algèbre et géométrie (mathématiques pour l'option informatique) , analyse et probabilités (informatique pour l'option informatique), modélisation. Les candidats ont eu le choix parmi quatre options :

— probabilités et statistiques,
— calcul scientifique,
— algèbre et calcul formel,
— informatique

Les trois premières ne diffèrent que par les épreuves de modélisation, alors que les trois épreuves orales de l'option informatique sont spécifiques. En effet, les épreuves d'admission de cette option informatique consistent en une épreuve de leçon de mathématiques (sur des thèmes d'algèbre-géométrie et d'analyse-probabilités), une épreuve de leçon d'informatique et une épreuve de modélisation, sur des sujets propres aux sciences informatiques.

Les épreuves écrites de l'agrégation externe de mathématiques 2021 se sont déroulées

- le mercredi 3 mars 2021 pour l'épreuve de mathématiques générales,
- le jeudi 4 mars 2021 pour l'épreuve d'analyse et probabilités.

La liste d'admissibilité a été publiée le mardi 11 mai 2021. Le concours fait l'objet de conventions internationales qui lient la France, le Maroc et la Tunisie : les sujets d'écrit servent aussi pour l'admissibilité aux agrégations de mathématiques en Tunisie et au Maroc. La délibération du jury d'admissibilité est ainsi menée conjointement avec les présidents des agrégations marocaine et tunisienne. Les barres d'admissibilité pour les étudiants de ces deux pays sont au moins égales à celle de la barre fixée pour le concours français.

Les épreuves d'admission se sont déroulées du samedi 19 juin au dimanche 4 juillet 2021. La liste d'admission a été publiée le lundi 5 juillet 2021. Le déroulement et l'organisation d'un concours qui soumet plus de 750 candidats admissibles à trois épreuves orales, avec des options variées, une infrastructure informatique complexe, est une mécanique de précision, astreinte de surcroît à des exigences exceptionnelles de rigueur et d'égalité de traitement. S'est ajouté pour cette session le respect de conditions sanitaires contraignantes. Sa réussite repose sur l'engagement des équipes de l'établissement et du rectorat qui en ont la charge.

Le personnel du lycée Pasteur, qui a accueilli les épreuves orales, et les équipes du rectorat de l'académie de Lille ont offert au jury et aux candidats des conditions de travail excellentes et ont assuré une organisation performante, avec beaucoup de gentillesse et de patience. Ce rapport adresse à toutes ces équipes les plus chaleureux remerciements du jury et relaie les nombreux messages de reconnaissance exprimés par les candidats pour la qualité et la chaleur de l'accueil qu'ils ont reçus.

### 2.1.1 le programme

Le concours externe de l'agrégation a pour vocation de recruter des professeurs agrégés destinés à exercer dans l'enseignement secondaire (lycées d'enseignement général et technologique et, exceptionnellement, collèges) ou dans l'enseignement supérieur (universités, instituts universitaires de technologie, grandes écoles, classes préparatoires aux grandes écoles, sections de techniciens supérieurs). Le jury estime donc que le niveau visé devrait permettre au professeur agrégé d'intervenir sereinement et efficacement sur le créneau « bac−3/bac+3 » ; cet objectif calibre la conception du programme et les critères d'évaluation.

Le programme et la nature des épreuves, écrites et orales, font l'objet de publications sur le site officiel de ministère de l'Éducation nationale http://www.devenirenseignant.gouv.fr. Le programme 2022, disponible à l'URL http://media.devenirenseignant.gouv.fr/file/agregation_externe/33/7/p2022_agreg_ext_mathematiques_1402337.pdf est identique au programme 2021 et se contente d'acter la disparition de l'option informatique.

Le jury s'engage, bien sûr, à respecter le programme. Ce programme n'est pas exhaustif, il résulte d'un compromis et des résultats mathématiques « importants »manquent au programme. Il est tout à fait possible que des candidats aient connaissance de ces notions avancées, souhaitent en faire mention et proposer des excursions hors des limites du programme. Le jury saura s'adapter et apprécier de telles propositions. Toutefois, elles ne sont absolument pas nécessaires pour prétendre aux notes maximales.

### 2.1.2 Après la réussite au concours, la carrière d'enseignant

Le jury conseille aux candidats de se préoccuper suffisamment tôt des questions liées à la gestion de leur carrière auxquelles ils seront confrontés en cas de succès au concours. Le site agreg.org procure des informations complémentaires sur les textes de référence concernant les modalités d'affectation et d'organisation de l'année de stage et sur le statut des doctorants ou des docteurs agrégés qui suscite des questions fréquentes et demande une vigilance particulière.

Tout en étant pleinement conscient des enjeux de couverture des besoins d'enseignement, le jury recommande qu'une attitude positive soit réservée aux demandes de report ou de détachement de jeunes docteurs ou de doctorants en fin de thèse. Des dispositions restrictives, dont la motivation à très court terme peut se comprendre, obèrent les perspectives des doctorants agrégés et sont susceptibles de gravement perturber le fonctionnement et l'attractivité des formations de l'enseignement supérieur en mathématiques, avec des conséquences qui peuvent s'avérer néfastes à plus long terme. Comme la préparation au concours de l'agrégation joue, traditionnellement, un rôle structurant majeur sur l'ensemble de ces formations, on peut craindre un impact négatif sur les parcours conduisant vers la recherche en mathématiques, domaine où le pays excelle au tout meilleur niveau international, tout comme sur l'attractivité du concours.

### 2.1.3 La session 2022

Le concours 2022 voit disparaitre l'option informatique, en raison dela création de l'agrégation d'informatique. Les oraux se dérouleront au lycée Kléber à Strasbourg.

| Année | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 | 2019 | 2020 | 2021 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Concours externe | 391 | 395 | 457 | 467 | 457 | 381 | 391 | 387 | 383 |
| Concours spécial | | | | | 15 | 16 | 16 | 16 | 16 |

Nombre de postes ouverts

## 2.2 Commentaires généraux et statistiques sur la session 2021

### 2.2.1 Commentaires généraux

Le nombre de postes ouverts est relativement stable depuis pluiseurs années. Pour 2021, il est de 383. Le recrutement externe est par ailleurs complété par un concours externe spécial, réservé à des candidats titulaires d'un doctorat. Seize postes étaient ouverts à ce titre. Ce concours indépendant, mais dont les épreuves sont menées concomitamment à celle du concours standard, fait l'objet d'un rapport spécifique.

Cette offre reste confrontée à un marché atone : la faiblesse du nombre de candidats « étudiants », auxquels ce concours devrait prioritairement s'adresser, en affecte la physionomie. Le fait que le nombre d'étudiants soit significativement moindre que le nombre de postes ouverts au concours, sans rien enlever aux mérites et aux qualités des candidats relevant d'autres catégories, ne peut être satisfaisant.

#### Admissibilité

Le jury a déclaré admissibles 762 candidats à l'issue des deux épreuves d'admissibilité (Mathématiques générales et Analyse-Probabilités). Le premier admissible a une moyenne de 19,25/20 et le dernier une moyenne de 5,4/20. Ce volume et ce seuil sont semblables à ceux des années passées.

Le ratio admissibles/postes de l'ordre de 0,5 laisse la possibilité de pourvoir les postes ouverts au concours. La décision finale s'apprécie sur l'ensemble du concours ; tous les candidats admissibles doivent tenter de profiter pleinement de cette possibilité. Un score modeste à l'écrit peut être compensé par des qualités techniques et pédagogiques constatées pendant les épreuves orales. Certains candidats parmi les plus mal classés des épreuves écrites tirent profit de cette opportunité : parmi les 200 premiers, une douzaine de candidats avait une moyenne d'écrit inférieure à 8/20 et une bonne vingtaine des reçus avaient une moyenne inférieure à 6,75/20 aux épreuves d'admissibilité.

Enfin, l'admissibilité au concours et les examens universitaires relèvent de processus d'évaluation distincts. Les Universités, garantes de la qualité de leurs diplômes ne jugent pas opportun de délivrer le M2 à une fraction des candidats admissibles.

La conception des sujets est guidée par la volonté de valoriser les candidats ayant investi dans une préparation sérieuse. Chacun des sujets propose des questions qu'on pourrait qualifier de « classiques », très certainement proches d'exercices qu'un titulaire de M2 a forcément traités durant sa formation universitaire. Les deux sujets, de conceptions indépendantes, ont conduit à des prestations qui manifestent les mêmes traits saillants et qui doivent faire l'objet d'une attention particulière dans les préparations :

— une rédaction et une présentation négligées sur un trop grand nombre de copies. Le jury accorde une attention particulière à la qualité de la rédaction. Un item spécifique du barème valorise cette compétence.
— des raisonnements fragiles, avec des erreurs de logique grossières (formaliser une contraposée par exemple). Les raisonnements par récurrence sont particulièrement laborieux et trop souvent mal formalisés.

— Une forte proportion de candidats a manqué de méthodes pour une rédaction efficace. Plus que la technicité, c'est bien davantage le volume abordé qui a départagé les candidats.

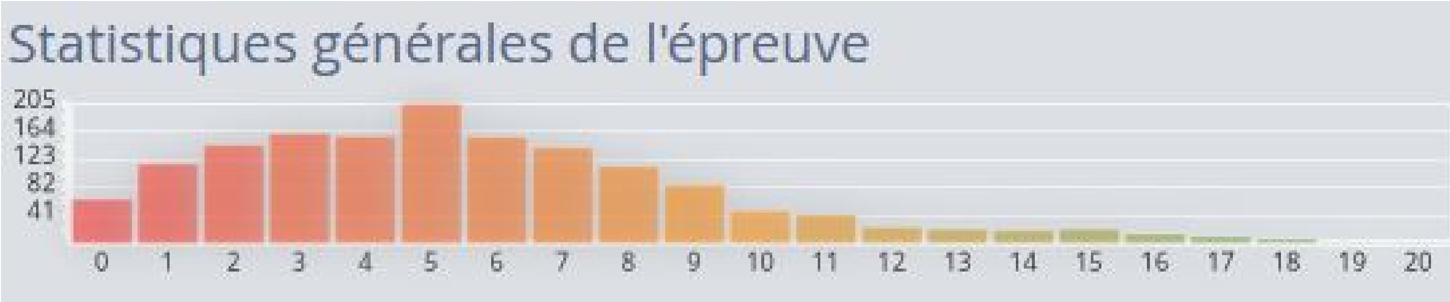



FIGURE 2.1 – Répartition des notes de l'épreuve écrite de mathématiques générales, agrégations France-Maroc-Tunisie


FIGURE 2.2 – Répartition des notes de l'épreuve écrite d'analyse et probabilités, agrégations France-Maroc-Tunisie

### Oraux

*Convocations* La procédure de convocation aux épreuves d'admission s'effectue en deux temps. Tout d'abord, les candidats admissibles reçoivent une convocation — dite « convocation administrative »— par courrier. Cette convocation indique les trois jours de passage prévus pour leurs épreuves d'admission, mais n'en précise pas les horaires. Pour connaître les horaires précis d'interrogation, les candidats doivent ensuite se connecter sur le site sécurisé de l'agrégation de mathématiques, en indiquant leur numéro de candidat : cette procédure permet de s'assurer de la volonté de participer aux épreuves et attribue alors les horaires de passage. L'application a été fermée, comme les années passées, la veille du début des oraux. Les candidats qui n'avaient pas ainsi édité leurs horaires devaient, par défaut, se présenter à 6h30 le premier jour de leur convocation sur les lieux du concours, sous peine d'être déclarés non présents. Cette procédure bien établie sera reconduite pour la session 2022.

*Fraude* Le jury a devoir de vigilance aux risques de fraude. En particulier, tout moyen de communication ou tout support de stockage de données (téléphone, montre connectée, clef USB...) est strictement interdit lors des épreuves, écrites et orales, sous peine d'exclusion du concours. Tous les documents personnels type fiche résumé, plan préparé, notes de cours manuscrites ou dactylographiées, etc. sont aussi prohibés [1].

*Conditions de passage des oraux* Lors des passages des candidats, le jury ne dispose d'aucune information particulière : les notes d'écrit, les notes obtenues aux oraux précédents, le statut ou la profession,

1. Pour les épreuves orales, un dispositif de consigne, aux risques et périls des déposants, est assuré à l'entrée du bâtiment qui héberge les épreuves et permet, pour les candidats comme pour le public, de déposer tout matériel de communication ou de stockage de données. La possession d'un tel matériel dans les salles de préparation peut conduire à l'exclusion du concours ou à l'interdiction d'assister aux épreuves.

etc. demeurent inconnus des commissions d'évaluation. Le jury note selon les mêmes critères, avec une grille stricte commune à toutes les commissions, toutes les personnes à partir de leur seule prestation. Des tests statistiques sont faits très régulièrement pour guider l'harmonisation entre les commissions et la présidence du concours veille sur ces indicateurs. En outre, des réunions régulières entre les différentes commissions permettent d'échanger sur la notation et de rester vigilant pour réduire les éventuels écarts dans l'évaluation. Le jury a la volonté d'accueillir les candidats de manière positive et bienveillante et cherche à valoriser toutes les connaissances, le travail de préparation et les aspects positifs des prestations des candidats.

*Auditeurs* Les conditions sanitaires particulières n'ont pas autorisé la présence d'auditeurs lors des oraux de la session 2021. Néanmoins, le jury rappelle que les épreuves d'admission d'un concours ont un caractère public. Ce principe général s'applique évidemment au concours de l'agrégation de mathématiques et les candidats ne peuvent s'opposer à la présence d'auditeurs (ce qui serait quelque peu paradoxal pour des candidats à des fonctions d'enseignant). Le jury incite très fortement les futurs candidats et les préparateurs à venir assister aux épreuves et à s'appuyer sur cette expérience pour se préparer au mieux aux épreuves ; c'est un investissement qui ne peut être que payant. Une attitude et une tenue correctes sont exigées des visiteurs. L'accès aux salles d'interrogation pourra ne pas être autorisé à un auditeur dont la tenue serait estimée inappropriée ou le comportement susceptible de perturber l'interrogation.

### Résultats

À l'issue des épreuves orales, 327 candidats ont été déclarés admis ; le premier admis a eu une moyenne de 18,75/20, le dernier admis une moyenne de 8,1/20. Ce résultat est la marque de la grande stabilité du concours : la barre d'admission est inchangée depuis 2015 et le nombre de lauréats varie peu depuis la session 2016. Compte tenu du relativement faible nombre de candidats issus des préparations universitaires, le jury se réjouit de cette stabilité, qui ne fait, bien entendu, aucune concession à la qualité des reçus.

Le jury rappelle qu'un concours n'est pas un examen : le but n'est pas de valider des connaissances. Les notes attribuées ne sont pas des jugements de valeur sur les candidats et n'ont aucun caractère « absolu » ; il ne s'agit que de discriminer au mieux une population donnée dans un contexte donné et à un instant donné. Toute la plage de notes de 0 à 20 est utilisée. Il en résulte que des candidats peuvent recevoir des notes très basses ; elles ne sont que le reflet d'une prestation dans ce contexte particulier. Elles n'enlèvent rien à l'estime que le jury porte aux efforts de préparation des candidats, ne préjugent en rien de leurs qualités humaines ou professionnelles.

Le jury insiste sur le fait qu'il convient de passer toutes les épreuves. Tous les ans, on déplore l'abandon de candidats qui étaient en position d'être reçus. Le stress, les sentiments de frustration à l'issue d'une interrogation et la fatigue ne peuvent être négligés. Mais ils ne doivent pas prendre le pas sur l'engagement dans le concours ; le jury encourage les candidats à se présenter aux épreuves suivantes et à s'investir jusqu'au terme du concours

Les moyennes et écarts-types des présents à l'oral sur les différentes épreuves sont résumés dans les tableaux ci-dessous :

| | Oral Alg-G | Oral Ana-P | Oral Mod | Ecrit MG | Ecrit AP |
|---|---|---|---|---|---|
| moyenne | 7,25 | 7,27 | 6,6 | 8,86 | 8,79 |
| écart-type | 5,6 | 5,8 | 5,4 | 3 | 3,1 |

*Moyennes et écarts-types des candidats présents à l'ensemble des épreuves*

| | Oral Alg-G | Oral Ana-P | Oral Mod | Ecrit MG | Ecrit AP |
|---|---|---|---|---|---|
| moyenne | 12,4 | 12,6 | 11,5 | 11,1 | 10,9 |
| écart-type | 3,9 | 4,1 | 4,1 | 3 | 3,1 |

*Moyennes et écarts-types des candidats admis*

Ces données offrent l'occasion de rappeler le conseil de ne négliger aucune des épreuves. Les épreuves de leçons et l'épreuve de modélisation mettent en valeur des qualités, techniques et pédagogiques, différentes. L'épreuve de modélisation, avec un temps d'exposé « libre »conséquent, donne beaucoup d'autonomie au candidat. Elle requiert des capacités de synthèse importantes puisque les textes font appel à des notions présentes dans l'ensemble du programme et mettent les énoncés « en situation ». De plus, il est souvent valorisant de savoir illustrer sur ordinateur un propos mathématique et des candidats en tirent parti pour produire des prestations originales et scientifiquement profondes. Mais, cette compétence ne s'improvise pas ; elle réclame un minimum de préparation en amont du concours. De manière générale, les épreuves orales demandent une certaine pratique et la manifestation d'un certain recul scientifique, qui ne peuvent résulter que d'un travail préparatoire de fond. Il est sûrement profitable de s'exercer au concours dans son ensemble tout au long de l'année, une partie des exercices proposés à l'écrit se rapprochant d'ailleurs de questions posées à l'oral et le recul gagné dans la préparation à l'oral ne pouvant être que bénéfique aux prestations écrites.

On résume dans le tableau ci-dessous l'évolution des barres d'admission depuis 2008 :

| Année | Nombre de postes attribués | Barre d'admission (/20) |
|---|---|---|
| 2021 | 327 | 8,1 |
| 2020 | 325 | |
| 2019 | 308 | 8,1 |
| 2018 | 315 | 8,1 |
| 2017 | 305 | 8,1 |
| 2016 | 304 | 8,1 |
| 2015 | 274 | 8,1 |
| 2014 | 275 | 8,48 |
| 2013 | 323 | 7,95 |
| 2012 | 308 | 8,1 |
| 2011 | 288 | 9,33 |
| 2010 | 263 | 9,8 |
| 2009 | 252 | 10,15 |
| 2008 | 252 | 10,1 |

Le recrutement de professeurs agrégés de mathématiques obéit à des critères de qualités scientifiques et pédagogiques, afin que les personnels recrutés soient en mesure de répondre efficacement aux missions actuellement données aux agrégés qui sont de pouvoir exercer sur l'ensemble du créneau « bac−3/bac+3 ». Pour cette session, le minimum requis correspond à un score total de 162/400. Il correspond à la barre retenue sur les cinq dernières années, avec un nombre de reçus comparable. Cette stabilité du concours est encourageante et montre, avec les très bonnes prestations de la tête du concours, le maintien du niveau des formations universitaires. Le tableau suivant donne une indication sur la répartition des notes. On observera aussi que 211 candidats ont une moyenne supérieure ou égale à 10/20, une donnée à mettre en regard des conclusions des sessions 2008 et 2009 où les 252 admis avaient franchi cette note moyenne.

| Rang | Moyenne |
|---|---|
| 1 | 18,75 |
| 1-10 | 18,75-17,75 |
| 10-50 | 17,75-14,7 |
| 50-100 | 14,7–12,75 |
| 100-200 | 12,75–10,2 |

Réussir le concours de l'agrégation externe requiert un minimum de préparation et cette stabilité repose d'abord sur l'engagement et la qualité des formations universitaires. L'impossibilité de pourvoir les postes témoigne de l'insuffisance patente et préoccupante d'une population étudiante souhaitant s'orienter vers l'enseignement des mathématiques, puisqu'on compte seulement 260 candidats environ issus des préparations universitaires. Cette faiblesse du vivier résulte de la combinaison d'une réduction des effectifs inscrits en L3 de mathématiques, et de la diversification des débouchés des études universitaires en mathématiques, qui dépassent largement le seul emploi académique puisque trois diplômés d'un Master en mathématiques sur quatre travaillent dans le secteur privé (Source : Étude de l'impact socio-économique des mathématiques en France, étude menée en 2015 par CMI).

Dans cette configuration particulière, le concours externe peut offrir une réelle opportunité de promotion pour des professeurs certifiés. Déplorer la faiblesse du vivier de candidats étudiants n'empêche pas le jury d'être particulièrement respectueux des efforts des enseignants en poste dans le secondaire qui se confrontent à ce concours. Ils forment de très loin la catégorie la plus importante parmi les inscrits et représentent un peu moins de 30% des admissibles environ.

Le jury n'a nul doute que l'immense majorité de ces certifiés est certainement constituée d'excellents enseignants de mathématiques, même si les résultats obtenus à ce concours leur semblent parfois ne pas être à la hauteur de leur investissement. Il est clair pour le jury que l'on ne peut pas être admissible et se présenter aux épreuves orales de ce concours sans avoir acquis des compétences techniques qui dépassent largement celles de la pratique professionnelle de l'enseignant certifié. Cependant, le niveau d'exigence technique du concours leur laisse le concours difficile d'accès. Le jury souhaite accueillir chaleureusement ces collègues méritants et, même si les résultats sont en-deçà de leurs espoirs, leur renouvelle tous ses encouragements. Le volume de près de 1200 enseignants inscrits à un concours aussi exigeant est significatif d'une réelle volonté de progression, qui mériterait d'être soutenue par un nombre accru de congés formation.

Depuis quelques années, le jury annonce à l'avance les leçons qui seront proposées aux candidats lors de la session à venir. Ainsi on trouvera en annexe de ce présent rapport la liste des leçons pour la session 2022. Cette pratique s'inscrit dans la logique d'aider les candidats à bien se préparer et à ne leur tendre aucun piège. Le jury rappelle que tous les couplages sont *a priori* possibles et qu'il veille scrupuleusement à ce que l'apparition des intitulés de leçons soit équiprobable dans l'ensemble des sujets proposés. En modélisation, la conception et la sélection des textes proposés rend tout aussi hasardeuse toute stratégie d'impasse sur une partie du programme des options.

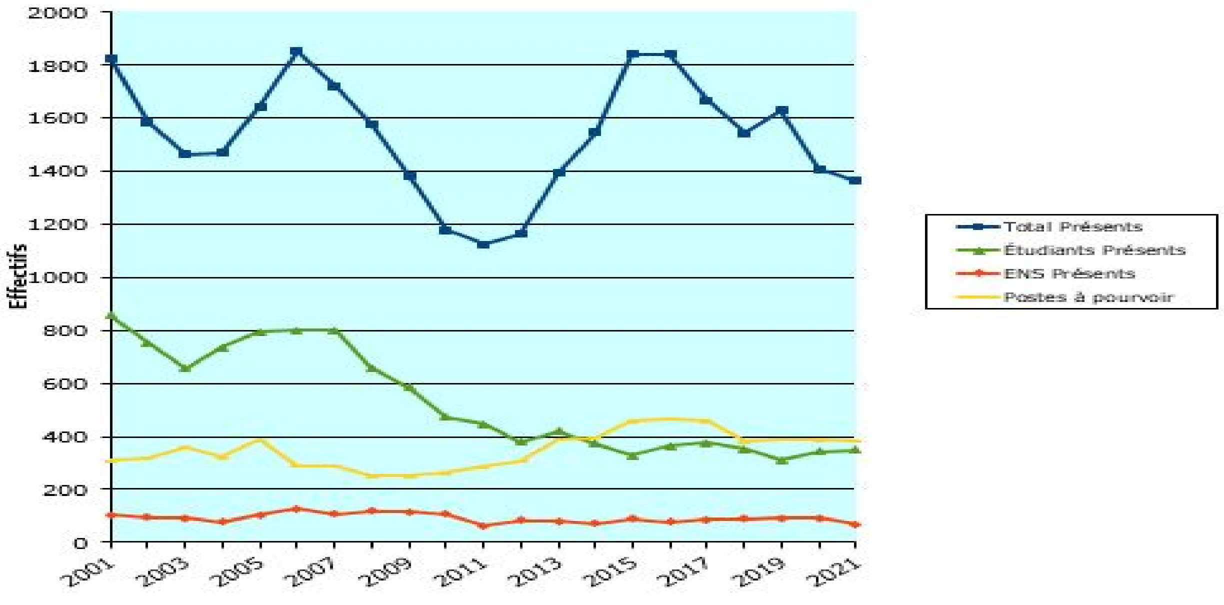
### 2.2.2 Données statistiques diverses

Les tableaux et graphiques suivants présentent un bilan statistique du concours, selon le statut des candidats, leur diplôme, leur genre, leur origine géographique, leur âge. Ces statistiques portent sur les candidats qui peuvent être admis au concours et n'incluent pas les étudiants marocains et tunisiens.

**Effectifs détaillés.** On observe un tassement du nombre des inscrits qui passe sous la barre des 3000. De manière plus positive, le nombre de présents à l'écrit reste stable, tout comme le nombre d'étudiants et celui des candidats normaliens. Le jury rappelle son attachement à la justification historique commune aux Écoles Normales Supérieures, et le contrat implicite de leurs élèves qui était, en contrepartie de leur statut et de leur rémunération, de passer l'agrégation (source : Rapport public de la Cour des comptes 2012). Leur participation contribue au rôle structurant du concours sur les formations universitaires en mathématiques et à l'excellence de la discipline au niveau international. Le jury souhaite donc que les responsables d'études des Écoles Normales Supérieures restent conscients de ces enjeux et encouragent les élèves à se préparer et à passer le concours.

| Année | Total Inscrits | Total Présents | Étudiants Présents | ENS Présents | Postes à pourvoir | Présents par poste |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2001 | 2663 | 1828 | 857 | 105 | 310 | 5,9 |
| 2002 | 2343 | 1584 | 753 | 95 | 320 | 5,0 |
| 2003 | 2217 | 1463 | 657 | 93 | 360 | 4,1 |
| 2004 | 2333 | 1470 | 735 | 76 | 321 | 4,6 |
| 2005 | 2560 | 1644 | 795 | 105 | 388 | 4,2 |
| 2006 | 2849 | 1853 | 800 | 129 | 290 | 6,4 |
| 2007 | 2801 | 1722 | 800 | 106 | 290 | 5,9 |
| 2008 | 2491 | 1579 | 659 | 119 | 252 | 6,3 |
| 2009 | 2351 | 1384 | 585 | 116 | 252 | 5,5 |
| 2010 | 2332 | 1177 | 474 | 106 | 263 | 4,5 |
| 2011 | 2500 | 1124 | 445 | 62 | 288 | 3,9 |
| 2012 | 2673 | 1163 | 379 | 82 | 308 | 3,8 |
| 2013 | 2673 | 1393 | 420 | 81 | 391 | 3,6 |
| 2014 | 3001 | 1546 | 371 | 72 | 395 | 3,9 |
| 2015 | 3252 | 1841 | 328 | 89 | 457 | 4,0 |
| 2016 | 3525 | 1841 | 364 | 78 | 467 | 3,9 |
| 2017 | 3582 | 1668 | 374 | 86 | 457 | 3,6 |
| 2018 | 3285 | 1545 | 352 | 89 | 381 | 4,1 |
| 2019 | 2787 | 1628 | 309 | 92 | 391 | 4,2 |
| 2020 | 2710 | 1409 | 344 | 93 | 387 | 3,6 |
| 2021 | 2823 | 1363 | 348 | 68 | 383 | 3,6 |

*Évolution du nombre de présents aux deux épreuves d'écrit*




*Courbes de l'évolution des effectifs*

## Professions et Diplômes.

| Profession | Inscrit | Compose | Admissible | Oral | Admis |
|---|---|---|---|---|---|
| CERTIFIE | 1158 | 472 | 205 | 99 | 16 |
| ETUD.HORS ESPE (PREPA MO.UNIV) | 369 | 348 | 259 | 241 | 158 |
| SANS EMPLOI | 248 | 81 | 44 | 35 | 21 |
| ENS.STAGIAIRE 2E DEG. COL/LYC | 156 | 56 | 21 | 16 | 3 |
| CADRES SECT PRIVE CONV COLLECT | 139 | 38 | 19 | 13 | 6 |
| ETUD.HORS ESPE (SANS PREPA) | 130 | 86 | 59 | 55 | 34 |
| CONTRACTUEL 2ND DEGRE | 79 | 27 | 10 | 8 | 5 |
| ELEVE D'UNE ENS | 77 | 68 | 67 | 65 | 65 |
| PLP | 50 | 16 | 6 | 4 | |
| PERS ENSEIG TIT FONCT PUBLIQUE | 40 | 17 | 5 | 3 | 1 |
| ETUDIANT EN ESPE EN 2EME ANNEE | 30 | 11 | 2 | 2 | |
| SALARIES SECTEUR TERTIAIRE | 30 | 9 | 6 | 5 | 2 |
| AGREGE | 27 | 11 | 10 | 9 | 4 |
| PROFESSIONS LIBERALES | 26 | 9 | 7 | 6 | 3 |
| SALARIES SECTEUR INDUSTRIEL | 25 | 6 | 3 | 3 | 1 |
| PROFESSEUR ECOLES | 21 | 1 | | | |
| ETUD.HORS ESPE (PREPA CNED) | 19 | 12 | 7 | 6 | 1 |
| MAITRE CONTR.ET AGREE REM TIT | 19 | 7 | 4 | 2 | |
| ETUDIANT EN ESPE EN 1ERE ANNEE | 18 | 12 | 9 | 7 | 2 |
| ENSEIGNANT DU SUPERIEUR | 16 | 1 | | | |
| MAITRE AUXILIAIRE | 15 | 4 | 2 | 2 | |
| PROFESSEUR ASSOCIE 2ND DEGRE | 14 | 1 | | | |
| FORMATEURS DANS SECTEUR PRIVE | 13 | 5 | 2 | 1 | |
| PERS FONCTION PUBLIQUE | 13 | 5 | 3 | 2 | |
| PERS ENSEIG NON TIT FONCT PUB | 10 | 4 | | | |
| CONTRACT ENSEIGNANT SUPERIEUR | 10 | 3 | 2 | 2 | |
| AG NON TITULAIRE FONCT PUBLIQ | 8 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| VACATAIRE ENSEIGNANT DU SUP. | 7 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| ARTISANS / COMMERCANTS | 6 | | | | |
| ASSISTANT D'EDUCATION | 6 | 3 | 1 | 1 | |
| ENSEIG NON TIT ETAB SCOL.ETR | 6 | 2 | | | |
| MILITAIRE | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| INSTITUTEUR | 4 | | | | |
| MAITRE DELEGUE | 4 | 1 | | | |
| PERS FONCT TERRITORIALE | 3 | 1 | 1 | | |
| VACATAIRE DU 2ND DEGRE | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| ADJOINT D'ENSEIGNEMENT | 3 | | | | |
| PROF DES ECOLES STAGIAIRE | 3 | | | | |
| FONCT STAGIAIRE FONCT PUBLIQUE | 2 | | | | |
| EMPLOI AVENIR PROF.2ND D.PUBLI | 2 | | | | |
| MAITRE CONTR.ET AGREE REM MA | 2 | 1 | | | |
| PERS ADM ET TECH MEN | 1 | | | | |
| COP STAGIAIRE EN CENTRE DE FOR | 1 | | | | |
| AGENT ADMI.MEMBRE UE(HORS FRA) | 1 | | | | |
| CONTRACTUEL FORMATION CONTINUE | 1 | | | | |
| ETUD.HORS ESPE (PREPA PRIVEE) | 1 | | | | |
| PEPS | 1 | | | | |
| SURVEILLANT D'EXTERNAT | 1 | | | | |

*Résultat du concours par catégories professionnelles*[2]

2. Les catégories professionnelles et les catégories par diplômes listées correspondent aux déclarations des candidats

Outre la présence massive d'enseignants certifiés, déjà évoquée, on remarque l'attractivité du concours auprès de titulaires d'un diplôme d'ingénieur. Cette donnée confirme les observations du concours docteurs, et un phénomène qui s'inscrit tant dans le cadre de projets de reconversion professionelle, que d'une orientation en fin de formation.

| Diplôme | Inscrits | Présents | Composés | Admissibles | Oral | Admis |
|---|---|---|---|---|---|---|
| MASTER | 1486 | 1486 | 1486 | 506 | 447 | 269 |
| DIPLOME D'INGENIEUR (BAC+5) | 401 | 401 | 401 | 69 | 43 | 21 |
| ENSEIGNANT TITUL-ANCIEN TITUL CAT A | 394 | 394 | 394 | 81 | 30 | 4 |
| DOCTORAT | 197 | 197 | 197 | 38 | 30 | 14 |
| DIPLOME GRANDE ECOLE (BAC+5) | 101 | 101 | 101 | 28 | 20 | 11 |
| DIP POSTSECONDAIRE 5 ANS OU + | 99 | 99 | 99 | 19 | 10 | 2 |
| DISP.TITRE 3 ENFANTS | 65 | 65 | 65 | 7 | 3 | 1 |
| GRADE MASTER | 57 | 57 | 57 | 11 | 8 | 4 |
| ADMIS ECH.REM.CERTIFIE PLP PEPS | 18 | 18 | 18 | 2 | 1 | |
| CPE TITULAIRE - ANCIEN TITULAIRE | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| ADMIS ECH.REM PROFESSEUR ECOLE | 1 | 1 | 1 | | | |

*Diplômes des candidats hors étudiants tunisiens et marocains*

**Répartition selon le genre.** Les enjeux de parité font partie des préoccupations du jury, qui comprend 48% de femmes, bien au delà des taux observés dans les différents corps dont sont issus les membres du jury. La correction des épreuves écrites se fait de manière totalement dématérialisée et le jury ne dispose d'absolument aucune information sur les candidats : il n'a accès au moment de l'admissibilité qu'aux copies repérées par un numéro. Il est donc difficile d'imaginer quelle mesure pourrait permettre d'identifier et corriger un éventuel biais, pour autant qu'il y en ait un dans cette étape du concours. À l'oral, des processus de veille sont mis en place et le jury est en permanence vigilant sur ses pratiques afin de ne pas introduire de biais dans l'évaluation.

Néanmoins, la répartition hommes/femmes reste déséquilibrée, suivant des proportions extrêmement stables au cours des années. À chaque étape du concours, la proportion de femmes décroît : 42% des inscrits, 37% des présents, les femmes ne représentent plus que 27% des admissibles et 26% des candidats ayant dépassé la barre d'admission. Cette année, on ne trouve qu'une seule femme parmi les 20 premiers, et seulement 4 parmi les 50 premiers.

| Sexe | Inscrit | Compose | Admissible | Oral | Admis |
|---|---|---|---|---|---|
| Hommes | 1983 | 969 | 602 | 473 | 259 |
| Femmes | 840 | 359 | 160 | 120 | 68 |

*Répartition selon le genre*

lors de l'inscription : elles ne font l'objet d'aucune vérification et doivent être considérées avec prudence.

**Répartition selon l'âge.** Le tableau de répartition des candidats suivant l'âge indique que l'essentiel des admis agrégation externe se regroupe dans la tranche 22-25 ans.

| Age | Inscrits | Présents | Composés | Admissibles | Oral | Admis |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 21 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 |
| 22 | 28 | 28 | 28 | 19 | 18 | 16 |
| 23 | 217 | 217 | 217 | 160 | 149 | 114 |
| 24 | 244 | 244 | 244 | 138 | 129 | 89 |
| 25 | 167 | 167 | 167 | 62 | 58 | 29 |
| 26 | 129 | 129 | 129 | 32 | 29 | 9 |
| 27 | 104 | 104 | 104 | 19 | 13 | 9 |
| 28 | 104 | 104 | 104 | 20 | 19 | 13 |
| 29 | 87 | 87 | 87 | 14 | 11 | 3 |
| 30 | 96 | 96 | 96 | 11 | 6 | 2 |
| 31 | 79 | 79 | 79 | 13 | 8 | 4 |
| 32 | 90 | 90 | 90 | 19 | 13 | 5 |
| 33 | 67 | 67 | 67 | 14 | 9 | 2 |
| 34 | 60 | 60 | 60 | 5 | 3 | 2 |
| 35 | 84 | 84 | 84 | 10 | 5 | |
| 36 | 61 | 61 | 61 | 10 | 5 | 2 |
| 37 | 60 | 60 | 60 | 10 | 5 | 3 |
| 38 | 57 | 57 | 57 | 8 | 2 | |
| 39 | 70 | 70 | 70 | 13 | 11 | 3 |
| 40 | 70 | 70 | 70 | 17 | 9 | 4 |
| 41 | 65 | 65 | 65 | 12 | 6 | 1 |
| 42 | 51 | 51 | 51 | 9 | 6 | |
| 43 | 69 | 69 | 69 | 13 | 8 | 1 |
| 44 | 66 | 66 | 66 | 12 | 4 | |
| 45 | 74 | 74 | 74 | 17 | 8 | 1 |
| 46 | 58 | 58 | 58 | 9 | 5 | 1 |
| 47 | 69 | 69 | 69 | 10 | 4 | |
| 48 | 72 | 72 | 72 | 9 | 6 | 1 |
| 49 | 56 | 56 | 56 | 13 | 6 | 2 |
| 50 | 45 | 45 | 45 | 11 | 6 | 2 |
| 51 | 52 | 52 | 52 | 6 | 3 | |
| 52 | 40 | 40 | 40 | 5 | 3 | |
| 53 | 33 | 33 | 33 | 7 | 4 | 3 |
| 54 | 38 | 38 | 38 | 8 | 6 | |
| 55 | 28 | 28 | 28 | 4 | 1 | |
| 56 | 19 | 19 | 19 | 2 | 2 | |
| 57 | 26 | 26 | 26 | 5 | 2 | 1 |
| 58 | 25 | 25 | 25 | 5 | 3 | 2 |
| 59 | 15 | 15 | 15 | 1 | 1 | |
| 60 | 9 | 9 | 9 | 1 | 1 | |
| 61 | 9 | 9 | 9 | 1 | | |
| 62 | 9 | 9 | 9 | 4 | 2 | 1 |
| 63 | 9 | 9 | 9 | 1 | 1 | |
| 64 | 3 | 3 | 3 | 1 | 1 | |
| 65 | 2 | 2 | 2 | | | |
| 66 | 3 | 3 | 3 | | | |
| 67 | 1 | 1 | 1 | | | |

*Tableau de répartition des candidats en fonction de l'âge*

**Répartition selon l'académie.** Le tableau de répartition des candidats par académie montre une forte concentration sur les centres Paris-Créteil-Versailles, Rennes et Lyon. Hormis ces sièges d'Écoles Normales Supérieures, on relèvera le très bon taux de réussite (admis/admissibles) de l'académie de Besançon, qui d'ailleurs se distingue ainsi très régulièrement depuis plusieurs années.

| Academies | Inscrits | Présents | Composés | Admissibles | Oral | Admis |
|---|---|---|---|---|---|---|
| CRETEIL-PARIS-VERSAIL. | 810 | 810 | 810 | 211 | 167 | 106 |
| LYON | 156 | 156 | 156 | 57 | 47 | 25 |
| RENNES | 135 | 135 | 135 | 66 | 56 | 47 |
| LILLE | 134 | 134 | 134 | 34 | 25 | 11 |
| POITIERS | 134 | 134 | 134 | 14 | 9 | 4 |
| AIX-MARSEILLE | 126 | 126 | 126 | 22 | 17 | 5 |
| TOULOUSE | 116 | 116 | 116 | 40 | 34 | 19 |
| NANTES | 110 | 110 | 110 | 25 | 19 | 11 |
| NICE | 105 | 105 | 105 | 26 | 19 | 8 |
| GRENOBLE | 98 | 98 | 98 | 38 | 31 | 24 |
| STRASBOURG | 92 | 92 | 92 | 31 | 25 | 10 |
| BORDEAUX | 85 | 85 | 85 | 26 | 19 | 10 |
| NANCY-METZ | 82 | 82 | 82 | 25 | 18 | 7 |
| MONTPELLIER | 81 | 81 | 81 | 17 | 12 | 4 |
| ORLEANS-TOURS | 76 | 76 | 76 | 17 | 12 | 4 |
| ROUEN | 68 | 68 | 68 | 14 | 10 | 6 |
| LA REUNION | 57 | 57 | 57 | 13 | 6 | 1 |
| REIMS | 50 | 50 | 50 | 11 | 10 | 3 |
| AMIENS | 46 | 46 | 46 | 7 | 6 | 4 |
| DIJON | 37 | 37 | 37 | 14 | 11 | 4 |
| CAEN | 36 | 36 | 36 | 13 | 9 | 5 |
| BESANCON | 35 | 35 | 35 | 18 | 16 | 7 |
| CLERMONT-FERRAND | 33 | 33 | 33 | 6 | 4 | 1 |
| GUADELOUPE | 25 | 25 | 25 | 1 | 1 | |
| LIMOGES | 21 | 21 | 21 | 3 | 1 | |
| MARTINIQUE | 21 | 21 | 21 | 3 | 2 | |
| POLYNESIE FRANCAISE | 14 | 14 | 14 | 3 | 2 | |
| NOUVELLE CALEDONIE | 13 | 13 | 13 | 4 | 3 | |
| GUYANE | 12 | 12 | 12 | 1 | | |
| MAYOTTE | 10 | 10 | 10 | 1 | 1 | 1 |
| CORSE | 5 | 5 | 5 | 1 | 1 | |

*Répartition par académie*

Les sociétés savantes collectent des informations sur les volumes horaires consacrés aux préparations selon les universités ; ces données révèlent de très grandes disparités (en rapport avec le nombre d'étudiants et le nombre d'options préparées), avec un nombre d'heures annuelles consacrées à la préparation au concours qui varie de 300 à plus de 1200 ! À ces différences de volume horaire s'ajoute la faiblesse des effectifs présents dans certaines préparations, alors que l'émulation et le travail en groupe jouent souvent un rôle important dans le succès des formations. À cet égard, l'incorporation dans les préparations de candidats du concours spécial réservé aux docteurs, qui ont en général une plus grande maturité scientifique, peut être un stimulant efficace.

Les préparations doivent étudier l'évolution sur plusieurs années de leur taux de réussite au concours, certains résultats pouvant être purement conjoncturels. La mise au point d'un programme de préparation est un processus dynamique, exigeant, qui se fait en lien étroit avec l'élaboration des maquettes des formations et qui réclame de suivre les évolutions du concours. Le jury rappelle aussi aux candidats comme aux préparateurs que les épreuves orales sont publiques et que venir assister à des interrogations permet certainement de mieux appréhender les attendus et les difficultés des épreuves.

# Chapitre 3

# Épreuve écrite de mathématiques générales

## 3.1 Énoncé

Le sujet est disponible à l'URL http://www.devenirenseignant.gouv.fr/cid137747/sujets-rapports-des-jurys-agregation-2021.html ou sur le site agreg.org.

## 3.2 Rapport sur l'épreuve écrite de mathématiques générales

### 3.2.1 Commentaires sur l'épreuve écrite de Mathématiques Générales

#### Présentation du sujet

Le sujet de mathématiques générales de l'agrégation externe 2021 avait attrait aux polynômes à valeurs entières. Si ces polynômes peuvent être des polynômes à coefficients entiers, il existe également des polynômes $P$ à coefficients rationnels non entiers tels que $\forall x \in \mathbf{Z}, P(x) \in \mathbf{Z}$.

Les polynômes à valeurs entières ont été découverts par Polya et Ostrowski en 1919, qui ont développé la notion de polynômes à valeurs entières sur un anneau $A$. Puis, dans les années 2000, Bhargava introduit la notion de suite $p$-ordonnée, ce qui a permis d'étendre l'étude des polynômes à valeurs entières sur un sous-ensemble de $\mathbf{Z}$, et de définir les factorielles généralisées.

Les deux chercheurs contemporains Paul-Jean Cahen et Jean-Luc Chabert ont contribué à la poursuite des recherches sur les polynômes à valeurs entières, et ont rédigé un article relatant des résultats généraux (What you should know about integer-calued polynomials, The American Mathematical Monthly, 123 :4, 311-337).

Le but de ce sujet est de démontrer deux conjectures sur les entiers, démontrées aux questions 5.b et 6.b.ii de la partie IV.

Le sujet est composé de quatre exercices introductifs, servant parfois dans le problème.

Le problème est subdivisé en quatre parties. Si la première s'intéresse au problème des polynômes à valeurs entières sur $\mathbf{Z}$, la seconde généralise quelques résultats pour les polynômes à valeurs dans un anneau $A$. La fin de la partie s'intéressait à l'anneau bien connu des entiers de Gauss. La troisième partie, au travers des suites $p$-ordonnées, pour un nombre premier $p$, permet de démontrer les conjectures par l'étude des polynômes à valeurs entières sur un sous-ensemble de $\mathbf{Z}$. Enfin, le but de la dernière partie est de démontrer ces conjectures sur tout sous-ensemble de $\mathbf{Z}$, donc sur $\mathbf{Z}$.

**Remarques générales**

Le début du sujet était relativement accessible pour l'ensemble des candidats, et le jury a reçu peu de copies avec un très faible nombre de pages. Les exercices permettaient pour les candidats de montrer leur dextérité quant aux questions basiques, et la qualité de leur rédaction. Celle-ci a été très largement évaluée sur ces exercices préliminaires. Ils ont permis de tester des exigences élémentaires : écrire une récurrence de manière correcte, donner les hypothèses précises du théorème que l'on utilise..

En effet, il ne faut pas oublier que l'agrégation a pour vocation de recruter des enseignants, notamment par l'appréciation de sa capacité à expliquer les raisonnements mathématiques qu'il utilise. Le candidat doit montrer une clarté rédactionnelle et de raisonnement sans équivoque.

Il est important de quantifier les objets introduits en précisant à quel ensemble ils appartiennent, d'autant plus que dans ce sujet, c'est l'ensemble d'appartenance des coefficients des polynômes qui est le cœur des résultats étudiés. Néanmoins, le jury tient à féliciter les nombreux candidats qui pensent, lorsqu'ils écrivent la matrice d'une application linéaire, à préciser dans quelle base elle a été calculée.

Trop peu de candidats indiquent le numéro des questions précédentes quand ils les utilisent, pourtant, c'est l'exercice de tout enseignant, que de préciser clairement où aller chercher les hypothèses. On ne peut pas se contenter d'un "par une question précédente".

Certains candidats confondent polynôme et fonction polynomiale.

Pour résumer, nous allons scinder en deux parties les remarques générales, la première étant les remarques positives, et la seconde les remarques négatives.

- Les éléments positifs que le jury a pu constater :
  Le jury a remarqué le plus souvent un choix de notations pertinentes.
  On note le souci de certains candidats pour rédiger proprement les démonstrations. Ces candidats ont été largement récompensés.
  De nombreuses copies proposaient des raisonnement honnêtes et aboutis sur les questions élémentaires.
- Des éléments négatifs :
  Les démonstrations par récurrence ne sont pas toujours correctement rédigées. Rappelons que pour effectuer une démonstration par récurrence, il faut proprement rédiger l'hypothèse de récurrence, puis démontrer l'initialisation ainsi que l'hérédité. De manière générale, on observe encore cette année un global manque de rigueur dans les copies.
  Trop souvent, le jury a noté une méconnaissance du programme de l'agrégation. Certains candidats ne savent pas quels résultats ils peuvent utiliser (théorème de Fermat, théorème de la famille échelonnée, inverse d'une matrice dans un anneau, ...). De ce fait, de nombreux candidats démontrent des résultats qui apparaissent clairement dans le cours d'agrégation.
  Enfin, comme chaque année, de nombreux candidats confondent $A^*$ et $A^\times$. Si ces ensembles sont égaux dans un corps, ce n'est pas le cas des anneaux.

### 3.2.2 Remarques mathématiques

**Exercice 1**

L'exercice 1 est une application du cours d'algèbre linéaire de deuxième année.

1. La première question est l'exemple même d'une remarque qui a été faite ci-dessus. Le théorème de la famille échelonnée est clairement au programme du concours de l'agrégation, et citer ce théorème, en rappelant les hypothèses, permettait d'éviter un calcul long et fastidieux. Les candidats proposant tout de même ce long calcul n'étaient pas pénalisés, lorsqu'il était bien mené et bien rédigé.
2. Dans cette question, il ne suffisait pas de donner la définition d'un espace vectoriel engendré par des polynômes, mais bien de reconnaître l'espace des polynômes à coefficients rationnels de degré

inférieur ou égal à 3. Ici encore, même si un raisonnement "à la main" par double inclusion était accepté, il suffisait de démontrer que $(H_0, H_1, H_2, H_3)$ est une base de $\mathcal{F}$, pour conclure proprement (c'est-à-dire en ayant remarqué que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{Q}_3[X]$). Globalement, c'est une question souvent mal comprise, même par de bons candidats.

3. Cette question n'a pas eu un franc succès. Il est demandé de vérifier qu'un application est un endomorphisme, il y a donc deux éléments de vérification : la linéarité, et l'arrivée dans l'espace idoine. Si la plupart des copies ont plus ou moins bien démontré que $\mathcal{F}$ était bien le bon espace d'arrivée, certains candidats ne parviennent pas à se souvenir de la définition d'une application linéaire sur un espace vectoriel (et notamment confondent l'application linéaire d'un espace vectoriel et morphisme de groupe additif).
4. Les trois dernières questions sont des questions d'algèbre linéaire qui permettaient au jury d'apprécier les connaissances du candidat sur la diagonalisation de matrice. Ces questions ont été dans l'ensemble bien traitées, modulo les erreurs de calcul.

### Exercice 2

L'exercice 2 est un grand classique, et propose une méthode de calcul du déterminant de Vandermonde.

1. La question 1 a été massivement réussie lorsqu'elle a été traitée.
2. La question 2 a été peu traitée. Il fallait trouver la bonne forme pour $T$ (l'identité partout sauf sur la dernière colonne), puis se soucier de son déterminant, au travers du dernier terme diagonal, ainsi que de du respect de l'égalité voulue.
3. Le rapport du jury ne sera jamais assez clair sur le sujet : un candidat doit impérativement être capable de montrer au jury qu'il sait rédiger proprement une récurrence. Cette question, où la démonstration par récurrence apparaissait naturellement, et où l'hérédité se faisait aisément, s'y prêtait. Le jury est particulièrement attentif aux petites erreurs de rédaction, notamment sur la définition de l'hypothèse de récurrence. Le jury est heureux de n'avoir vu que très rarement "on suppose la proposition pour tout $n$", mais des erreurs de logique persistent : oubli de l'initialisation, propriété de récurrence mal rédigée, ... Enfin, les candidats qui se contentent d'un "par une récurrence évidente" ne peuvent prétendre à obtenir des points dans cette question.
4. Le principal objectif de cette question est le souci de l'espace dans lequel vivent les objets manipulés. Aussi, le jury a évalué la rigueur des candidats quant à l'utilisation des symboles. S'il était nécessaire d'utiliser la question précédente pour trouver un déterminant de Vandermonde non nul, il était tout aussi important de comprendre que l'on pouvait inverser la matrice dans $k$, et que l'inverse était également dans $k$. Ceci étant au programme de l'agrégation, il n'était pas nécessaire de le démontrer. Enfin, le cas $n = 0$, bien que trivial, est souvent omis. Enfin, attention aux notations : "Pour tout $k$ dans $k$...". Sur certaines copies, il est très difficile de distinguer $k$ de $K$.
5. La première partie de la question 5 a été massivement traitée, mais certains candidats n'ont pas vu le problème que posait la finitude de $K$. Le jury a apprécié le souci des candidats pour montrer l'inclusion évidente ($k[X] \subseteq \mathcal{E}$), mais souvent au détriment de l'autre inclusion. En effet, on ne peut pas se contenter d'indiquer "Immédiat d'après la question précédente". Les candidats doivent se mettre dans les conditions d'application de la question précédente.

   La deuxième partie de la question a été très peu bien traitée.

### Exercice 3

L'exercice 3 a été beaucoup moins traité que les deux premiers. La première question a été plutôt bien réussie dans l'ensemble par les candidats qui prenaient soin de distinguer tous les cas ($x_0 \neq x_1$ et $x_0 = x_1$). La seconde partie n'a été que très rarement traitée, même si le calcul préliminaire de l'image de $T$ a plutôt été réussi, les candidats ne semblaient manifestement pas savoir comment s'en servir. Parmi les rares candidats qui ont traité la question, nombre d'entre eux utilisent l'implication $y \times \Phi(P)(x_0, y_0)$ dans $\mathbf{Z}$ implique $\Phi(P)(x_0, y_0)$ dans $\mathbf{Z}$ sans expliquer que la relation est vraie pour tout $y$ dans $\mathbf{Z}$, donc qu'on peut prendre $y = 1$.

### Exercice 4

L'exercice 4, plutôt classique, a été très peu traité. Toutes les méthodes correctes étaient appréciées. Parmi les rares copies qui ont traité la question, la méthode des polynômes interpolateurs de Lagrange a été beaucoup utilisée. Il fallait faire très attention à l'ensemble de définition, qui est un corps, et permet l'application de ce théorème. Ceci n'a pas toujours été bien maîtrisé de la part des candidats.

Pour la deuxième question, ceux qui avaient compris que toutes les fonctions étaient polynomiales ont aisément trouvé qu'il était plus facile de calculer le nombre de fonctions plutôt que le nombre de fonctions polynomiales. Cependant, d'autres candidats préfèrent compter (avec plus ou moins de réussite) le nombre d'applications polynomiales pour répondre à la question. C'est un choix surprenant et assez maladroit. Enfin, la question de dénombrement, qui était simple, a souvent été mal traitée.

La troisième question a donné lieu à des affirmations déconcertantes. Ainsi, il a été vu des candidats proposant des fonctions linéaires pour des fonctions non polynomiales. Dans cette question, il suffisait de trouver une condition nécessaire pour être polynomiale, ou bien tout simplement d'exhiber un contre exemple en donnant les images de tous les éléments de l'ensemble de départ (il n'y en a que 4), en démontrant que la fonction trouvée n'est pas polynomiale.

### Problème

**Partie I** La partie I de ce problème a été massivement entamée, mais rarement terminée. Il s'agissait d'étudier sur $\mathbf{Z}$ les polynômes à valeurs entières. Aussi, il ne convenait pas de voir des symboles tels que $A$ ou $K[X]$, dans cette partie. On pouvait néanmoins en utiliser certaines des exercices préliminaires pour les appliquer.

1. S'il suffisait d'avancer un argument comme le théorème de Lagrange, ou bien le petit théorème de Fermat (il faut faire attention aux hypothèses du petit théorème de Fermat pour l'appliquer convenablement, selon la version utilisée par les candidats), certains candidats se sont lancés dans des pages de calcul. Au mieux, lorsqu'il a abouti, cela a été une considérable perte de temps.
2. La deuxième question ne comportait pas de difficulté notoire, si ce n'est qu'il ne fallait pas oublier que le polynôme $H_0$ n'avait pas de racines, puisqu'il était de degré 0.

   La seconde partie de la question a posé plus de problèmes aux candidats, qui ont pour la plupart oublié les cas des entiers négatifs, ou inférieurs à $k$. Ainsi, on ne pouvait pas se contenter de reconnaître le coefficient binomial sans plus d'explication sur l'entier considéré. Il fallait également prendre bien soin de distinguer, pour $H_k$, les entiers plus petits ou plus grands que $k$, sinon, le candidat écrivait des factorielles avec des entiers négatifs.
3. De la même manière que la question 1, cette question pouvait être très rapidement traitée à l'aide du théorème de la base échelonnée (attention cependant à bien noter toutes les hypothèses, et surtout sans oublier que le nombre l'éléments de la famille doit être égal à la dimension de l'espace $\mathbf{Q}_n[X]$). De nombreux candidats n'ont pas rédigé correctement une récurrence. Ce sont bien souvent les mêmes candidats qui ont traité la question 1 de l'exercice 1 de la même manière.
4. La principale difficulté de la première question se trouvait dans l'ensemble de définition de la matrice $M$. Tout l'intérêt est de la construire à coefficients entiers. Une partie seulement des candidats ayant trouvé la bonne matrice ont bien précisé qu'elle était à coefficients entiers. Certains candidats essayent à tort d'utiliser les résultats de l'exercice 2 sur la matrice de Vandermonde.

Ici encore, le jury a beaucoup trop vu "$\det(M) = 1$ donc $M$ est inversible". Toute la difficulté de la question résidait dans le lieu d'inversibilité de $M$. S'il est clair que le déterminant est 1, ce n'est pas parce qu'il est non nul (ce qui démontre que $M$ est inversible dans $\mathbf{Q}$), mais parce que 1 est inversible dans $\mathbf{Z}$, qui, au passage, n'est pas un corps. Le candidat se voyait sanctionné si le jury avait le moindre doute quant à la compréhension de ce point

La dernière question a été plutôt comprise, mais certains candidats proposaient une rédaction seulement partielle. Si une des deux implications était immédiate (l'implication directe), pour l'autre, la difficulté résidait dans la rédaction propre de toutes les hypothèses.

5. Dans cette question, on utilise massivement la question 3, mais la subtilité résidait dans le fait que les coefficients étaient entiers, et non seulement rationnels. Une proportion non négligeable de candidats n'ont pas fait le rapprochement entre ces deux questions, donc ne pouvaient pas conclure proprement. Démontrer que les coefficients étaient entiers se faisait rapidement à l'aide de la question 4.b.

6. La première des deux questions, se traitait rapidement lorsqu'on avait compris qu'il fallait utiliser $(H_n)$ comme base régulière de l'anneau des polynômes à valeurs entières sur $\mathbf{Z}$. En effet, un raisonnement grâce à la définition de ces polynômes permettait d'obtenir immédiatement des coefficients entiers.

   La seconde question, plus subtile, demandait au candidat d'effectuer un raisonnement sur le coefficient dominant, qui empêchait le polynôme d'être à coefficients entiers si $k < n!$. Beaucoup de candidats n'ont pas compris qu'il suffisait de choisir le bon polynôme pour effectuer son raisonnement. Ici encore, une rédaction propre était demandée, à commencer par remarquer par la question précédente que $n!$ est bien un entier $k$ tel que $k\mathrm{Ent}(\mathbf{Z}) \in \mathbf{Z}[X]$.

7. Le jury a vu toutes sortes de preuves dans cette question. Si la réponse "tout sous-anneau d'un anneau intègre est intègre" était acceptée, il était aussi possible de rédiger une courte preuve. Cette question a mené à de nombreux contre-sens.

   La deuxième partie de la question consistait à faire une recherche des éléments inversibles. Les candidats qui ont traité la question ont dans l'ensemble compris ce qui était demandé. Le jury regrette de ne pas avoir assez vu de manière claire que $\mathbf{Z}[X]^\times \subseteq \mathbf{Q}[X]^\times$, car $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q}$.

   La dernière partie de la question a été très peu traitée. Toute idée intéressante était récompensée.

8. Cette question avait pour but de démontrer un résultat voisin de la question 4c, à l'aide des polynômes de Lagrange. La première question pouvait être abordée de plusieurs méthodes différentes. Si certains candidats ont fait un calcul, d'autres ont préféré effectuer un raisonnement sur les degrés et les racines. Les deux réponses étaient acceptées, pourvu qu'elles fussent correctement rédigées.

9. Cette première partie de la question 9 a été traitée par la plupart des candidats. On devait reconnaître que $l$ était non nul pour procéder au raisonnement direct, à l'aide du binôme de Newton. Certains candidats n'ont pas vu l'astuce et se sont lancés dans une récurrence très longue, et souvent maladroite (même si certains s'en sont sortis).

   Le reste de la question 9 a été très peu traité, mais plutôt bien réussi pour les candidats qui s'y sont attelés sérieusement.

10. La question 10 était une mise en situation avec un polynôme concret. Elle a été très peu traitée.

**Partie II** Dans cette partie, il n'y a qu'une question qui a été véritablement traitée, la question 5(a). La partie i. a été bien réussie de la plupart, qui ont pris soin de spécifier qu'un entier de Gauss $z$ s'écrit $a + ib$ avec $a$ et $b$ des entiers. La suite est immédiate.

Pour la partie ii., de nombreuses erreurs de logique ont été décelées. Il s'agissait de montrer des égalités entre trois ensembles $A = B = C$. Si la méthode la plus rapide consistait à démontrer que $A \subseteq B \subseteq C \subseteq A$, toutes les méthodes correctes ont été acceptées. Le jury attire l'attention sur les candidats qui, espérons-le, par manque de lucidité après un certain temps de travail, confondent condition nécessaire, suffisante, et nécessaire et suffisante. Ainsi, la raisonnement aboutit bien souvent à une seule des deux inclusions démontrée, et ne voient pas qu'ils n'ont pas conclu.

Enfin, la dernière partie de cette question a été traitée par les candidats qui connaissaient bien cet exercice classique, et qui l'ont plutôt bien réussi.

**Partie III et IV** Les parties III et IV ont été très peu traitées, et ne comportaient pratiquement aucune question immédiate. Certains très bons candidats ont réussi à avancer dans le sujet.

## 3.3 Corrigé de l'épreuve écrite de mathématiques générales

### Exercices préliminaires

#### Exercice 1

1. Le polynôme $H_0$ est de degré 0. Le polynôme $H_1 = X$ est de degré 1, le polynôme $H_2 = \frac{X(X-1)}{2}$ est de degré 2, et le polynôme $H_3 = \frac{X(X-1)(X-2)}{6}$ est de degré 3. Ainsi, cette famille est de degré échelonnée dans $\mathbf{Q}[X]$, elle est donc libre.
2. Notons $\mathbf{Q}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients rationnels de degré inférieur ou égal à 3 qui est de dimension 4. La famille $(H_0, H_1, H_2, H_3)$ est une famille libre et de cardinal 4 de cet espace vetoriel. Ainsi, elle en forme une base. Donc $\mathcal{F}$ est l'espace $\mathbf{Q}_3[X]$ des polynômes à coefficients rationnels de degré inférieur ou égal à 3.
3. L'application $\Delta$ est linéaire. En effet, pour tous $P, Q \in \mathbf{Q}[X]$, et $\lambda \in \mathbf{Q}$, on a :

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda P + Q)(X) &= (\lambda P + Q)(X+1) - (\lambda P + Q)(X) \\ &= \lambda P(X+1) + Q(X+1) - (\lambda P(X) + Q(X)) \\ &= \lambda(P(X+1) - P(X)) + Q(X+1) - Q(X) \\ &= \lambda\Delta(P)(X) + \Delta Q(X).\end{aligned}$$

   Cette application est ainsi une application linéaire de $\mathcal{F} = \mathbf{Q}_3[X]$ dans $\mathbf{Q}[X]$. Soit $P \in \mathbf{Q}_3[X]$, $P(X+1)$ appartient à $\mathbf{Q}_3[X]$ et donc $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$ aussi car $\mathbf{Q}_3[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{Q}[X]$. Ainsi, pour tout $P \in \mathcal{F}$, l'image $\Delta(P)$ est dans $\mathcal{F}$. Comme $\Delta$ laisse stable $\mathcal{F}$, elle induit bien un endomorphisme de $\mathcal{F}$.
4. Déterminons une matrice de $\Delta_{\mathcal{F}}$ dans une base. Pour cela on considère la base $\mathcal{B} = \{H_0, H_1, H_2, H_3\}$. Un calcul donner que

$$\Delta(H_0) = 0, \Delta(H_1) = 1 = H_0, \Delta(H_2) = X = H_1, \Delta(H_3) = \frac{X(X-1)}{2} = H_2$$

   On en déduit que :

$$\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(\Delta_{\mathcal{F}}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Calculons maintenant son polynôme caractéristique :

$$\chi_\Delta = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & 0 \\ 0 & X & -1 & 0 \\ 0 & 0 & X & -1 \\ 0 & 0 & 0 & X \end{vmatrix} = X^4.$$

5. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme $X^4$ est un polynôme annulateur de $\Delta_{\mathcal{F}}$. Par définition, son polynôme minimal divise donc $X^4$. On voit aisément que $\Delta_{\mathcal{F}}^3(X^3) = 6$ et donc $\Delta_{\mathcal{F}}^3$ n'est pas nul. Cela implique que le polynôme minimal est égal à $X^4$.
6. L'endomorphisme n'est pas diagonalisable. Nous pouvons avancer plusieurs arguments, par exemple, remarquons que cet endomorphisme est nilpotent. Or, le seul endomorphisme à la fois diagonalisable et nilpotent est l'endomorphisme nul. Ainsi, $\Delta_{\mathcal{F}}$ étant non nul, il n'est pas diagonalisable. On peut aussi dire que le polynôme minimal n'est pas à racines simples.

**Exercice 2**

1. Développons le calcul :

$$V(x_0, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(x_0) \\ P(x_1) \\ \vdots \\ P(x_n) \end{pmatrix}$$

2. Nous pouvons déjà noter que l'on peut conserver les $n$ premières colonnes de la matrice en prenant $T$ de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

   Il reste à déterminer les $a_i$ pour $i \in \{0, \ldots, n\}$.
   Si on note $P$ le polynôme $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, d'après la question précédente, il suffit de choisir les coefficients $a_i$ tels que $P$ vérifie $P(x_0) = \cdots = P(x_{n-1}) = 0$ et $P(x_n) = \prod_{i=0}^{n-1}(x_n - x_i)$. On prend donc

$$P = \prod_{i=0}^{n-1}(X - x_i)$$

   En remarquant alors que $P$ est unitaire de degré $n$, le coefficient $a_n$ vaut 1 et donc $\det(T) = 1$.
3. En appliquant le déterminant à l'égalité précédente (et en utilisant le fait que $T$ soit de déterminant 1), on a :

$$\det(V(x_0, \cdots, x_n)) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} & 0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} & \prod_{i=0}^{n-1}(x_n - x_i) \end{vmatrix}$$

   Nous développons selon la dernière colonne, il vient :

$$\begin{aligned} \det(V(x_0, \cdots, x_n)) &= \prod_{i=0}^{n-1}(x_n - x_i) \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \left(\prod_{i=0}^{n-1}(x_n - x_i)\right) \det(V(x_0, \cdots, x_{n-1})) \end{aligned}$$

Démontrons alors par récurrence que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\det(V(x_0, \cdots, x_n)) = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

Pour $n = 0$, le résultat est évident car $\det(V(x_0)) = \left|1\right| = 1$ et qu'un produit vide vaut 1.
Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 1. Supposons le résultat au rang $n-1$.
Alors,

$$\det(V(x_0, \cdots, x_{n-1})) = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n-1} (x_j - x_i),$$

et en utilisant la relation de récurrence de la question précédente, on a :

$$\det(V(x_0, \cdots, x_n)) = \left(\prod_{i=0}^{n-1} (x_n - x_i)\right) \times \left(\prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n-1} (x_j - x_i)\right) = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

4. Si $P$ vérifie les hypothèses de l'énoncé, démontrons que $a_0, \cdots, a_n \in k$. Par hypothèses,

$$\forall i \in \{0, \cdots, n\},\ P(x_i) \in k.$$

En évaluant le polynôme $P$ en les $x_k$ pour $k \in \{0, \cdots, n\}$, on obtient l'égalité matricielle :

$$V(x_0, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(x_0) \\ P(x_1) \\ \vdots \\ P(x_n) \end{pmatrix}$$

Par la question précédente, $\det(V(x_0, \ldots, x_n)) = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$. Ce déterminant est un élément non nul de $k$ car les éléments $x_0, \ldots, x_n$ sont deux à deux distincts et que $k$ est intègre.
On en déduit que

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (V(x_0, \ldots, x_n))^{-1} \begin{pmatrix} P(x_0) \\ P(x_1) \\ \vdots \\ P(x_n) \end{pmatrix}$$

où $(V(x_0, \ldots, x_n))^{-1}$ est à coefficients dans $k$. Cela montre donc que $P$ est à coefficients dans $k$.

5. (a) L'inclusion indirecte est immédiate.
Soit $P \in \mathcal{E}$ de degré arbitraire, mais fixé $n$ tel que tout $x \in k$, $P(x) \in k$.
Comme $k$ est infini, nous pouvons trouver $x_0, \ldots, x_n$ deux à deux distincts dans $k$. D'après la question précédente, $P \in k[X]$.

(b) On note déjà que $X^q - X \in k[X]$, qui contient 1 et $-1$. De plus, comme $q$ est le cardinal de $k$, pour tout $x \in k$, $x^q - x = 0$.

— Pour l'inclusion l'inclusion indirecte : Soit $R = P + Q$ où $P \in \mathcal{I}$ et $Q \in k[X]$. Il existe $S \in K[X]$ tel que $P = (X^q - X).S$. Dès lors pour $x \in k$,

$$P(x) = (x^q - x).S(x) + Q(x) = Q(x) \in k$$

On en déduit que $R \in \mathcal{E}$.

— Pour l'inclusion l'inclusion directe : Soit $R$ un polynôme de $\mathcal{E}$. Démontrons qu'il existe $P \in \mathcal{I}$ et $Q \in k[X]$ tels que $R = P + Q$.

Effectuons la division euclidienne de $R$ par $X^q - X$. On a alors l'existence de $S$ et $V$ deux polynômes de $K[X]$, où le degré de $V$, noté $r$ est strictement inférieur à $q$, tels que :

$$R = (X^q - X).S + V.$$

De plus, comme ci-dessus, pour tout $x \in k$, $R(x) = (x^q - x).S(x) + V(x) = V(x) \in k$ par hypothèse sur $R$. En considérant $x_0, \ldots, x_r$ deux à deux distincts dans $k$ (ce qui existe car $r + 1 \leqslant q$) et en utilisant les résultats de la question 4. nous obtenons que $V \in k[X]$. En conclusion, on a bien démontré que

$$R = P + Q \text{ où } P = (X^q - X).S \in \mathcal{I} \text{ et } Q = V \in k[X].$$

**Exercice 3**

1. La division euclidienne de $P$ par $(X - x_0)(X - x_1)$ donne l'existence de $Q \in \mathbf{Q}[X]$, $a, b \in \mathbf{Q}$ tels que :

$$P = (X - x_0)(X - x_1)Q + aX + b.$$

Commençons par montrer que $a = \phi(P)(x_0, x_1)$.

— Si $x_0 \neq x_1$. On évalue la relation ci-dessus en $x_0$ et en $x_1$. Cela nous donne alors le système

$$\begin{cases} ax_0 + b &= P(x_0) \\ ax_1 + b &= P(x_1) \end{cases}$$

La résolution du système nous donne que $a = \phi(P)(x_0, x_1)$.

— Si $x_0 = x_1$. On dérive la relation ci-dessus :

$$P' = 2(X - x_0)Q + (X - x_0)^2 Q' + a$$

En évaluant en $x_0$, on obtient $a = P'(x_0) = \phi(P)(x_0, x_0)$.

En évaluant en $x_0$, on a $P(x_0) = ax_0 + b$. Ainsi, $b = P(x_0) - \phi(P)(x_0, x_1)x_0$. Le reste dans la division euclidienne de $P$ par $(X - x_0)(X - x_1)$ est

$$\phi(P)(x_0, x_1)(X - x_0) + P(x_0)$$

2. Notons $\mathrm{Ent}^{\{1\}}(\mathbf{Z})$ l'ensemble à droite de l'égalité.

— Commençons par démontrer que $\mathrm{Ent}^{\{1\}}(\mathbf{Z}) \subseteq \mathrm{Ent}(\mathcal{T}_2(\mathbf{Z}))$.
Soit $P$ un polynôme de $\mathrm{Ent}^{\{1\}}(\mathbf{Z})$. Soit $T \in \mathcal{T}_2(\mathbf{Z})$. Notons $x_0$ et $x_1$ ses termes diagonaux entiers. Le polynôme caractéristique de $T$ est $(X - x_0)(X - x_1)$, et par le théorème de Cayley-Hamilton, ce polynôme évalué en $T$ s'annule. Ainsi, effectuons la division euclidienne de $P$ par $(X - x_0)(X - x_1)$. On obtient l'existence de $Q \in \mathbf{Q}[X]$, tel que

$$P = (X - x_0)(X - x_1)Q + \phi(P)(x_0, x_1)X + P(x_0) - \phi(P)(x_0, x_1)x_0.$$

En évaluant ce polynôme en $T$, on obtient :

$$P(T) = 0 + \phi(P)(x_0, x_1)T + (P(x_0) - \phi(P)(x_0, x_1)x_0)I_2$$

où $I_2$ est la matrice identité.
Ceci par hypothèse sur $P$ est bien une matrice à coefficients entiers.

— Démontrons à présent l'inclusion $\mathrm{Ent}(\mathcal{T}_2(\mathbf{Z})) \subseteq \mathrm{Ent}^{\{1\}}(\mathbf{Z})$.
Soit $P \in \mathrm{Ent}(\mathcal{T}_2(\mathbf{Z}))$ et $x_0, x_1 \in \mathbf{Z}$. Considérons la matrice triangulaire

$$T = \begin{pmatrix} x_0 & 0 \\ 1 & x_1 \end{pmatrix}.$$

Par le même calcul que ci-dessus,

$$P(T) = 0 + \phi(P)(x_0, x_1)T + (P(x_0) - \phi(P)(x_0, x_1)x_0)I_2.$$

On remarque alors que le coefficient en haut à gauche de $P(T)$ vaut $P(x_0)$ et que le coefficient en bas à gauche vaut $\phi(P)(x_0, x_1)$. Or, par hypothèse sur $P$, la matrice $P(T)$ est à coefficients dans $\mathbf{Z}$, ceci démontre la seconde inclusion.

**Exercice 4**

1. Soit $p$ un nombre premier, notons $\mathbf{F}_p$ le corps à $p$ éléments. On peut démontrer ce résultat à l'aide des polynômes interpolateurs de Lagrange, mais voici une démonstration différente. On note $\mathfrak{F}$ l'espace des fonctions de $\mathbf{F}_p$ dans $\mathbf{F}_p$.
   On considère
   $$\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{F}_p[X] & \to & \mathfrak{F} \\ P & \mapsto & \bar{P} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{F}_p & \to & \mathbf{F}_p \\ x & \mapsto & \bar{P}(x) \end{array} \right. \end{array} \right.$$
   On sait que $|\mathfrak{F}| = p^p$ et que $\psi$ est un morphisme d'anneaux, ainsi que d'espaces vectoriels.
   On va démontrer que $|\mathrm{im}(\psi)| = p^p$, autrement dit, on veut démontrer que $\mathrm{im}(\psi)$ est un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel de dimension $p$. On s'intéresse au noyau de $\psi$.
   $$\mathrm{im}(\psi) \simeq \mathbf{F}_p[X]/\ker(\psi).$$
   Le polynôme $X^p - X$ est un élément de $\ker(\psi)$ puisque $\forall x \in \mathbf{F}_p, x^p = x$. De plus, $\ker(\psi)$ est un idéal de l'anneau principal $\mathbf{F}_p[X]$ et admet donc un polynôme générateur, que l'on note $Q_0$, que l'on choisit unitaire ; en particulier, $Q_0$ est de degré minimum parmi les polynômes du noyau.
   $$X^p - X \in \ker(\psi) \Rightarrow Q_0 \mid X^p - X \Rightarrow \deg Q_0 \geqslant p.$$
   Or pour tout polynôme $P \neq 0$ de $\ker(\psi)$, $P$ admet $p$ racines distinctes dans $\mathbf{F}_p$ et donc $\deg P \geqslant p$. Ainsi donc en particulier, $X^p - X$ est de degré minimum, et étant unitaire, on a $Q_0 = X^p - X$. On a donc pour base de l'espace vectoriel quotient $\mathbf{F}_p[X]/\ker(\psi)$ la famille $(1, X, X^2, \cdots, X^{p-1})$, prouvant la dimension de cet espace et donc, celui de l'image, achevant la preuve.
2. La question précédente nous a permis de démontrer que toute fonction de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ dans lui-même était polynomiale. Ainsi, il nous suffit de compter le nombre de fonctions de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ dans lui-même, à savoir $p^p$.
3. Si $P$ est un polynôme de degré $n$ de $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ dans lui-même, que l'on écrit sous la forme $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, alors il vérifie
   $$P(0) = a_0,\ P(1) = \sum_{i=0}^{n} a_i = P(0) + \sum_{i=1}^{n} a_i \text{ et } P(2) = \sum_{i=0}^{n} a_i 2^i = a_0 + 2a_1$$
   le reste des termes étant nul dans $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$.
   On en déduit que $P(2) - P(0) = 2a_1$ est un multiple de 2 dans $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ ; il ne peut donc pas valoir 1 (par exemple).
   Pour trouver une fonction $f$ de $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ dans lui-même qui n'est pas un polynôme, il suffit de la définir avec $f(2) - f(0)$ valant 1. Il en existe, par exemple la fonction $0 \mapsto 0$, $1 \mapsto 0$, $2 \mapsto 1$ et $3 \mapsto 0$.

## Problème

### Polynômes à valeurs entières sur $Z$

1. Soit $p$ un nombre premier. Pour tout $x \in \mathbf{Z}$, par le petit théorème de Fermat, on a $x^p \equiv x[p]$. Ainsi $\frac{1}{p}(X^p - X)$ est un polynôme à valeurs entières. On note ainsi que les coefficients d'un polynôme à valeurs entières ne sont pas forcément des entiers.
2. (a) Le polynôme $H_0$ n'a pas de racines et pour $k \in \mathbf{N}^*$, les racines de $H_k$ sont les entiers compris entre 0 et $k - 1$.

(b) Soit $k \in \mathbf{N}$.

Pour tout entier naturel $n$, $H_k(n) = \binom{n}{k}$ qui est un entier naturel. Pour tout entier naturel $n$,

$$H_k(-n) = \frac{-n(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!} = (-1)^n \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!}$$

Donc $H_k(-n) = (-1)^n \binom{n+k-1}{k}$ qui est un entier.

Ainsi, le polynôme $H_k$ est à valeurs entières pour tout entier $k$.

3. La famille $(H_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une famille de $n$ polynômes à coefficient dans $\mathbf{Q}$ de degré échelonné. Ainsi, elle forme une base de l'espace vectoriel $\mathbf{Q}_n[X]$.

4. (a) Soit $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$,

$$P(i) = \sum_{k=0}^{n} b_k H_k(i) = \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} b_k$$

Cela s'écrit

$$\begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \\ \vdots \\ P(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{1}{0} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

(b) La matrice $M$ est triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale. Son déterminant vaut 1 qui est inversible dans $\mathbf{Z}$. Cela montre que $M$ est inversible dans $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbf{Z})$. Si on note $N = M^{-1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbf{Z})$, on a bien

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \\ \vdots \\ P(n) \end{pmatrix}$$

(c) L'implication directe est immédiate.

Montrons donc que (ii) implique (i).

Soit $P \in \mathbf{Q}[X]$ tel que $P(\{0, \ldots, n\}) \subseteq \mathbf{Z}$. Démontrons que $P$ est à valeurs entières. En utilisant le résultat de la question 3, on écrit

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} b_k H_k$$

où $b_0, \ldots, b_n$ sont des nombres rationnels. En utilisant la question précédente,

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \\ \vdots \\ P(n) \end{pmatrix}$$

Or $N \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbf{Z})$ et $P(0), P(1), \ldots, P(n)$ sont des entiers donc $b_0, \ldots, b_n$ sont des entiers relatifs.

Le polynôme $P$ est une combinaison linéaire à coefficients entiers de polynômes à valeurs entières, c'est donc un polynôme à valeurs entières.

5. Soit $n$ un entier naturel et $P \in \mathrm{Ent}_n(\mathbf{Z})$. Comme la famille $(H_k)_{k\in\{0,\cdots,n\}}$ forme une base du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{Q}_n[X]$, des polynômes de degré inférieur ou égal à $n$ à coefficients dans $\mathbf{Q}$, il existe une unique famille de rationnels $(b_k)_{k\in\{0\cdots,n\}}$ telle que

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} b_k H_k.$$

En procédant comme ci-dessus, on obtient que $b_0, \ldots, b_n$ sont des entiers relatifs. Cela montre que $(H_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base régulière de $\mathrm{Ent}_n(\mathbf{Z})$.

Cela étant vrai pour tout entier naturel $n$, la famille $(H_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une base régulière de $\mathrm{Ent}(\mathbf{Z})$.

6. (a) Soit $P \in \mathrm{Ent}(\mathbf{Z})$. On écrit

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} b_k H_k$$

où $b_0, \ldots, b_n$ sont des entiers relatifs. Alors

$$n!P(X) = \sum_{k=0}^{n} b_k n! H_k.$$

Pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}$, on a

$$n!H_k = \frac{n!X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!}X(X-1)\cdots(X-k+1)$$

C'est un polynôme à coefficients entiers car $\dfrac{n!}{k!} = (k+1)\times(k+2)\times\cdots\times n$ est un entier.

Cela montre que $n!P \in \mathbf{Z}[X]$.

(b) La question précédente affirme que $n!\mathrm{Ent}_n(\mathbf{Z}) \subset \mathbf{Z}[X]$.

Par contre, pour tout entier naturel $k$ strictement inférieur à $n!$, $k\mathrm{Ent}_n(\mathbf{Z})$ n'est pas inclus dans $\mathbf{Z}[X]$ car $kH_n$ n'est pas à coefficients entiers puisque son coefficient dominant vaut $\frac{k}{n!}$ qui n'est pas entier.

Cela montre ce que l'on voulait.

7. (a) Démontrons que l'anneau $\mathrm{Ent}(\mathbf{Z})$ est intègre. En fait, tout sous-anneau d'un anneau intègre est intègre. Soient $P, Q$ deux polynômes à valeurs entières tels que $P(X)Q(X) = 0$. Alors, nous pouvons voir $P$ et $Q$ comme deux éléments de $\mathbf{Q}[X]$, ainsi, cet anneau étant intègre, on a $P$ ou $Q$ nul.

(b) Nous partons du point suivant : l'anneau des inversibles de $\mathbf{Q}[X]$ est l'ensemble $\mathbf{Q}^*$. Ainsi, seuls les polynômes constants non nuls sont inversibles. A fortiori, les inversibles de $\mathrm{Ent}(\mathbf{Z})$ sont contenus dans les inversibles de $\mathbf{Q}[X]$. Ces polynômes (constants) doivent être à valeurs entières. Or, les seuls polynômes constants à valeurs entières, sont les entiers.

D'autre part, nous les souhaitons inversibles. Si $k \in \mathrm{Ent}(\mathbf{Z})$ en tant que polynôme constant, alors $k$ est inversible si et seulement si $k = \pm 1$.

Ainsi, les inversibles de $\mathrm{Ent}(\mathbf{Z})$ sont les inversibles de $\mathbf{Z}$.

(c) Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Supposons $H_k = PQ$ où $P$ et $Q$ sont des éléments de $\mathrm{Ent}(\mathbf{Z})$. On note $r$ le degré de $P$ et $s$ celui que $Q$. On a vu que $r!P \in \mathbf{Z}[X]$ et $s!Q \in \mathbf{Z}[X]$ à la question précédente. Ainsi, $r!s!H_k \in \mathbf{Z}[X]$. Si l'on regarde le coefficient dominant, ceci nous indique que $\frac{r!s!}{k!} \in \mathbf{Z}$. Comme $s = k - r$ pour des raisons de degré, on sait que $\frac{k!}{r!s!} = \binom{k}{r}$ est aussi un entier. On en déduit que $\frac{r!s!}{k!} = 1$ car c'est un entier positif inversible dans $\mathbf{Z}$. Or le coefficient binomial $\binom{k}{r}$ ne vaut 1 que pour $r = 0$ ou $r = k$ et dans ce cas $s = 0$. Cela montre que nécessairement $P$ ou $Q$ est un polynôme constant.

Par symétrie, on peut supposer que $P$ est une constante. Comme $P$ est à valeurs entières, cette constante est un entier. Comme $s = n$, on a $n!Q \in \mathbf{Z}[X]$.
On a donc dans $\mathbf{Z}[X]$,

$$n!H_k = P \times n!Q.$$

Le coefficient dominant du terme de gauche est égal à 1. Ainsi, $P = \pm 1$, ce qui démontre que $H_k$ est irréductible.

8. (a) Soient $k, n \in \mathbf{N}$. On veut démontrer que

$$L_k^n(X) = (-1)^{n-k} H_k(X) H_{n-k}(X-k-1).$$

Pour cela, par définition du polynôme interpolateur de Lagrange, il suffit de montrer que le polynôme de droite (que nous noterons $Q_k$) est de degré $n$, s'annule en $0, \dots, k-1, k+1, \dots, n$ et vaut 1 en $k$.

— Comme $\deg(H_{n-k}) = n-k$ et $\deg(H_k) = k$, on a déjà que $\deg(Q_k) = n$.
— Pour $i \in \{0, \cdots, k-1\}$, $H_k(i) = 0$ donc $Q_k(i) = 0$
— Pour $i \in \{k+1, n\}$,

$$Q_k(i) = (-1)^{n-k} H_k(i) H_{n-k}(i-k-1) = 0$$

car $i-k-1 \in \{0, n-k-1\}$ donc $H_{n-k}(i-k-1) = 0$.
— Pour finir, en utilisant les formules déterminées à la question 2.b,

$$Q_k(k) = (-1)^{n-k} H_k(k) H_{n-k}(-1) = (-1)^{n-k} \binom{k}{k} (-1)^{n-k} \binom{n-k}{n-k} = 1$$

On a bien $L_k^n(X) = (-1)^{n-k} H_k(X) H_{n-k}(X-k-1)$.
Notons que ce résultat s'obtient aussi par un calcul direct.

(b) L'implication directe est immédiate. Soit maintenant $k \in \mathbf{Z}$, $P$ un polynôme de degré $n$ qui prend des valeurs entières sur $k, k+1, \cdots, k+n$. On note par exemple pour tout $j \in \{0, \cdots, n\}$, $P(k+j) = k_j$.
On remarque que

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} k_i L_i^n(X-k).$$

En effet, ces deux polynômes de degré $n$ ont même image sur les $n+1$ points $k, k+1, \cdots, k+n$. Pour tout $i \in \{0, \cdots, n\}$, les polynômes $L_i^n(X)$ sont à valeurs entières, les $k_i$ sont des entiers, $P$ étant somme de ces éléments, il s'agit également d'un polynôme à valeurs entières.
Remarquons qu'il était possible d'obtenir ce résultat de manière plus directe. En reprenant les notations ci-dessus, on peut considérer le polynôme $Q = P(X+k)$. Ce polynôme est de degré $n$ et vérifie que $Q(\{0, \dots, n\}) \subset \mathbf{Z}$. On peut alors utiliser la question 4.c pour obtenir que $Q$ est un polynôme à valeurs entières et, par suite, le polynôme $P$ aussi.

9. (a) On a, comme $l$ est non nul,

$$\sum_{i=0}^{l} (-1)^i \binom{l}{i} = \sum_{i=0}^{l} \binom{l}{i} 1^{l-i} (-1)^i = (1-1)^l = 0$$

(b) Soit

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} b_k H_k.$$

En évaluant en $0, 1, \dots, n$ on obtient le système matriciel vu à la question 4) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{1}{0} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \\ \vdots \\ P(n) \end{pmatrix}$$

Notons, pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$

$$\beta_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} P(i)$$

La matrice du système ci-dessus étant inversible il suffit de vérifier que le vecteur $\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ vérifie le système pour obtenir que pour tout $i$ dans $\{0, \dots, n\}$, $b_i = \beta_i$.
Soit $\ell \in \{0, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} \beta_k &= \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} P(i) \qquad (3.1) \\ &= \sum_{i=0}^{\ell} P(i) \sum_{k=i}^{\ell} (-1)^{k-i} \binom{\ell}{k} \binom{k}{i} \end{aligned}$$

Or

$$\binom{\ell}{k}\binom{k}{i} = \frac{\ell!}{k!(\ell-k)!} \frac{k!}{i!(k-i)!} = \frac{\ell!}{i!(\ell-i)!} \frac{(\ell-i)!}{(\ell-k)!(k-i)!} = \binom{\ell}{i}\binom{\ell-i}{k-i}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} \beta_k &= \sum_{i=0}^{\ell} P(i) \binom{\ell}{i} \sum_{k=i}^{\ell} (-1)^{k-i} \binom{\ell-i}{k-i} \qquad (3.2) \\ &= \sum_{i=0}^{\ell} P(i) \binom{\ell}{i} \sum_{k=0}^{\ell-i} (-1)^{k} \binom{\ell-i}{k} \qquad (3.3) \\ &= P(i) \binom{\ell}{\ell} = P(i) \end{aligned}$$

Cela montre bien que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$,

$$b_k = \beta_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} P(i)$$

Il était aussi possible d'inverser la matrice du système. Son inverse est la matrice triangulaire inférieure composée du triangle de Pascal, mais avec des signes alternés : le coefficient à la $i$-ème ligne et $j$-ème colonne est 0 si $j > i$, et $(-1)^{j-i} \binom{i-1}{j-1}$ sinon. Par lecture de la $k$-ème ligne, on obtient

$$b_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} P(i).$$

(c) On utilise l'exercice 1. On voit rapidement que $\Delta(H_0) = 0$ et que pour tout entier naturel non nul $k$,

$$\begin{aligned}\Delta(H_k) &= \frac{(X+1)X\cdots(X-k+2) - X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!} \\ &= \frac{kX(X-1)\cdots(X-k+2)}{k!} = H_{k-1}\end{aligned} \tag{3.4}$$

Comme $\Delta$ est clairement une application linéaire, si l'on écrit

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} b_k H_k,$$

alors

$$\begin{aligned}\Delta(P)(X) &= \Delta\left(\sum_{k=0}^{n} b_k H_k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} b_k \Delta H_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} b_k \Delta H_k \text{ car pour } k=0,\ \Delta \text{ est nul.} \\ &= \sum_{k=1}^{n} b_k H_{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1} H_k\end{aligned}$$

Pour démontrer la deuxième partie, on a en itérant le résultat précédent que pour tout $p \in \{0, \cdots, n\}$

$$\Delta^p(P) = \sum_{k=0}^{n-p} b_{k+p} H_k$$

Or, on a vu que $H_0(0) = 1$ et pour $k > 0$, $H_k(0) = 0$, en évaluant la relation ci-dessus en 0, on obtient

$$\Delta^p(P)(0) = b_p H_0(0) = b_p$$

10. (a) On va calculer le pgcd de $P(x) = x^5 + x$ lorsque $x$ décrit $\mathbf{Z}$. On peut commencer par calculer $P(1) = 2$. Cela implique que $d(P)|2$ et donc $d(P) = 1$ ou $d(P) = 2$.
On vérifie alors que pour tout $x \in \mathbf{Z}$, $P(x)$ est pair. En effet, en travaillant dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$,

$$x^5 + x \equiv x + x \equiv 0\,[2]$$

On a donc

$$d(X^5 + X) = 2.$$

(b) Pour répondre à cette question, on utilise la question I 6.a. Celle-ci nous indique que pour tout $Q \in \mathrm{Ent}(\mathbf{Z})$, $n!Q \in \mathbf{Z}[X]$. Ainsi, si l'on définit $Q(X) = \frac{P(X)}{d(P)}$, le polynôme $Q$ est à valeurs entières. En effet, pour tout $x \in \mathbf{Z}$, $P(x)$ est divisible par $d(P)$, qui est le pgcd de toutes les valeurs prises par $P$. Ainsi, $Q \in \mathrm{Ent}(\mathbf{Z})$ et $n!Q(X) \in \mathbf{Z}[X]$.
Donc, $\frac{n!}{d(P)}P(X) \in \mathbf{Z}[X]$. Comme $P$ est unitaire, en regardant le coefficient dominant de ce nouveau polynôme, on a

$$\frac{n!}{d(P)} \in \mathbf{Z} \text{ donc } d(P) \text{ divise } n!.$$

(c) On va trouver ce polynôme parmi les seuls polynômes à valeurs entières que nous avons étudiés : les
$$H_n = \frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}.$$
Ce polynôme est de degré $n$. Soit
$$Q = n!H_n = X(X-1)\cdots(X-n+1).$$
Ce polynôme est également de degré $n$, à coefficients entiers cette fois et unitaire. De plus, $d(Q) = n!$ car la question précédente nous indique que $d(Q)$ divise $n!$. De plus, si on évalue $Q$ en $n$, on obtient $Q(n) = n!$. Ceci répond à la question.

**Généralisation des polynômes à valeurs entières sur un anneau A**

1. Si $P \in \mathrm{Ent}(A)$, il vérifie les hypothèses suivantes :
$$\forall i \in \{0, \cdots, n\},\ P(a_i) \in A.$$
Soit
$$d = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} a_j - a_i.$$
Écrivons $P = \lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_n X^n$. En évaluant ce polynôme en les $a_k$ pour $k \in \{0, \cdots, n\}$, on obtient l'égalité matricielle :
$$\begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(a_0) \\ P(a_1) \\ \vdots \\ P(a_n) \end{pmatrix}$$
Par l'exercice 2, cette matrice est de déterminant
$$\begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i) = d.$$
Ainsi, pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}$, $d\lambda_k \in A$ par les règles de Cramer ce qui montre que $dP \in A[X]$.
2. Comme $A$ est supposé infini, on peut considérer $a_0, \ldots, a_n$ des éléments de $A$ deux à deux distincts. Comme ci-dessus, on pose alors $d_n = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$.
Soit $x \in I_n$, si $x = 0$ alors $d_n x = 0 \in A$. Si $x \neq 0$, il existe $P$ un polynôme de degré $n$ de $\mathrm{Ent}(A)$ tel que $x$ est le coefficient dominant de $P$. D'après la question précédente, $d_n P \in A[X]$ ce qui implique que $d_n x$ (qui est le coefficient dominant de $d_n P$) est un élément de $A$.
On pose donc $\alpha_n = d_n$, on a bien $\alpha_n I_n \subseteq A$. De plus $\alpha_n \neq 0$ car les $a_0, \ldots, a_n$ sont deux à deux distincts et que $A$ est intègre car il est principal.
3. Montrons que $J_n = \alpha_n I_n$ est un idéal de $A$.
   — Comme $0_A \in J_n$, $J_n \neq \emptyset$.
   — Soit $x, y$ dans $J_n$ il existe $a, b$ dans $I_n$ tels que $x = \alpha_n a$ et $y = \beta_n b$. Si $a$ ou $b$ ou $a - b$ est nul, on vérifie aisément que $a - b \in I_n$ et donc $x - y \in J_n$. Dans le cas inverse, on peut considérer $P, Q$ de $\mathrm{Ent}_n(A)$ de degré $n$ tels que $a$ soit le coefficient dominant de $P$ et $b$ celui de $Q$. Le polynôme $P - Q$ appartient à $\mathrm{Ent}_n(A)$ car $\mathrm{Ent}(A)$ est un anneau et son coefficient de degré $n$ est $a - b$. On en déduit que $x - y \in J_n$.

— Soit $x \in J_n$ et $u \in A$. Il existe $a \in I_n$ tel que $x = \alpha_n a$. Si $a = 0$ alors $ux = 0 \in J_n$. Sinon, il existe $P \in \mathrm{Ent}_n(A)$ de degré $n$ dont le coefficient dominant est $a$. Le polynôme $uP$ est encore dans $\mathrm{Ent}(A)$. On en déduit que $ua \in I_n$ et donc $ux \in J_n$.

L'anneau $A$ étant principal, l'idéal $J_n$ est principal. Ainsi, il existe $\gamma_n \in A$ tel que $J_n = \gamma_n A$. On remarque pour tout entier $n$, $X^n \in \mathrm{Ent}_n(A)$ et donc $1 \in I_n$ ce qui implique que $J_n \neq \{0\}$. En conséquence, $\gamma_n \neq 0$.

On pose finalement $\beta_n = \frac{\gamma_n}{\alpha_n} \in \mathbf{K}^\times$ et on a $I_n = \beta_n A$.

4. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on considère un polynôme $P_n$ de coefficient dominant $\beta_n$ (il en existe forcément car $\beta_n \in I_n$). Nous avons une suite de candidats pour une base régulière de $\mathrm{Ent}(A)$. On remarque que $P_n$ est vraiment de degré $n$ car $\beta_n \neq 0$.

On va démontrer le résultat suivant par récurrence forte : pour tout $n \in \mathbf{N}$, pour tout polynôme de degré $n$, il existe $\lambda_0, \cdots, \lambda_n \in A$ tels que

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i(X).$$

— Initialisation : Soit $P \in \mathrm{Ent}(A)$ de degré 0, par exemple $P(X) = a$. Alors, $a \in I_0$. Il existe donc $\lambda \in A$ tel que $a = \lambda\beta_0$. Ainsi,

$$P(X) = a = \lambda\beta_0 = \lambda P_0(X)$$

— Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons le résultat pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}$. Soit $P \in \mathrm{Ent}(A)$ de degré $n+1$. Soit $a$ le coefficient dominant de $P$, il appartient à $I_{n+1}$. Alors, il existe $\lambda \in A$ tel que $a = \lambda\beta_n$. Considérons le polynôme $Q = P - \lambda P_n$. Ce polynôme est de degré inférieur ou égal à $n$ et il appartient à $\mathrm{Ent}(A)$, on peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence. Il existe donc $\lambda_0, \cdots, \lambda_{n-1} \in A$ tels que

$$Q(X) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i P_i(X).$$

Ainsi,

$$P(X) = \lambda P_n(X) + \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i P_i(X)$$

et ceci achève la récurrence.

Remarquons pour conclure que comme la famille $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est échelonnée en degré, les $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ obtenus par la récurrence ci-dessus sont uniques.

5. (a) i. Soit $z \in \mathbf{Z}[i]$. Notons $a, b \in \mathbf{Z}$ tels que $z = a + ib$. Alors, un calcul facile montre que $z\overline{z} = a^2 + b^2$. Ainsi $N(z) \in \mathbf{N}$. Donc l'application $N$ est à valeurs dans $\mathbf{N}$.

ii. Nous allons procéder en plusieurs étapes :

— $\mathbf{Z}[i]^\times = \{z \in \mathbf{Z}[i], N(z) = 1\}$. Voici une preuve :
L'inclusion $\{z \in \mathbf{Z}[i], N(z) = 1\} \subseteq \mathbf{Z}[i]^\times$ est claire. En effet, si $z \in \mathbf{Z}[i]$ est tel que $N(z) = 1$, cela signifie que $z\overline{z} = 1$ donc $z$ a un inverse et c'est bien $\overline{z} \in \mathbf{Z}[i]$.
Maintenant, si $z$ est inversible dans $\mathbf{Z}[i]$, alors il existe $z' \in \mathbf{Z}[i]$ tel que $zz' = 1$. Ainsi, $N(zz') = N(z)N(z') = 1$ donc $N(z)$ est un inversible de $\mathbf{N}$ (car les normes des éléments de $\mathbf{Z}[i]$ sont des entiers naturels). Cela implique $N(z) = 1$.

— $\{z \in \mathbf{Z}[i], N(z) = 1\} = \{\pm 1, \pm i\}$. En effet,
L'inclusion réciproque vient du fait que les éléments $\pm 1, \pm i$ sont évidemment de norme 1.
Pour l'inclusion directe, il suffit de remarquer que, pour un élément $z = a+ib \in \mathbf{Z}[i]$, $N(z) = a^2 + b^2$ avec $a$ et $b$ des entiers. Ainsi, $N(z)$ est de norme 1 implique que l'un des deux $a$ ou $b$ est nul, et l'autre vaut $\pm 1$. Ceci démontre la deuxième inclusion.

Au final, on a bien démontré que

$$\mathbf{Z}[i]^\times = \{z \in \mathbf{Z}[i], N(z) = 1\} = \{\pm 1, \pm i\}.$$

iii. Nous devons, pour répondre à cette question, trouver un stathme pour l'anneau $\mathbf{Z}[i]$. Un candidat naturel est la norme, définie précédemment.
Soient $x \in \mathbf{Z}[i]$ et $y \in \mathbf{Z}[i]\backslash\{0\}$. On considère $\frac{x}{y} = a + ib$ où $a, b \in \mathbf{Q}[i]$.
Il existe un entier $a_0$ tel que $|a - a_0| \leqslant \frac{1}{2}$. Il suffit de prendre $a_0 = \lfloor a \rfloor$ si $a_0 \in [\lfloor a \rfloor, \lfloor a \rfloor + \frac{1}{2}]$ et $a_0 = \lceil a \rceil$ sinon. De même, on pose $b_0$ un entier tel que $|b - b_0| \leqslant \frac{1}{2}$.
On peut définir $r = x - y(a_0 + ib_0)$. Déjà, il est à noter que $r \in \mathbf{Z}[i]$. On va démontrer que $N(r) < N(y)$. On a :

$$\frac{r}{y} = \frac{x}{y} - a_0 - ib_0 = (a - a_0) + i(b - b_0).$$

Ainsi,

$$\frac{N(r)}{N(y)} = N\left(\frac{r}{y}\right) = (a - a_0)^2 + (b - b_0)^2 \leqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Ceci démontre que $N(r) < N(y)$ ainsi que l'existence d'un stathme pour $\mathbf{Z}[i]$. L'anneau $\mathbf{Z}[i]$ est bien un anneau euclidien.

(b) L'anneau Ent $\mathbf{Z}[i]$ est euclidien, donc principal. Il est de plus infini. Par la question 4, on déduit qu'il possède une base régulière.

(c) Soient

$$Q_0(X) = 1,\ Q_1(X) = X,\ Q_2(X) = \frac{1}{1+i}(X^2 - X).$$

On remarque premièrement que ces polynômes sont dans $\mathrm{Ent}(\mathbf{Z}[i])$. C'est immédiat pour $Q_0$ et $Q_1$. Pour $Q_2$, on considère $z = a + ib \in \mathbf{Z}[i]$, le calcul donne

$$\begin{aligned} Q_2(z) &= \frac{a^2 - b^2 - a + i(2ab - b)}{1+i} \qquad (3.5)\\ &= \frac{a^2 - b^2 - a + 2ab - b}{2} + i\frac{-a^2 + b^2 + a + 2ab - b}{2} \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 - a + 2ab - b &\equiv a - b - a - b\ [2] \qquad (3.6)\\ &\equiv -2b\ [2] \qquad (3.7)\\ &\equiv 0\ [2] \end{aligned}$$

Cela prouve que $\frac{a^2-b^2-a+2ab-b}{2}$ est un entier. Le calcul pour la partie imaginaire est similaire. Donc $Q_2(z) \in \mathbf{Z}[i]$.
De plus, il est à noter que, $Q_0, Q_1$ et $Q_2$ sont de degrés respectifs $0, 1, 2$. Soit $P \in \mathrm{Ent}_2(\mathbf{Z}[i])$. Comme $(Q_0, Q_1, Q_2)$ forme une famille de polynômes de degré échelonnée de $\mathbf{Q}[i]$, par les théorèmes d'algèbre linéaire, il existe des uniques $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{Q}[i]$ tels que

$$P(X) = \lambda_0 Q_0(X) + \lambda_1 Q_1(X) + \lambda_2 Q_2(X).$$

Démontrons que $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{Z}[i]$. Déjà, $P(0) = \lambda_0 \in \mathbf{Z}[i]$. De plus, $P(1) = \lambda_0 + \lambda_1$. Comme $\lambda_0$ appartient à $\mathbf{Z}[i]$, alors $\lambda_1$ aussi.
Enfin,

$$P(i) = \lambda_0 + i\lambda_1 + \lambda_2\frac{-1-i}{1+i} = \lambda_0 + i\lambda_1 - \lambda_2.$$

Ainsi, $\lambda_2 = \lambda_0 + i\lambda_1 - P(i) \in \mathbf{Z}[i]$ et on a exhibé une base régulière de $\mathrm{Ent}_2(\mathbf{Z}[i])$.

**Polynômes à valeurs entières sur un sous-ensemble de Z**

1. Soit $k$ un entier strictement inférieur au cardinal de $E$. Si $k = 0$, le résultat est immédiat. Sinon, il existe $x \in E$ tel que $x \notin \{a_0, \ldots, a_{k-1}\}$. Pour cet élément, $\prod_{i=0}^{k-1} (x - a_i)$ n'est pas nul et donc $v_p\left(\prod_{i=0}^{k-1} (x - a_i)\right) < +\infty$. Par définition,
$$v_p\left(\prod_{i=0}^{k-1}(a_k - a_i)\right) \leqslant v_p\left(\prod_{i=0}^{k-1}(x - a_i)\right) < +\infty$$
Cela implique que $\prod_{i=0}^{k-1} (a_k - a_i)$ n'est pas nul.
2. Soit $p$ un nombre premier. Pour montrer que $\underline{\mathbf{N}}$ forme une suite $p$-ordonnée, il suffit de montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$ et tout élément $x$ de $\mathbf{Z}$,
$$v_p(k!) = v_p\left(\prod_{i=0}^{k-1}(k - i)\right) \leqslant v_p\left(\prod_{i=0}^{k-1}(x - i)\right)$$
D'après la partie $I$, $H_k = \dfrac{X(X-1)\cdots(X-(k-1))}{k!}$ est un polynôme à valeurs entières ce qui signifie que pour tout $x$ dans $\mathbf{Z}$, $H_k(x)$ est un entier d'où, $v_p(H_k(x)) \geqslant 0$ ce qui implique
$$v_p(k!) \leqslant v_p\left(\prod_{i=0}^{k-1}(x - i)\right)$$
La suite $\underline{\mathbf{N}}$ est bien $p$-ordonnée.
3. En appliquant le résultat précédent à la suite des entiers naturels, on a
$$V_k(\mathbf{Z}, \underline{\mathbf{N}}, p) = p^{v_p(k!)}.$$
Effectuons le produit sur tous les nombres premiers :
$$\prod_{p \in \mathcal{P}} V_k(\mathbf{Z}, \underline{\mathbf{N}}, p) = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(k!)} = k!.$$
4. Soit $x \in \mathbf{Z}_{(p)}$. Notons $x$ sous la forme d'une fraction irréductible $\frac{a}{b}$. Comme $x \in \mathbf{Z}_{(p)}$, alors $p$ ne fait pas partie de la décomposition en facteurs premiers de $b$. S'il fait partie de la décomposition en facteurs premiers de $a$, alors sa valuation est strictement positive. Sinon, elle est nulle.
Inversement, soit $x \in \mathbf{Q}$, de valuation $p$-adique positive. Écrivons $x$ sous la forme $p^\alpha \frac{a'}{b}$, où $a'$ et $b$ sont tous deux premiers avec $p$ et $\frac{a'}{b}$ est une fraction irréductible. Comme la valuation $p$-adique de $x$ est positive, $\alpha \geqslant 0$. Ainsi, $a = p^\alpha a'$ est un entier, $a$ et $b$ sont premiers entre eux, et $b$ ne contient pas de facteur $p$ dans sa décomposition en facteurs premiers. Donc $x \in \mathbf{Z}_{(p)}$.
Si $\frac{a}{b} \in \mathbf{Z}_{(p)}$, à quelles conditions $\frac{b}{a} \in \mathbf{Z}_{(p)}$ ? La condition $\operatorname{pgcd}(a, b) = 1$ est toujours garantie. Maintenant il est nécessaire que $a$ ne comporte pas $p$ dans sa décomposition en facteurs premiers. Cette condition est également suffisante. Cela signifie que $v_p(\frac{a}{b}) = 0$.
Ainsi,
$$\mathbf{Z}_{(p)}^{\times} = \{x \in \mathbf{Q}, v_p(x) = 0\}.$$
5. (a) Soit $n \in \mathbf{N}$. Démontrons que $P_n \in \operatorname{Ent}(E, \mathbf{Z}_{(p)})$ :

Soit $x \in E$. Démontrons que $P_n(x) \in \mathbf{Z}_{(p)}$. On a

$$P_n(x) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{x - a_k}{a_n - a_k}.$$

Par définition d'une suite $p$-ordonnée,

$$v_p\left(\prod_{k=0}^{n-1}(x-a_k)\right) \geqslant v_p\left(\prod_{k=0}^{n-1}(a_n-a_k)\right).$$

On en déduit que $v_p(P_n(x)) \geqslant 0$ (car la valuation $p$-adique d'un quotient est la différence des valuations $p$-adiques) et donc $P_n(x) \in \mathbf{Z}_{(p)}$ en utilisant la question 4.

(b) Supposons que $(P_k(X))_{k\in\mathbf{N}}$ forme une base régulière de $\mathrm{Ent}(E, \mathbf{Z}_{(p)})$. Alors, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $P_n \in \mathrm{Ent}(E, \mathbf{Z}_{(p)})$. Ainsi, pour tout $x \in E$,

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{x - a_k}{a_n - a_k} \in \mathbf{Z}_{(p)}.$$

Ainsi, pour tout $x \in E$,

$$v_p\left(\prod_{k=0}^{n-1} x-a_k\right) \geqslant v_p\left(\prod_{k=0}^{n-1} a_n-a_k\right),$$

ceci impliquant par définition que la suite $(a_n)$ est $p$-ordonnée.

Supposons maintenant que $(a_n)$ est une suite $p$-ordonnée. Déjà, par la question précédente, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $P_n \in \mathrm{Ent}(E, \mathbf{Z}_{(p)})$.

Soit $P \in \mathrm{Ent}(E, \mathbf{Z}_{(p)})$. Notons $r$ son degré. Comme la famille des $(P_n)$ étant un famille de polynômes de degrés échelonnés, elle forme une base du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{Q}[X]$. Il existe donc des uniques $(\lambda_k)_{k\in\{0,\cdots,r\}} \in \mathbf{Q}$, tels que

$$P(X) = \sum_{k=0}^{r} \lambda_k P_k(X).$$

Démontrons que $\lambda_0, \ldots, \lambda_r$ appartiennent à $\mathbf{Z}_{(p)}$. Il suffit d'adapter la preuve de la question 4) de la partie I.

On évalue la relation ci-dessus en $a_0, a_1, \ldots, a_r$ et on obtient la relation matricielle :

$$\begin{pmatrix} P(a_0) \\ P(a_1) \\ \vdots \\ P(a_r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0(a_0) & P_1(a_0) & \cdots & P_r(a_0) \\ P_0(a_1) & P_1(a_1) & \cdots & P_r(a_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_0(a_r) & P_1(a_r) & \cdots & P_r(a_r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix}$$

Comme dans la partie I, cette matrice est triangulaire inférieure (car $P_i(a_j) = 0$ pou $j < i$) et ses coefficients diagonaux sont égaux à 1. Par les formules usuelles, on obtient que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} P_0(a_0) & 1 & \cdots & 0 \\ P_0(a_1) & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_0(a_r) & P_1(a_r) & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible dans $\mathcal{M}_{r+1}(\mathbf{Z}_{(p)})$. On en déduit alors que $\lambda_0, \ldots, \lambda_r$ appartiennent à $\mathbf{Z}_{(p)}$.

(c) Soient $(a_n)$ et $(b_n)$ deux suites $p$-ordonnées. On définit les deux familles de polynômes, pour tout $n \in \mathbf{N}$ par

$$P_n(X) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{X - a_k}{a_n - a_k} \text{ et } Q_n(X) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{X - b_k}{b_n - b_k}.$$

Les deux familles forment une base régulière de $\mathrm{Ent}(E, \mathbf{Z}_{(p)})$ comme on l'a montré à la question précédente.

Pour tout entier $k$, $P_k$ s'écrit donc comme combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbf{Z}_{(p)}$ des polynômes $Q_0, \ldots, Q_k$ :

$$P_k = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i Q_i$$

Le coefficient dominant du membre de gauche est

$$\frac{1}{\prod_{i=0}^{n-1}(a_k - a_i)}.$$

Le coefficient dominant du membre de droite est

$$\frac{\lambda_k}{\prod_{i=0}^{n-1}(b_k - b_i)}.$$

Comme $\lambda_k \in \mathbf{Z}_{(p)}$, on a

$$v_p\left(\prod_{i=0}^{n-1}(b_k - b_i)\right) \geqslant v_p\left(\prod_{i=0}^{n-1}(a_k - a_i)\right).$$

Par symétrie, on a

$$v_p\left(\prod_{i=0}^{n-1}(a_k - a_i)\right) \geqslant v_p\left(\prod_{i=0}^{n-1}(b_k - b_i)\right).$$

Ainsi,

$$v_p\left((\prod_{i=0}^{n-1}(a_k - a_i)\right) = v_p\left(\prod_{i=0}^{n-1}(b_k - b_i)\right).$$

Ceci démontre bien que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $V_k(E, \underline{a}, p)$ ne dépend pas de la suite $p$-ordonnée $\underline{a}$ choisie.

6. Si $E$ est de cardinal fini $n$. Soit $\underline{a} = (a_n)$ et $\underline{b} = (b_n)$ des suites $p$-ordonnées. Pour $k < n$, la méthode ci-dessus montre pareil que $V_k(E, \underline{a}, p) = V_k(E, \underline{b}, p)$.
   Si $k \geqslant n$, $\prod_{i=0}^{k-1}(a_k - a_i) = \prod_{i=0}^{k-1}(b_k - b_i) = 0$ et donc $V_k(E, \underline{a}, p) = V_k(E, \underline{b}, p) = 0$.
7. L'implication directe est immédiate.
   Traitons l'inclusion réciproque
   — Supposons que $E$ est infini. Il suffit de reprendre les calculs faits dans la question 5.b)
   — Dans le cas où $E$ est fini de cardinal $N$. Si $d < N$, la preuve ci-dessus s'applique encore car on peut construire les polynômes $P_0, \ldots, P_d$. Dans le cas où $d \geqslant N$, pour tout $x \in E$, il existe $i \in \{0, \ldots, d\}$ tel que $x = a_i$ et donc $P \in \mathrm{Ent}(E, \mathbf{Z}_{(p)})$.
8. (a) Supposons que $p$ ne divise pas $\prod_{0 \leqslant i < j \leqslant k} (b_j - b_i)$. Si $p$ divisait l'un des $b_j - b_i$, alors il diviserait leur produit. Ainsi, $p$ ne divise aucun des $b_j - b_i$. Ils sont donc de valuation $p$-adique nulle. Cela implique que la suite des $(b_k)$ est une suite $p$-ordonnée. On peut donc calculer $V_k(E, p)$ en utilisant cette suite et on obtient $V_k(E, p) = p^0 = 1$.

(b) Traitons d'abord le cas où $E$ est un ensemble fini et $k$ supérieur ou égal au cardinal de $E$. On sait que dans ce cas, pour tout nombre premier $p$, $V_k(E,p) = 0$.

Dans le cas où $k$ est strictement inférieur au cardinal de $E$. On peut trouver $b_0, \ldots, b_k$ deux à deux distincts, tels que

$$m = \prod_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant k} (b_j - b_i) \neq 0$$

Par contraposée du résultat de la question précédente, $V_k(E,p) = 1$ sauf pour les diviseur de $m$ qui sont en nombre fini.

9. Notons $\mathcal{I}_E$ cet ensemble.
   — Déjà, il est clair que $\mathcal{I}_E$ est un sous-groupe du groupe additif $\mathbf{Z}$. En effet, il contient 0, si $m, n \in \mathcal{I}_E$, et $P \in \mathrm{Ent}_k(E, \mathbf{Z})$, alors $(m-n)P = mP - nP \in \mathbf{Z}[X]$.
   — Ensuite, si $m \in \mathcal{I}_E$ et $n \in \mathbf{Z}$, alors pour tout $P \in \mathrm{Ent}_k(E, \mathbf{Z})$, $mnP = n(mP) \in \mathbf{Z}$.

   Ainsi, $\mathcal{I}_E$ est un idéal de $\mathbf{Z}$.

10. (a) On suppose que $E$ est fini de cardinal $n$. On note $E = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Soit $k$ supérieur ou égal à $n$, alors pour tout nombre premier $p$, $V_k(E,p) = 0$ et donc $k!_E = 0$.

    Montrons d'autre part que le seul entier $m$ tel que $m\mathrm{Ent}_k(E, \mathbf{Z}) \subseteq \mathbf{Z}[X]$ est nul. Pour cela, pour tout entier $d$ non nul, construisons un polynôme $P$ de $\mathrm{Ent}_k(E, \mathbf{Z})$ tel que $dP \notin \mathbf{Z}[X]$. Si on note $Q = \prod_{i=1}^{n}(X - a_i)$ qui est de degré inférieur ou égal à $k$, le polynôme $P = \dfrac{1}{d+1}Q$ appartient à $\mathrm{Ent}_k(E, \mathbf{Z})$ car il s'annule sur $E$ mais $dP$ n'est pas à coefficient entier car son coefficient dominant $\frac{d}{d+1}$ n'est pas entier.

    (b) i. Commençons par montrer que $k!_E \mathrm{Ent}_k(E, \mathbf{Z}) \subset \mathbf{Z}[X]$.

    On fixe $P \in \mathrm{Ent}_k(E, \mathbf{Z})$.

    Pour tout $p \in \mathcal{P}$, $P \in \mathrm{Ent}_k(E, \mathbf{Z}_{(p)})$ car $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Z}_{(p)}$. Si on considère une suite $p$-ordonnée (juste pour ce nombre premier $p$) $\underline{a} = (a_n)_{n \in \mathbf{N}}$, on sait que les polynômes $P_n$ définis à la question 5) forment une base régulière de $\mathrm{Ent}_k(E, \mathbf{Z}_{(p)})$ d'où il existe $(\alpha_i)_{0 \leqslant i \leqslant k} \in (\mathbf{Z}_{(p)})^{k+1}$ tels que

    $$P = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i P_i$$

    On en déduit que

    $$k!_E P = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i k!_E P_i$$

    Or la suite $\underline{a}$ est $p$-ordonnée donc, pour tout entier $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$,

    $$v_p(k!_E) = v_p\left(\prod_{j=0}^{k}(a_k - a_j)\right) \geqslant v_p\left(\prod_{j=0}^{i}(a_k - a_j)\right) \geqslant v_p\left(\prod_{j=0}^{i}(a_i - a_j)\right)$$

    On en déduit que pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$, $k!_E P_i \in \mathbf{Z}_{(p)}[X]$ et donc $k!_E P \in \mathbf{Z}_{(p)}[X]$. Ceci peut-être fait pour tout nombre premier $p$ donc $k!_E P \in \mathbf{Z}[X]$ car $\bigcap_{p \in \mathcal{P}} \mathbf{Z}_{(p)} = \mathbf{Z}$.

    Cela montre que $k!_E \in \mathcal{I}$ et donc que $\overline{k!_E} | k!_E$.

    Si on suppose maintenant qu'il existe une suite $\underline{a} = (a_n)$ d'éléments de $E$ qui soit $p$-ordonnée pour tout nombre premier $p$. On considère le polynôme $P_k$ défini à la question 5). D'après ce qui précède, $P_k \in \mathrm{Ent}_k(E, \mathbf{Z}_{(p)})$ pour tout nombre premier $p$ et donc $P_k \in \mathrm{Ent}_k(E, \mathbf{Z})$ car $\bigcap_{p \in \mathcal{P}} \mathbf{Z}_{(p)} = \mathbf{Z}$. On en déduit que $\overline{k!_E} P_k \in \mathbf{Z}[X]$ par définition et donc, en regardant le coefficient dominant que $\dfrac{\overline{k!_E}}{\prod_{j=0}^{k}(a_k - a_j)} \in \mathbf{Z}$.

On en déduit que pour tout nombre premier $p$,

$$v_p(\overline{k!_E}) \geqslant v_p(\prod_{j=0}^{k}(a_k - a_j))$$

et donc que $V_k(E,p)|\overline{k!_E}$. En faisant le produit sur tous les nombre premiers $p$, on obtient que $k!_E|\overline{k!_E}$.
Finalement $k!_E = \overline{k!_E}$.

ii. On rappelle que le nombre de nombres premiers $p$ divisant $k!_E$ est fini. Notons $\mathcal{P}_k = \{p_1, \ldots, p_r\}$ cet ensemble.
Les nombres $V_k(E,p_1), \ldots, V_k(E,p_r)$ sont donc deux à deux premiers entre eux (car ce sont des puissances de $p_1, \ldots, p_r$ respectivement). Le théorème chinois nous dit alors que l'application canonique

$$\mathbf{Z} \to \prod_{i=1}^{r} \mathbf{Z}/V_k(E,p_i)\mathbf{Z}$$

est surjective. Pour tout entier $n$, on peut donc trouver un entier $u_n$ tel que pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$,

$$u_n \equiv a_n^{(p_i)}\ [V_k(E,p_i)]$$

iii. La preuve fait en i) que $\overline{k!_E}|k!_E$ fonctionne toujours.
Considérons alors le polynôme

$$P = \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(X - u_j)}{k!_E}.$$

Par construction, $P \in \mathrm{Ent}_k(E, \mathbf{Z}_{(p)})$ pour tous les nombres premiers $p$ donc il appartient à $\mathrm{Ent}_k(E,\mathbf{Z})$. On peut conclure comme ci-dessus en disant que $\dfrac{\overline{k!_E}}{k!_E}$ est un entier.

11. (a) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, le polynôme $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{X^2-k^2}{n^2-k^2}$ est de degré $2n$. Il prend des valeurs entières sur $2n+1$ entiers consécutifs (il vaut 1 en $n$ et $-n$ et s'annule pour les entiers compris entre $-(n-1)$ et $(n-1)$). Ainsi, par la question I 8b, ce polynôme appartient à $\mathrm{Ent}(\mathbf{Z})$.
On en déduit que $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{X-k^2}{n^2-k^2} \in \mathrm{Ent}(E,\mathbf{Z})$.

(b) Soit $p$ un nombre premier. Démontrons que la suite des $(k^2)$ est $p$-ordonnée.
On procède comme à la question 2. Il suffit de montrer que pour tout $k \geqslant 1$ et tout élément $m^2$ de $E$,

$$v_p\left(\prod_{i=0}^{k-1}(k^2 - i^2)\right) \leqslant v_p\left(\prod_{i=0}^{k-1}(m^2 - i^2)\right)$$

Ceci est vrai, car, d'après la question précédente,

$$\frac{\prod_{i=0}^{k-1}(m^2 - i^2)}{\prod_{i=0}^{k-1}(k^2 - i^2)} \in \mathbf{Z}$$

On a alors, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, par définition de la factorielle, pour tout nombre premier $p$,

$$v_p(n!_E) = v_p\left(\prod_{i=0}^{n-1}(n^2 - i^2)\right)$$

donc
$$n!_E = \prod_{i=0}^{n-1}(n^2 - i^2)$$
Cela nous donne
$$\begin{aligned} n!_E &= (n^2-(n-1)^2)\cdots(n^2-1)(n^2-0) \\ &= n^2(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)\cdots(n-(n-1))(n+(n-1)) \\ &= n^2(n-1)!(n+1)(n+2)\cdots(2n-1) \\ &= n!(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)\frac{2n}{2} \\ &= \frac{(2n)!}{2} \end{aligned}$$

12. (a) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Démontrons que, pour tout $m \in \mathbf{N}$,
$$N = \frac{(q^m-1)(q^m-q)\cdots(q^m-q^{n-1})}{(q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{n-1})} \in \mathbf{N}.$$
Déjà, il est clair que cette quantité $N$ est nulle pour tout $m < n$. Si $m = n$, alors $N = 1$. Supposons alors $m > n$.

— Commençons déjà par un cas connu : le cas où $q$ est une puissance d'un nombre premier $p$. On reconnaît alors une technique classique de dénombrement des système libres à $n$ éléments dans un espace vectoriel de dimension $m$. Formalisons ce raisonnement. Soit $V$ un espace vectoriel de dimension $l$ sur le corps $\mathbf{F}_q$ à $q$ éléments. On va construire une famille libre :
Pour choisir le premier vecteur $x_1$, nous avons $q^m - 1$ possibilités (tous sauf le vecteur nul). Pour choisir le second, il faut retirer les multiples de $x_1$, on a donc pour $x_2$, $q^m - q$ possibilités. En continuant la raisonnement pour former une famille libre de $n$ éléments, on remarque que l'on a
$$(q^m-1)(q^m-q)\cdots(q^m-q^{n-1}) \text{ possibilités.}$$
Maintenant, si l'on veut compter le nombre de sous-espaces de $V$ de rang $n$, nous devons faire attention au fait suivant : il existe exactement
$$(q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{n-1})$$
systèmes libres qui génèrent le même sous-espace. Ainsi, par le lemme des bergers, le nombre de sous-espaces de $V$ de rang $n$ est bien
$$N = \frac{(q^m-1)(q^m-q)\cdots(q^m-q^{n-1})}{(q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{n-1})} \in \mathbf{N}.$$

— Maintenant, supposons $q$ entier quelconque.
On effectue dans $\mathbf{Z}[X]$ la division euclidienne de
$$(X^m-1)(X^m-X)\cdots(X^m-X^{n-1}) \text{ par } (X^n-1)(X^n-X)\cdots(X^n-X^{n-1}).$$
On a alors l'existence de $Q$ et $R$, deux polynômes de $\mathbf{Z}[X]$, tels que $\deg(R) < n^2$ et
$$(X^m-1)(X^m-X)\cdots(X^m-X^{n-1}) = Q(X)(X^n-1)(X^n-X)\cdots(X^n-X^{n-1}) + R(X).$$
On écrit :
$$\frac{(X^m-1)(X^m-X)\cdots(X^m-X^{n-1})}{(X^n-1)(X^n-X)\cdots(X^n-X^{n-1})} = Q(X) + \frac{R(X)}{(X^n-1)(X^n-X)\cdots(X^n-X^{n-1})}\cdot$$

Il existe un entier $l_0$ tel que, pour tout $l \geqslant l_0$,

$$\frac{R(l)}{(l^n-1)(l^n-l)\cdots(l^n-l^{n-1})} \leqslant \frac{1}{2}.$$

En effet, le degré de $R$ fait tendre la fonction polynomiale vers 0 en $+\infty$.
Or, pour tous les $l$ puissances d'un nombre premier (aussi grandes soient-elles), cette quantité est un entier.
Ceci démontre que $R(l) = 0$ pour tout $l \geqslant l_0$. Ainsi, le polynôme $R$ est nul. Donc, le quotient des deux polynômes $N$ est un polynôme à coefficients entiers.

(b) Notons $(a_n)$ la suite des $(q^n)$ pour un entier supérieur ou égal à 2 fixé $q$. Démontrons que $(a_n)$ est $p$-ordonnée. Pour ceci, nous allons procéder de la même manière qu'avec la suite des carrés :
Soit, pour $n \in \mathbf{N}$, les polynômes

$$P_n(X) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{X-a_k}{a_n-a_k}$$

Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$P_n(X) = \frac{(X-1)(X-q)\cdots(X-q^{n-1})}{(q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{n-1})}.$$

Le résultat de la question précédente affirme que $P_n \in \mathrm{Ent}(E, \mathbf{Z})$.
On peut alors recopier la démonstration de la question 11.b) pour obtenir que la suite est $p$-ordonnée.

(c) Soit $n \in \mathbf{Z}$. Le fait que la suite $(q^n)_{n\in\mathbf{N}}$ soit $p$-ordonnée pour tout nombre premier $p$ permet, comme à la question 11.b), de montrer que

$$n!_E = \prod_{i=0}^{n-1}(q^n - q^i)$$

On obtient

$$\begin{aligned}
n!_E &= \prod_{i=0}^{n-1} q^n - q^i \\
&= \prod_{i=0}^{n-1} q^i(q^{n-i}-1) \\
&= \prod_{i=0}^{n-1} q^i \prod_{i=0}^{n-1}(q^{n-i}-1) \\
&= q^{\sum_{i=1}^{n-1} i}(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q-1) \\
&= q^{\frac{n(n-1)}{2}}(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q-1)
\end{aligned}$$

**Conclusions**

1. (a) Notons $P = \sum_{i=0}^{k} \beta_i X^i$. On remarque que la famille $(P_i)$ forme une famille de polynômes de degré échelonné. Ainsi, elle forme une base de $\mathbf{Q}[X]$. Il existe $\lambda_0, \cdots, \lambda_k \in \mathbf{Q}$ uniques, tels que

$$P(X) = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i P_i(X).$$

On considère $M$ la matrice de la famille $(P_0, \dots, P_k)$ exprimée dans la base canonique $(1, X, \dots, X^k)$ de telle sorte que $M\Lambda = B$ où

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}$$

Comme les $P_i$ sont de coefficient dominant 1, la matrice $M$ est triangulaire supérieure n'ayant comme termes diagonaux que des 1. Ainsi, elle est de déterminant 1, donc est inversible dans $\mathbf{Z}$.

Ceci démontre qu'il existe $\lambda_0, \cdots, \lambda_k \in \mathbf{Z}$ tels que

$$P(X) = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i P_i(X).$$

(b) Avec les notations ci-dessus, si on note $d = \operatorname{pgcd}(\lambda_0, \dots, \lambda_k)$ et $d' = \operatorname{pgcd}(\beta_0, \dots, \beta_k)$, on veut montrer que $d = d'$. On vient de voir qu'il existe une matrice $M$ à coefficients entiers telle que $M\Lambda = B$. Cela implique que pour tout entier naturel $a$, si $a$ est un diviseur commun des $\lambda_i$ alors c'est aussi un diviseur commun des $\beta_i$. Cela implique que $d|d'$.

Réciproquement, $B = M^{-1}\Lambda$ où $M^{-1}$ est aussi à coefficients entiers donc, par le même raisonnement, $d'|d$.

Finalement, $C(P) = \operatorname{pgcd}(\beta_0, \dots, \beta_k) = \operatorname{pgcd}(\lambda_0, \dots, \lambda_k)$.

(c) Le sens indirect étant immédiat, concentrons-nous sur le sens direct.

Supposons par l'absurde que pour tout $z \in E$, $p^m$ divise $P(z)$, mais qu'il existe des $i$, et $z \in E$ tels que $p^m$ ne divise pas $\lambda_i P_i(z)$. Soit $j$ le plus petit indice de cet ensemble. Dans l'écriture de $P$ à l'aide des $P_i$, évaluons ce polynôme en $a_j$. Alors,

$$\begin{aligned} P(a_j) &= \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i(a_j) \\ &= \sum_{i=0}^{j-1} \lambda_i P_i(a_j) + \lambda_j P_j(a_j) + \sum_{i=j+1}^{n} \lambda_i P_i(a_j) \\ &= \sum_{i=0}^{j-1} \lambda_i P_i(a_j) + \lambda_j P_j(a_j) + 0 \\ &\equiv \lambda_j P_j(a_j) \, [p^m] \end{aligned}$$

car $j$ est minimal, donc les $P_k(a_j)$ s'annulent modulo $p^m$ pour tous les $k$ strictement inférieurs à $j$. Comme $p^m$ divise $P(a_j)$, il vient que $p^m$ divise $\lambda_j P_j(a_j)$. En utilisant maintenant que la suite $\underline{a}$ est $p$-ordonnée, on obtient que $p^m$ divise $\lambda_j P_j(z)$ pour tout $z$ dans $E$. C'est une contradiction.

2. (a) On fixe un nombre premier $p$. On considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui est $p$-ordonnée. Si $P$ est tel que $C(P) = 1$, alors $\operatorname{pgcd}(\lambda_0, \dots, \lambda_k) = 1$ donc, il existe $j$ tel que $\lambda_j$ n'est pas un multiple de $p$. De plus, par définition, pour tout $z \in E$, $p^{v_p(d(E,P))}$ divise $P(z)$, donc par la question précédente, $\lambda_j P_j(z)$ également.

Comme $\lambda_j$ est premier avec $p$, pour tout $z \in E$, $P_j(z)$ est divisible par $p^{v_p(d(E,P))}$ par le lemme de Gauss.

En particulier, on a $p^{v_p(d(E,P))}$ qui divise $p^{v_p(P_j(a_j))}$. Mais

$$p^{v_p(P_j(a_j))} = p^{v_p((a_j - a_0)(a_j - a_1)\cdots(a_j - a_{j-1}))} = p^{v_p(j!_E)}.$$

De plus, comme $j \leqslant k$, $v_p(j!_E) \leqslant v_p(k!_E)$ (calcul déjà fait en 10.b.i)), cela montre que $p^{v_p(d(E,P))}$ divise $p^{v_p(k!_E)}$.

En faisant le produit sur tous les nombres premiers, on trouve $d(E,P)$ divise $k!_E$.

(b) Commençons par remarquer que si $E$ est fini de cardinal $r$ et si $k$ est supérieur ou égal à $r$ alors $k!_E = 0$. On peut noter $E = \{u_1, \dots, u_r\}$ et considérer $U = (X-u_1)^{k-r} \prod_{i=1}^{r} (X-u_i)$. Il est unitaire donc $C(U) = 1$ et de degré $k$. De plus pour tout $z \in E$, $U(z) = 0$ donc $d(E,U) = 0 = k!_E$.

On suppose maintenant que $k$ est strictement inférieur au cardinal de $E$. Comme à la question 10(b)ii, on peut regarder l'ensemble fini $\mathcal{P}_k$ des nombres premiers qui divise $k!_E$, considérer pour tout $p$ dans $\mathcal{P}_k$ une suite $p$-ordonnée $\underline{a}^{(p)}$ puis, construire une suite d'entiers $\underline{u}$ telle que pour tout entier $n$ et tout $p \in \mathcal{P}_k$, $u_n$ soit congru à $a_n^{(p)}$ modulo $V_k(E,p)$. Posons alors $U = \prod_{i=0}^{k-1} (X-u_i)$ qui est bien de degré $k$ et tel que $C(U) = 1$ car il est unitaire.

Maintenant, pour tout nombre premier $p$ dans $\mathcal{P}_k$ et tout $z \in E$, par définition, $U(z)$ est congru à $\prod_{i=0}^{k-1} (z-a_i^{(p)})$ modulo $V_k(E,p)$ or

$$v_p(\prod_{i=0}^{k-1}(z-a_i^{(p)})) \geqslant v_p(\prod_{i=0}^{k-1}(a_k^{(p)}-a_i^{(p)}))$$

Cela implique que $v_p(U(z)) \geqslant v_p(k!_E)$.

Ceci étant vrai pour tous les nombres premiers de $\mathcal{P}_k$, $k!_E$ divise $U(z)$ pour tout $z$ dans $E$ et donc $k!_E$ divise $d(E,U)$.

En utilisant alors la question précédente, $d(E,U) = k!_E$.

3. D'après la question précédente, pour tous $k, l \in \mathbf{Z}$, il existe $U_k$ et $U_l$ de degré respectifs $k$ et $l$ et tels que $C(U_k) = C(U_l) = 1$, tels que $d(E,U_k) = k!_E$ et $d(E,U_l) = l!_E$.

   On en déduit que $k!_E l!_E$ divise tous les $U_k(z)U_l(z)$ quand $z \in E$ donc $k!_E l!_E | d(E, U_k U_l)$.

   Maintenant, le polynôme $U_k U_l$ est de degré $k+l$ et $C(U_k U_l) = 1$ (on peut par exemple utiliser que l'anneau $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[X]$ est intègre) donc $d(E, U_k U_l) | (k+l)!_E$.

   Par transitivité, $k!_E l!_E | (k+l)!_E$.

4. Pour tout $P$ polynôme, le nombre $d(E,P)$ divise $d(F,P)$. Par la question 2, on obtient immédiatement pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $k!_E$ divise $k!_F$.

5. (a) On va démontrer que, pour $E$ un sous-ensemble de $\mathbf{Z}$, et $a_0, \cdots, a_n \in E$,

$$0!_E 1!_E \cdots n!_E \text{ divise } \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} a_j - a_i.$$

Soit $p$ un nombre premier. Soit $F = \{a_0, \cdots, a_n\} \subseteq E$.

Il existe une permutation (qui dépend de $p$) de $\{0, \dots, n\}$ telle que $a_{\sigma(0)}, \dots, a_{\sigma(n)}$ est une famille $p$-ordonnée. On en déduit que pour tout $j \in \{0, \dots, n\}$,

$$V_j(F,p) = p^{v_p((a_\sigma(j) - a_{\sigma(j-1)}) \cdots (a_{\sigma(j)} - a_{\sigma(0)}))}.$$

Si l'on fait le produit sur tous les entiers $j$ de 0 à $n$ on obtient que

$$\prod_{j=0}^{n} V_j(F,p) = p^{v_p(\prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n}(a_{\sigma(j)} - a_{\sigma(i)}))} = p^{v_p(\prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n}(a_j - a_i))}$$

La deuxième égalité venant du fait que

$$\prod_{0\leqslant i<j\leqslant n}(a_{\sigma(j)}-a_{\sigma(i)}) = \pm \prod_{0\leqslant i<j\leqslant n}(a_j - a_i)).$$

En faisant le produit sur tous les nombres premiers $p$, on obtient

$$0!_F 1!_F \cdots n!_F = \pm \prod_{0\leqslant i<j\leqslant n} a_j - a_i.$$

Par la question précédente, on a

$$0!_E 1!_E \cdots n!_E \text{ divise } \prod_{0\leqslant i<j\leqslant n} a_j - a_i.$$

(b) En considérant $E = \mathbf{Z}$, muni de la suite $p$-ordonnée $\{0, \cdots, n\}$, on a immédiatement le résultat.

6. (a) On a vu à la question 1 que pour tout $z \in E$, $p^m$ divise $P(z)$ si et seulement si, pour tout $i \in \{0, \cdots, k\}$ et pour tout $z \in E$, $p^m$ divise $\lambda_i P_i(z)$. Par construction de la base $P_i$, on a

$$p^{v_p(d(E,P_i))} = V_i(E, p).$$

Ainsi, pour tout $z \in E$, $p^m$ divise $\lambda_i P_i(z)$ si et seulement si pour tout $i$, $\lambda_i$ est un multiple de $\frac{p^m}{\text{pgcd}(p^m, k!_E)}$.

(b) i. Nous allons démontrer que, si $E$ est un sous-ensemble de $\mathbf{Z}$, le nombre de fonctions polynomiales de $E$ dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est donné par

$$\prod_{k=0}^{n} \frac{n}{\text{pgcd}(n, k!_E)}.$$

On va commencer par décomposer le problème. Par le théorème des restes chinois, si $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$, l'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est isomorphe au produit des $\mathbf{Z}/p_i^{\alpha_i}\mathbf{Z}$. La formule de la conjecture étant clairement multiplicative, il nous suffit de démontrer le résultat pour une puissance de $p$, pour un nombre premier $p$, disons $p^m$.

Soit $(a_n)$ une suite $p$-ordonnée de $E$. On garde la notation $P_k$ induite précédemment. Toute fonction polynomiale de $E$ dans $\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}$ peut s'écrire sous la forme

$$P(x) = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i P_i(x)$$

avec

$$\forall i \in \{0, \cdots, k\},\ 0 \leqslant \lambda_i < \frac{p^m}{\text{pgcd}(p^m, k!_E)}.$$

En effet, par la question précédente, les $\lambda_k$ sont déterminés modulo $\frac{p^m}{\text{pgcd}(p^m, k!_E)}$. On peut donc les choisir entre 0 et $\frac{p^m}{\text{pgcd}(p^m, k!_E)}$ (strictement pour la borne supérieure).

On a donc $\frac{p^m}{\text{pgcd}(p^m, k!_E)}$ choix possibles pour $\lambda_k$.

ii. Le résultat précédent appliqué à $E = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, avec la suite des entiers naturels $p$ ordonnée de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ donne la réponse à la question.

# Chapitre 4

# Épreuve écrite d'analyse et probabilités

## 4.1 Énoncé

Le sujet est disponible à l'URL http://www.devenirenseignant.gouv.fr/cid137747/sujets-rapports-des-jurys-agregation-2021.html ou sur le site agreg.org.

## 4.2 Rapport sur l'épreuve écrite d'analyse et probabilités

### Commentaires sur l'épreuve écrite d'analyse et probabilités

#### Présentation du sujet.

Le sujet d'analyse et probabilités de la session 2021 porte sur les fonctions presque périodiques introduites par Harald Bohr dans les années 1920. Ce domaine particulièrement riche comporte de nombreuses applications à la physique, aux systèmes dynamiques et à l'arithmétique. Le sujet du concours 2021 est une présentation élémentaire de l'injectivité des coefficients de Fourier généralisés des fonctions presque périodiques. Plus précisément (et plus modestement), après avoir établi quelques propriétés essentielles des polynômes trigonométriques généralisés (c'est-à-dire les combinaisons linéaires de fonctions du type $t \in \mathbf{R} \mapsto \exp(i\lambda t)$ où le paramètre $\lambda$ varie dans $\mathbf{R}$) le sujet se borne à montrer que les limites uniformes de tels polynômes sont des fonctions presque périodiques puis à prouver le résultat d'injectivité susmentionné pour cette classe de fonctions, sans démontrer qu'elle coïncide en fait avec celle des fonctions presque périodiques.

Comme d'usage pour les écrits du concours de l'agrégation, chaque partie du sujet commence par des questions simples et certaines questions préliminaires constituent des preuves classiques : le sujet a été conçu pour permettre à la plupart des candidats de traiter les premières parties. Bien que faciles, ces questions ne doivent pas être bâclées : au contraire, elles sont l'occasion pour tous les candidats, y compris les meilleurs, de démontrer aux correcteurs leur bonne capacité de rédaction mathématique (clarté, logique, précision). Elles permettent également de se familiariser avec les objets mathématiques introduits dans le problème. Le sujet a été construit comme une progression cohérente ; par conséquent, un traitement linéaire des questions est à privilégier : le barème a été établi en ce sens.

Donnons un aperçu du sujet. Comme déjà mentionné, la partie **I** est constituée de résultats préliminaires : tout d'abord des questions portant sur les solutions d'équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficient constant, avec second membre (**I.1** et **I.2**) puis sur des résultats classiques sur les familles sommables (**I.3**) et enfin sur l'existence et l'unicité du prolongement d'une forme linéaire continue sur un sous-espace dense d'un Banach (**I.4**).

La partie **II** est consacrée aux propriétés élémentaires de $\mathscr{P}$ qui désigne dans le problème l'espace des polynômes trigonométriques généralisés (**II.1** à **II.3**) avec deux exercices : l'un sur l'endomorphisme

$f \mapsto f(r+\cdot)-f$ (**II.4**, cet endomorphisme est considéré plus loin dans le problème), l'autre sur l'image de $t \in \mathbf{R} \mapsto c_0 e^{2i\pi t} + c_1 e^{2i\pi\varphi t}$ lorsque $\varphi$ est irrationnel (**II.5**, cette question est indépendante du reste de l'épreuve).

Dans la partie **III**, les coefficients des polynômes trigonométriques généralisés sont vus comme des formes linéaires continues pour la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$ des fonctions continues bornées sur $\mathbf{R}$ : le coefficient de $f \in \mathscr{P}$ en la fréquence $\lambda \in \mathbf{R}$, noté $\mathsf{a}(f,\lambda)$, est la limite de $t^{-1}\int_0^t f(s)e^{-i\lambda s}\mathrm{d}s$ lorsque $t$ tend vers l'infini (**III.1**). Les questions **III.2** à **III.4** montrent que cette expression permet d'étendre la notion de coefficient de Fourier généralisé à l'espace $\overline{\mathscr{P}}$, qui est l'adhérence de $\mathscr{P}$ pour $\|\cdot\|_\infty$.

La partie **IV** commence par l'étude d'une fonction particulière de $\overline{\mathscr{P}}$. La question **IV.2** propose ensuite une preuve classique de l'inégalité de Bessel (avec une condition pour obtenir l'égalité) dans un espace vectoriel muni d'une forme hermitienne positive qui n'est pas nécessairement définie. La question **IV.3** montre que ce résultat peut s'appliquer à la forme $(f,g) \in \overline{\mathscr{P}}^2 \mapsto \mathsf{a}(\bar{f}g,0)$, ce qui permet de montrer que le spectre de $f$, noté $\mathrm{Sp}(f) = \{\lambda \in \mathbf{R} : \mathsf{a}(f,\lambda) \neq 0\}$, est dénombrable. La question **IV.4** est un exercice d'appplication où l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 des questions **I.1** et **I.2** est étudiée lorsque le second membre appartient à $\overline{\mathscr{P}}$. Le lien avec les fonctions continues périodiques et les coefficients de Fourier classiques fait l'objet de la question **IV.5**.

L'espace $\mathscr{B}$ des fonctions continues presque périodiques est présenté dans la partie **V** du problème (la notion de $\varepsilon$-période au **V.1**, la notion de partie relativement dense au **V.2**, quelques propriétés élémentaires aux questions **V.3** à **V.5**). Les questions **V.6** à **V.9** sont consacrées à l'espace $\mathscr{N}$ des fonctions normales, c'est-à-dire des fonctions continues bornées $f$ telles que l'ensemble des fonctions translatées $\{f(a+\cdot); a \in \mathbf{R}\}$ est relativement compact pour $\|\cdot\|_\infty$. Les questions **V.10** et **V.11** font la synthèse des résultats précédents pour montrer que $\overline{\mathscr{P}} \subset \mathscr{N} \subset \mathscr{B}$. Comme déjà mentionné, le sujet ne montre pas que $\overline{\mathscr{P}} = \mathscr{N} = \mathscr{B}$ : pour une preuve de ce résultat, nous renvoyons par exemple au livre [3] (chapitre 1, section 2, pages 14-23).

La partie **VI** est consacrée à la preuve de l'injectivité des coefficients de Fourier généralisés des fonctions de $\overline{\mathscr{P}}$ : la question **VI.1** traite d'abord le cas (plus familier) des fonctions périodiques ; la preuve de l'injectivité constitue le but des questions **VI.2** et **VI.3** ; les questions **VI.4** et **VI.5** sont deux applications de ce résultat.

## Bibliographie


[1] Besicovitch, A. S. Almost Periodic Functions. Dover, New York 1954.

[2] Bohr, H. Almost Periodic Functions. Dover, reprint, 2018.

[3] Corduneanu, C. Almost Periodic Functions, 2d ed. Chelsea pub. company NY, 1989.

[4] Corduneanu, C. Almost Periodic Oscillations and Waves. Springer, 2009.

[5] Fink, A. M. Almost Periodic Differential Equations. LNM, Springer, 1974.

[6] Zaidman, S. Almost Periodic Functions in Abstract Spaces. Pitman publishing, 1985.


### Quelques remarques sur les copies.

Le sujet était progressif et guidé. L'ensemble des copies a présenté une grande homogénéité dans les questions abordées. Très peu de copies n'ont traité que deux ou trois questions. La partie **I** a été traitée par 100 % des copies, la partie **II** par 91 %, la partie **III** par 42 %, la partie **IV** par 16 %, la partie **V** par 5% et la partie **VI** par 3 %. Plus précisément, le pourcentage des copies abordant les questions situées au delà du **III.4** ne dépasse pas 9% (à l'exception de **IV.1** abordée par 15% des candidats). Le grapillage a donc été limité et la plupart des copies a traité un même bloc constitué des 35 premières questions du problème. Les différences entre les notes sont donc essentiellement attribuables à des différences de qualité de l'argumentation des réponses aux mêmes questions.

Signalons tout d'abord une coquille dans le sujet à la question **I.4** : il y est écrit « [...] *une unique application* **C**-*linéaire* $\Lambda : H_0 \to \mathbf{C}$ [...] » au lieu de « [...] *une unique application* **C**-*linéaire* $\Lambda : H \to \mathbf{C}$ [...] ». Cette erreur ne concernait que le texte indiquant le but des questions **IV.4.a** à **IV.4.d**. Ces quatre questions présentant un preuve guidée de ce résultat classique étaient, elles, exemptes de coquille. Ce groupe de questions a été abordé par 80 % des copies.

Une majorité de copies étaient d'un niveau universitaire correct et montraient une maîtrise technique honorable. Le sujet n'a pas donné lieu a une difficulté de correction particulière. Nous n'avons rien de notoire qui puisse être utile à signaler dans ce rapport, à l'exception des deux remarques qui suivent.

Au **I.1**, il a été demandé de justifier la convergence sur $[0, \infty[$ de l'intégrale d'une fonction continue. Les réponses ont trop souvent été brouillonnes voire fautives. Comme dans les rapports précédents, nous rappelons l'importance de justifier l'existence des limites présentes implicitement dans les notations symboliques $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ ou $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. S'agissant d'un concours sélectionnant de futurs enseignants, le jury attend une rédaction soignée de la part des candidats qui doivent le convaincre de leur compréhension approfondie et de leur bonne maîtrise de ces questions de base, questions qui sont placées en début de sujet et qui ne présentent aucune difficulté technique particulière.

La question **I.2** portait sur une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants et avec second membre. Ce type d'équation différentielle simple apparaît naturellement en physique, biologie, économie etc, et le calcul rigoureux de la forme des solutions est généralement enseigné aux étudiants de première année de sciences de façon directe et sans longs préliminaires théoriques. Cependant, dans leur grande majorité, les copies ont invoqué soit le théorème de Cauchy-Lipschitz (pour une une minorité d'entre elles) soit le théorème de Cauchy linéaire (pour une majorité d'entre elles) pour justifier de l'existence et (moins souvent) de l'unicité des solutions à l'équation différentielle du sujet. Mentionnons que peu de copies ont énoncé ces théorèmes explicitement et que les hypothèses et conclusions du théorème de Cauchy linéaire ne semblent à peu près connues que d'un quart des candidats. Quand elle n'était pas erronée, la forme explicite des solutions n'a pas été vérifiée très souvent et elle a rarement été obtenue par un raisonnement visible : elle semblait soit provenir de calculs que l'on a cru bon de laisser sur le brouillon, soit d'un effort de mémoire, soit d'un recoupement avec des questions ultérieures. Bref, la confusion régnant dans les réponses à la question **I.2** est au mieux la marque d'un manque de recul des candidats sur la base des équations différentielles. Comme ce constant vaut pour la quasi-totalité des copies (y compris les bonnes), la cause de cette situation préoccupante est sans doute à chercher dans la place actuelle des équations différentielles dans l'enseignement supérieur des mathématiques et la manière dont elles sont traitées.

## Corrigé de l'épreuve d'analyse et probabilités.

### I. Questions préliminaires.

**(I.0)** On pose $h(x) = x$, $x \in \mathbf{R}$. On observe que $h_n - h$ est la fonction constante à $1/n$ donc $\|h_n - h\|_\infty = 1/n$ qui tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. Donc $h_n$ converge uniformément sur $\mathbf{R}$ vers $h$.

Il est ensuite clair que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\lim_{n\to\infty} h_n(x)^2 = h(x)^2$ car la fonction carré est continue. Cela montre que $h_n^2$ converge simplement sur $\mathbf{R}$ vers $h^2$.

En revanche on observe que $h_n(x)^2 - h(x)^2 = 2n^{-1}x + n^{-2}$ qui n'est pas une fonction bornée sur $\mathbf{R}$, c'est-à-dire que $\sup_{x\in\mathbf{R}} |h_n(x)^2 - h(x)^2| = \infty$ et donc $(h_n^2)_{n\in\mathbf{N}\setminus\{0\}}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbf{R}$ vers $h^2$.

On vérifie ensuite pour tout $t \in \mathbf{R}$ que

$$f(t)g(t) - f_n(t)g_n(t) = (f(t) - f_n(t))g(t) + (g(t) - g_n(t))f_n(t) .$$

Donc
$$\|fg-f_ng_n\|_\infty \leqslant \|f_n-f\|_\infty\|g\|_\infty + \|g_n-g\|_\infty\|f_n\|_\infty.$$
Comme $\|f_n\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|f-f_n\|_\infty$, la suite $(\|f_n\|_\infty)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée et l'inégalité précédente implique alors que $\lim_{n\to\infty}\|fg-f_ng_n\|_\infty = 0$.

**(I.1.a)** À $t$ fixé, la fonction $s\in[0,\infty[\,\mapsto e^{-\alpha s}f(t+s)$ est continue. Donc pour tout $b\in[0,\infty[$, l'intégrale $\int_0^b e^{-\alpha s}f(t+s)\mathrm{d}s$ est un complexe bien défini. Pour montrer la convergence de l'intégrale en $\infty$, il suffit de montrer que $s\in[0,\infty[\,\mapsto e^{-\alpha s}f(t+s)$ est intégrable, c'est-à-dire que $\int_0^\infty |e^{-\alpha s}f(t+s)|\mathrm{d}s$ est une quantité finie. Pour cela on observe que $|e^{-\alpha s}| = |e^{-s\mathrm{Re}(\alpha)}e^{-is\mathrm{Im}(\alpha)}| = |e^{-s\mathrm{Re}(\alpha)}|\,|e^{-is\mathrm{Im}(\alpha)}| = e^{-s\mathrm{Re}(\alpha)}$. Donc
$$\forall s\in\mathbf{R},\quad |e^{-\alpha s}f(t+s)|\leqslant \|f\|_\infty e^{-\mathrm{Re}(\alpha)s}.$$
Or $\int_0^\infty e^{-\mathrm{Re}(\alpha)s}\mathrm{d}s = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-\mathrm{Re}(\alpha)s}\mathrm{d}s = \lim_{b\to\infty}(1-e^{-\mathrm{Re}(\alpha)b})/\mathrm{Re}(\alpha) = 1/\mathrm{Re}(\alpha)$ car $\mathrm{Re}(\alpha)>0$. Donc $\int_0^\infty |e^{-\alpha s}f(t+s)|ds \leqslant \|f\|_\infty/\mathrm{Re}(\alpha)$.

**(I.1.b)** On applique le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $f_n(s)=e^{-\alpha s}f(t_n+s)$, $s\in\mathbf{R}$ :

- pour tout $s\in\mathbf{R}$, $\lim_{n\to\infty} f_n(s) = e^{-\alpha s}f(t+s)$ (continuité de $f$) ;
- pour tout $s\in\mathbf{R}$ et tout $n\in\mathbf{N}$, $|f_n(s)|\leqslant\|f\|_\infty\exp(-\mathrm{Re}(\alpha)s)$ et $\int_0^\infty \exp(-\mathrm{Re}(\alpha)s)ds = 1/\mathrm{Re}(\alpha)$.

Le théorème de convergence dominée implique que $\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(s)\,ds = \int_0^\infty e^{-\alpha s}f(t+s)\,ds$, c'est-à-dire $\lim_{n\to\infty}(K_\alpha f)(t_n) = (K_\alpha f)(t)$.

**(I.1.c)** La question précédente montre que $K_\alpha f$ est une fonction continue sur $\mathbf{R}$. Elle est bornée, comme montré à la question **(I.1.a)**, par $\|f\|_\infty/\mathrm{Re}(\alpha)$. Donc $K_\alpha f\in C_b(\mathbf{R},\mathbf{C})$ et
$$\forall f\in C_b(\mathbf{R},\mathbf{C}),\quad \|K_\alpha f\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty/\mathrm{Re}(\alpha)\ .$$
La linéarité de l'intégrale implique que $K_\alpha$ est $\mathbf{C}$-linéaire. L'inégalité précédente implique que pour toutes fonctions $f,g\in C_b(\mathbf{R},\mathbf{C})$, $\|K_\alpha f-K_\alpha g\|_\infty = \|K_\alpha(f-g)\|_\infty\leqslant\|f-g\|_\infty/\mathrm{Re}(\alpha)$, ce qui entraîne la continuité pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

**(I.1.d)** On note $I = \{c\in]0,\infty[ :\ \forall f\in C_b(\mathbf{R},\mathbf{C}),\ \|K_\alpha f\|_\infty\leqslant c\|f\|_\infty\}$ et posons $c_0=\inf I$. La question précédente montre que $1/\mathrm{Re}(\alpha)\in I$ et donc que $c_0\leqslant 1/\mathrm{Re}(\alpha)$. On remarque ensuite que si $c\in I$, alors $[c,\infty[\,\in I$. Donc $I$ est une demi-droite infinie à droite.

Montrons que $c_0 = 1/\mathrm{Re}(\alpha)$. Pour cela on pose $f(s)=\exp(i\mathrm{Im}(\alpha)s)$. On remarque que $\|f\|_\infty = 1$. On a ensuite
$$\forall s\in\mathbf{R},\quad e^{-\alpha s}f(t+s) = e^{i\mathrm{Im}(\alpha)t}e^{-\mathrm{Re}(\alpha)s}\ ,$$
et donc $(K_\alpha f)(t) = e^{i\mathrm{Im}(\alpha)t}/\mathrm{Re}(\alpha)$, ce qui entraîne $\|K_\alpha f\|_\infty = 1/\mathrm{Re}(\alpha) = \|f\|_\infty/\mathrm{Re}(\alpha)$. Cela permet de conclure.

**(I.2.a)** Supposons que $y$ soit une solution de $(\mathrm{E}_{f,\beta})$ telle que $y(0)=z_0$. On observe pour tout $t\in\mathbf{R}$ que $(e^{-\beta t}y(t))' = e^{-\beta t}f(t)$. On en déduit donc (avec les conventions algébriques habituelles sur les bornes des intégrales) que pour tout $t\in\mathbf{R}$, $e^{-\beta t}y(t)-y(0) = \int_0^t e^{-\beta s}f(s)\,ds$ et donc
$$\forall t\in\mathbf{R},\quad y(t) = z_0e^{\beta t} + e^{\beta t}\int_0^t e^{-\beta s}f(s)\,ds\ .$$
Cela montre l'unicité et donne la forme de la solution.

Montrons l'existence : pour tout $t \in \mathbf{R}$, posons $y(t) = z_0 e^{\beta t} + e^{\beta t} \int_0^t e^{-\beta s} f(s)\, ds$. On voit que $y(0) = z_0$, que $y$ est une fonction dérivable sur $\mathbf{R}$ et que

$$\begin{aligned} y'(t) &= \beta z_0 e^{\beta t} + \beta e^{\beta t} \int_0^t e^{-\beta s} f(s)\, ds + e^{\beta t} e^{-\beta t} f(t) \qquad (4.1) \\ &= \beta y(t) + f(t) . \end{aligned}$$

Cela montre que $y$ est solution de $(\mathrm{E}_{f,\beta})$ telle que $y(0) = z_0$.

**(I.2.b)** On a $e^{-\beta t} y(t) - e^{-\beta t_0} y(t_0) = \int_{t_0}^t e^{-\beta s} f(s)\, ds$. Or $|e^{-\beta s} f(s)| \leqslant \|f\|_\infty \exp(-\mathrm{Re}(\beta) s)$. Par conséquent, $\int_{t_0}^\infty |e^{-\beta s} f(s)|\, ds \leqslant \|f\|_\infty \exp(-\mathrm{Re}(\beta) t_0)/\mathrm{Re}(\beta)$ et donc $\lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^t e^{-\beta s} f(s)\, ds$ existe. Cela implique également que $\lim_{t\to+\infty} e^{-\beta t} y(t)$ existe et vaut

$$\ell = \lim_{t\to+\infty} e^{-\beta t} y(t) = e^{-\beta t_0} y(t_0) + \int_{t_0}^\infty e^{-\beta s} f(s)\, ds.$$

Autrement dit,

$$\begin{aligned} y(t_0) &= \ell e^{\beta t_0} - e^{\beta t_0} \int_{t_0}^\infty e^{-\beta s} f(s)\, ds \qquad (4.2) \\ &= \ell e^{\beta t_0} - \int_{t_0}^\infty e^{-\beta (s-t_0)} f(s)\, ds \qquad (4.3) \\ &= \ell e^{\beta t_0} - \int_0^\infty e^{-\beta s} f(t_0 + s)\, ds \qquad (4.4) \\ &= \ell e^{\beta t_0} - (K_\beta f)(t_0). \end{aligned}$$

**(I.2.c)** Supposons que $y \in C_b(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ soit solution à $(\mathrm{E}_{\beta,f})$. On a donc pour tout $t \in \mathbf{R}$, $|e^{-\beta t} y(t)| \leqslant \|y\|_\infty \exp(-\mathrm{Re}(\beta) t)$ et donc $\ell = \lim_{t\to+\infty} e^{-\beta t} y(t) = 0$. La question précédente montre alors qu'on a nécessairement $y = -K_\beta f$, ce qui montre l'unicité et la forme d'une éventuelle solution.

Vérifions ensuite que $y = -K_\beta f$ est bien solution bornée de $(\mathrm{E}_{\beta,f})$. Par la question (**I.1.a**) $K_\beta f$ est une fonction bornée. Comme montré à la question précédente, $y(t) = -e^{\beta t} \int_t^\infty e^{-\beta s} f(s)\, ds$ , qui est une fonction $C^1$ (produit de fonction $C^1$) et qui vérifie

$$y'(t) = -\beta e^{\beta t} \int_t^\infty e^{-\beta s} f(s)\, ds + e^{\beta t} e^{-\beta t} f(t) = \beta y(t) + f(t),$$

ce qui montre bien que $y$ une solution de $(\mathrm{E}_{\beta,f})$.

**(I.2.d)** Soit $y \in C_b(\mathbf{R}, \mathbf{C})$. On pose $\widetilde{y}(t) := y(-t)$, $t \in \mathbf{R}$. On constate d'abord que $\widetilde{y} \in C_b(\mathbf{R}, \mathbf{C})$. On suppose ensuite que $y$ est solution de $(\mathrm{E}_{\beta,f})$. On vérifie que pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\widetilde{y}'(t) = -y'(-t) = -\beta y(-t) - f(-t) = -\beta \widetilde{y} - f(-t) .$$

Donc $\widetilde{y}$ est une solution à $(\mathrm{E}_{-\beta,-f(-\cdot)})$. De même, si $\widetilde{y}$ est une solution de $(\mathrm{E}_{-\beta,-f(-\cdot)})$, alors $y$ est solution de $(\mathrm{E}_{\beta,f})$.

On suppose que $\mathrm{Re}(\beta) < 0$ et on pose

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad y(t) = (K_{-\beta} f(-\,\cdot))(-t) .$$

Donc $\widetilde{y} = K_{-\beta} f(-\cdot)$ et par la question précedente, $\widetilde{y}$ est une solution bornée de $(\mathrm{E}_{-\beta,-f(-\cdot)})$ et donc $y$ est une solution bornée de $(\mathrm{E}_{\beta,f})$.

**(I.2.e)** On choisit $f = \mathsf{e}_\lambda$. Par **(I.2.a)** si $y$ est une solution de $(\mathrm{E}_{i\lambda,f})$ alors pour tout $t \in \mathbf{R}$, $y(t) = y(0)e^{i\lambda t} + e^{i\lambda t}t$ qui n'est pas bornée car

$$|y(t)| \geqslant \big||e^{i\lambda t}t| - |y(0)e^{i\lambda t}|\big| = \big||t| - |y(0)|\big|$$

et donc $\lim_{t\to\infty} |y(t)| = \infty$.

**(I.3.a)** Si $D_p$ est vide, il n'y a rien à prouver. Supposons $D_p$ non-vide. Supposons que $j_1, \ldots, j_k \in D_p$ soient distincts. Comme $S = \{j_1, \ldots, j_k\}$ est un ensemble fini non-vide, on a $\sum_{j\in J} a_j \geqslant \sum_{j\in S} a_j = a_{j_1} + \ldots + a_{j_k} \geqslant k2^{-p}$, ce qui implique le résultat voulu.

**(I.3.b)** Il suffit de remarquer que $D = \bigcup_{p\in\mathbf{N}} D_p$ et on utilise le fait qu'une union d'ensembles dénombrables est dénombrable.

**(I.3.c)** Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $S(n) = \{j(k)\,;\, 0 \leqslant k \leqslant n\}$ qui est fini et non-vide. On observe d'abord que $s_n = a_{j(1)} + \ldots + a_{j(n)} = \sum_{j\in S(n)} a_j \leqslant \sum_{j\in J} a_j$. On observe que $s_{n+1} \geqslant s_n$ ; $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est donc une suite bornée par $\sum_{j\in J} a_j$. Elle est donc convergente et pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a donc

$$s_n \leqslant \lim_{n\to\infty} s_n \leqslant \sum_{j\in J} a_j \ .$$

Soit $S \subset J$, un ensemble non-vide et comptant $p$ éléments. Comme $j(\cdot)$ est bijective, il existe $p$ entiers distincts que l'on peut ordonner en croissant : $n_1 < \ldots < n_p$ tels que $S = \{j(n_1), \ldots, j(n_p)\}$. Par conséquent $S \subset S(n_p)$ et comme les $a_j$ sont positifs, on a

$$\sum_{j\in S} a_j \leqslant \sum_{j\in S(n_p)} a_j \ = s_{n_p} \leqslant \lim_{n\to\infty} s_n \ .$$

Comme cette inégalité est valable pour tout sous-ensemble $S \subset J$ non-vide et fini, en passant au supremum on obtient $\sum_{j\in J} a_j \leqslant \lim_{n\to\infty} s_n$. L'inégalité large contraire précédente entraîne alors que $\sum_{j\in J} a_j = \lim_{n\to\infty} s_n$.

**(I.4.a)** Soit $f \in H$. Comme $H_0$ est dense dans $H$, il existe une suite $f_n \in H_0$, $n \in \mathbf{N}$, telle que $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$|\Lambda_1(f) - \Lambda_2(f)| \leqslant |\Lambda_1(f) - \Lambda_1(f_n)| + |\Lambda_1(f_n) - \Lambda_2(f_n)| + |\Lambda_2(f_n) - \Lambda_2(f)|$$

Puisque $f_n \in H_0$, $(P)$ implique que $\Lambda_1(f_n) = \ell(f_n) = \Lambda_2(f_n)$. On a donc

$$|\Lambda_1(f) - \Lambda_2(f)| \leqslant |\Lambda_1(f) - \Lambda_1(f_n)| + |\Lambda_2(f_n) - \Lambda_2(f)|.$$

Par $(P)$, $\Lambda_1$ et $\Lambda_2$ sont linéaires ce qui implique

$$|\Lambda_1(f) - \Lambda_2(f)| \leqslant |\Lambda_1(f - f_n)| + |\Lambda_2(f_n - f)|$$

Toujours par $(P)$, on a $|\Lambda_1(g)| \leqslant \|g\|$ et $|\Lambda_2(g)| \leqslant \|g\|$ pour tout $g \in H$, on obtient alors $|\Lambda_1(f) - \Lambda_2(f)| \leqslant 2\|f_n - f\|$, pour tout $n \in \mathbf{N}$. En passant à la limite, on obtient $|\Lambda_1(f) - \Lambda_2(f)| = 0$, ce qui permet de conclure.

**(I.4.b)** Soit un réel $\varepsilon > 0$. Comme $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy, il existe $n(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ tel que pour tous entiers $m, n \geqslant n(\varepsilon)$, $\|f_m - f_n\| < \varepsilon$. Comme $\ell$ est linéaire et comme $|\ell(f)| \leqslant \|f\|$ pour tout $f \in H_0$, on en déduit $|\ell(f_m) - \ell(f_n)| = |\ell(f_m - f_n)| \leqslant \|f_m - f_n\| < \varepsilon$, ce qui entraîne que $(\ell(f_n))_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbf{C}$. Comme $\mathbf{C}$ est complet, cela implique que $(\ell(f_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

**(I.4.c)** Comme la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente, elle de Cauchy et la question **(I.4.b)** qui précède implique que $(\ell(f_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un complexe $c_1$. De même on note $c_2=\lim_{n\to\infty}\ell(g_n)$. Or pour tout $n\in\mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}
|c_1-c_2| &\leqslant |c_1-\ell(f_n)|+|\ell(f_n)-\ell(g_n)|+|\ell(g_n)-c_2| && (4.5)\\
&= |c_1-\ell(f_n)|+|\ell(f_n-g_n)|+|\ell(g_n)-c_2|, \quad \text{par linéarité de } \ell && (4.6)\\
&\leqslant |c_1-\ell(f_n)|+|\ell(g_n)-c_2|+\|f_n-g_n\| \quad \text{car } \ell \text{ est 1-Lipschitz} && (4.7)\\
&\leqslant |c_1-\ell(f_n)|+|\ell(g_n)-c_2|+\|f-f_n\|+\|f-g_n\|.
\end{aligned}$$

En laissant $n$ tendre vers l'infini, on obtient $|c_1-c_2|=0$, ce qui permet de conclure.

**(I.4.d)** Montrons d'abord que $\Lambda$ est $\mathbf{C}$-linéaire. Soient $f,g\in H$ et $c\in\mathbf{C}$. Comme $H_0$ est dense dans $H$, il existe $f_n,g_n\in H_0$, $n\in\mathbf{N}$, tels que $\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0$ et $\lim_{n\to\infty}\|g_n-g\|=0$. Par les propriétés de la norme, $\|f_n+cg_n-f-cg\|\leqslant\|f_n-f\|+|c|.\|g_n-g\|$. Par conséquent, on a aussi $\lim_{n\to\infty}\|f_n+cg_n-f-cg\|=0$. Par la question **(I.4.c)** qui précède, on en déduit que $\lim_{n\to\infty}\ell(f_n)=\Lambda(f)$, $\lim_{n\to\infty}\ell(g_n)=\Lambda(g)$ et $\lim_{n\to\infty}\ell(f_n+cg_n)=\Lambda(f+cg)$. Or $\ell$ est $\mathbf{C}$-linéaire donc $\ell(f_n+cg_n)=\ell(f_n)+c\ell(g_n)$. Par conséquent, on a également $\lim_{n\to\infty}\ell(f_n+cg_n)=\Lambda(f)+c\Lambda(g)$, ce qui montre que $\Lambda(f+cg)=\Lambda(f)+c\Lambda(g)$ et donc que $\Lambda$ est $\mathbf{C}$-linéaire.

Montrons ensuite que $|\Lambda(f)|\leqslant\|f\|$. Pour cela on garde la notation précédente pour les $f_n$. On vérifie alors que

$$|\Lambda(f)|\leqslant|\Lambda(f)-\ell(f_n)|+|\ell(f_n)|\leqslant|\Lambda(f)-\ell(f_n)|+\|f_n\|\leqslant|\Lambda(f)-\ell(f_n)|+\|f_n-f\|+\|f\|.$$

En passant à la limite, on obtient bien le résultat désiré.

Il reste à montrer que $\Lambda(f)=\ell(f)$ pour tout $f\in H_0$. Pour vérifier cela, il suffit simplement de choisir $f_n=f$ pour tout $n\in\mathbf{N}$, dans ce qui précède.

### II. Polynômes trigonométriques généralisés.

**(II.1)** Pour tout $\lambda\in\mathbf{R}$, $\mathsf{e}_\lambda$ est continue et $\|\mathsf{e}_\lambda\|_\infty=1$. Donc $\mathsf{e}_\lambda\in C_b(\mathbf{R},\mathbf{C})$. Par conséquent toute combinaison linéaire des $(\mathsf{e}_\lambda)_{\lambda\in\mathbf{R}}$ appartient à $C_b(\mathbf{R},\mathbf{C})$, ce qui entraîne immédiatement que $\mathscr{P}$ est un sous-espace de $C_b(\mathbf{R},\mathbf{C})$.

Soient $f,g\in\mathscr{P}$. Il existe donc des réels $\lambda_1,\dots,\lambda_m$, $\lambda'_1,\dots,\lambda'_n$ et des nombres complexes $c_1,\dots,c_m$, $c'_1,\dots,c'_n$ tels que $f=\sum_{1\leqslant k\leqslant m}c_k\mathsf{e}_{\lambda_k}$ et $g=\sum_{1\leqslant k\leqslant n}c'_k\mathsf{e}_{\lambda'_k}$. On remarque tout d'abord que $\mathsf{e}_\lambda(\cdot+b)=e^{ib\lambda}\mathsf{e}_\lambda$, et que $\mathsf{e}_\lambda(b\,\cdot)=\mathsf{e}_{b\lambda}$. Donc d'une par $f(\cdot+b)=\sum_{1\leqslant k\leqslant m}c_ke^{ib\lambda_k}\mathsf{e}_{\lambda_k}$ et d'autre part $f(b\,\cdot)=\sum_{1\leqslant k\leqslant m}c_k\mathsf{e}_{b\lambda_k}$, qui sont bien dans $\mathscr{P}$.

De plus, comme $\overline{\mathsf{e}_\lambda(\cdot)}=\mathsf{e}_{-\lambda}(\cdot)$ et comme $\mathsf{e}_\lambda\mathsf{e}_{\lambda'}=\mathsf{e}_{\lambda+\lambda'}$, on a $\bar f=\sum_{1\leqslant k\leqslant m}\bar c_k\mathsf{e}_{-\lambda_k}$ et donc $\bar fg=\sum_{1\leqslant k\leqslant m}\sum_{1\leqslant\ell\leqslant m}\bar c_kc'_\ell\mathsf{e}_{\lambda'_\ell-\lambda_k}$ qui appartient bien à $\mathscr{P}$ car c'est une combinaison linéaire des $(\mathsf{e}_\lambda)_{\lambda\in\mathbf{R}}$.

**(II.2)** Plusieurs rédactions sont possibles, bien sûr. Voici une preuve par récurrence. L'hypothèse de récurrence se formule comme suit. Pour tout entier $n\geqslant1$, soit l'assertion

$(P_n)$ : *pour tous $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbf{R}$ distincts, la famille $\{\mathsf{e}_{\lambda_1},\dots,\mathsf{e}_{\lambda_n}\}$ est libre.*

L'assertion $(P_1)$ est trivialement vérifiée. Soit $n\geqslant1$. On suppose $(P_n)$ vérifiée. Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_n,\lambda_{n+1}$, des réels distincts et soient $c_1,\dots,c_{n+1}$ des complexes tels que pour tout $t\in\mathbf{R}$, on ait $c_1e^{i\lambda_1t}+\ldots+c_{n+1}e^{i\lambda_{n+1}t}=0$. On en déduit que pour tout $t\in\mathbf{R}$,

$$c_1e^{i(\lambda_1-\lambda_{n+1})t}+\ldots+c_ne^{i(\lambda_n-\lambda_{n+1})t}=-c_{n+1}\,.$$

En dérivant, cela donne

$$ic_1(\lambda_1-\lambda_{n+1})\mathtt{e}_{\lambda_1-\lambda_{n+1}}+\ldots+ic_n(\lambda_n-\lambda_{n+1})\mathtt{e}_{\lambda_n-\lambda_{n+1}}=0\ .$$

Comme les $\lambda_i$ sont distincts, les réels $(\lambda_k-\lambda_{n+1})_{1\leqslant k\leqslant n}$ sont distincts et non-nuls. L'hypothèse $(P_n)$ s'applique et implique que $ic_k(\lambda_k-\lambda_{n+1})=0$, pour tout $k\in\{1,\ldots,n\}$. Comme déjà mentionné, les réels $\lambda_k-\lambda_{n+1}$ sont non-nuls donc $c_1=\ldots=c_n=0$. On en déduit que $c_{n+1}e^{i\lambda_{n+1}t}=0$, pour tout $t\in\mathbf{R}$. En prenant $t=0$, on conclut que $c_{n+1}=0$, ce qui montre que la famille $\{\mathtt{e}_{\lambda_1},\ldots,\mathtt{e}_{\lambda_{n+1}}\}$ est libre. Comme cela a été montré pour des réels $\lambda_1,\ldots,\lambda_n,\lambda_{n+1}$ distincts arbitraires, cela montre $(P_{n+1})$. On a donc montré que $(P_n)$ implique $(P_{n+1})$ et donc on a démontré le résultat voulu par récurrence.

Par conséquent, les fonctions $(\mathtt{e}_\lambda)_{\lambda\in\mathbf{R}}$ forment une famille libre dans $\mathscr{P}$ : elles en forment donc une base car $\mathscr{P}=\mathrm{Vect}_{\mathbf{C}}(\mathtt{e}_\lambda)$.

**(II.3.a)** Soient $f,g\in\mathscr{P}$ et $c\in\mathbf{C}$. On remarque que $f+cg=\sum_{\lambda\in\mathbf{R}}\big(\mathtt{a}(f,\lambda)+c\mathtt{a}(g,\lambda)\big)\mathtt{e}_\lambda$ et comme les fonctions $(\mathtt{e}_\lambda)_{\lambda\in\mathbf{R}}$ forment une base de $\mathscr{P}$, on a $\mathtt{a}(f+cg,\lambda_0)=\mathtt{a}(f,\lambda_0)+c\mathtt{a}(g,\lambda_0)$, ce qui prouve le résultat voulu.

**(II.3.b)** Comme $\overline{\mathtt{e}_\lambda}=\mathtt{e}_{-\lambda}$, on observe d'abord que $\bar f=\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)}\overline{\mathtt{a}(f,\lambda)}\mathtt{e}_{-\lambda}$. La famille $(\mathtt{e}_\lambda)_{\lambda\in\mathbf{R}}$ formant une base de $\mathscr{P}$, on a par conséquent

$$\mathtt{a}(\bar f,\lambda_0)=\overline{\mathtt{a}(f,-\lambda_0)}\ .$$

Comme $\mathtt{e}_\lambda(\cdot+b)=e^{ib\lambda}\mathtt{e}_\lambda$, on observe ensuite que $f(\cdot+b)=\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)}\mathtt{a}(f,\lambda)e^{ib\lambda}\mathtt{e}_\lambda$ et donc

$$\mathtt{a}\big(f(\cdot+b),\lambda_0\big)=e^{ib\lambda_0}\mathtt{a}(f,\lambda_0)\ .$$

Comme $\mathtt{e}_\lambda^{(k)}=(i\lambda)^k\mathtt{e}_\lambda$, on observe que $f^{(k)}=\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)}\mathtt{a}(f,\lambda)(i\lambda)^k\mathtt{e}_\lambda$ et donc

$$\mathtt{a}(f^{(k)},\lambda_0)=(i\lambda_0)^k\mathtt{a}(f,\lambda_0)\ .$$

Comme $\mathtt{e}_\lambda(b\,\cdot)=\mathtt{e}_{b\lambda}$, on observe ensuite que $f(b\,\cdot)=\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)}\mathtt{a}(f,\lambda)\mathtt{e}_{b\lambda}$ et donc

$$\mathtt{a}(f(b\,\cdot),\lambda_0)=\mathtt{a}(f,\lambda_0/b)\ .$$

**(II.3.c)** Soient $f,g,h\in\mathscr{P}$ et $c\in\mathbf{C}$. Comme montré au **(II.1)** $\bar f g\in\mathscr{P}$ et il y a donc un sens à poser $\langle f,g\rangle=\mathtt{a}\big(\bar f g,0\big)$. La linéarité de $\mathtt{a}(\cdot,0)$ entraîne ensuite que

$$\langle(f+cg),h\rangle=\mathtt{a}(\bar f h+\bar c\bar g h,0)=\mathtt{a}(\bar f h,0)+\bar c\mathtt{a}(\bar g h,0)=\langle f,h\rangle+\bar c\langle g,h\rangle.$$

De même $\langle h,(f+cg)\rangle=\mathtt{a}(\bar h f+c\bar h g,0)=\mathtt{a}(\bar h f,0)+c\mathtt{a}(\bar h g,0)=\langle h,f\rangle+c\langle h,g\rangle$. Cela montre que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme sesquilinéaire.

Par **(II.3.b)**,

$$\overline{\langle f,g\rangle}=\overline{\mathtt{a}(\bar f g,0)}=\mathtt{a}\big(\overline{\bar f g},0\big)=\mathtt{a}(\bar g f,0)=\langle g,f\rangle.$$

Cela montre que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme hermitienne.

Comme

$$|f|^2=\bar f f=\overline{\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)}\mathtt{a}(f,\lambda)\mathtt{e}_\lambda}\sum_{\lambda'\in\mathrm{Sp}(f)}\mathtt{a}(f,\lambda')\mathtt{e}_{\lambda'} \tag{4.8}$$

$$=\Big(\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)}\overline{\mathtt{a}(f,\lambda)}\mathtt{e}_{-\lambda}\Big)\Big(\sum_{\lambda'\in\mathrm{Sp}(f)}\mathtt{a}(f,\lambda')\mathtt{e}_{\lambda'}\Big) \tag{4.9}$$

$$=\sum_{\lambda,\lambda'\in\mathrm{Sp}(f)}\overline{\mathtt{a}(f,\lambda)}\mathtt{a}(f,\lambda')\mathtt{e}_{\lambda'-\lambda}\ ,$$

on obtient

$$\mathsf{a}(|f|^2,0) = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)} \overline{\mathsf{a}(f,\lambda)}\mathsf{a}(f,\lambda) = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)} |\mathsf{a}(f,\lambda)|^2 \geqslant 0.$$

Cela montre que $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ est une forme hermitienne positive. De plus, si $\langle f,f\rangle = \mathsf{a}(|f|^2,0) = 0$ alors l'égalité précédente implique que $\mathsf{a}(f,\lambda)=0$ pour tout $\lambda\in\mathrm{Sp}(f)$ et donc que $f=0$. Cela montre bien que $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ est une forme hermitienne positive définie, c'est-à-dire un produit scalaire hermitien.

**(II.3.d)** On remarque que $\frac{1}{n}(\mathsf{e}_\lambda(0)+\mathsf{e}_\lambda(1)+\ldots+\mathsf{e}_\lambda(n-1)) = \frac{1}{n}(1+e^{i\lambda}+\ldots+(e^{i\lambda})^{n-1})$. Si $\lambda\notin 2\pi\mathbf{Z}$, alors $e^{i\lambda}\neq 1$ et

$$\tfrac{1}{n}(\mathsf{e}_\lambda(0)+\mathsf{e}_\lambda(1)+\ldots+\mathsf{e}_\lambda(n-1)) = \frac{1-e^{in\lambda}}{n(1-e^{i\lambda})}\ .$$

Si $\lambda\in 2\pi\mathbf{Z}$, alors $e^{i\lambda}=1$ et

$$\tfrac{1}{n}(\mathsf{e}_\lambda(0)+\mathsf{e}_\lambda(1)+\ldots+\mathsf{e}_\lambda(n-1)) = 1\ .$$

**(II.3.e)** On observe que

$$\begin{aligned} g_n &= \tfrac{1}{n}\sum_{0\leqslant k\leqslant n-1}\ \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)} \mathsf{a}(f,\lambda)\mathsf{e}_\lambda(\cdot+k) && (4.10)\\ &= \tfrac{1}{n}\sum_{0\leqslant k\leqslant n-1}\ \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)} \mathsf{a}(f,\lambda)e^{ik\lambda}\mathsf{e}_\lambda && (4.11)\\ &= \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)} \big(\tfrac{1}{n}(\mathsf{e}_\lambda(0)+\mathsf{e}_\lambda(1)+\ldots+\mathsf{e}_\lambda(n-1)\big)\mathsf{a}(f,\lambda)\mathsf{e}_\lambda && (4.12)\\ &= \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)\cap 2\pi\mathbf{Z}} \mathsf{a}(f,\lambda)\mathsf{e}_\lambda + \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)\setminus 2\pi\mathbf{Z}} \tfrac{1-e^{in\lambda}}{n(1-e^{i\lambda})}\,\mathsf{a}(f,\lambda)\mathsf{e}_\lambda. \end{aligned}$$

On observe que si $\lambda\notin 2\pi\mathbf{Z}$, alors $|\frac{1-e^{in\lambda}}{n(1-e^{i\lambda})}| \leqslant \frac{1}{n|\sin(\lambda/2)|}$. On pose $g=\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)\cap 2\pi\mathbf{Z}}\mathsf{a}(f,\lambda)\mathsf{e}_\lambda$ et on a alors

$$\|g_n-g\|_\infty \leqslant \tfrac{1}{n}\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)\setminus 2\pi\mathbf{Z}} \tfrac{|\mathsf{a}(g,\lambda)|}{|\sin(\lambda/2)|}.$$

Donc $\lim_{n\to\infty}\|g_n-g\|_\infty = 0$.

**(II.3.f)** Voici une preuve utilisant la question précédente (d'autres solutions s'en passant sont bien sûr possibles). Pour tout $k\in\mathbf{Z}$ et tout $t\in\mathbf{R}$, $\mathsf{e}_{2k\pi}(1+t) = e^{2ik\pi}\mathsf{e}_{2k\pi}(t) = \mathsf{e}_{2k\pi}(t)$. Donc les fonctions $\mathsf{e}_\lambda$, $\lambda\in 2\pi\mathbf{Z}$, sont 1-périodiques ainsi que leurs combinaisons linéaires. C'est-à-dire que si $\mathrm{Sp}(f)\subset 2\pi\mathbf{Z}$, alors $f$ est 1-périodique.

Réciproquement, supposons que $f$ soit 1-périodique et posons $g_n = \frac{1}{n}(f+f(\cdot+1)+\ldots+f(\cdot+n-1))$. On observe alors que $g_n=f$ et la question **(II.3.e)** qui précède implique que $f=\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)\cap 2\pi\mathbf{Z}}\mathsf{a}(f,\lambda)\mathsf{e}_\lambda$, ce qui implique que $\mathrm{Sp}(f)\subset 2\pi\mathbf{Z}$.

On remarque ensuite que $f$ est $r$-périodique si et seulement si $f(r\,\cdot)$ est 1-périodique et que par la question **(II.3.b)**, $\mathrm{Sp}(f(r\,\cdot)) = r\mathrm{Sp}(f)$. On se ramène donc au cas 1-périodique montré ci-dessus.

**(II.4.a)** Il est clair par **(II.1)** que $Lf\in\mathscr{P}$ pour tout $f\in\mathscr{P}$. Pour tous $f,g\in\mathscr{P}$ et tout $c\in\mathbf{C}$, on vérifie également que

$$L(f+cg) = f(\cdot+r)+cg(\cdot+r)-(f+cg) = f(\cdot+r)-f+c(g(\cdot+r)-g) = Lf+cLg\ .$$

**(II.4.b)** On voit que $Lf$ est nulle si et seulement si $f$ est $r$-périodique. Donc le noyau de $L$ est le sous-espace $\mathscr{F}_r\cap\mathscr{P}$.

**(II.4.c)** Pour tout $\lambda\in\mathbf{R}$, **(II.3.a.)** et **(II.3.b.)** impliquent que

$$\mathsf{a}(Lf,\lambda)=\mathsf{a}(f(\cdot+r),\lambda)-\mathsf{a}(f,\lambda)=(e^{ir\lambda}-1)\mathsf{a}(f,\lambda)\ .$$

Donc $\mathsf{a}(Lf,2\pi k/r)=0$ pour tout $k\in\mathbf{Z}$ et $\{Lf; f\in\mathscr{P}\}\subset\{g\in\mathscr{P}: \mathrm{Sp}(g)\cap(2\pi r^{-1}\mathbf{Z})=\varnothing\}$.

Soit $g\in\mathscr{P}$ telle que $\mathrm{Sp}(g)\cap(2\pi r^{-1}\mathbf{Z})=\varnothing$. Pour tout $\lambda\in\mathrm{Sp}(g)$, on a donc $e^{ir\lambda}\neq 1$ et on peut poser $a_\lambda=\mathsf{a}(g,\lambda)/(e^{ir\lambda}-1)$. Pour tout $\lambda\notin\mathrm{Sp}(g)$, on pose $a_\lambda=0$ et $f=\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(g)}a_\lambda\mathsf{e}_\lambda$. Alors $f\in\mathscr{P}$ ; pour tout $\lambda\in\mathbf{R}$, on a également $\mathsf{a}(f,\lambda)=a_\lambda$ et donc $\mathrm{Sp}(f)=\mathrm{Sp}(g)$. Enfin on vérifie que pour tout $\lambda\in\mathbf{R}$, $\mathsf{a}(Lf,\lambda)=(e^{ir\lambda}-1)a_\lambda=\mathsf{a}(g,\lambda)$, ce qui implique que $Lf=g$ par unicité des coefficients de FOURIER généralisés pour les fonctions de $\mathscr{P}$. On a donc montré que

$$\{Lf\,;\,f\in\mathscr{P}\}=\{g\in\mathscr{P}:\mathrm{Sp}(g)\cap(2\pi r^{-1}\mathbf{Z})=\varnothing\}.$$

**(II.5.a)** Supposons qu'il existe un réel $r>0$ tel que $f(\cdot+r)=f$. Alors, la question **(II.3.f)** implique que $\{2\pi,2\pi\varphi\}\subset 2\pi r^{-1}\mathbf{Z}$. Donc, on aurait $r\in\mathbf{Z}$ et $\varphi r\in\mathbf{Z}$, ce qui impliquerait que $\varphi\in\mathbf{Q}$, ce qui est faux. Par l'absurde, on a donc montré que $f$ n'est pas périodique.

**(II.5.b)** Pour tout $m,n\in\mathbf{Z}$, et tout $t\in\mathbf{R}$ on observe que

$$f(t+n)=c_0e^{2i\pi t}+c_1e^{2i\pi\varphi t}e^{2i\pi\varphi n}=c_0e^{2i\pi t}+c_1e^{2i\pi\varphi t}e^{2i\pi(\varphi n+m)}\ ,$$

ce qui entraîne le premier point de la question.

On remarque ensuite que $G$ est un sous-groupe additif de $\mathbf{R}$ qui est non-trivial. S'il existait un réel $r>0$ tel que $G=r\mathbf{Z}$, alors il existerait $k,k'\in\mathbf{Z}$ tels que $1=kr$ et $\varphi=k'r$, ce qui impliquerait que $\varphi=k'/k$ ; cela est exclu car $\varphi$ est irrationnel. Comme rappelé en début de sujet, cela implique que $G$ est dense dans $\mathbf{R}$.

**(II.5.c)** On fixe $s,t\in[0,1]$. On fixe $\theta_0,\theta_1\in[0,1]$ tels que $c_0=|c_0|e^{2i\pi\theta_0}$ et $c_1=|c_1|e^{2i\pi\theta_1}$. Comme $G$ est dense dans $\mathbf{R}$, il existe une suite $s_n\in G$, $n\in\mathbf{N}$ telle que

$$\lim_{n\to} s_n=s-\theta_1-\varphi(t-\theta_0)$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty}c_0e^{2i\pi(t-\theta_0)}+c_1e^{2i\pi\varphi(t-\theta_0)}e^{2i\pi s_n}=|c_0|e^{2i\pi t}+c_1e^{2i\pi(s-\theta_1)}=|c_0|e^{2i\pi t}+|c_1|e^{2i\pi s}\ .$$

Or la question **(II.5.b)** qui précède montre que $c_0e^{2i\pi(t-\theta_0)}+c_1e^{2i\pi(\varphi(t-\theta_0)}e^{2i\pi s_n}\in A$ pour tout $n\in\mathbf{N}$, ce qui implique que $|c_0|e^{2i\pi t}+|c_1|e^{2i\pi s}\in A$. On a donc montré l'inclusion voulue.

**(II.5.d)** On observe d'abord que $C=\{|c_0|+|c_1|e^{2i\pi s}; s\in\mathbf{R}\}$ est le cercle du plan complexe de centre $|c_0|$ et de rayon $|c_1|$. Il est contenu dans $B$.

Ensuite, on a clairement que $B=\{|c_0|e^{2i\pi t}+|c_1|e^{2i\pi s}\,;\,s,t\in\mathbf{R}\}$. Soit $z_0\in B$. Alors il existe $t_0,s_0\in\mathbf{R}$ tels que $z_0=|c_0|e^{2i\pi t_0}+|c_1|e^{2i\pi s_0}$. Donc pour tout $\theta\in\mathbf{R}$, on a $e^{2i\pi\theta}z_0=|c_0|e^{2i\pi(t_0+\theta)}+|c_1|e^{2i\pi(s_0+\theta)}\in B$. Cela montre que si $z_0\in B$, alors $B$ contient le cercle centré en l'origine de rayon $|z_0|$.

Soit un réel $r$ tel que $|c_0|-|c_1|\leqslant r\leqslant|c_0|+|c_1|$. Il est clair le cercle centré en l'origine et de rayon $r$ possède au plus deux et au moins un point d'intersection avec $C$ : on note $z_0$ l'un de ces points qui est tel que $|z_0|=r$ et qui appartient à $B$ d'après ce qui précède. On a montré que cela implique que tout le cercle centré en l'origine et de rayon $|z_0|=r$ est contenu dans $B$. Cela montre donc que l'anneau $D$ est contenu dans $B$.

On observe ensuite par l'inégalité triangulaire que :

$$|c_0| - |c_1| = \big||c_0 \mathsf{e}_{2\pi}(t)| - |c_1 \mathsf{e}_{2\pi\varphi}(t)|\big| \leqslant |f(t)| \leqslant |c_0 \mathsf{e}_{2\pi}(t)| + |c_1 \mathsf{e}_{2\pi\varphi}(t)| = |c_0| + |c_1| \ .$$

Par conséquent $\{f(t)\,;\, t \in \mathbf{R}\} \subset D$. Comme l'anneau est fermé, on en déduit que $A \subset D$. En utilisant **(II.5.c)**, on a donc montré que $B \subset A \subset D \subset B$, ce qui entraîne bien $A = B = D$.

**III. Limites uniformes de polynômes trigonométriques généralisés.**

**(III.1.a)** On observe que l'inégalité triangulaire implique pour tout $t$ non-nul que

$$|m_\lambda(t)| \leqslant \frac{1}{|t|} \int_0^{|t|} |\mathsf{e}_\lambda(s)|\, ds \leqslant \frac{1}{|t|} \int_0^{|t|} ds = 1 \ .$$

Donc $m_\lambda$ est une fonction bornée et $\|m_\lambda\|_\infty \leqslant 1$. Or $m_\lambda(0) = 1$, donc $\|m_\lambda\|_\infty = 1$.

Avec les conventions algébriques sur les bornes des intégrales, on observe que sur $\mathbf{R}\backslash\{0\}$, $m_\lambda$ est le taux d'accroissement de la primitive nulle en 0 de la fonction $\mathsf{e}_\lambda$. C'est donc une fonction continue sur $\mathbf{R}\backslash\{0\}$ car $\mathsf{e}_\lambda$ est bornée. Par ailleurs, la limite de $m_\lambda$ en 0 est la dérivée en 0 de la primitive de $\mathsf{e}_\lambda$ : cette limite vaut bien $\mathsf{e}_\lambda(0) = 1 = m_\lambda(0)$. Donc $m_\lambda$ est continue sur $\mathbf{R}$ et on a montré que $m_\lambda \in C_b(\mathbf{R}, \mathbf{C})$.

Si $t$ et $\lambda$ sont des réels non-nuls, on a

$$m_\lambda(t) = \frac{e^{i\lambda|t|} - 1}{i\lambda|t|} = e^{i\lambda|t|/2} . \frac{\sin(\frac{1}{2}\lambda|t|)}{\frac{1}{2}\lambda|t|} \ .$$

Cette écriture implique que $|m_\lambda(t)| \leqslant 2/(\lambda|t|)$ et donc $\lim_{t\to\infty} m_\lambda(t) = 0$.

Enfin on a pour tout $t$ non-nul que $m_0(t) = \frac{1}{|t|} \int_0^{|t|} \mathsf{e}_0(s)\, ds = 1$.

**(III.1.b)** Soit $\lambda_0 \in \mathbf{R}$. On peut toujours écrire $f = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f) \cup \{\lambda_0\}} \mathsf{a}(f, \lambda) \mathsf{e}_\lambda$. On observe alors que pour tout réel $t > 0$,

$$M(f\mathsf{e}_{-\lambda_0}, t) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f) \cup \{\lambda_0\}} \mathsf{a}(f, \lambda) m_{\lambda - \lambda_0}(t) = \mathsf{a}(f, \lambda_0) + \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f) \backslash \{\lambda_0\}} \mathsf{a}(f, \lambda) m_{\lambda - \lambda_0}(t) \ .$$

La question précédente implique donc que $\lim_{t\to\infty} M(f\mathsf{e}_{-\lambda_0}, t) = \mathsf{a}(f, \lambda_0)$.

**(III.1.c)** On observe que $|M(f\mathsf{e}_{-\lambda}, t)| \leqslant \frac{1}{t} \int_0^t |f(s)| ds \leqslant \|f\|_\infty$, ce qui montre que $|\mathsf{a}(f, \lambda)| \leqslant \|f\|_\infty$ en passant à la limite lorsque $t$ tend vers l'infini.

**(III.2)** Soient $f, g \in \overline{\mathscr{P}}$. Il existe donc $f_n, g_n \in \mathscr{P}$, $n \in \mathbf{N}$ telles que $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$ et $\lim_{n\to\infty} \|g_n - g\|_\infty = 0$. Comme le passage au conjugué est continu, (ou encore : puisque $|\overline{z}| = |z|$, on a $|\overline{f_n(t)} - \overline{f(t)}| = |f_n(t) - f(t)|$ et en prenant le supremum sur $t$, on a $\|\overline{f_n} - \overline{f}\|_\infty = \|f_n - f\|_\infty$ et donc :) on a $\lim_{n\to\infty} \|\overline{f}_n - \overline{f}\|_\infty = 0$. Par **(I.0)**, on a $\lim_{n\to\infty} \|\overline{f} g - \overline{f}_n g_n\|_\infty = 0$. Or $\overline{f}_n g_n \in \mathscr{P}$ par **(II.1)**. Donc $\overline{f} g \in \overline{\mathscr{P}}$.

**(III.3)** Il s'agit d'une application directe du résultat du **(I.4)** appliqué à $H_0 = \mathscr{P}$ qui par définition est dense dans $H = \overline{\mathscr{P}}$ pour la norme $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$. En tant que fermé de l'espace de Banach $(C_b(\mathbf{R}, \mathbf{C}), \|\cdot\|_\infty)$, $(\overline{\mathscr{P}}, \|\cdot\|_\infty)$ est également un espace de Banach. On applique donc **(I.4)** à $\ell(\cdot) = \mathsf{a}(\cdot, \lambda)$ qui satisfait bien les hypothèses de **(I.4)** par **(III.1.c)**.

**(III.4.a)** Clairement les ensembles de réels positifs $\{|f_n(t) - f(t)|; t \in \mathbf{R}\}$, $\{|f_n(t+b) - f(t+b)|; t \in \mathbf{R}\}$, $\{|f_n(bt) - f(bt)|; t \in \mathbf{R}\}$ et $\{|\overline{f}_n(t) - \overline{f}(t)|; t \in \mathbf{R}\}$ sont identiques. Leur supremum est donc le même et vaut $\|f_n - f\|_\infty$. Par conséquent,

$$\|f_n - f\|_\infty = \|f_n(\cdot + b) - f(\cdot + b)\|_\infty = \|f_n(b\,\cdot) - f(b\,\cdot)\|_\infty = \|\overline{f}_n - \overline{f}\|_\infty$$

et toutes ces quantités tendent vers 0.

**(III.4.b)** Par **(III.3)** et la question précédente, on a

$$\lim_{n\to\infty} \mathtt{a}(\overline{f}_n, \lambda_0) = \mathtt{a}(\overline{f}, \lambda_0), \quad \lim_{n\to\infty} \mathtt{a}\big(f_n(\cdot + b), \lambda_0\big) = \mathtt{a}\big(f(\cdot + b), \lambda_0\big), \quad \lim_{n\to\infty} \mathtt{a}(f_n(b\,\cdot), \lambda_0) = \mathtt{a}(f(b\,\cdot), \lambda_0)\ .$$

Or par **(II.3.b)** appliqué aux $f_n \in \mathscr{P}$, $\mathtt{a}(\overline{f}_n, \lambda_0) = \overline{\mathtt{a}(f_n, -\lambda_0)}$, $\mathtt{a}\big(f_n(\cdot + b), \lambda_0\big) = e^{ib\lambda_0}\mathtt{a}(f_n, \lambda_0)$. $\mathtt{a}(f_n(b\,\cdot), \lambda_0) = \mathtt{a}(f_n, \lambda_0/b)$. Par **(III.3)**, et la continuité du passage au conjugué, on a également

$$\lim_{n\to\infty} \overline{\mathtt{a}(f_n, -\lambda_0)} = \overline{\mathtt{a}(f, -\lambda_0)} \quad \lim_{n\to\infty} e^{ib\lambda_0}\mathtt{a}(f_n, \lambda_0) = e^{ib\lambda_0}\mathtt{a}(f, \lambda_0), \quad \lim_{n\to\infty} \mathtt{a}(f_n, \lambda_0/b) = \mathtt{a}(f, \lambda_0/b)\ .$$

Donc

$$\mathtt{a}(\overline{f}, \lambda_0) = \overline{\mathtt{a}(f, -\lambda_0)}, \quad \mathtt{a}\big(f(\cdot + b), \lambda_0\big) = e^{ib\lambda_0}\mathtt{a}(f, \lambda_0), \quad \mathtt{a}(f(b\,\cdot), \lambda_0) = \mathtt{a}(f, \lambda_0/b)\ .$$

**(III.4.c)** Par l'inégalité triangulaire dans $\mathbf{C}$,

$$|M(f\mathtt{e}_{-\lambda}, t) - \mathtt{a}(f, \lambda)| \leqslant |M(f\mathtt{e}_{-\lambda}, t) - M(f_n\mathtt{e}_{-\lambda}, t)| + |M(f_n\mathtt{e}_{-\lambda}, t) - \mathtt{a}(f_n, \lambda)| + |\mathtt{a}(f, \lambda) - \mathtt{a}(f_n, \lambda)|\ .$$

On remarque ensuite que par l'inégalité triangulaire $L^1$,

$$|M(f\mathtt{e}_{-\lambda}, t) - M(f_n\mathtt{e}_{-\lambda}, t)| \leqslant \frac{1}{t}\Big|\int_0^t (f(s) - f_n(s))\mathtt{e}_{-\lambda}(s)\,ds\Big| \leqslant \frac{1}{t}\int_0^t |f(s) - f_n(s)|\,ds \leqslant \|f - f_n\|_\infty,$$

ce qui implique l'inégalité voulue.

**(III.4.d)** On reprend les notations de la question précédente. Par la question **(III.3)**, on a $|\mathtt{a}(f, \lambda) - \mathtt{a}(f_n, \lambda)| = |\mathtt{a}(f - f_n, \lambda)| \leqslant \|f - f_n\|_\infty$. Par l'inégalité de la question précédente, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a donc

$$|M(f\mathtt{e}_{-\lambda}, t) - \mathtt{a}(f, \lambda)| \leqslant 2\|f - f_n\|_\infty + |M(f_n\mathtt{e}_{-\lambda}, t) - \mathtt{a}(f_n, \lambda)|\ .$$

Soit un réel $\varepsilon > 0$. Il existe $n(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ tel que $\|f - f_n\|_\infty < \varepsilon$. Par **(III.1.b)**, $\lim_{t\to\infty}|M(f_{n(\varepsilon)}\mathtt{e}_{-\lambda}, t) - \mathtt{a}(f_{n(\varepsilon)}, \lambda)| = 0$. Il existe donc un réel $t(\varepsilon) > 0$, tel que pour tout $t > t(\varepsilon)$, on ait $|M(f_{n(\varepsilon)}\mathtt{e}_{-\lambda}, t) - \mathtt{a}(f_{n(\varepsilon)}, \lambda)| < \varepsilon$. On a donc montré que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $t(\varepsilon) > 0$, tel que pour tout réel $t > t(\varepsilon)$, on ait $|M(f\mathtt{e}_{-\lambda}, t) - \mathtt{a}(f, \lambda)| < 3\varepsilon$, ce qui implique la limite voulue.

**(III.4.e)** Soit un réel $t > 0$. $(f\mathtt{e}_{-\lambda})' = f'\mathtt{e}_{-\lambda} - i\lambda f\mathtt{e}_{-\lambda}$. En intégrant sur $[0, t]$, on a donc $(f(t)e^{-i\lambda t} - f(0))/t = M(f'\mathtt{e}_{-\lambda}, t) - i\lambda M(f\mathtt{e}_{-\lambda}, t)$ et donc

$$\big|M(f'\mathtt{e}_{-\lambda}, t) - i\lambda M(f\mathtt{e}_{-\lambda}, t)\big| \leqslant \frac{2\|f\|_\infty}{t}$$

On utilise le fait que $f' \in \overline{\mathscr{P}}$ et donc que $\lim_{t\to+\infty} M(f'\mathtt{e}_{-\lambda}, t)$ existe et vaut $\mathtt{a}(f', \lambda)$ : en faisant tendre $t$ vers $\infty$ dans l'inégalité précédente, on obtient donc

$$\forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad \mathtt{a}(f', \lambda) = i\lambda\mathtt{a}(f, \lambda)\ .$$

## IV. Égalité de Bessel pour les coefficients de Fourier généralisés.

**(IV.1.a)** On remarque que $\|b_n\mathtt{e}_{\lambda_n}\|_\infty = |b_n|$ et donc $\sum_{n=0}^{\infty}\|b_n\mathtt{e}_{\lambda_n}\|_\infty$ est une quantité finie et la série de fonctions de terme général $b_n\mathtt{e}_{\lambda_n} \in C_b(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, $n \in \mathbf{N}$, est normalement convergente sur $\mathbf{R}$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $g_n = \sum_{k=0}^{n} b_k\mathtt{e}_{\lambda_k}$ si bien que $\lim_{n\to\infty}\|g_n - g\|_\infty = 0$. Par **(III.3)**, $\lim_{p\to\infty}\mathtt{a}(g_n, \lambda) = \mathtt{a}(g, \lambda)$. Comme $g_n \in \mathscr{P}$ et que les $\lambda_k$ sont distincts, on voit que $\mathtt{a}(g_n, \lambda) = 0$ si $\lambda \notin \{\lambda_k; 0 \leqslant k \leqslant n\}$ et

$\mathsf{a}(g_n,\lambda_k)=b_k$ pour tout $n\geqslant k$, ce qui implique que $\mathsf{a}(g,\lambda_k)=b_k$. D'autre part, si $\lambda\notin\{\lambda_n;n\in\mathbf{N}\}$, alors on a $\mathsf{a}(g_n,\lambda)=0$ pour tout $n$ et donc $\mathsf{a}(g,\lambda)=0$.

**(IV.1.b)** On rappelle que l'on a posé $g_n=\sum_{k=0}^n b_k\mathsf{e}_{\lambda_k}$, $n\in\mathbf{N}$. La partie réelle étant une application continue (car 1-Lipschitzienne), on peut écrire

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\big(g(0)-g(t)\big) &= \lim_{n\to\infty}\mathrm{Re}\big(g_n(0)-g_n(t)\big) &(4.13)\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{1\leqslant k\leqslant n}k^{-2}\mathrm{Re}\big(1-\exp(it/k^2)\big) &(4.14)\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\big(1-\cos(t/k^2)\big)/k^2 &(4.15)\\ &= \sum_{n\geqslant 1}\big(1-\cos(t/n^2)\big)/n^2\end{aligned}$$

Si $g(t)=g(0)$, alors $0=\mathrm{Re}(g(0)-g(t))=\sum_{n\geqslant 1}\big(1-\cos(t/n^2)\big)/n^2$. Or $\big(1-\cos(t/n^2)\big)/n^2\geqslant 0$. Cela implique donc que pour tout $n\geqslant 1$, $\cos(t/n^2)=1$, c'est-à-dire que pour tout $n\geqslant 1$, il existe $k_n\in\mathbf{Z}$ (pair) tel que $t/n^2=k_n\pi$ ; cela implique pour tout $n\in\mathbf{N}$ tel que $n>\sqrt{|t|}$, que $|k_n|<1$ et donc que $k_n=0$. Autrement dit, pour tout $n>\sqrt{|t|}$, $t/n^2=0$, c'est-à-dire $t=0$. Cela montre que 0 est l'unique solution de $g(t)=g(0)$. Or si $g$ était $r$-périodique on aurait $2\pi r\mathbf{Z}\subset\{t\in\mathbf{R} : g(t)=g(0)\}$. Donc $g$ n'est pas périodique.

**(IV.1.c)** On rappelle que $\mathsf{e}_\lambda(t)=\sum_{k\in\mathbf{N}}(i\lambda)^k t^k/k!$, développement en série entière de rayon infini. On remarque ensuite que pour tout $t\in\mathbf{R}$,

$$\sum_{n\geqslant 1}\sum_{k\geqslant 0}\frac{n^{-2k}|t|^k}{n^2k!}=\sum_{n\geqslant 1}n^{-2}\exp(|t|n^{-2})\leqslant e^{|t|}\sum_{n\geqslant 1}n^{-2}<\infty\ .$$

Par Fubini pour les sommes, pour tout $k\in\mathbf{N}$, la série de terme général $(\frac{i^kt^k}{k!}n^{-2(k+1)})_{n\geqslant 1}$ est absolument convergente ; si on pose $b_k=\sum_{n\geqslant 1}n^{-2(k+1)}$, alors la série de terme général $(i^kt^kb_k/k!)_{k\geqslant 0}$ est absolument convergente et

$$\sum_{k\geqslant 0}\frac{i^kb_k}{k!}t^k=\sum_{n\geqslant 1}n^{-2}\mathsf{e}_{n^{-2}}(t)=g(t)\ .$$

Cela montre que $g$ est développable en série entière en 0, de rayon de convergence infini.

**(IV.2.a)** Par linéarité, il suffit de vérifier que $\langle f-P_Sf,f_j\rangle=0$ pour tout $j\in S$. On fixe donc $j\in J$ et on vérifie alors que

$$\begin{aligned}\langle f,f_j\rangle-\langle P_Sf,f_j\rangle &= \langle f,f_j\rangle-\Big\langle\sum_{j'\in S}\langle f_{j'},f\rangle f_{j'}\,,\,f_j\Big\rangle &(4.16)\\ &= \langle f,f_j\rangle-\sum_{j'\in S}\overline{\langle f_{j'},f\rangle}\langle f_{j'},f_j\rangle &(4.17)\\ &= \langle f,f_j\rangle-\overline{\langle f_j,f\rangle}=0,\end{aligned}$$

car $\langle f_{j'},f_j\rangle=0$ si $j'$ est distinct de $j$ et $\langle f_j,f_j\rangle=1$ (puisque la famille $(f_j)_{j\in J}$ est supposée orthonormée) et puisque $\overline{\langle f_j,f\rangle}=\langle f,f_j\rangle$ (la forme est hermitienne). Donc $\langle P_Sf,f_j\rangle=\langle f,f_j\rangle$ et on obtient bien $\langle f-P_Sf,g\rangle=0$ pour tout $g\in\mathrm{Vect}_{\mathbf{C}}(f_j;j\in S)$.

On remarque ensuite que

$$\begin{aligned}
q(f-g) &= \langle (f-P_Sf)+(P_Sf-g),(f-P_Sf)+(P_Sf-g)\rangle && (4.18)\\
&= \langle f-P_Sf,f-P_Sf\rangle + \langle f-P_Sf,P_Sf-g\rangle + \langle P_Sf-g,f-P_Sf\rangle + \langle P_Sf-g,P_Sf-g\rangle && (4.19)\\
&= q(f-P_Sf)+q(P_Sf-g)+\langle f-P_Sf,P_Sf-g\rangle + \overline{\langle f-P_Sf,P_Sf-g\rangle} && (4.20)\\
&= q(f-P_Sf)+q(P_Sf-g),
\end{aligned}$$

car $P_Sf-g\in \mathrm{Vect}_{\mathbf{C}}(f_j;j\in S)$. Comme la forme hermitienne est positive, on a $q(\cdot)\geqslant 0$ et donc l'égalité précédente implique que $q(f-g)\geqslant q(f-P_Sf)$. On obtient la dernière égalité en prenant $g$ nulle.

**(IV.2.b)** On remarque que

$$q(P_Sf) = \langle \sum_{j\in J}\langle f_j,f\rangle f_j\,,\ \sum_{j'\in J}\langle f_{j'},f\rangle f_{j'}\rangle = \sum_{j,j'\in S}\overline{\langle f_j,f\rangle}\langle f_{j'},f\rangle\langle f_j,f_{j'}\rangle = \sum_{j\in J}\overline{\langle f_j,f\rangle}\langle f_j,f\rangle$$

car $(f_j)_{j\in J}$ est orthonormée. Par conséquent $q(P_Sf)=\sum_{j\in S}|\langle f_j,f\rangle|^2$. Or par la question qui précède, on a $q(f)=q(f-P_Sf)+q(P_Sf)\geqslant q(P_Sf)$. On a donc montré que pour tout sous-ensemble non-vide et fini $S\subset J$, on a $q(f)\geqslant\sum_{j\in S}|\langle f_j,f\rangle|^2$, ce qui implique l'inégalité désirée par passage au supremum sur $S$.

**(IV.2.c)** Comme $g_n\in\mathrm{Vect}_{\mathbf{C}}(f_j;j\in J)$, il existe un ensemble $S_n\subset J$ non-vide, fini et tel que $g_n\in \mathrm{Vect}_{\mathbf{C}}(f_j;j\in S_n)$ et la question **(IV.2.a)** implique que $q(f)=q(f-P_{S_n}f)+q(P_{S_n}f)\leqslant q(f-g_n)+q(P_{S_n}f)$. Or dans la preuve de la question **(IV.2.b)** qui précède on a montré que $q(P_{S_n}f)=\sum_{j\in S_n}|\langle f_j,f\rangle|^2$, donc $q(f)\leqslant q(f-g_n)+\sum_{j\in J}|\langle f_j,f\rangle|^2$ et lorsque l'on fait tendre $n$ vers l'infini, cela entraîne que $q(f)\leqslant\sum_{j\in J}|\langle f_j,f\rangle|^2$. L'inégalité de la question **(IV.2.b)** qui précède implique alors l'égalité désirée.

**(IV.3.a)** Il est clair que $f\in C_b(\mathbf{R},\mathbf{C})\mapsto M(f,t)$ est $\mathbf{C}$-linéaire. Soient $f,g,h\in C_b(\mathbf{R},\mathbf{C})$ et $c\in\mathbf{C}$. On a donc

$$\langle (f+cg),h\rangle_t = M(\overline{(f+cg)}h,t) = M(\bar f h+\overline{cg}h,t) = M(\bar f h,t)+\bar c M(\bar g h,t) = \langle f,h\rangle_t+\bar c\langle g,h\rangle_t$$

De même montre que $\langle h,(f+cg)\rangle_t=\langle h,f\rangle_t+c\langle h,g\rangle_t$, ce qui prouve que $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_t$ est une forme sesquilinéaire.

Une propriété élémentaire de l'intégrale implique que

$$\overline{M(\bar f g,t)}=\frac{1}{t}\int_0^t\overline{\bar f(s)g(s)}ds=\frac{1}{t}\int_0^t f(s)\overline{g(s)}ds = M(f\bar g,t).$$

Donc $\overline{\langle f,g\rangle_t}=\langle g,f\rangle_t$, ce qui montre que $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_t$ est une forme hermitienne. Il est ensuite clair que $M(|f^2|,t)=\frac{1}{t}\int_0^t|f(s)|^2ds\geqslant 0$ et donc $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_t$ est une forme hermitienne positive.

Enfin, il est clair qu'il existe une fonction $f\in C_b(\mathbf{R},\mathbf{C})$ non identiquement nulle sur $\mathbf{R}$ mais telle que $f(s)=0$ pour tout $s\in[0,t]$. On a alors $f\neq 0$ mais $\langle f,f\rangle_t=M(|f|^2,t)=0$. Cela montre que la forme $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_t$ n'est pas définie.

**(IV.3.b)** Comme montré au **(III.2)**, $\bar f g\in\mathscr{P}$. On peut donc bien définir la quantité $\langle f,g\rangle=a(\bar f g,0)$ et on observe ensuite que **(III.4.d)** implique que $\lim_{t\to\infty}\langle f,g\rangle_t=\langle f,g\rangle$.

Montrons que $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ est sesquilinéaire : soient $f,g,h\in C_b(\mathbf{R},\mathbf{C})$ et $c\in\mathbf{C}$. La question précédente montre que pour tout réel $t>0$, $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_t$ est sesquilinéaire et donc

$$\begin{aligned}
\langle (f+cg),h\rangle &= \lim_{t\to\infty}\langle (f+cg),h\rangle_t && (4.21)\\
&= \lim_{t\to\infty}\big(\langle f,h\rangle_t+\bar c\langle g,h\rangle_t\big) && (4.22)\\
&= \lim_{t\to\infty}\langle f,h\rangle_t+\bar c\lim_{t\to\infty}\langle g,h\rangle_t && (4.23)\\
&= \langle f,h\rangle+\bar c\langle g,h\rangle
\end{aligned}$$

On montre de même que $\langle h, (f + cg)\rangle = \langle h, f\rangle + c\langle h, g\rangle$, ce qui prouve que $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ est une forme sesquilinéaire.

Par la question précèdente, comme pour tout réel $t > 0$, $\overline{\langle f, g\rangle_t} = \langle g, f\rangle_t$, et comme le passage au conjugué est continu on a

$$\overline{\langle f, g\rangle} = \overline{\lim_{t\to\infty}\langle f, g\rangle_t} = \lim_{t\to\infty}\overline{\langle f, g\rangle_t} = \lim_{t\to\infty}\langle g, f\rangle_t = \langle g, f\rangle,$$

ce qui montre que $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_t$ est une forme hermitienne.

Enfin, par la question précédente, comme pour tout réel $t > 0$, on a $\langle f, f\rangle_t \geqslant 0$, il s'ensuit alors que $\langle f, f\rangle = \lim_{t\to\infty}\langle f, f\rangle_t \geqslant 0$ et donc $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ est une forme hermitienne positive.

**(IV.3.c)** On observe que $\langle \mathsf{e}_\lambda, \mathsf{e}_{\lambda'}\rangle_t = m_{\lambda-\lambda'}(t)$. Par **(III.1)**, $\langle \mathsf{e}_\lambda, \mathsf{e}_{\lambda'}\rangle = \lim_{t\to\infty} m_{\lambda-\lambda'}(t) = 0$ si $\lambda \neq \lambda'$ et $\langle \mathsf{e}_\lambda, \mathsf{e}_\lambda\rangle = \lim_{t\to\infty} m_0(t) = 1$. La famille $(\mathsf{e}_\lambda)_{\lambda\in\mathbf{R}}$ est donc orthonormée pour la forme hermitienne positive $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ introduite à la question précédente.

Pour simplifier on pose $q(f) = \langle f, f\rangle = \mathsf{a}(|f|^2, 0)$, $f \in \overline{\mathscr{P}}$. Par définition de $\overline{\mathscr{P}}$, pour tout $f \in \overline{\mathscr{P}}$, il existe une suite $f_n \in \mathrm{Vect}_{\mathbf{C}}(\mathsf{e}_\lambda; \lambda \in \mathbf{R})$, $n \in \mathbf{N}$, telle que $\lim_{n\to\infty}\|f - f_n\|_\infty = 0$. On observe alors que pour tout réel $t > 0$, $M(|f_n - f|^2, t) \leqslant \|f - f_n\|_\infty^2$. On a donc $q(f - f_n) = \lim_{t\to\infty} M(|f_n - f|^2, t) \leqslant \|f - f_n\|_\infty^2$ et donc $\lim_{n\to\infty} q(f - f_n) = 0$.

On peut donc appliquer le résultat du (**IV.2.c**) avec $H = \overline{\mathscr{P}}$, $J = \mathbf{R}$ et $(f_j)_{j\in J} = (\mathsf{e}_\lambda)_{\lambda\in\mathbf{R}}$, ce qui entraîne que $\mathsf{a}(|f|^2, 0) = q(f) = \sum_{\lambda\in\mathbf{R}} |\langle \mathsf{e}_\lambda, f\rangle|^2$. Or

$$\langle \mathsf{e}_\lambda, f\rangle = \mathsf{a}(f\mathsf{e}_{-\lambda}, 0) = \lim_{t\to\infty} M(f\mathsf{e}_{-\lambda}, t) = \mathsf{a}(f, \lambda).$$

Cela montre donc

$$\forall f \in \overline{\mathscr{P}}, \quad \mathsf{a}(|f|^2, 0) = \sum_{\lambda\in\mathbf{R}} |\mathsf{a}(f, \lambda)|^2 .$$

Par la question **(I.3.b)**, l'ensemble $\{\lambda \in \mathbf{R} : |\mathsf{a}(f, \lambda)|^2 \neq 0\}$, qui est en fait le spectre de $f$, est dénombrable.

**(IV.3.d)** Supposons que $y \in \overline{\mathscr{P}}$ soit solution de $(\mathrm{E}_{i\mu,f})$. Alors $y' = i\mu y + f \in \overline{\mathscr{P}}$. On observe que $y' \in \overline{\mathscr{P}}$. Calculons les coefficients de Fourier généralisés de $y$. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Par **(III.4.e)** on a $\mathsf{a}(y', \lambda) = i\lambda\mathsf{a}(y, \lambda)$ et donc $i(\lambda - \mu)\mathsf{a}(y, \lambda) = \mathsf{a}(y' - i\mu y, \lambda) = \mathsf{a}(f, \lambda)$. Or par la question **(IV.1.a)**, on a $\mathsf{a}(f, \mu + n^{-2}) = n^{-2}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ et $\mathsf{a}(f, \lambda) = 0$ si $\lambda \notin \{\mu + n^{-2}; n \geqslant 1\}$. On a donc $\mathsf{a}(y, \mu + n^{-2}) = -i$, pour tout entier $n \geqslant 1$, ce qui contredit le fait que $\sum_{n\geqslant 1} |\mathsf{a}(y, \mu + n^{-2})|^2 \leqslant \mathsf{a}(|y|^2, 0)$ qui doit être une quantité finie. Il n'y a donc pas de solution à $(\mathrm{E}_{i\mu,f})$ qui soit dans $\overline{\mathscr{P}}$.

**(IV.3.e)** Pour tout $\varepsilon \in ]0, \infty[$, $S_\varepsilon = \{0\} \cup \{\lambda \in \mathbf{R} : |\mathsf{a}(f, \lambda)| \geqslant \varepsilon\}$ est un ensemble fini (car $\sum_{\lambda\in\mathbf{R}} |\mathsf{a}(f, \lambda)|^2 < \infty$ par IV.3.c et par I.3.a) et non-vide. Donc pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $|\lambda| > \max_{\lambda'\in S_\varepsilon} |\lambda'|$, on a $|\mathsf{a}(f, \lambda)| < \varepsilon$, ce qui permet de conclure.

**(IV.4.a)** On fixe $\lambda \in \mathbf{R}$. On remarque que pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$(K_\beta \mathsf{e}_\lambda)(t) = \int_0^\infty e^{-\beta s}\mathsf{e}_\lambda(t + s)\, ds = e^{i\lambda t}\int_0^\infty e^{-(\beta - i\lambda)s} ds = \frac{e^{i\lambda t}}{\beta - i\lambda} .$$

Donc $K_\beta \mathsf{e}_\lambda \in \mathscr{P}$. Comme $K_\beta$ est linéaire, pour toute fonction $f \in \mathscr{P}$, on a également $K_\beta f \in \mathscr{P}$.

**(IV.4.b)** Soient $f_n \in \mathscr{P}$, $n \in \mathbf{N}$, telles que $\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_\infty = 0$. On rappelle de **(I.1)** que

$$\|K_\beta f_n - K_\beta f\|_\infty = \|K_\beta(f_n - f)\|_\infty \leqslant \|f_n - f\|_\infty / \mathrm{Re}(\beta)$$

Donc $\lim_{n\to\infty}\|K_\beta f_n - K_\beta f\|_\infty = 0$. Or par la question précédente, $K_\beta f_n \in \mathscr{P}$, pour tout $n\in\mathbf{N}$, ce qui implique que $K_\beta f \in \overline{\mathscr{P}}$.

**(IV.4.c)** On rappelle que $f$ est continue bornée et on rappelle des questions **(I.2)** que si $\mathrm{Re}(\beta)>0$, l'unique solution bornée de $(\mathrm{E}_{\beta,f})$ est $-K_\beta f$ et que d'après la question précédente $K_\beta f$ appartient à $\overline{\mathscr{P}}$.

On pose $g = f(-\cdot)$. Par les questions **(I.5)**, si $\mathrm{Re}(\beta) < 0$, l'unique solution bornée de $(\mathrm{E}_{\beta,f})$ est $(K_\beta g)(-\cdot)$. Or $g\in\overline{\mathscr{P}}$ et par les question précédente $K_\beta g \in \overline{\mathscr{P}}$ et donc $(K_\beta g)(-\cdot)$ également.

**(IV.4.d)** Soit $y$ une solution de $(\mathrm{E}_{i\lambda_0,f})$. D'après **(I.2.a)**,

$$\begin{aligned} y(t) &= y(0)e^{i\lambda_0 t} + e^{i\lambda_0 t}\int_0^t e^{-i\lambda_0 s} f(s)\,ds \qquad (4.24)\\ &= y(0)e^{i\lambda_0 t} + e^{i\lambda_0 t}\sum_{\lambda\in\mathbf{Sp}(f)\cup\{\lambda_0\}} \mathsf{a}(f,\lambda)\int_0^t e^{i(\lambda-\lambda_0)s}ds \qquad (4.25)\\ &= y(0)e^{i\lambda_0 t} + \mathsf{a}(f,\lambda_0)te^{i\lambda_0 t} + \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)\setminus\{\lambda_0\}} \mathsf{a}(f,\lambda)\frac{e^{i\lambda t}-e^{i\lambda_0 t}}{i(\lambda-\lambda_0)}. \end{aligned}$$

Si $y$ est bornée alors l'inégalité triangulaire implique que

$$|\mathsf{a}(f,\lambda_0)t| \leqslant |y(t)| + |y(0)| + \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)\setminus\{\lambda_0\}}\frac{2|\mathsf{a}(f,\lambda)|}{|\lambda-\lambda_0|} \leqslant 2\|y\|_\infty + \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)\setminus\{\lambda_0\}}\frac{2|\mathsf{a}(f,\lambda)|}{|\lambda-\lambda_0|} =: C$$

Donc $|\mathsf{a}(f,\lambda_0)| \leqslant C/|t|$ qui tend vers 0 lorsque que $|t| \to +\infty$. Cela montre que si $y$ est bornée $\mathsf{a}(f,\lambda_0) = 0$.

Réciproquement si $\mathsf{a}(f,\lambda_0) = 0$, on a

$$|y(t)| \leqslant |y(0)| + \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)\setminus\{\lambda_0\}}\frac{2|\mathsf{a}(f,\lambda)|}{|\lambda-\lambda_0|}$$

pour tout $t\in\mathbf{R}$ et $y$ est bornée.

On voit que $y$ est bornée si et seulement si $\mathsf{a}(f,\lambda_0)=0$, c'est-à-dire si et seulement si $\lambda_0\notin\mathrm{Sp}(f)$. Et dans ce cas on observe que $y\in\mathscr{P}$.

**(IV.5.a)** Le théorème de Fejér rappelé en début de sujet implique que $\mathscr{F}_1 \subset \overline{\mathscr{P}}$.

Soit $f\in\mathscr{F}_r$. On pose $g = f(r\cdot)$. Alors $g\in\mathscr{F}_1$ et donc $g\in\overline{\mathscr{P}}$. Par **(III.4.a)** on en déduit $f = g(r^{-1}\cdot)\in\overline{\mathscr{P}}$.

**(IV.5.b)** La linéarité est claire et on a $|c_n(f)| \leqslant \int_0^1 |f(s)|ds \leqslant \|f\|_\infty$.

**(IV.5.c)** Pour tout $t\in\mathbf{R}$, on pose $g(t) = f(rt)$. On remarque alors que $g\in\mathscr{F}_1$. Par Fejér, il existe une suite de fonctions $g_p\in\mathscr{P}$, $p\in\mathbf{N}$, telle que

$$\mathrm{Sp}(g_p)\subset 2\pi\mathbf{Z} \quad \text{et} \quad \lim_{p\to\infty}\|g_p - g\|_\infty = 0.$$

On fixe $\lambda\in\mathbf{R}$. Si $\lambda\notin 2\pi\mathbf{Z}$, alors $\mathsf{a}(g_p,\lambda) = 0$ pour tout $p\in\mathbf{N}$ et par **(III.3)**, $\lim_{p\to\infty}\mathsf{a}(g_p,\lambda) = \mathsf{a}(g,\lambda) = 0$. Si $\lambda = 2\pi n$, $n$ entier relatif, alors $\mathsf{a}(g_p, 2\pi n) = c_n(g_p)$ par définition des coefficients de Fourier pour les polynômes trigonométriques (généralisés). Par **(III.3)**, on a $\lim_{p\to\infty}\mathsf{a}(g_p,2\pi n) = \mathsf{a}(g,2\pi n)$ et par la question précédente $\lim_{p\to\infty} c_n(g_p) = c_n(g)$. Donc $\mathsf{a}(g,2\pi n) = c_n(g)$.

On observe ensuite par **(III.4.b)** que $\mathtt{a}(g,r\lambda)=\mathtt{a}(f,\lambda)$. Si $\lambda\notin 2\pi r^{-1}\mathbf{Z}$, alors $\mathtt{a}(g,r\lambda)=0=\mathtt{a}(f,\lambda)$ et si $\lambda=2\pi n/r$, $n$ entier relatif, on a alors

$$\begin{aligned}
\mathtt{a}(f,2\pi n/r) &= \mathtt{a}(g,2\pi n)=c_n(g) && (4.26)\\
&= \int_0^1 g(s)e^{-2i\pi ns}ds && (4.27)\\
&= \int_0^1 f(rs)e^{-2i\pi ns}ds && (4.28)\\
&= \frac{1}{r}\int_0^r f(s)e^{-2i\pi ns/r}ds && (4.29)\\
&= M(f\mathtt{e}_{-2\pi n/r},r).
\end{aligned}$$

**V. Fonctions presque périodiques.**

**(V.1)** Si $f$ est $r$-périodique, avec $r$ réel strictement positif, alors $f(\cdot+r)=f$ et donc $r\in T(f,\varepsilon)$, pour tout réel $\varepsilon>0$.

Réciproquement, supposons que $r$ soit un réel non-nul appartenant à $\bigcap_{\varepsilon>0}T(f,\varepsilon)$. On a donc $\|f(\cdot+r)-f\|_\infty<\varepsilon$ pour tout tout réel $\varepsilon>0$, et donc $\|f(\cdot+r)-f\|_\infty=0$, c'est-à-dire $f(\cdot+r)=f$. Si $r>0$, $f$ est $r$ périodique. Si $r$ est négatif, alors $f(\cdot+r)=f$ implique facilement que $f(\cdot+(-r))=f$ et donc que $f$ est $(-r)$-périodique.

**(V.2.a)** C'est assez évident.

**(V.2.b)** Supposons d'abord qu'il existe un réel $L>0$ tel que pour tout intervalle réel $I$ de longueur supérieure ou égale à $L$, l'ensemble $E\cap I$ est non-vide. Soit $x\in\mathbf{R}$ ; comme $[x,x+L]$ est un intervalle de longueur $L$, $E\cap[x,x+L]$ est non-vide. Comme cela est vrai pour tout $x\in\mathbf{R}$, $E$ est relativement dense.

Réciproquement, supposons que $E$ soit relativement dense. Par définition, il existe un réel $L_0>0$ tel que pour tout $x\in\mathbf{R}$, $E\cap[x,x+L_0]$ est non-vide. On pose $L=3L_0$. Soit $I$ un intervalle de longueur $L$ et $x$ son milieu. Alors $[x,x+L_0]\subset I$. Comme $E\cap[x,x+L_0]$ est non-vide, puisque $E\cap[x,x+L_0]\subset E\cap I$, on en déduit que $E\cap I$ est non-vide également. On a donc montré qu'il existe un réel $L>0$ tel que pour tout intervalle réel $I$ de longueur supérieure ou égale à $L$, l'ensemble $E\cap I$ est non-vide.

**(V.2.c)** $(i)$ Soit $x\in\mathbf{R}$. On pose $k=\lfloor x/b\rfloor$, si bien que $k\leqslant x/b<k+1$ et donc $x<b(k+1)\leqslant x+b$, c'est-à-dire que $b(k+1)\in[x,x+b]\cap(b\mathbf{Z})$. Cela montre que $b\mathbf{Z}$ est relativement dense.

$(ii)$ Supposons que $E=\{n^2,-n^2\,;\,n\in\mathbf{N}\}$ soit relativement dense : il existe donc un réel $L>0$ tel que pour tout $x\in\mathbf{R}$, $[x,x+L]\cap E$. Pour tout $n\in\mathbf{N}$, on a $E\cap[n^2+\frac{1}{2},n^2+\frac{1}{2}+L]\neq\varnothing$, c'est-à-dire qu'il existe $p_n\in\mathbf{N}$ tel que $n^2+\frac{1}{2}\leqslant p_n^2\leqslant n^2+\frac{1}{2}+L$. Cela implique que $p_n\geqslant n+1$ et donc $n^2+2n+1=(n+1)^2\leqslant p_n^2\leqslant n^2+\frac{1}{2}+L$, et donc $2n\leqslant L$, ce qui n'est pas possible pour tout $n$. On en déduit donc que $E$ n'est pas relativement dense.

$(iii)$ On remarque que $\mathbf{Z}\subset\{\sqrt{n},-\sqrt{n}\,;\,n\in\mathbf{N}\}$. Par $(i)$ avec $b=1$, on voit que $\mathbf{Z}$ est relativement dense. On applique alors **(V.2.a)** pour en déduire que $\{\sqrt{n},-\sqrt{n}\,;\,n\in\mathbf{N}\}$ est relativement dense.

$(iv)$ Soit $K$ un compact de $\mathbf{R}$. Il existe donc des réels $a<b$ tels que $K\subset[a,b]$. Donc pour tout réel $L>0$ et pour tout réel $x>b$, on a $K\cap[x,x+L]=\varnothing$, ce qui montre que $K$ ne peut pas être relativement dense.

**(V.3)** Soit $f\in\mathscr{F}_r$. Pour tout réel $\varepsilon>0$, $r\mathbf{Z}\subset T(f,\varepsilon)$. Par **(V.2.c)**, $r\mathbf{Z}$ est relativement dense et par **(V.2.a)**, on en déduit que $T(f,\varepsilon)$ est relativement dense. Comme cela est vrai pour tout réel $\varepsilon>0$, cela implique que $f\in\mathscr{B}$.

**(V.4)** Soit $f$ une fonction continue à support compact telle que $f(0)=1$. Par exemple : la fonction paire telle que $f(x) = (1-x)_+$, pour tout réel positif $x$. Soit $a\in\mathbf{R}$ tel que $a>1$. On a donc $f(0+a)-f(0)=-1$ et donc $\|f(\cdot+a)-f\|_\infty \geqslant 1$. Pour tout réel $1>\varepsilon>0$, $T(f,\varepsilon)\subset[-1,1]$ et par **(V.2.c)**, $T(f,\varepsilon)$ n'est pas relativement dense. On en déduit que $f\notin\mathscr{B}$.

**(V.5)** On observe que si $c\in T(f,\varepsilon)$, alors

$$|g(t+b^{-1}c)-g(t)|=|f(bt+c+a)-f(bt+a)|\leqslant\varepsilon\ .$$

Donc $b^{-1}T(f,\varepsilon)\subset T(g,\varepsilon)$.

Montrons ensuite que $b^{-1}T(f,\varepsilon)$ est relativement dense. Comme $T(f,\varepsilon)$ est relativement dense, il existe $L$ tel que pour tout $x\in\mathbf{R}$, $[bx,bx+L]\cap T(f,\varepsilon)\neq\varnothing$ et donc $[x,x+b^{-1}L]\cap(b^{-1}T(f,\varepsilon))\neq\varnothing$. Par la question **(V.2.a)**, on en déduit que $T(g,\varepsilon)$ est relativement dense. Comme cela est vrai pour tout $\varepsilon>0$, $g\in\mathscr{B}$.

**(V.6)** Soient $f_1,f_2\in\mathscr{N}$ et $c\in\mathbf{C}$. Soit une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$. On peut extraire une suite $(a_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $\big(f_1(\,\cdot\,+a_{\varphi(n)})\big)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur $\mathbf{R}$. Comme $f_2$ est aussi normale on peut extraire une suite $(a_{\varphi(\phi(n))})_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $\big(f_2(\,\cdot\,+a_{\varphi(\phi(n))})\big)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur $\mathbf{R}$. Si on pose $\psi(n)=\varphi(\phi(n))$, alors $\big(f_1(\,\cdot\,+a_{\psi(n)})\big)_{n\in\mathbf{N}}$ et $\big(f_2(\,\cdot\,+a_{\psi(n)})\big)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent uniformément sur $\mathbf{R}$. Il en est de même pour

$$\big(f_1(\,\cdot\,+a_{\psi(n)})+cf_2(\,\cdot\,+a_{\psi(n)})\big)_{n\in\mathbf{N}}\quad\text{et}\quad\big(\bar f_1(\,\cdot\,+a_{\psi(n)})f_2(\,\cdot\,+a_{\psi(n)})\big)_{n\in\mathbf{N}}\ .$$

Cela entraîne bien les résultats voulus.

**(V.7)** Soit une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$. On pose $b_n=\lambda a_n-2\pi\lfloor\lambda a_n/2\pi\rfloor$. On observe que $\mathsf{e}_\lambda(\cdot+a_n)=e^{ib_n}\mathsf{e}_\lambda$. On remarque ensuite que $b_n\in[0,2\pi]$ et qu'il est donc possible d'extraire de $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite $(b_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ qui converge vers $b$ ; on a alors pour tout $t\in\mathbf{R}$

$$\mathsf{e}_\lambda(t+a_n)-e^{ib}\mathsf{e}_\lambda(t)=(e^{ib_n}-e^{ib})\mathsf{e}_\lambda(t)$$

Et donc $\|\mathsf{e}_\lambda(\cdot+a_{\varphi(n)})-e^{ib}\mathsf{e}_\lambda\|_\infty\leqslant|e^{ib_{\varphi(n)}}-e^{ib}|$ ce qui implique que $\lim_{n\to\infty}\|\mathsf{e}_\lambda(\cdot+a_{\varphi(n)})-e^{ib}\mathsf{e}_\lambda\|_\infty=0$.

**(V.8)** Comme $h\in\mathscr{N}$, $\{h(\cdot+a)\,;\,a\in\mathbf{R}\}$ satisfait la propriété de Bolzano-Weierstrass. Comme rappelé en début de sujet, puisque $(C_b(\mathbf{R},\mathbf{C}),\|\cdot\|_\infty)$ est complet, la propriété de Bolzano-Weierstrass implique la propriété de Borel-Lebesgue et il existe donc $g_1,\ldots,g_n\in\{h(\cdot+a)\,;\,a\in\mathbf{R}\}$ tels que $\{h(\cdot+a)\,;\,a\in\mathbf{R}\}\subset\bigcup_{1\leqslant k\leqslant n}B(g_k,\varepsilon/3)$. Or pour tout $k\in\{1,\ldots,n\}$, il existe $a_k\in\mathbf{R}$ tel que $g_k=h(\cdot+a_k)$ et on observe que si $g\in B(g_k,\varepsilon/3)$ alors

$$\begin{aligned}\|g-f(\cdot+a_k)\|_\infty &\leqslant \|g-h(\cdot+a_k)\|_\infty+\|h(\cdot+a_k)-f(\cdot+a_k)\|_\infty && (4.30)\\ &< \tfrac{1}{3}\varepsilon+\|h-f\|_\infty && (4.31)\\ &< \tfrac{2}{3}\varepsilon\end{aligned}$$

Donc pour tout $k\in\{1,\ldots,n\}$, $B(g_k,\varepsilon/3)\subset B(f(\cdot+a_k),\frac{2}{3}\varepsilon)$. Soit ensuite $a\in\mathbf{R}$. On pose $g=h(\cdot+a)$. Alors, $\|f(\cdot+a)-g\|_\infty=\|f-h\|_\infty<\varepsilon/3$ et d'après ce qui précède, il existe $k\in\{1,\ldots,n\}$ tel que $g\in B(g_k,\frac{1}{3}\varepsilon)\subset B(f(\cdot+a_k),\frac{2}{3}\varepsilon)$. Donc

$$\|f(\cdot+a)-f(\cdot+a_k)\|_\infty\leqslant\|f(\cdot+a)-g\|_\infty+\|g-f(\cdot+a_k)\|_\infty<\tfrac{1}{3}\varepsilon+\tfrac{2}{3}\varepsilon=\varepsilon.$$

On a donc $A\subset\bigcup_{1\leqslant k\leqslant n}B\big(f(\cdot+a_k)\,,\,\varepsilon\big)$.

**(V.9)** Soit un réel $\varepsilon>0$. Comme $f\in\overline{\mathscr{N}}$, il existe $h\in\mathscr{N}$ tel que $\|f-h\|_\infty<\varepsilon/3$ et la question précédente montre que $\{f(\cdot+a)\,;\,a\in\mathbf{R}\}$ satisfait la propriété de Borel-Lebesgue. Puisque $(C_b(\mathbf{R},\mathbf{C}),\|\cdot\|_\infty)$ est complet, cela implique, comme rappelé en début de sujet, que $\{f(\cdot+a)\,;\,a\in\mathbf{R}\}$ satisfait la propriété de BOLZANO-WEIERSTRASS et donc, par définition, que $f$ est normale. Cela montre que $\overline{\mathscr{N}}=\mathscr{N}$.

**(V.10.a)** En appliquant **(V.8)** à $h=f$, il existe $a_1,\ldots,a_n\in\mathbf{R}$ tels que

$$\big\{f(\cdot+a)\,;\,a\in\mathbf{R}\big\}\subset\bigcup_{1\leqslant k\leqslant n}B\big(f(\cdot+a_k)\,,\,\varepsilon\big)\,.$$

C'est-à-dire que pour tout $a\in\mathbf{R}$, il existe $k\in\{1,\ldots,n\}$ tel que $f(\cdot+a)\in B\big(f(\cdot+a_k)\,,\,\varepsilon\big)$, c'est-à-dire

$$\|f(\cdot+a-a_k)-f\|_\infty=\|f(\cdot+a)-f(\cdot+a_k)\|_\infty<\varepsilon$$

et donc $a-a_k\in T(f,\varepsilon)$.

**(V.10.b)** On conserve les notations de la question précédente et on pose

$$L=3\max_{1\leqslant k\leqslant n}|a_k|\,.$$

Si $I$ est un intervalle de longueur $L$, on note $a$ son milieu et alors pour tout $k\in\{1,\ldots,n\}$, on a bien $a\pm|a_k|\in[a-\frac{1}{3}L,a+\frac{1}{3}L]\subset I$ et donc $a-a_k\in I$, ce qui implique que $T(f,\varepsilon)\cap I\neq\varnothing$. On a montré qu'il existe un réel $L>0$ tel que pour tout intervalle réel $I$ de longueur supérieure ou égale à $L$, l'ensemble $T(f,\varepsilon)\cap I$ est non-vide. Par **(V.2.b)**, cela implique que $T(f,\varepsilon)$ est relativement dense. Comme cela est vrai pour tout réel $\varepsilon>0$, $f\in\mathscr{B}$.

**(V.11)** On a montré pour tout $\lambda\in\mathbf{R}$, que $\mathsf{e}_\lambda\in\mathscr{N}$ ; on a également montré que $\mathscr{N}$ est $\mathbf{C}$-espace vectoriel. Donc $\mathscr{P}\subset\mathscr{N}$. On a montré que $\mathscr{N}$ est un fermé, donc $\overline{\mathscr{P}}\subset\mathscr{N}$. On a ensuite montré que $\mathscr{N}\subset\mathscr{B}$. Donc $\overline{\mathscr{P}}\subset\mathscr{B}$.

### VI. Injectivité des coefficients de FOURIER généralisés.

**(VI.1)** Soit $h\in\mathscr{F}_1$. Supposons $c_n(h)=0$ pour tous $n\in\mathbf{Z}$. L'égalité de PARSEVAL rappelée en début de sujet implique que $\int_0^1|h(s)|^2ds=0$. Comme $h$ est continue sur $[0,1]$, cette égalité implique qu'elle est nulle sur l'intervalle $[0,1]$. Comme elle est 1-périodique, on a pour tout $t\in\mathbf{R}$, $h(t)=h(t-\lfloor t\rfloor)=0$, c'est-à-dire que $h$ est identiquement nulle. On a montré que si les coefficients de FOURIER d'une fonction de $\mathscr{F}_1$ sont tous nuls, alors la fonction elle-même est identiquement nulle.

En appliquant ce résultat à $h=f-g$ comme dans l'énoncé, on voit que pour tout $n\in\mathbf{Z}$, $c_n(h)=c_n(f)-c_n(g)=0$. Donc $h$ est identiquement nulle, ce qui implique que $f=g$.

**(VI.2.a)** Comme $g$ est non-nulle et positive, il existe $t_0\in\mathbf{R}$ tel que $g(t_0)>0$. On pose $\varepsilon=g(t_0)/3$, qui est donc un réel strictement positif. Comme $g$ est continue, sur $\mathbf{R}$, elle est continue en particulier en $t_0$ et il existe donc $\delta>0$ tel que pour tout $t\in[t_0,-\delta,t_0+\delta]$, on ait $|g(t_0)-g(t)|\leqslant\varepsilon$, ce qui implique $g(t_0)-g(t)\leqslant\varepsilon$ et donc $g(t)\geqslant g(t_0)-\varepsilon=2\varepsilon$. En particulier, on a bien $\inf_{s\in[t_0,t_0+\delta]}g(s)\geqslant 2\varepsilon$.

**(VI.2.b)** Par **(V.11)**, on a $\overline{\mathscr{P}}\subset\mathscr{B}$ et $T(g,\varepsilon)$ est donc relativement dense. Il existe par conséquent un réel $L>0$ tel que pour tout $t\in\mathbf{R}$, on trouve $b'\in[t-t_0,t-t_0+L]\cap T(g,\varepsilon)$, c'est-à-dire que pour tout $s'\in[0,\delta]$, on a $|g(s'+t_0+b')-g(t_0+s')|\leqslant\varepsilon$ et donc $g(s'+t_0+b')\geqslant g(t_0+s')-\varepsilon\geqslant\varepsilon$, d'après la question qui précède. Par conséquent, $\inf_{s\in[t_0+b',t_0+b'+\delta]}g(s)\geqslant\varepsilon$. Si on pose $b=b'+t_0$, on voit que $b\in[t,t+L]$ et $\inf_{s\in[b,b+\delta]}g(s)\geqslant\varepsilon$.

**(VI.2.c)** On applique la question précédente à $t=2kL$ : il existe $b\in[2kL,2kL+L]$ tel que $\inf_{s\in[b,b+\delta]}g(s)\geqslant\varepsilon$. Or $[b,b+\delta]\subset[2kL,2kL+L+\delta]\subset[2kL,2(k+1)L]$ car $L\geqslant\delta$. Comme $g$ est positive, on a bien $\int_{2kL}^{2(k+1)L}g(s)ds\geqslant\int_b^{b+\delta}g(s)ds\geqslant\delta\varepsilon$.

On en déduit que

$$M(g,2nL) = \frac{1}{2nL}\sum_{0\leqslant k\leqslant n-1}\int_{2kL}^{2kL+2L} g(t)\,dt \geqslant \frac{n\delta\varepsilon}{2nL} = \frac{\delta\varepsilon}{2L}.$$

Or $\lim_{n\to\infty} M(g,2nL) = \mathsf{a}(g,0)$ par **(III.4.d)**. Donc $\mathsf{a}(g,0)\geqslant \delta\varepsilon/(2L)>0$.

**(VI.3)** Soit $h\in\overline{\mathscr{P}}$ telle que $\mathsf{a}(h,\lambda)=0$ pour tout $\lambda\in\mathbf{R}$. La formule de Bessel implique que $\mathsf{a}(|h|^2,0)=0$. Or par **(III.2)**, $|h|^2\in\overline{\mathscr{P}}$ et la question qui précède appliquée à $g=|h|^2$ implique que $|h|^2$ est identiquement nulle, c'est-à-dire que $h$ est identiquement nulle.

On applique ensuite ce résultat à $h=f_2-f_1$. En effet, pour tout $\lambda\in\mathbf{R}$, par linéarité de $\mathsf{a}(\cdot,\lambda)$, on a $\mathsf{a}(h,\lambda)=\mathsf{a}(f_2,\lambda)-\mathsf{a}(f_1,\lambda)=0$ et donc $h$ est nulle, c'est-à-dire que $f_1=f_2$.

**(VI.4)** Si le spectre de $f$ est vide, on vient de montrer à la question précédente que $f$ est nulle. On suppose que $\mathrm{Sp}(f)=\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$, avec $n\geqslant 1$, et $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ distincts. On pose $g=\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\mathsf{a}(f,\lambda_k)\mathsf{e}_{\lambda_k}$. On en déduit que pour tout $\lambda\in\mathbf{R}$, $\mathsf{a}(f,\lambda)=\mathsf{a}(g,\lambda)$. La question précédente implique alors que $f=g$. On a montré que si le spectre de $f$ est fini, $f\in\mathscr{P}$.

**(VI.5.a)** La série de fonctions de terme général $(\mathsf{a}(f,\lambda_n)\mathsf{e}_{\lambda_n})_{n\in\mathbf{N}}$ est normalement convergente sur $\mathbf{R}$. On note $g=\sum_{n=0}^{\infty}\mathsf{a}(f,\lambda_n)\mathsf{e}_{\lambda_n}$ la somme qui, par la question **(IV.5.a)**, est un élément de $\overline{\mathscr{P}}$ tel que $\mathsf{a}(g,\lambda_n)=\mathsf{a}(f,\lambda_n)$ pour tout $n\in\mathbf{N}$ et $\mathsf{a}(g,\lambda)=0$ si $\lambda\notin\{\lambda_n\,;\,n\in\mathbf{N}\}$. On a donc $\mathsf{a}(f,\lambda)=\mathsf{a}(g,\lambda)$, pour tout $\lambda\in\mathbf{R}$. La question **(VII.3)** implique alors que $f=g$.

**(VI.5.b)** Par **(III.4.b)**, $\mathsf{a}(f',\lambda)=i\lambda\mathsf{a}(f,\lambda)$. Par Cauchy-Schwarz et la formule de Bessel, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}|\mathsf{a}(f,\lambda_n)| &= \sum_{n=0}^{\infty}|\lambda_n|^{-1}|\mathsf{a}(f',\lambda_n)| && (4.32)\\
&\leqslant \Big(\sum_{n=0}^{\infty}|\lambda_n|^{-2}\Big)^{\frac12}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}|\mathsf{a}(f',\lambda_n)|^2\Big)^{\frac12} && (4.33)\\
&\leqslant \Big(\sum_{n=0}^{\infty}|\lambda_n|^{-2}\Big)^{\frac12}\Big(\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f')}|\mathsf{a}(f',\lambda)|^2\Big)^{\frac12} && (4.34)\\
&= \sqrt{\mathsf{a}(|f'|^2,0)}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}|\lambda_n|^{-2}\Big)^{\frac12} < \infty.
\end{aligned}$$

On applique donc la question qui précède pour conclure.

# Chapitre 5

# Épreuves orales de leçons

## 5.1 Liste des leçons.

Depuis la session 2017, afin d'aider les candidats et les préparateurs, le jury annonce dans son rapport la liste des leçons qui seront utilisées l'année suivante. On trouvera donc ci-dessous les listes de leçons qui seront utilisées pour la session 2022 du concours.Ces listes sont aussi reprises sur le site agreg.org.

## Liste des leçons d'algèbre et géométrie

**101** Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

**102** Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.

**103** Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

**104** Groupes abéliens et non abéliens finis. Exemples et applications.

**105** Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

**106** Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie $E$, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

**108** Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

**120** Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

**121** Nombres premiers. Applications.

**122** Anneaux principaux. Applications.

**123** Corps finis. Applications.

**125** Extensions de corps. Exemples et applications.

**126** Exemples d'équations en arithmétique.

**141** Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

**142** PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.

**144** Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.

**149** Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.

**150** Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

**151** Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

**152** Déterminant. Exemples et applications.

**153** Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

**154** Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

**155** Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

**156** Exponentielle de matrices. Applications.

**157** Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

**158** Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

**159** Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

**160** Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

**161** Distances et isométries d'un espace affine euclidien.

**162** Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

**170** Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

**171** Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

**181** Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

**190** Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

**191** Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie.

**Liste des leçons d'analyse et probabilités**

**201** Espaces de fonctions. Exemples et applications.

**203** Utilisation de la notion de compacité.

**204** Connexité. Exemples et applications.

**205** Espaces complets. Exemples et applications.

**207** Prolongement de fonctions. Exemples et applications.

**208** Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

**209** Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples et applications.

**213** Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

**214** Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

**215** Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

**219** Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

**220** Équations différentielles ordinaires. Exemples de résolution et d'études de solutions en dimension 1 et 2.

**221** Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

**222** Exemples d'études d'équations différentielles linéaires et d'équations aux dérivées partielles linéaires.

**223** Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

**226** Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

**228** Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

**229** Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

**230** Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

**234** Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.

**235** Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.

**236** Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

**239** Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

**241** Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

**243** Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

**245** Fonctions d'une variable complexe. Exemples et applications.

**246** Séries de Fourier. Exemples et applications.

**250** Transformation de Fourier. Applications.

**253** Utilisation de la notion de convexité en analyse.

**261** Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.

**262** Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.

**264** Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

**265** Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.

**266** Illustration de la notion d'indépendance en probabilités.

**267** Exemples d'utilisation de courbes en dimension 2 ou supérieure.

## 5.2 Présentation des épreuves

**Modalités.** Pour les épreuves de leçons, les candidats tirent au sort un couple de sujets. Le candidat est libre de choisir le sujet qui lui plaît parmi ces deux sujets proposés, celui où il se sent le plus à même de mettre en valeur ses connaissances. Il n'a pas à justifier ou commenter son choix.

Les candidats préparent l'interrogation pendant 3 heures. Durant tout ce temps, ils ont libre accès aux livres de la bibliothèque de l'agrégation ou à leurs propres ouvrages. Seuls sont autorisés les ouvrages avec un numéro ISBN et jouissant d'un minimum de diffusion commerciale. L'attention des candidats est attirée sur le fait que l'ISBN ne suffit pas, une « diffusion commerciale avérée »est tout autant importante. Ainsi, un polycopié de cours, propre à un établissement, même muni d'un ISBN, pourra être refusé. Cette restriction est motivée par le principe d'égalité des candidats : les ressources documentaires autorisées doivent être facilement accessibles à tout candidat au concours. Les ouvrages imprimés par les candidats eux-mêmes (ou les bibliothèques universitaires) ne sont pas autorisés et les livres doivent être vierges d'annotation. Il n'est pas autorisé non plus de venir avec des livres dont certaines pages auraient été marquées au préalable, fût-ce de manière amovible, au moyen de post-it par exemple. (Il est toutefois possible de se munir de tels marque-pages à apposer durant la préparation.) Le représentant du directoire présent lors de la préparation peut interdire tout ouvrage personnel ou envoyé par une préparation universitaire. Évidemment, les notes personnelles, manuscrites ou dactylographiées, ne sont autorisées ni pendant l'épreuve proprement dite, ni pendant la préparation. Il est possible, et même recommandé, de venir muni d'un exemplaire du rapport du jury de l'agrégation externe de mathématiques, relié et sans annotation. Les candidats n'ont pas accès à Internet et la possession d'un dispositif de communication ou de stockage de données (téléphone, calculatrice, clé USB, montre connectée,...) serait considérée comme une tentative de fraude, susceptible d'entraîner l'exclusion du concours. À l'issue de cette phase de préparation, le jury fait procéder à la photocopie des plans de la leçon élaborés par les candidats. Le temps de préparation est décompté dès l'ouverture des enveloppes contenant les sujets. Lorsque les plans des leçons sont ramassés pour leur reproduction, les candidats disposent encore de quelques minutes pour finaliser leur réflexion et ils peuvent, bien sûr, continuer à noter leurs idées sur leurs brouillons qu'ils emmèneront en salle d'interrogation.

Les plans sont donc des documents manuscrits, communiqués à la commission d'interrogation. Ils comportent *au maximum 3 pages* au format A4, éventuellement complétées par une page de figures. Les candidats doivent veiller à la lisibilité de leur document, en tenant en compte le fait qu'ils vont être photocopiés : écrire suffisament gros, soigner la présentation, faire apparaître des titres, éviter l'utilisation de couleurs et les encres très claires... Le candidat doit clairement signaler sur ce plan les résultats qu'il estime significatifs, représentatifs de la leçon et qu'il propose de développer devant le jury.

L'épreuve s'organise en trois temps, prévus pour une durée totale de *55 minutes environ* : une présentation du plan de la leçon éventuellement suivie d'une brève discussion, un développement de 15 minutes maximum et enfin une partie consacrée au dialogue et aux questions. *Le candidat peut utiliser sa copie du plan pendant toute l'épreuve*. Pendant la première phase de l'interrogation consacrée à la présentation du plan, il peut utiliser toutes les notes manuscrites produites durant la préparation. Le développement doit quant à lui se faire sans utiliser ces notes manuscrites ; si le plan comporte lui-même trop de détails sur les développements proposés, le jury peut restreindre l'utilisation de ce document durant cette seconde phase de l'épreuve.

**Commentaires généraux.** Le jury met en garde contre trois écueils qui peuvent altérer les performances des candidats :

— *le hors-sujet*. Le hors-sujet se manifeste de deux manières, qui dans tous les cas sont lourdement sanctionnées. Quelques candidats prennent des libertés quant au libellé de la leçon et s'en écartent notablement : les titres des leçons définissent le champ précis qu'il faut traiter. Par ailleurs, le jury constate l'abus de « recyclage »de thèmes plus ou moins classiques, mais qui ne sont pas exploités avec à propos dans les leçons et qui, parfois, prennent une place sans commune mesure avec leur importance mathématique.

— une mauvaise évaluation des attentes et du niveau, conduisant à un *défaut de maîtrise*. Trop de candidats proposent plan ou développements qu'(ils ne peuvent défendre. Des connaissances des bases fermement maîtrisées et intelligemment utilisées valent mieux qu'un étalage de savoirs emmagasinés sans recul et à peine digérés, voire pas assimilés du tout. Une maîtrise avérée et solide des bases assure déjà une note très convenable, certainement de nature à permettre l'admission, en l'état du concours.

— *la fatigue et le stress*. Une grande majorité des candidats se présente avec une forte charge émotionnelle, à la mesure de l'enjeu et de leur investissement personnel, qui peut nuire à l'expression de leurs connaissances. Cela est d'autant plus vrai que l'épreuve ne se réduit pas à la simple récitation d'un cours mais à un échange avec le jury et donc, là encore, à une réflexion personnelle, à une prise de hauteur et à la démonstration, dans un temps court, non seulement de la maîtrise technique mais aussi de l'aptitude à construire un raisonnement. Le jury est pleinement conscient de ces difficultés et s'emploie à en réduire les effets négatifs en mettant en pratique une posture de bienveillance constante. Le jury ne cherche en rien à déstabiliser le candidat pendant l'épreuve, mais au contraire cherche à valoriser les connaissances du candidat. Les premières questions, parfois très simples, visent souvent à préciser une notation, un point du plan ou du développement, pour que le jury s'assure de la compréhension par le candidat des notions qu'il vient d'exposer et non pour lui tendre un quelconque piège. Mettre le candidat en confiance, le respecter, l'écouter, poser des questions ouvertes, permettre au candidat déstabilisé de se reprendre sans l'acculer au silence, stimuler le dialogue sont autant d'objectifs que s'assignent les membres du jury.

Une liste d'énoncés, quelque sophistiqués qu'ils soient, ne peut suffire à convaincre le jury. Il faut savoir motiver ces énoncés et expliquer comment ils s'enchaînent et en quoi ils sont pertinents. Les leçons doivent donc être illustrées avec des exemples judicieusement choisis. De nombreux titres de leçons se terminent d'ailleurs par « exemples et applications » : le jury attend donc que le plan soit riche en exemples et applications et/ou que le candidat puisse en développer lors de la présentation de son plan.

**Recommandations.** On trouvera ci-dessous des commentaires sur chaque leçon de la session 2022.

La rédaction des commentaires sur les leçons tente de distinguer les notions « de base », incontournables pour l'intitulé proposé et dont la maîtrise est attendue des candidats, et des suggestions d'ouverture. Ces suggestions sont de niveaux variés et peuvent concerner des champs différents, par exemple qui trouvent leurs motivations dans des problématiques propres aux options de modélisation. Certaines pistes se placent aussi aux frontières du programme et peuvent faire écho à des sujets spécialisés abordés durant la formation du candidat. Il ne s'agit là que de propositions qui ne revêtent aucun caractère obligatoire, introduites par des formulations comme « pour aller plus loin »ou « si les candidats le désirent » ; le jury n'attend certainement pas un balayage exhaustif de ces indications et il n'est pas nécessaire de développer les éléments les plus sophistiqués pour obtenir une note élevée. Enfin, certains commentaires font part de l'expérience du jury pour évoquer le dosage pas toujours approprié entre théorie et exemples, souligner des points de faiblesse qui méritent une attention particulière ou mettre en garde contre de possibles écueils (oublis, hors-sujets, erreurs fréquentes, positionnement mal à propos, etc). Le jury espère que candidats et préparateurs sauront se saisir de ces indications pour proposer des développements originaux : il n'y a pas de format standard et des manières différentes d'aborder les leçons peuvent toutes permettre d'obtenir d'excellents résultats.

Les leçons proposées ont toutes leurs spécificités qu'un principe unique ne saurait résumer ou englober. Une partie des sujets sont très délimités, alors que certains intitulés de leçons sont très ouverts et obligent le candidat à opérer des choix thématiques et de points de vue. Ces sujets sont pensés pour offrir de multiples points d'entrée, avec une échelle de niveaux techniques assez large, l'objectif étant de permettre à l'ensemble des candidats de s'exprimer au mieux et de mettre en valeur leurs connaissances.

La pertinence des choix adoptés et leur motivation au regard de l'intitulé de la leçon entrent alors tout particulièrement dans l'appréciation, ainsi, bien entendu, que la maîtrise du contenu proposé. Ces leçons de synthèse exigent certainement un important recul ; elles réclament un effort conséquent de réflexion et méritent tout particulièrement d'être préparées en amont du concours. En retour, elles permettent de consolider un matériel mathématique qui peut être réinvesti avec profit dans d'autres thèmes.

### 5.2.1 Première partie : présentation de la leçon

Dans cette première phase de l'épreuve, le candidat est convié à utiliser son temps de parole, *6 minutes maximum*, pour présenter, argumenter, mettre en valeur et faire une synthèse de sa leçon.

Pour cette partie de l'épreuve, le candidat devrait s'imaginer dans la situation où il doit introduire à un auditoire, pendant 6 minutes, une leçon destinée ensuite à être développée sur plusieurs séances. Quel est l'intérêt du sujet ? Comment se positionne-t-il dans un paysage mathématique plus large ? Comment s'articulent les différentes sections qui composent la leçon ? Comment s'expliquent et se motivent les enchaînements ? Comment se hiérarchisent les résultats et les difficultés ? Il s'agit aussi de s'interroger sur les enjeux didactiques de la leçon, c'est-à-dire dans quel ordre et comment présenter les choses pour que le tout soit cohérent, compréhensible et pédagogiquement efficace. De plus, cette présentation gagne à être illustrée. Des exemples peuvent être utilisés pour mettre en évidence les difficultés, faire ressortir le rôle des hypothèses et décrire des applications met en valeur l'intérêt des résultats. Enfin, des figures peuvent aussi contribuer à expliquer les idées maîtresses. Si l'enjeu principal est d'argumenter la construction du plan de la leçon, il est aussi parfois pertinent de mettre en valeur les liens logiques et l'intérêt des notions présentées dans d'autres domaines (sans forcément les introduire dans le plan écrit).

Le rapport du concours indique des pistes pour chaque leçon ; il ne s'agit que de suggestions que le candidat n'est pas tenu de suivre et qui ne constituent pas une trame obligatoire pour le plan. Notamment le rapport distingue clairement le cœur des leçons et des extensions dont le contenu peut être techniquement plus exigeant. La vocation de ces commentaires n'est donc pas d'être repris de manière exhaustive ; il ne s'agit que de guider les candidats dans leur auto-évaluation et les encourager à présenter des notions avec lesquelles ils sont à l'aise. Notamment, ils peuvent tout à fait exploiter des notions ou des applications qui trouvent leur motivation dans les options de modélisation qu'ils ont choisies.

Le jury ne cherche pas des plans absolument originaux, le plus important est que le plan soit bien structuré, maîtrisé par le candidat et qu'y figure une quantité substantielle d'exemples et de mathématique. Le jury alerte les candidats sur les dangers d'utiliser les plans *tout faits* disponibles dans la littérature. Indépendamment de leur qualité et leur pertinence, qui peuvent être contrastées, le candidat ne peut se contenter de recopier un der ces plans, il doit s'approprier ce travail de façon à pouvoir l'expliquer, le commenter et le défendre.

Il s'agit d'une épreuve *orale*. Le document écrit transmis au jury se justifie pour servir de base pour la discussion et constitue un fil conducteur qui guide le jury pour mener la partie consacrée au dialogue et aux questions. Ce plan ne doit être ni une énumération d'énoncés, ni un cours ou un exposé complet avec développement des démonstrations. En revanche, il doit définir avec suffisamment de précision les notions mathématiques introduites, donner les énoncés complets (notamment les hypothèses) des résultats fondamentaux, citer des exemples et des applications. Le plan est important puisqu'il calibre l'ensemble de la leçon, il détermine l'orientation et le niveau choisis par le candidat. Les choix doivent être motivés lors de la présentation et éventuellement lors de la discussion avec le jury. Il est nécessaire d'être en mesure de démontrer les résultats importants et de pouvoir les illustrer avec des exemples simples. Soigner la présentation d'un document écrit qui sert de support pour un cours est une compétence professionnelle importante du métier d'enseignant. Aussi, la formalisation mathématique et le français doivent être soignés, ainsi que la mise en forme, autant que possible dans le temps de préparation imparti : ces éléments ne peuvent que faciliter les interactions avec le jury. Il est inutile, voire contre-productif, de chercher à remplir à tout prix les 3 feuilles autorisées, surtout avec des éléments que le candidat ne maîtrise manifestement pas.

Pendant les 6 minutes de présentation, le candidat doit tenter de faire une synthèse de son plan en en expliquant les grandes lignes et les articulations. Il est inutile de recopier le plan au tableau, puisque le jury dispose d'une copie de ce document. Toutefois le jury encourage les candidats à exploiter le tableau comme support pédagogique. Faire apparaître la structure de la leçon, illustrer une difficulté technique ou le principe d'une démonstration par une figure... permet au candidat de s'affranchir de ses notes et rend l'exposé plus vivant. La présentation orale, la qualité d'expression, la compréhension synthétique, la plus-value de l'exposé par rapport au plan écrit, la capacité du candidat à intéresser son auditoire sur une leçon donnée, constituent des éléments importants d'évaluation. Le jury se réjouit d'ailleurs des progrès constatés sur cette partie de l'épreuve.

Le jury attache une grande importance à la *maîtrise du plan* qui intervient de manière substantielle dans la grille de notation. Le plan ne peut être considéré comme maîtrisé si l'exposé ressemble à une récitation. Les résultats exposés doivent être compris ainsi que l'organisation d'ensemble de la leçon. Il est souhaitable que le candidat connaisse dans leurs grandes lignes les démonstrations des résultats figurant au programme du concours. Il est indispensable que le candidat ait une idée assez claire de la difficulté des démonstrations des résultats qu'il évoque dans son plan. Le jury rappelle qu'il n'est pas nécessaire de s'aventurer au-delà des contours du programme pour prétendre à une très bonne note ! Plus généralement, il vaut mieux se cantonner à un niveau où l'on se sait solide plutôt que de chercher à placer des énoncés débordant du programme mais sans le recul, ni l'assurance technique nécessaires. Bien entendu, réussir cette partie de l'épreuve ne s'improvise pas et le discours doit avoir été réfléchi durant la préparation de l'épreuve, et plus largement tout au long du parcours qui conduit les candidats jusqu'au concours.

À la fin de cette présentation de la leçon, le jury peut éventuellement questionner très brièvement le candidat et aborder quelques points techniques, sans entrer dans des détails qui retarderaient le début du développement.

### 5.2.2 Deuxième partie : le développement

Le jury demande au candidat de proposer *deux développements au moins*. Il s'agit de résultats représentatifs de la leçon que le candidat est en mesure d'exposer en détail et sans notes.

Proposer un seul développement ou des développements de niveaux trop disparates conduit à une minoration de la note. Ces propositions de développements doivent être clairement mentionnées sur le plan écrit et non pas vaguement évoquées à l'oral. Dans cet esprit, le candidat doit pouvoir motiver le choix des développements qu'il propose et en quoi ces résultats ou énoncés sont centraux ou jouent à ses yeux un rôle particulier sur le sujet. Le candidat doit aussi préciser, sur son plan écrit, ce qu'il va démontrer et, le cas échéant, les résultats de son plan qu'il va admettre pour mener à bien son développement. Il faut prendre garde dans ce choix à ne pas déclarer admis un énoncé majeur qui, une fois acquis, rend l'objet du développement trivial. De même il faut prendre garde aux « raisonnements circulaires »en faisant appel à un énoncé qu'on interpréterait comme une conséquence de celui qu'on cherche à démontrer. De telles maladresses sont perçues comme un défaut de maîtrise et de recul qui est pénalisé.

Le jury choisit le développement qui va être effectivement exposé par le candidat. Le candidat dispose de 15 minutes (maximum) pour mener à bien son développement. La gestion du temps est une des difficultés de l'épreuve. Un exposé trop court est le signe d'un sujet mal choisi, inapproprié au concours ; une démonstration inachevée dans le temps imparti témoigne d'un manque de maîtrise. Le jury demande au candidat de bien gérer son tableau, en particulier le candidat doit demander aux membres du jury l'autorisation d'effacer. Lors du développement, le jury attend du candidat des explications sur la preuve et sur l'utilisation pertinente des notions développées durant l'exposé oral ; il peut être opportun, lors du développement, de se référer explicitement au plan présenté. Trop peu de candidats commencent leur développement par une rapide synthèse des grandes idées ou des étapes qui le composent. Expliquer l'approche adoptée, et les difficultés, au début du développement est une démarche pédagogique appréciée. Un ou plusieurs dessins peuvent aider à clarifier la discussion technique. Il est inutile de se précipiter ou de parler trop vite ; on veillera au contraire à préciser ses notations, à soigner sa présentation, à placer sa voix et à regarder de temps en temps le jury. Le développement ressemble parfois à une succession plus ou moins convaincante de résultats intermédiaires *ad hoc*. Cette phase de l'épreuve vise à mettre en valeur des qualités pédagogiques autant que techniques et l'exposé doit faire la preuve de la compréhension du sujet par le candidat. La récitation mécanique d'un développement ne peut pas être convaincante ; le jury veille à ce que les futurs enseignants comprennent ce qu'ils exposent et sachent exposer ce qu'ils comprennent. C'est une qualité essentielle d'un futur agrégé. Un choix judicieux des notations utilisées contribuent à la clarté de l'exposé ; par exemple il peut être maladroit de noter deux polynômes $P$ et $P'$... surtout si on doit travailler avec les dérivées de ceux-ci. Enfin, même si le jury laisse évoluer le candidat durant son développement, en intervenant le moins possible, il peut, en cas de lacunes ou d'erreurs manifestes, interrompre le candidat pour demander des explications. Cette intervention ne donne pas droit à une extension du temps consacré au développement.

Le jury veille à la cohérence du plan et des propositions de développements. Il est souhaitable que le candidat recherche une adéquation entre le niveau auquel il souhaite se placer et les développements proposés. Un candidat ne sera pas avantagé s'il présente un développement non maîtrisé, manifestement mal compris. Si le niveau de l'agrégation ne peut se cantonner aux notions abordées dans une classe de Terminale ou une première année post-bac, trop de candidats se lancent, curieusement, dans des propositions, parfois aux limites du programme, qui dépassent largement leur niveau technique. Dans un cas comme dans l'autre, il en résulte une appréciation négative. Le développement doit être en lien direct avec le thème de la leçon présentée. L'utilisation d'un résultat qui n'apparaît pas dans le plan écrit doit être explicitement signalée par le candidat. Toute utilisation d'un lemme non démontré et enfermant l'essence de la preuve est sanctionnée. Le jury peut exiger la démonstration d'un lemme admis, si celui-ci est essentiellement le cœur du développement. Il faut éviter de présenter ou d'utiliser un résultat préliminaire ou intermédiaire sans explication convaincante. Dans le cas d'un développement difficile, il ne faut pas négliger les cas élémentaires et les détails utiles à la compréhension du jury. Le jury déplore l'abus de certains développements plus ou moins classiques, qui ne sont pas toujours utilisés à bon escient et qui occupent parfois une place disproportionnée (l'ellipsoïde de JOHN, la décomposition de DUNFORD, le théorème de BERNSTEIN, le processus de GALTON-WATSON,...). Trop de candidats ont tendance à replacer exagérément et de manière inappropriée de tels développements et se retrouvent ainsi hors sujet, impair qui est sévèrement sanctionné. Il faut aussi veiller au fait que des thèmes peuvent être exploités dans des leçons différentes... mais avec des points de vue différents, qu'il faut savoir mettre en exergue.

Le programme du concours comprend maintenant un chapitre spécifique consacré aux méthodes numériques. Les candidats sont invités à explorer ce champ, éventuellement en s'appuyant sur leurs connaissances spécifiques à l'option de modélisation qu'ils ont choisie, pour proposer des développements originaux en lien avec l'analyse d'algorithmes de calcul. La description des leçons indique quelques pistes dans cette direction. Le jury se réjouit qu'un nombre croissant de candidats saisisse ces opportunités et espère que cette tendance, qui enrichit les contenus, se renforcera.

La pertinence des explications, le souci pédagogique, la capacité à mener à bien et complètement le sujet dans le temps imparti, l'aisance technique sont des éléments importants d'appréciation. Par ailleurs, le candidat doit s'attendre à être interrogé lors de la période de discussion sur des applications ou illustrations élémentaires de son développement. Il est donc essentiel qu'il soit capable de reconnaître dans une question donnée un cas particulier simple du résultat général qu'il vient d'exposer.

### 5.2.3 Troisième partie : questions et dialogue

Le jury teste systématiquement la maîtrise du plan présenté. Une part importante de la discussion porte donc sur le plan, ou trouve sa source dans le plan présenté par le candidat. Il faut éviter que ce plan dépasse largement le niveau que l'on maîtrise. Le candidat doit se préparer à des questions élémentaires voire considérées comme « évidentes »sur tout énoncé mis dans son plan, questions auxquelles il doit répondre avec précision. Des candidats après des prestations relevées ont parfois pu être surpris par de telles questions portant sur les bases ; elles sont pourtant quasi-systématiques, le jury souhaitant précisément s'assurer de la maîtrise de ces bases. Le jury peut aussi proposer des calculs illustrant les notions évoquées par le plan.

Cette phase de l'épreuve requiert un certain recul qui ne peut être que le fruit d'un travail de préparation approfondi en amont du concours où l'on doit se demander si on est capable de mettre en œuvre des énoncés sur des situations simples et, pour certains théorèmes, réfléchir à des exemples ou des contre-exemples.

Les réponses aux questions des examinateurs ne prennent pas forcément une forme unique et ceux-ci se placent dans une posture de dialogue avec le candidat. Le jury pose aussi des exercices en rapport direct avec la leçon et le plan proposé mais ne s'attend pas à ce que le candidat trouve une solution immédiatement. Ces exercices ont plutôt pour objectif de voir évoluer le futur agrégé dans une démarche scientifique rigoureuse et méthodique. Le candidat doit réfléchir, utiliser son plan et rattacher l'exercice à sa leçon. Le fait de ne pas résoudre un exercice ne doit pas être perçu comme un échec et le candidat ne doit pas se décourager : plus qu'achever l'exercice, ce sont les réactions du candidat qui importent (par exemple en identifiant l'énoncé de la leçon qui permettrait de traiter le problème et en se demandant si les hypothèses d'application sont satisfaites). Dans cette partie de l'épreuve le candidat doit faire preuve de capacité d'écoute, qui est aussi évaluée ; il doit rester attentif aux suggestions du jury. Il est souvent utile d'exploiter le tableau pour bien reformuler la question, formaliser les pistes de réflexion et donner un support écrit à l'échange. Pendant cette discussion, le jury veille à laisser un temps raisonnable au candidat pour réfléchir, sans le submerger de questions.

Enfin, l'objet du concours étant de recruter de futurs enseignants, le jury peut aussi, comme l'indique l'article 8 de l'arrêté du 25 juillet 2014, poser toute question qu'il juge utile *lui permettant d'apprécier la capacité du candidat, en qualité de futur agent du service public d'éducation, à prendre en compte dans le cadre de son enseignement la construction des apprentissages des élèves et leurs besoins, à se représenter la diversité des conditions d'exercice du métier, à en connaître de façon réfléchie le contexte, les différentes dimensions (classe, équipe éducative, établissement, institution scolaire, société) et les valeurs qui le portent, dont celles de la République. Le jury peut, à cet effet, prendre appui sur le référentiel des compétences professionnelles des métiers du professorat et de l'éducation fixé par l'arrêté du 1er juillet 2013.*

## 5.3 Épreuve orale d'algèbre et géométrie

Comme y invite clairement l'intitulé de l'épreuve, les exemples et applications motivés par la géométrie sont particulièrement bienvenus. Les thèmes relevant de la théorie des groupes se prêtent tout particulièrement à de telles illustrations. De plus, les connaissances spécifiques à chacune des trois options A, B et C fournissent des exemples d'applications très appréciés par le jury.
Les notions de quotients sont importantes, il est important de savoir utiliser la projection canonique et de maîtriser le passage au quotient dans le cadre d'un morphisme.
La théorie des représentations est naturellement reliée à bon nombre de leçons, en particulier dans les leçons 101, 102, 103, 104, 105, 106, 150, 151 et 154.

**101 : Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.**

Dans cette leçon, au-delà de la présentation du matériel théorique indispensable, le choix, l'organisation et la pertinence des illustrations sont des éléments forts de l'appréciation. Les deux facettes de l'action d'un groupe $G$ sur un ensemble $X$ doivent être maîtrisées : l'application de $G \times X$ vers $X$ et le morphisme de $G$ vers $\mathfrak{S}(X)$. La relation entre orbite et stabilisateur qui en découle est incontournable ainsi que des exemples de son utilisation. Il faut savoir utiliser des actions bien choisies pour obtenir des informations soit sur un ensemble $X$ donné, soit sur un groupe $G$ donné et faire apparaître des sous-groupes intéressants de $G$ comme stabilisateurs. Par ailleurs, la présentation doit illustrer comment l'étude des orbites de certaines actions revient à classifier certains objets, soit en trouvant un représentant simple de chaque orbite, soit en dégageant des invariants caractérisant les orbites. Les actions de groupes interviennent aussi efficacement dans des problèmes de dénombrements, notamment via la formule de BURNSIDE.

Les exemples peuvent être internes à la théorie des groupes (action naturelle de $\mathfrak{S}_n$ sur $\{1, ..., n\}$, action par translation ou par conjugaison, etc). Mais il est souhaitable d'emprunter aussi à d'autres domaines (action sur des anneaux, des espaces de matrices ou des espaces de polynômes, représentations de groupes, groupes d'isométries, etc). La géométrie fournit aussi de nombreux exemples pertinents (groupes d'isométries d'un solide ou d'un polygone régulier).

Pour aller plus loin, on peut aborder l'action de $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{K})$ sur la droite projective menant au birapport ou celle de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ sur le demi-plan de POINCARÉ ou les preuves par actions de groupes des théorèmes de SYLOW ou encore d'autres actions donnant lieu à des isomorphismes exceptionnels. Il est aussi possible de s'intéresser aux aspects topologiques ou différentiels liés à certaines actions.

### 102 : Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.

Cette leçon ne peut faire l'impasse sur les aspects élémentaires du sujet (définitions, exponentielle complexe, trigonométrie, etc.), mais elle ne doit s'y cantonner. Elle doit aborder l'aspect « groupe »de $S^1$ en considérant son lien avec $(\mathbf{R}, +)$ et en examinant ses sous-groupes (en particulier finis). Il faut aussi envisager des applications en géométrie plane. Plus généralement, la leçon invite à expliquer où et comment les nombres complexes de module 1 et les racines de l'unité apparaissent dans divers domaines des mathématiques : spectres de matrices remarquables, polynômes cyclotomiques, représentations de groupes, etc. On peut également s'intéresser aux sous-groupes compacts de $\mathbf{C}^*$

Pour aller plus loin, on peut s'intéresser aux nombres de module 1 et aux racines de l'unité dans $\mathbf{Q}[i]$, ou à la dualité des groupes abéliens finis (notamment la preuve du théorème de structure par prolongement de caractère) ou encore aux transformées de FOURIER discrètes et rapides.

Des aspects analytiques du sujet peuvent être évoqués (théorème de relèvement, logarithme complexe, analyse de Fourier sur $\mathbf{R}^n$) mais ne doivent occuper ni le coeur de l'exposé, ni l'essentiel d'un développement.

### 103 : Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

Dans cette leçon, le jury souhaite que les candidats mettent tout d'abord l'accent sur la conjugaison dans un groupe. Ensuite, ils doivent expliciter la structure de groupe obtenue sur le quotient d'un groupe par un sous-groupe distingué.

La notion de conjugaison doit être illustrée dans des situations variées : groupes de petit cardinal, groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$, groupe linéaire d'un espace vectoriel, groupe affine d'un espace affine, groupe orthogonal, etc. On donne des exemples où la conjugaison aide à résoudre certains problèmes (par exemple, en transformant un élément en un autre plus simple à manipuler ou en considérant l'action par conjugaison). L'étude des classes de conjugaison de divers groupes peut être menée. Dans le cadre d'une action d'un groupe, il faut savoir que les stabilisateurs d'éléments d'une même orbite sont conjugués. On peut aussi illustrer et utiliser le principe du « transport par conjugaison » voulant que $hgh^{-1}$

ait la même « nature géométrique » que $g$ et que ses caractéristiques soient les images par $h$ des caractéristiques de $g$ (conjugaison d'une transvection, d'une translation, d'une réflexion, etc.).

Concernant la notion de sous-groupe distingué, il faut indiquer en quoi c'est précisément la notion qui permet de munir le quotient d'une structure de groupe héritée. Cette notion permet aussi de donner une caractérisation interne des produits directs. Le lien entre sous-groupe distingué et noyau de morphisme $\phi$ est incontournable ainsi que l'isomorphisme $G/\mathrm{Ker}\phi \cong \mathrm{Im}\phi$. Des exemples bien choisis mettent en évidence comment certains problèmes portant sur l'un des deux groupes $G$ ou $G/H$ peuvent être résolus en utilisant l'autre (par exemple, le lien entre les sous-groupes de l'un et de l'autre). L'examen de la simplicité de certains groupes peut être proposé.

Il est important de s'attarder sur l'utilité des notions présentées. Les applications en arithmétique sont nombreuses, mais il est pertinent de présenter aussi des applications en géométrie ou en algèbre linéaire. On peut ainsi expliquer comment l'étude des classes de conjugaison permet de démontrer la simplicité de certains groupes comme $\mathrm{SO}_n$, étudier le groupe des homothéties-translations distingué dans le groupe affine, établir que les groupes orthogonaux de formes quadratiques congruentes sont conjugués ou encore qu'un sous groupe compact de $\mathrm{GL}(n)$ est conjugué à un sous groupe de $\mathrm{O}(n)$. En algèbre linéaire, des propriétés topologiques de la classe de conjugaison d'un endomorphisme permettent d'établir son caractère diagonalisable ou nilpotent. Enfin, on peut interpréter le discriminant d'une forme quadratique non-dégénérée comme élément du quotient $\mathbf{K}^\times/(\mathbf{K}^\times)^2$.

S'ils le désirent, les candidats peuvent poursuivre en illustrant ces notions en théorie des représentations des groupes finis (classes de conjugaison et nombres de représentations irréductibles, treillis des sous-groupes distingués lu dans la table de caractères, liens entre représentations de $G$ et de $G/H$, etc.). La notion de produit semi-direct et les théorèmes de Sylow débordent du programme. Il est possible de les évoquer, mais en veillant à les illustrer par des exemples et des applications.

### 104 : Groupes abéliens et non abéliens finis. Exemples et applications.

La richesse de cette leçon ne doit pas nuire à sa présentation. Le candidat devra sans doute faire des choix qu'il doit être en mesure de justifier.

La notion d'ordre (d'un groupe, d'un élément et d'un sous-groupe) est très importante dans cette leçon ; le théorème de Lagrange est incontournable. Les groupes $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et $\mathfrak{S}_n$ sont des exemples très pertinents. Pour ces groupes, il est indispensable de savoir proposer un générateur ou une famille de générateurs. Dans $\mathfrak{S}_n$, il faut savoir calculer un produit de deux permutations et savoir décomposer une permutation en produit de cycles à supports disjoints. Le théorème de structure des groupes abéliens finis doit figurer dans cette leçon. Sa démonstration est techniquement exigeante, mais il faut que l'énoncé soit bien compris, en particulier le sens précis de la clause d'unicité, et être capable de l'appliquer dans des cas particuliers. Il est important de connaître les groupes d'ordre premier ainsi que les groupes d'ordre inférieur à 7.

Les exemples doivent figurer en bonne place dans cette leçon. L'étude des groupes d'isométries laissant fixe un polygone (ou un polyèdre) régulier peut être opportunément exploitée sous cet intitulé. Afin d'illustrer leur présentation, les candidats peuvent aussi s'intéresser à des groupes d'automorphismes ou à des représentations de groupes, ou étudier les groupes de symétries $\mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}_4, \mathfrak{A}_5$ et relier sur ces exemples géométrie et algèbre.

Pour aller plus loin, les candidats peuvent s'attarder sur la dualité dans les groupes abéliens finis. Comme application, la cyclicité du groupe multiplicatif d'un corps fini est tout à fait adaptée. Des exemples de caractères, additifs, ou multiplicatifs dans le cadre des corps finis, sont les bienvenus. Il est aussi possible de s'intéresser aux sommes de Gauss. S'ils le désirent, les candidats peuvent ensuite introduire la transformée de Fourier discrète qui pourra être vue comme son analogue analytique, avec ses formules d'inversion, sa formule de Plancherel. Ainsi, la leçon peut mener à introduire la transformée de Fourier rapide sur un groupe abélien dont l'ordre est une puissance de 2 ainsi que des applications à la multiplication d'entiers, de polynômes et éventuellement au décodage de codes via la transformée de Hadamard.

**105 : Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.**

Parmi les attendus, il faut savoir relier la leçon avec les notions d'orbites et d'actions de groupes. Il faut aussi savoir décomposer une permutation en cycles à supports disjoints, tant sur le plan théorique (preuve du théorème de décomposition), que pratique (sur un exemple). Il est important de savoir déterminer les classes de conjugaisons du groupe symétrique par la décomposition en cycles, d'être capable de donner des systèmes de générateurs. L'existence du morphisme signature est un résultat non trivial mais ne peut pas constituer, à elle seule, l'objet d'un développement. Il est bon d'avoir en tête que tout groupe fini se plonge dans un groupe symétrique et de savoir calculer la signature des permutations ainsi obtenues dans des cas concrets. Les applications sont nombreuses, il est très naturel de parler du déterminant, des polynômes symétriques ou des fonctions symétriques des racines d'un polynôme. On peut également parler du lien avec les groupes d'isométries des solides.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en s'intéressant par exemple aux automorphismes du groupe symétrique, à des problèmes de dénombrement, aux représentations des groupes des permutations ou encore aux permutations aléatoires.

**106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie $E$, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.**

Cette leçon ne doit pas se résumer à un catalogue de résultats épars sur $\mathrm{GL}(E)$. Il est important de savoir faire correspondre les sous-groupes du groupe linéaire avec les stabilisateurs de certaines actions naturelles (sur des formes quadratiques, sur des drapeaux, sur une décomposition en somme directe, etc.). On doit présenter des systèmes de générateurs de $\mathrm{GL}(E)$ et étudier la topologie de ce groupe en précisant pourquoi le choix du corps de base est important. Les liens avec le pivot de Gauss sont à détailler. Il faut aussi savoir réaliser $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathrm{GL}(n, \mathbf{K})$ et faire le lien entre signature et déterminant. S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en remarquant que la théorie des représentations permet d'illustrer l'importance de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ et de son sous-groupe unitaire. Ils peuvent également étudier les sous-groupes compacts maximaux et les sous-groupes fermés de $\mathrm{GL}(n)$.

**108 : Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.**

La description ensembliste du groupe engendré par une partie doit être connue et les groupes monogènes et cycliques doivent être évoqués. C'est une leçon qui doit être illustrée par des exemples très variés. Il est indispensable de donner des parties génératrices pour tous les exemples proposés. Les groupes $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ fournissent des exemples naturels tout comme les groupes de permutations, les groupes linéaires ou leurs sous-groupes (par exemple $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$, $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ ou $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$). Ainsi, on peut s'attarder sur l'étude du groupe des permutations avec différents types de parties génératrices en discutant de leur intérêt (ordre, simplicité de $\mathcal{A}_5$ par exemple). On peut présenter le groupe $\mathrm{GL}(E)$ généré par des transvections et des dilatations en lien avec le pivot de Gauss, le calcul de l'inverse ou du rang (par action sur $M_{n,p}(\mathbf{K})$), le groupe des isométries d'un triangle équilatéral qui réalise $S_3$ par identifications des générateurs. Éventuellement, il est possible de discuter des conditions nécessaires et suffisantes pour que $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times$ soit cyclique ou la détermination de générateurs du groupe diédral.

On illustre comment la connaissance de parties génératrices s'avère très utile dans certaines situations, par exemple pour l'analyse de morphismes de groupes, ou pour montrer la connexité par arcs de certains sous-groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

S'il le souhaite, le candidat peut s'intéresser à la présentation de certains groupes par générateurs et relations. Pour aller plus loin, il est également possible de parler du logarithme discret et de ces applications à la cryptographie (algorithme de Diffie-Hellman, cryptosystème de El Gamal).

**120 : Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.**

On construit rapidement $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, puis on en décrit les éléments inversibles, les diviseurs de zéro et les idéaux. Ensuite, le cas où l'entier $n$ est un nombre premier doit être étudié. La fonction indicatrice d'Euler ainsi que le théorème chinois et sa réciproque sont incontournables.

Les applications sont très nombreuses. Les candidats peuvent, par exemple, choisir de s'intéresser à la résolution d'équations diophantiennes (par réduction modulo $n$ bien choisi) ou bien au cryptosystème RSA. Si des applications en sont proposées, l'étude des morphismes de groupes de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ ou le morphisme de Frobenius peuvent figurer dans la leçon.

S'ils le désirent, les candidats peuvent poursuivre en donnant une généralisation du théorème chinois lorsque deux éléments ne sont pas premiers entre eux, ceci en faisant apparaître le PGCD et le PPCM de ces éléments.

Enfin, les candidats peuvent aller plus loin en s'intéressant au calcul effectif des racines carrées dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, au logarithme discret, ou à la transformée de Fourier rapide.

**121 : Nombres premiers. Applications.**

Le sujet de cette leçon, souvent appréciée des candidats, est très vaste. Elle doit donc être abordée en faisant des choix qui devront être clairement motivés. Des conjectures classiques ont aussi leur place dans cette leçon. On peut définir certaines fonctions importantes en arithmétique, les relier aux nombres premiers et illustrer leurs utilisations. Il est particulièrement souhaitable de s'intéresser aussi aux aspects algorithmiques du sujet (tests de primalité). En plus d'une étude purement interne à l'arithmétique des entiers, il est important d'exhiber des applications dans différents domaines : théorie des corps finis, théorie des groupes, arithmétique des polynômes, cryptographie, etc. La réduction modulo $p$ n'est pas hors-sujet et constitue un outil puissant pour résoudre des problèmes arithmétiques simples. La répartition des nombres premiers doit être évoquée : certains résultats sont accessibles dans le cadre du programme du concours, d'autres peuvent être admis et cités pour leur importance culturelle.

**122 : Anneaux principaux. Applications.**

Comme l'indique son intitulé, cette leçon ne doit pas se cantonner aux aspects théoriques. L'arithmétique des anneaux principaux doit être décrite et les démonstrations doivent être maîtrisées (lemme d'Euclide, théorème de Gauss, décomposition en irréductibles, PGCD et PPCM, etc.). Les anneaux euclidiens représentent une classe importante d'anneaux principaux et l'algorithme d'Euclide a toute sa place dans cette leçon pour effectuer des calculs. Les applications en algèbre linéaire ne manquent pas et doivent être mentionnées (par exemple, le lemme des noyaux ou la notion de polynôme minimal pour un endomorphisme, pour un endomorphisme relativement à un vecteur ou pour un nombre algébrique). Si les anneaux classiques $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{K}[X]$ doivent impérativement figurer, il est possible d'en évoquer d'autres (décimaux, entiers de Gauss $\mathbf{Z}[i]$ ou d'Eisenstein $\mathbf{Z}[e^{2i\pi/3}]$) accompagnés d'une description de leurs inversibles, de leurs irréductibles et éventuellement d'applications à des problèmes arithmétiques (équations diophantiennes).

S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en s'intéressant à l'étude des réseaux, à des exemples d'anneaux non principaux, mais aussi à des exemples d'équations diophantiennes résolues à l'aide d'anneaux principaux. À ce sujet, il sera fondamental de savoir déterminer les unités d'un anneau, et leur rôle au moment de la décomposition en facteurs premiers. De même, le calcul effectif des facteurs invariants de matrices à coefficients dans un anneau principal peut être présenté.

**123 : Corps finis. Applications.**

Une construction des corps finis doit être connue et une bonne maîtrise des calculs dans les corps finis est indispensable. Les injections des divers $\mathbf{F}_q$ doivent être connues. Les applications des corps finis (y compris pour $\mathbf{F}_q$ avec $q$ non premier !) ne doivent pas être oubliées. Par exemple, l'étude de polynômes à coefficients entiers et de leur irréductibilité peut figurer dans cette leçon. Le calcul des degrés des extensions et le théorème de la base téléscopique sont incontournables. La structure du groupe multiplicatif doit aussi être connue. L'étude des carrés dans un corps fini et la résolution d'équations de degré 2 sont envisageables.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en détaillant des codes correcteurs ou en étudiant l'irréductiblilité des polynômes à coefficients dans un corps fini.

**125 : Extensions de corps. Exemples et applications.**

Le théorème de la base téléscopique et ses applications à l'irréductibilité de certains polynômes, ainsi que les corps finis, sont incontournables. De même il faut savoir calculer le polynôme minimal d'un élément algébrique dans des cas simples, notamment pour quelques racines de l'unité. La leçon peut être illustrée par des exemples d'extensions quadratiques et leurs applications en arithmétique, ainsi que par des extensions cyclotomiques.

S'ils le désirent, les candidats peuvent montrer que l'ensemble des nombres algébriques forme un corps algébriquement clos et expliquer comment l'utilisation du résultant permet de calculer des polynômes annulateurs de sommes et de produits de nombres algébriques. Pour aller plus loin, les candidats peuvent parler des nombres constructibles à la règle et au compas, et éventuellement s'aventurer en théorie de Galois.

**126 : Exemples d'équations en arithmétique.**

Dans cette leçon, il est indispensable de s'intéresser à des équations sur $\mathbf{Z}$ mais aussi des équations dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et dans les corps finis. On doit présenter les notions de bases servant à aborder les équations de type $ax + by = d$ (identité de Bezout, lemme de Gauss). On doit présenter des exemples d'utilisation effective du lemme chinois.

Ensuite, la méthode de descente de Fermat et l'utilisation de la réduction modulo un nombre premier $p$ méritent d'être mis en œuvre. La leçon peut aussi dériver vers la notion de factorialité, illustrée par des équations de type Mordell, Pell-Fermat, et même Fermat (pour $n = 2$, ou pour les nombres premiers de Sophie Germain). La résolution des systèmes linéaires sur $\mathbf{Z}$ peut être abordée. Il est de plus naturel de s'intéresser à la résolution des systèmes de congruences, à la recherche de racines carrées dans les corps finis. Les candidats peuvent plus généralement aborder la recherche des racines des polynômes dans les corps finis.

S'ils le désirent, les candidats peuvent étudier les coniques sur les corps finis et la recherche de points sur ces coniques.

**141 : Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.**

La présentation du bagage théorique permettant de définir corps de rupture, corps de décomposition, ainsi que des illustrations dans différents types de corps (réel, rationnel, corps finis) sont inévitables. Les corps finis peuvent être illustrés par des exemples de polynômes irréductibles de degré 2, 3, 4 sur $\mathbf{F}_2$ ou $\mathbf{F}_3$. Il est nécessaire de présenter des critères d'irréductibilité de polynômes et des polynômes minimaux de quelques nombres algébriques.

Il est bon de savoir montrer que l'ensemble des nombres algébriques sur le corps $\mathbf{Q}$ des rationnels est un corps algébriquement clos. Le théorème de la base téléscopique, ainsi que les utilisations arithmétiques (utilisation de la divisibilité) que l'on peut en faire dans l'étude de l'irréductibilité des polynômes, est incontournable.

**142 : PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.**

Le champ d'étude de cette leçon ne peut se limiter au cas de $\mathbf{Z}$ ; il s'agit de définir et manipuler les notions de PGCD et PPCM dans un anneau factoriel et comme générateurs de sommes/intersections d'idéaux dans un anneau principal. Le candidat doit prendre soin de différencier le cadre théorique des anneaux factoriels ou principaux dans lequel sont définis les objets et dans lequel s'appliquent les énoncés des théorèmes proposés et le cadre euclidien fournissant les algorithmes. Bien sûr, la leçon peut opportunément s'illustrer d'exemples élémentaires d'anneaux euclidiens, comme $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{K}[X]$.

Une part substantielle de la leçon doit être consacrée à la présentation d'algorithmes : algorithme d'EUCLIDE, algorithme binaire, algorithme d'EUCLIDE étendu. Dans le cas des polynômes, il faut étudier l'évolution de la suite des degrés et des restes. On peut évaluer le nombre d'étapes de ces algorithmes dans les pires cas et faire le lien avec les suites de FIBONACCI.

Des applications élémentaires sont particulièrement bienvenues : calcul de relations de BEZOUT, résolutions d'équations diophantiennes linéaires, inversion modulo un entier ou un polynôme, calculs d'inverses dans les corps de ruptures, les corps finis. On peut aussi évoquer le théorème chinois effectif, la résolution d'un système de congruences et faire le lien avec l'interpolation de LAGRANGE.

Pour aller plus loin, on peut évoquer le rôle de algorithme d'EUCLIDE étendu dans de nombreux algorithmes classiques en arithmétique (factorisation d'entiers, de polynômes, etc). Décrire l'approche matricielle de l'algorithme d'EUCLIDE et l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ sur $\mathbf{Z}^2$ est tout à fait pertinent. On peut aussi établir l'existence d'un supplémentaire d'une droite dans $\mathbf{Z}^2$, ou d'un hyperplan de $\mathbf{Z}^n$, la possibilité de compléter un vecteur de $\mathbf{Z}^n$ en une base.

La leçon peut amener à étudier les matrices à coefficients dans un anneau principal ou euclidien, et, de manière plus avancée, la forme normale d'HERMITE et son application à la résolution d'un système d'équations diophantiennes linéaires. De même, aborder la forme normale de SMITH, et son application au théorème de la base adaptée, permet de faire le lien avec la réduction des endomorphismes *via* le théorème des invariants de similitude.

La leçon invite aussi, pour des candidats familiers de ces notions, à décrire le calcul de PGCD dans $\mathbf{Z}[X]$ et $\mathbf{K}[X, Y]$, avec des applications à l'élimination de variables. On peut rappeler les relations entre PGCD et résultant et montrer comment obtenir le PGCD en échelonnant la matrice de SYLVESTER. Sur l'approximation diophantienne, on peut enfin envisager le développement d'un rationnel en fraction continue et l'obtention d'une approximation de PADÉ-HERMITE à l'aide de l'algorithme d'EUCLIDE, la recherche d'une relation de récurrence linéaire dans une suite ou le décodage des codes BCH.

### 144 : Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications

Dans cette leçon, il est indispensable de bien définir l'ordre de multiplicité d'une racine (définition algébrique et analytique, quand c'est possible). Les fonctions symétriques élémentaires et les relations entre cœfficients et racines doivent être maîtrisées et pouvoir être mises en œuvre. Des méthodes, même élémentaires, de localisation des racines ont toute leur place et peuvent déboucher sur des résultats de topologie à propos de la continuité des racines.

Il peut être pertinent d'introduire la notion de polynôme scindé et de citer le théorème de D'ALEMBERT-GAUSS. Il est apprécié de faire apparaître le lien entre la recherche des racines d'un polynôme et la réduction des matrices. Les candidats peuvent également s'intéresser aux racines des polynômes orthogonaux, ou aux règles des signes de DESCARTES et de STURM. L'étude des propriétés des nombres algébriques peuvent trouver leur place dans cette leçon. La théorie des corps et le cas particulier des corps finis peuvent aussi être évoqués de façon pertinente.

S'ils le désirent, les candidats peuvent s'intéresser à des problèmes de localisation des valeurs propres, comme les disques de GERSHGORIN.

Il ne s'agit par contre en aucun cas d'adapter le plan de la leçon 141 : l'irréductibilité des polynômes peut être évoquée mais ne doit pas être l'élément central de la leçon.

**149 : Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.**

Cette leçon doit aborder la notion de vecteurs propres et de valeurs propres de façon générale et mettre en lumière l'exploitation de techniques d'algèbre ou d'analyse pour aborder leur recherche. Après avoir exploré la détermination théorique exacte des éléments propres et donné des exemples de situations où la connaissance d'éléments propres s'avère utile on doit connaître les limites du calcul exact, même si le cadre mathématique nécessaire est non exigible et hors programme et introduire sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ une ou plusieurs méthodes itératives, dont on démontre la convergence. Les notions de norme matricielle, de rayon spectral doivent être maîtrisées. Le lien avec la convergence des suites du type $X_{n+1} = AX_n$ doit être connu et illustré. La problématique du conditionnement doit être abordée.

Le conditionnement d'une matrice symétrique définie positive peut être connu et un lien avec $\sup_{||x||=1} x^\top Ax$ doit alors être fait. Le résultat général de convergence, relié au théorème du point fixe de Banach, peut être enrichi de considérations sur la vitesse de convergence. On peut illustrer cette leçon optimisation de fonctionnelles quadratiques (du type $\frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$), recherche de valeurs propres,... Parmi les points intéressants à développer, on peut citer les méthodes de type Jacobi pour la résolution de systèmes linéaires, les méthodes de gradient dans le cadre quadratique, les méthodes de la puissance, puissance inverse et QR pour la recherche d'éléments propres. Les candidats pourront illustrer leur propos sur des matrices issues de problèmes de moindres carrés ou de schémas numériques pour les équations différentielles ou aux dérivées partielles linéaires. Il est aussi possible de s'intéresser au comportement de la suite des itérées de matrices stochastiques ou plus généralement de matriices à coefficients positifs, au moins dans ds cas particuliers.

**150 : Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.**

Le choix des exemples doit être fait avec soin, en évitant de présenter des actions dont on ne maîtrise pas les bases.

Dans un premier temps, il faut présenter différentes actions (translation à gauche, congruence, similitude, équivalence, ...) et quelques orbites. Dans chaque cas on pourra dégager d'une part des invariants simples (matrices échelonnées réduites, rang...) et d'autre part des algorithmes, comme le pivot de Gauss. On peut détailler le cas particulier de l'action de $O_n(\mathbf{R})$ sur $S_n(\mathbf{R})$.

Les candidats peuvent s'intéresser au fait que les polynômes caractéristiques et minimaux ne suffisent pas à caractériser les classes de similitudes. Dans le cas de l'action par congruence, le théorème de Sylvester et son interprétation en termes de changements de bases méritent de figurer dans la leçon. Il est possible de limiter l'action aux matrices de produits scalaires et de caractériser les éléments des stabilisateurs. Si l'on veut aborder un aspect plus théorique, il est possible de faire apparaître à travers différentes actions quelques décompositions célèbres ; on peut décrire les orbites lorsque la topologie s'y prête.

S'ils le désirent, les candidats peuvent travailler sur des corps finis et utiliser le dénombrement dans ce contexte.

**151 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.**

Dans cette leçon, il est indispensable de présenter les résultats fondateurs de la théorie des espaces vectoriels de dimension finie en ayant une idée de leurs preuves. Ces théorèmes semblent simples car ils ont été très souvent pratiqués, mais leur preuve demande un soin particulier. Il est important de savoir justifier pourquoi un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est aussi de dimension finie.

On peut montrer, sur des exemples, comment la dimension finie intervient dans la démonstration de certains résultats (récurrence sur la dimension, égalité de sous-espaces par inclusion et égalité des dimensions, isomorphisme par injectivité et dimension, etc.). À cette occasion, on pourra signaler des résultats qui ne subsistent pas en dimension infinie. Le pivot de GAUSS ainsi que les diverses notions et caractérisations du rang trouvent leur place dans cette leçon. Les applications sont nombreuses : existence de polynômes annulateurs, dimension de l'espace des formes $n$-linéaires alternées en dimension $n$, isomorphisme avec le dual dans le cadre euclidien et théorème de RIESZ, espaces de solutions d'équations différentielles ordinaires, caractérisation des endomorphismes diagonalisables, décomposition d'isométries en produits de réflexions, dimensions des représentations irréductibles d'un groupe fini, théorie des corps finis, etc.

Les caractérisations du rang peuvent aussi être utilisées pour démontrer l'invariance du rang par extension de corps, ou pour établir des propriétés topologiques (sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$). S'ils le désirent, les candidats peuvent déterminer des degrés d'extensions dans la théorie des corps ou s'intéresser aux nombres algébriques. Il est également possible d'explorer des applications en analyse comme les extrémas liés. Dans un autre registre, il est pertinent d'évoquer la méthode des moindres carrés dans cette leçon, par exemple en faisant ressortir la condition de rang maximal pour garantir l'unicité de la solution et s'orienter vers les techniques de décomposition en valeurs singulières pour le cas général. On peut alors naturellement analyser l'approximation d'une matrice par une suite de matrices de faible rang.

**152 : Déterminant. Exemples et applications.**

Dans cette leçon, il faut commencer par définir correctement le déterminant. et savoir démontrer ses propriétés fondamentales (en particulier le fait que l'espace des formes $n$-linéaires alternées sur un espace de dimension $n$ est de dimension 1). La distinction entre le déterminant d'une famille de vecteurs dans une base donnée et le déterminant d'un endomorphisme doit être comprise. L'interprétation en termes de volume est essentielle. Le calcul explicite est important, mais le jury ne peut se contenter d'un déterminant de VANDERMONDE ou d'un déterminant circulant. Les opérations élémentaires permettant de calculer des déterminants doivent être présentées et illustrées. Le polynôme caractéristique est incontournable (on prendra garde que $A-XI_n$ est à coefficients dans $\mathbf{K}[X]$ qui n'est pas un corps). Parmi les autres applications possibles, on peut penser aux déterminants de GRAM (permettant des calculs de distances), au déterminant jacobien (utile en calcul intégral et en probabilités), à l'utilisation du déterminant en géométrie (coordonnées barycentriques, colinéarité, etc.) ou encore à son rôle dans l'étude des formes quadratiques. Il est bienvenu d'illustrer la continuité du déterminant par une application. On pourra aussi s'intéresser à sa différentielle.

Pour aller plus loin, les candidats peuvent s'intéresser aux calculs de déterminants sur $\mathbf{Z}$. Le résultant et les applications simples à l'intersection ensembliste de deux courbes algébriques planes peuvent aussi trouver leur place dans cette leçon pour des candidats ayant une pratique de ces notions.

**153 : Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.**

Cette leçon ne doit pas être un catalogue de résultats autour de la réduction qui est ici un moyen pour démontrer des théorèmes ; les polynômes d'endomorphismes doivent y occuper une place importante. Il faut consacrer une courte partie de la leçon à l'algèbre $\mathbf{K}[u]$ et aux liens entre réduction de l'endomorphisme $u$ et structure de l'algèbre $\mathbf{K}[u]$. Il faut connaître la dimension de $\mathbf{K}[u]$ sans hésitation. Il est ensuite possible de s'intéresser aux propriétés globales de cette algèbre (inversibles, condition nécessaire et suffisante assurant que ce soit un corps...). De même il est important de mettre en évidence les liens entre les idempotents et la décomposition en somme de sous-espaces caractéristiques.

Le lemme des noyaux, les polynômes caractéristiques et minimaux doivent figurer dans la leçon. Il faut bien préciser que, dans la réduction de DUNFORD, les composantes sont des polynômes en l'endomorphisme, et en connaître les conséquences théoriques et pratiques. L'aspect *applications* est trop souvent négligé. Il est possible, par exemple, de mener l'analyse spectrale de matrices stochastiques. On attend d'un candidat qu'il soit en mesure, pour une matrice simple de justifier la diagonalisabilité et de déterminer un polynôme annulateur (voire minimal). Il est bien sûr important de ne pas faire de confusion entre diverses notions de multiplicité pour une valeur propre $\lambda$ donnée (algébrique ou géométrique). Enfin, calculer $A^k$ ne nécessite pas, en général, de réduire $A$ (la donnée d'un polynôme annulateur de $A$ suffit souvent). Il est possible d'envisager des applications aux calculs d'exponentielles de matrices.

S'il le souhaite, le candidat pourra étudier des équations matricielles et de calcul fonctionnel, avec par exemple l'étude de l'extraction de racines ou du logarithme.

**154 : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.**

Dans cette leçon, il faut présenter des propriétés de l'ensemble des sous-espaces stables par un endomorphisme. Des études détaillées sont les bienvenues, par exemple dans le cas d'une matrice diagonalisable ou dans le cas d'une matrice nilpotente d'indice maximum.

L'étude des endomorphismes cycliques et des endomorphismes semi-simples trouvent tout à fait leur place dans cette leçon. Dans le cas des corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, on pourra, si on le souhaite, caractériser ces derniers par la fermeture de leur orbite.

La réduction des endomorphismes normaux et l'exemple de résolutions d'équations matricielles peuvent être présentés en applications.

La décomposition de Frobenius constitue également une application intéressante de cette leçon. Il ne faut pas oublier d'examiner le cas des sous-espaces stables par des familles d'endomorphismes. Ceci peut déboucher par exemple sur des endomorphismes commutants entre eux ou sur la théorie des représentations.

**155 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.**

Dans cette leçon, on attend des exemples naturels d'endomorphismes diagonalisables et des critères de diagonalisabilité. On doit notamment savoir expliquer pourquoi l'application induite par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace stable est encore diagonalisable. Il ne faut pas oublier de parler du cas des endomorphismes symétriques. On peut étudier certaines propriétés topologiques en prenant le soin de donner des précisions sur le corps $\mathbf{K}$ et la topologie choisie pour $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Les candidats doivent disposer de méthodes efficaces de calcul de l'exponentielle d'un endomorphisme diagonalisable. On peut dénombrer les endomorphismes diagonalisables dans les corps finis, ou possédant des propriétés données, liées à la diagonalisation.

S'ils le désirent, les candidats peuvent s'intéresser aux liens qui peuvent aussi être fait avec la théorie des représentations et la transformée de Fourier rapide.

**156 : Exponentielle de matrices. Applications.**

Bien que ce ne soit pas une leçon d'analyse, il faut toutefois pouvoir justifier clairement la convergence de la série exponentielle.

Les questions de surjectivité ou d'injectivité doivent être abordées. Par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle l'exponentielle d'une matrice à coefficients réels ? La matrice définie par blocs $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ est-elle l'exponentielle d'une matrice à coefficients réels ?

La décomposition de Dunford multiplicative (décomposition de Jordan) de $\exp(A)$ trouve toute son utilité dans cette leçon. L'exponentielle fait bon ménage avec la décomposition polaire dans bon nombre de problèmes sur les sous-groupes du groupe linéaire. L'étude du logarithme (quand il est défini) peut être menée dans cette leçon.

Il est bon de connaître l'image par exponentielle de certains sous-ensembles de matrices (ensemble des matrices symétriques, hermitiennes, ou antisymétriques).

Les applications aux équations différentielles méritent d'être présentées sans toutefois constituer l'essentiel de la leçon. On pourra par exemple faire le lien entre réduction et comportement asymptotique, mais le jury déconseille aux candidats de proposer ce thème dans un développement de cette leçon, sauf à avoir bien compris comment les apports algébriques permettent ici de simplifier les conclusions analytiques.

S'ils le désirent, les candidats peuvent s'aventurer vers les sous-groupes à un paramètre du groupe linéaire (on peut alors voir si ces sous-groupes constituent des sous-variétés fermées de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$) ou vers les algèbres de Lie.

**157 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.**

Il est indispensable de connaître les polynômes caractéristiques et minimaux d'un endomorphisme nilpotent et de savoir justifier son caractère trigonalisable. Il est bon de savoir expliquer pourquoi l'application induite par un endomorphisme trigonalisable (respectivement nilpotent) sur un sous-espace stable est encore trigonalisable (respectivement nilpotent). L'utilisation des noyaux itérés est fondamentale dans cette leçon, par exemple pour déterminer si deux matrices nilpotentes sont semblables. Il est intéressant de présenter des conditions suffisantes de trigonalisation simultanée ; l'étude des endomorphismes cycliques a toute sa place dans cette leçon. L'étude des nilpotents en dimension 2 débouche naturellement sur des problèmes de quadriques et l'étude sur un corps fini donne lieu à de jolis problèmes de dénombrement.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aussi présenter la décomposition de Frobenius, ou des caractérisations topologiques des endomorphismes nilpotents, ou encore des propriétés topologiques de l'ensemble des endomorphismes nilpotents.

**158 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.**

Le théorème spectral est indispensable dans cette leçon. Une place importante mérite d'être faite au cas particulier des matrices symétriques positives et définies positives ; les candidats doivent connaître leurs propriétés fondamentales, leur rôle, et la structure de leur ensemble. La notion de signature pourra être présentée en montrant comment elle détermine la classe de congruence d'une matrice symétrique réelle. L'action du groupe linéaire et du groupe orthogonal sur l'espace des matrices symétriques peut donner un cadre naturel à cette leçon. Le lien avec les formes quadratiques et les formes hermitiennes est incontournable. L'orthogonalisation simultanée est un résultat important de cette leçon. Il faut en connaître les applications géométriques aux quadriques.

Les candidats familiers avec ces notions pourront illustrer la leçon en évoquant le cas des matrices de covariance de vecteurs aléatoires et discuter les conditions en assurant le caractère inversible.

Une discussion de la décomposition de Cholesky, qui a de nombreuses applications pour le calcul scientifique (en lien avec la résolution de systèmes linéaires ou de problèmes de moindres carrés) ou en probabilités (construction d'un vecteur gaussien de matrice de covariance donnée à partir d'un vecteur gaussien de matrice de covariance identité), peut mériter sa place dans cette leçon. On poura également évoquer la décomposition en valeurs singulières d'une matrice (particulièrement importante pour le traitement massif de données).

**159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.**

Il est important de bien placer la thématique de la dualité dans cette leçon ; celle-ci permet de mettre en évidence des correspondances entre un morphisme et son morphisme transposé, entre un sous-espace et son orthogonal (canonique), entre les noyaux et les images ou entre les sommes et les intersections. Bon nombre de résultats d'algèbre linéaire se voient dédoublés par cette correspondance. Les liens entre base duale et fonctions de coordonnées doivent être parfaitement connus. Le passage d'une base à sa base duale ou antéduale, ainsi que les formules de changement de base, doivent être maîtrisés. On pourra s'intéresser aux cas spécifiques où l'isomorphisme entre l'espace et son dual est canonique (cas euclidien, cas des matrices).

Savoir calculer la dimension d'une intersection d'hyperplans via la dualité est important dans cette leçon. L'utilisation des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes permet facilement d'obtenir les équations d'un sous-espace vectoriel ou d'exhiber une base d'une intersection d'hyperplans.

Cette leçon peut être traitée sous différents aspects : géométrique, algébrique, topologique ou analytique. Il faut que les développements proposés soient en lien direct avec la leçon. Enfin rappeler que la différentielle d'une fonction à valeurs réelles est une forme linéaire semble incontournable.

Il est possible d'illustrer la leçon avec un point de vue probabiliste, en rappelant que la loi d'un vecteur aléatoire $X$ est déterminée par les lois unidimensionnelles de $X \cdot u$ pour tout vecteur $u$.

### 160 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

Dans cette leçon, le caractère euclidien de l'espace est essentiel pour que l'endomorphisme soit remarquable. Le théorème spectral pour les auto-adjoints et la réduction des endomorphismes orthogonaux sont des résultats incontournables. Le jury met les candidats en garde sur le fait que le lemme des noyaux ou la décomposition de Dunford ne sont pas des développements adaptés à cette leçon. En revanche, l'utilisation du fait que l'orthogonal d'un sous-espace stable par un endomorphisme est stable par l'adjoint doit être mis en valeur. De même la réduction d'endomorphismes normaux peut être évoquée.

L'étude des projections orthogonales (en lien ave le calcul de distances), des rotations, des réflexions, des renversements, etc. fournit des exemples dignes d'intérêt. Une illustration pertinente peut s'appuyer sur la description de problèmes de moindres carrés en faisant ressortir le rôle de l'hypothèse de rang plein de $A$ sur le caractère inversible de $A^\intercal A$.

### 161 : Distances et isométries d'un espace affine euclidien.

Cette leçon ne doit pas se restreindre aux seuls cas des dimensions 2 et 3, même s'il est naturel que ceux-ci y occupent une place importante. La classification des isométries en dimension 2 et 3 est exigible. En dimension 3, il faut savoir classifier les rotations et connaître les liens avec la réduction. On peut aussi penser aux isométries laissant stables certains objets en dimension 2 et 3. Il faut savoir prouver qu'une isométrie est affine, pouvoir donner des générateurs du groupe des isométries affines et savoir composer des isométries affines.

Les candidats peuvent en outre parler de la définition de la distance, de la distance à un sous-espace vectoriel et de déterminant de Gram. Les groupes de similitude peuvent également être abordés.

S'ils le désirent, les candidats peuvent évoquer l'interprétation de l'écart-type comme une distance, et présenter la matrice de covariance comme un exemple pertinent de matrice de Gram. Ainsi, les déterminants de Gram permettent de calculer l'erreur commise dans le cadre de prédictions affines.

### 162 : Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

Dans cette leçon, les techniques liées au simple pivot de Gauss constituent l'essentiel des attendus. Il est impératif de faire le lien avec la notion de système échelonné (dont on donnera une définition précise et correcte) et de situer l'ensemble dans le contexte de l'algèbre linéaire, sans oublier la dualité. Un point de vue opératoire doit accompagner l'étude théorique et l'intérêt algorithmique des méthodes présentées doit être expliqué, éventuellement en l'illustrant par des exemples simples (où l'on attend parfois une résolution explicite).

Parmi les conséquence théoriques, les candidats peuvent notamment donner des systèmes de générateurs de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$. Ils est aussi pertinent de présenter les relations de dépendance linéaire sur les colonnes d'une matrice échelonnée qui permettent de décrire simplement les orbites de l'action à gauche de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{K})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ donnée par $(P, A) \mapsto PA$.

S'ils le désirent, les candidats peuvent exploiter les propriétés des systèmes d'équations linéaires pour définir la dimension des espaces vectoriels et obtenir une description de l'intersection de deux sous-espaces vectoriels donnés par des systèmes générateurs, ou d'une somme de deux sous-espaces vectoriels donnés par des équations.

De même, des discussions sur la résolution de systèmes sur $\mathbf{Z}$ et la forme normale de Hermite peuvent trouver leur place dans cette leçon. Enfin, il est possible de présenter les décompostions $LU$ et de Choleski, en évaluant le coût de ces méthodes ou encore d'étudier la résolution de l'équation normale associée aux problèmes des moindres carrés et la détermination de la solution de norme minimale par la méthode de décomposition en valeurs singulières.

### 170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

L'intitulé implique implicitement que le candidat ne doit pas se contenter de travailler sur $\mathbf{R}$. L'algorithme de Gauss doit être énoncé et pouvoir être mis en œuvre sur une forme quadratique simple. Le candidat pourra parler de la classification des formes quadratiques sur le corps des complexes et sur les corps finis.

Les notions d'isotropie et de cône isotrope doivent être connues. On pourra rattacher cette notion à la géométrie différentielle.

### 171 : Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

Dans cette leçon, la loi d'inertie de Silvester doit être présentée ainsi que l'orthogonalisation simultanée. L'algorithme de Gauss doit être énoncé et pouvoir être expliqué sur une forme quadratique de $\mathbf{R}^3$ ; le lien avec la signature doit être clairement énoncé et la signification géométrique des deux entiers $r$ et $s$ composant la signature d'une forme quadratique réelle doit être expliqué. La différentielle seconde d'une fonction de plusieurs variables est une forme quadratique importante qui mérite d'être présentée dans cette leçon.

La définition et les propriétés classiques des coniques d'un plan affine euclidien doivent être connues. On peut présenter les liens entre la classification des formes quadratiques et celles des coniques ; de même il est intéressant d'évoquer le lien entre le discriminant de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ et la signature de la forme quadratique $ax^2 + bxy + cy^2$.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aussi aller vers la théorie des représentations et présenter l'indicatrice de Schur-Frobenius qui permet de réaliser une représentation donnée sur le corps des réels.

### 181 : Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

Dans cette leçon, la notion de coordonnées barycentriques est incontournable ; des illustrations dans le triangle (coordonnées barycentriques de certains points remarquables) sont envisageables. Les candidats doivent savoir reconnaître des lignes de niveau et des lieux de points en utilisant des coordonnées barycentriques. Il est important de parler d'enveloppe convexe et de savoir dessiner l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points dans le plan ; le théorème de Gauss-Lucas trouve parfaitement sa place dans cette leçon. Il semble approprié d'évoquer les points extrémaux, ainsi que des applications qui en résultent. Par ailleurs, il est important d'avoir compris le lien entre fonctions convexes et ensembles convexes.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en présentant le lemme de Farkas, le théorème de séparation de Hahn-Banach, les théorèmes de Helly et de Caratheodory, ou parler des sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

**182 : Applications des nombres complexes à la géométrie.**

Cette leçon ne sera pas proposée à la session 2020.

**183 : Utilisation des groupes en géométrie.**

Cette leçon ne sera pas proposée à la session 2020.

Les thèmes propres à ces deux leçons trouveront à s'exprimer dans le nouvel intitulé 191.

**190 : Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.**

Il est nécessaire de dégager clairement différentes méthodes de dénombrement et de les illustrer d'exemples significatifs. De nombreux domaines de mathématiques sont concernés par des problèmes de dénombrement, cet aspect varié du thème de la leçon doit être mis en avant. L'utilisation de séries génératrices est un outil puissant pour le calcul de certains cardinaux. De plus, il est naturel de calculer des cardinaux classiques et certaines probabilités. Il est important de connaître l'interprétation ensembliste de la somme des coefficients binomiaux et ne pas se contenter d'une justification par le binôme de Newton. L'introduction des corps finis (même en se limitant aux cardinaux premiers) permet de créer un lien avec l'algèbre linéaire. Les actions de groupes peuvent également conduire à des résultats remarquables.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aussi présenter des applications de la formule d'inversion de Möebius ou de la formule de Burnside. Des candidats ayant un bagage probabiliste pourront explorer le champ des permutations aléatoires, en présentant des algorithmes pour générer la loi uniforme sur le groupe symétrique $S_n$ et analyser certaines propriétés de cette loi uniforme (points fixes, cycles, limite $n \to +\infty$...).

Une nouvelle leçon est ouverte pour la session 2020 :

**191 : Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie**

Le jury souhaite proposer une leçon qui offre une ouverture large autour du thème de la géométrie. Avec cet intitulé, les candidats sont libres de présenter des résultats et des exemples très variés en lien avec la géométrie. L'objectif n'est pas de couvrir le plus d'aspects possible, mais plutôt d'en proposer certains suffisamment consistants et variés. À partir du moment où ils sont de nature géométrique, tous les éléments du programme peuvent être pertinents. En contrepartie de cette liberté laissée aux candidats, une difficulté est de structurer la présentation des objets et des notions choisies. Ainsi, plusieurs approches sont possibles pour organiser cette leçon, par exemple :

- en regroupant les outils par « famille » : outils matriciels (repérage des points par des matrices colonnes, des transformations par des matrices, rang, réduction, etc.), outils polynomiaux (formes quadratiques, déterminant, résultant, etc.), outils structurels (groupes, corps) ;
- ou par niveau d'abstraction/de généralité (nombres réels, complexes, matrices, groupes...) ;
- ou par type d'objectifs (identifier des objets géométriques, les mesurer, les classifier, démontrer des résultats en utilisant des transformations géométriques...)

Il est aussi possible de se focaliser sur un seul type d'outils (par exemple algèbre linéaire, géométrie affine ou groupes) en détaillant plusieurs applications en géométrie ou sur une question géométrique fouillée à l'aide de diverses techniques (par exemple sur des problèmes impliquant des figures géométriques comme les cercles et triangles, les polygones et polyèdres réguliers, etc.). Des situations « élémentaires », dans le plan, permettent certainement de mettre en valeur des connaissances et un recul mathématique. Il faut bien éviter l'écueil d'un catalogue fastidieux ou celui qui consisterait à recycler directement le contenu d'une autre leçon avec un vague habillage géométrique.

Parmi les nombreux éléments qui peuvent être discutés, on peut indiquer :

- les notions de distance, aire, volume. Notamment les propriétés de la matrice de Gram, le lien entre déterminant et aire d'un parallélogramme ou volume d'un parallélépipède, la construction du produit vectoriel et du produit mixte,... peuvent être exploités avec pertinence dans cette leçon. On peut ainsi être amené à étudier l'aire balayée par un arc paramétré du plan, la position d'un point par rapport à un cercle circonscrit à un triangle, etc. Le déterminant de Cayley-Menger permet de mettre en évidence des conditions pour que $n+1$ points de $\mathbf{R}^n$ forment une base affine, ou que $n+2$ points de $\mathbf{R}^n$ soient cocycliques. Dans une autre direction, la division euclidienne dans $\mathbf{Z}$ donne une preuve d'une forme du théorème de la base adaptée, avec pour conséquence le calcul du volume (d'une maille élémentaire) d'un sous réseau de $\mathbf{Z}^n$ comme étant le déterminant d'un système générateur dans la base canonique.
- l'apport de l'algèbre linéaire à la géométrie. On peut ainsi exploiter le calcul matriciel et les techniques de réduction pour mettre en évidence des informations de nature géométrique (avec les exemples fondamentaux des homothéties, projections, symétries, affinités, rotations, la classification des isométries vectorielles, etc.). On peut être alors amené à présenter le théorème de Cartan-Dieudonné sur la décomposition d'isométries euclidiennes en produit de réflexions ou encore évoquer une (ou des) interprétation(s) géométrique(s) de la décomposition en valeurs singulières. Dans cette même veine, la leçon peut être orientée vers la géométrie affine, en s'adossant à la théorie des espaces vectoriels pour définir certains objets (espaces et sous-espaces affines, applications affines, repères affines, etc), ce qui permet, par exemple, d'établir ainsi certains résultats classiques, comme les théorèmes de Thalès, Pappus, Desargues,...
- l'analyse des formes quadratiques permet d'aborder des problèmes géométriques : étude des coniques, quadriques, classification des quadriques de $\mathbf{R}^n$, interprétation géométrique de la signature, application des méthodes de réduction, etc.
- la théorie des groupes est un champ naturel pour cette leçon (mais qui n'est cependant pas indispensable) : groupes de transformations (isométries, déplacements, similitudes, translations), composition de transformations, mise en évidence d'invariants fondamentaux (angle, birapport, excentricité d'une conique). Il est possible de se focaliser sur des groupes de transformations préservant une certaine structure géométrique et en distinguant parmi eux les groupes finis (groupes d'isométries classiques), les groupes discrets infinis (avec des translations, groupes de pavages) et, pour aller plus loin, les groupes continus (groupes de Lie).
- les techniques de convexité constituent aussi un champ fructueux : le théorème de séparation par un hyperplan dans $\mathbf{R}^n$ de Hahn-Banach et, en corollaire, le théorème de Helly permettent par exemple d'établir des propriétés intéressantes sur les cordes de convexes compacts.
- certains candidats peuvent trouver intérêt à aborder les questions d'intersection de courbes polynomiales, qui permettent notamment de mettre en œuvre le théorème de Bezout et des méthodes exploitant la notion de résultant.
- un grand nombre de problèmes de géométrie peuvent être traités en exploitant le formalisme des nombres complexes. Il est tout à fait approprié d'évoquer l'étude des inversions et, en particulier la possibilité de ramener un cercle à une droite et inversement ; la formule de Ptolémée illustre bien l'utilisation de cet outil. On peut parler des suites définies par récurrence par une homographie et leur lien avec la réduction dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ et aborder la construction de la sphère de Riemann.
- les problématiques de la construction à la règle et au compas constituent un autre axe pertinent pour cette leçon, avec le théorème de Wantzel, et peuvent conduire à s'intéresser à des extensions de corps.

Comme dans le cas des autres leçons, il est tout à fait bienvenu de chercher à illustrer cette leçon par des exemples issus de l'analyse, des probabilités, de la statistique (par exemple en évoquant l'interprétation géométrique de l'analyse en composantes principales), du calcul formel (par exemple avec les applications du résultant) ou du calcul scientifique (par exemple en présentant des problématiques de géométrie computationnelle, comme le calcul d'enveloppe convexe, les algorithmes de triangulation Delaunay, les diagrammes de Voronoi...). Les thèmes en lien avec la géométrie projective ou la géométrie algébrique peuvent permettre à certains candidats de présenter des résultats très avancés. Cette leçon nécessite une préparation très personnelle et réfléchie de la part des candidats. Les exemples et les résultats qui y sont présentés ont vocation à inciter les candidats à enrichir les autres leçons de cette épreuve d'exemples issus de la géométrie.

## 5.4 Épreuve orale d'analyse et probabilités

**201 : Espaces de fonctions. Exemples et applications.**

C'est une leçon riche où le candidat doit choisir soigneusement le niveau auquel il souhaite se placer et bien délimiter le champ qu'il se propose d'explorer. Le jury attend que les candidats aient réfléchi à leur choix et les illustrent avec des applications et exemples, ce qui parfois peut manquer dans la présentation.

Les candidats peuvent se concentrer dans un premier temps sur les espaces normés composés de fonctions continues sur $\mathbf{R}$ ou une partie compacte de $\mathbf{R}$ et les propriétés de l'espace selon la norme dont il est muni. La norme $\|\cdot\|_\infty$ est naturellement associée à la convergence uniforme dont il faut avoir assimilé les bases (en particulier, le jury attend une maîtrise du fait qu'une limite uniforme de fonctions continues est continue). On peut aussi envisager les variantes faisant intervenir une ou plusieurs dérivées.

Les espaces de Hilbert de fonctions comme l'espace des fonctions $L^2$ constituent ensuite une ouverture déjà significative. Pour aller plus loin, d'autres espaces de Banach usuels tels que les espaces $L^p$ ont tout à fait leur place dans cette leçon, ainsi que les espaces de Sobolev, certains espaces de fonctions holomorphes (Hardy, Bergman), ou dans une autre direction, la structure de l'espace de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbf{R})$ ou de l'espace des fonctions $C^\infty$ à support compact sur $\mathbf{R}$ peuvent offrir des ouvertures de très bon niveau.

Il est tout à fait bienvenu, et nombre de candidats ne s'en privent pas, de discuter les relations entre ces espaces, notamment de densité et de présenter des applications de ces propriétés.

**203 : Utilisation de la notion de compacité.**

Cette leçon ne porte pas sur la compacité en général mais sur son *utilisation*. Il semble important de parler des théorèmes de Heine et de Rolle dont la démonstration doit être connue. Le candidat doit savoir que les boules fermées d'un espace vectoriel normé sont compactes si et seulement si l'espace est de dimension finie (théorème de compacité de Riesz). Il est également souhaitable de faire figurer un énoncé du théorème d'Ascoli dont la preuve doit être connue. Des exemples significatifs d'utilisation de la compacité comme le théorème de Stone-Weierstrass, des théorèmes de point fixe, voire l'étude qualitative d'équations différentielles, sont tout à fait pertinents. Le rôle de la compacité pour des problèmes d'existence d'extrema mériterait d'être davantage étudié. S'il est important que les candidats aient une vision générale de la compacité, il est tout à fait envisageable qu'une leçon ne présente des applications que dans le cadre des espaces métriques.

Pour aller plus loin, les familles normales de fonctions holomorphes fournissent des exemples fondamentaux d'utilisation de la compacité. La caractérisation de la compacité dans les espaces $L^p$ peut aussi tout à fait illustrer cette leçon. Les opérateurs auto-adjoints compacts sur un espace de Hilbert relèvent également de cette leçon, et il est possible développer l'analyse de leurs propriétés spectrales, éventuellement en exploitant un exemple particulier.

**204 : Connexité. Exemples et applications.**

L'objectif de cette leçon est de dégager clairement l'intérêt de la notion de connexité en analyse. Deux aspects sont notamment à mettre en valeur dans cette leçon : le fait que la connexité est préservée par image continue avec les théorèmes du type « valeurs intermédiaires » qui en résultent et le rôle clef de la connexité dans le passage du local au global, par exemple en calcul différentiel, voire pour les fonctions holomorphes. Il est important de présenter des résultats naturels dont la démonstration utilise la connexité. La stabilité par image continue, la structure des ouverts de $\mathbf{R}$, l'identification des connexes de $\mathbf{R}$ sont des résultats incontournables.

La caractérisation des fonctions constantes parmi les fonctions différentiables sur un ouvert connexe trouve tout à fait sa place dans cette leçon, incluant éventuellement la version « distributions » de ce résultat.

La connexité par arcs permet, lorsqu'elle se produit, de conclure immédiatement à la connexité. Toutefois, il est important de bien distinguer connexité et connexité par arcs en général (avec des exemples compris par le candidat), et il est pertinent de présenter des situations où ces deux notions coïncident. La notion de composante connexe doit également trouver sa place dans cette leçon (pouvant être illustrée par des exemples matriciels). L'illustration géométrique de la connexité est un point apprécié par le jury.

Des exemples issus d'autres champs (algèbre linéaire notamment) sont valorisés. Pour aller plus loin, le principe des zéros isolés, son lien avec le prolongement analytique, ainsi que des illustrations avec des fonctions spéciales telles que $\zeta$, $\theta$, $\Gamma$, ou encore le principe du maximum, fournissent des thèmes très riches pour cette leçon.

Dans une autre direction, on peut s'intéresser aux solutions d'une équation différentielle non linéaire avec le passage d'un théorème d'existence et d'unicité local à un théorème d'existence et d'unicité de solutions maximales.

Enfin, le choix des développements doit être pertinent, même s'il fait aussi appel à des thèmes différents ; on peut ainsi suggérer le théorème de Runge pour les candidats qui le souhaitent. Pour aller plus loin, on peut éventuellement évoquer certaines parties totalement discontinues remarquables telles que l'ensemble triadique Cantor et ses applications.

**205 : Espaces complets. Exemples et applications.**

L'un des intérêts essentiels de la complétude est de fournir des théorèmes d'existence : que ce soit tout simplement dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ mais aussi dans certains espaces de dimension infinie (par exemple dans certains espaces de fonctions). Il est important de présenter des exemples d'espaces usuels, dont on sait justifier la complétude. Un candidat à l'agrégation doit manifester une bonne maîtrise de la convergence uniforme. On peut évoquer dans cette leçon des théorèmes classiques tels que le théorème du point fixe des applications contractantes et le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Les espaces $L^p$ sont des exemples pertinents qui ne sont pas sans danger pour des candidats aux connaissances fragiles (les $\ell^p(\mathbf{N})$, peut-être plus accessibles, fournissent déjà de beaux exemples).

On ne s'aventurera pas à parler du théorème de Baire sans applications pertinentes et maîtrisées (elles sont nombreuses). Un développement autour des fonctions continues nulle part dérivables est très souvent proposé, mais extrêmement rares sont les candidats qui arrivent avec succès jusqu'au bout. Le jury attire l'attention sur le fait qu'il existe des preuves constructives de ce résultat qui n'utilisent pas le théorème de Baire.

La construction de l'espace $H_0^1(]0,1[)$ pourra être abordée par les candidats qui le souhaitent avec des applications illustrant l'intérêt de cet espace.

**207 : Prolongement de fonctions. Exemples et applications.**

Cette leçon de synthèse offre de très nombreuses orientations possibles et le choix du niveau auquel se place le candidat doit être bien clair.

Il ne faut pas hésiter à commencer par des exemples très simples tels que le prolongement en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ avec des exemples d'utilisations, mais il faut aller plus loin que le simple prolongement par continuité. Trop de candidats ne connaissent pas bien les résultats élémentaires autour du prolongement par continuité en un point d'une fonction d'une variable réelle, ou les résultats autour du prolongement $C^1$ (lorsque la dérivée a une limite par exemple).

Pour aller plus loin, le prolongement analytique relève bien sûr de cette leçon, et des exemples sur des fonctions classiques ($\zeta$, $\Gamma$,...) seront appréciés. On peut également parler de l'extension à $L^2$, voire à l'espace des distributions tempérées, de la transformation de FOURIER. Le théorème de HAHN-BANACH, dans le cas séparable voire simplement en dimension finie, peut être un exemple de résultat très pertinent. La résolution d'un problème de DIRICHLET, correctement formulé, associé à une équation aux dérivées partielles classique, vu comme prolongement de la donnée au bord, peut être envisagée.

**208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.**

Le jury rappelle qu'une telle leçon doit contenir beaucoup d'illustrations et d'exemples, notamment avec quelques calculs élémentaires de normes subordonnées (notion qui met en difficulté un trop grand nombre de candidats). Le lien avec la convergence des suites du type $X_{n+1} = AX_n$ doit être connu (et éventuellement illustré, sans que cela puisse être mis au cœur de la leçon, de considérations d'analyse numérique matricielle). Lors du choix de ces exemples, le candidat veillera à ne pas mentionner des exemples pour lesquels il n'a aucune idée de leur pertinence et à ne pas se lancer dans des développements trop sophistiqués.

Il faut savoir énoncer et justifier le théorème de RIESZ sur la compacité de la boule unité fermée d'un espace vectoriel normé. Le théorème d'équivalence des normes en dimension finie, ou le caractère fermé de tout sous-espace de dimension finie d'un espace normé, sont des résultats fondamentaux à propos desquels les candidats doivent se garder des cercles vicieux. Des exemples d'espaces vectoriels normés de dimension infinie ont leur place dans cette leçon et il faut connaître quelques exemples de normes usuelles non équivalentes, notamment sur des espaces de suites ou des espaces de fonctions et également d'applications linéaires qui ne sont pas continues. On peut aussi illustrer le théorème de RIESZ sur des exemples simples dans le cas des espaces classiques de dimension infinie.

Les espaces de HILBERT ont également leur place dans cette leçon, mais le jury met en garde contre l'écueil de trop s'éloigner du cœur du sujet.

**209 : Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications**

Pour la session 2020, le titre de cette leçon évolue en

**Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples et applications.**

Ce nouvel intitulé ouvre le sujet et permet de mettre en lumière des points de vue de natures différentes, avec des points d'accès de niveaux aussi variés. Bien entendu l'approximation polynomiale ou par polynômes trigonométriques reste un des thèmes centraux de cette leçon et un certain nombre de classiques trouveront à s'exprimer, comme par exemple l'approximation par les polynômes de BERNSTEIN, éventuellement agrémentée d'une estimation de la vitesse de convergence (en termes de module de continuité).

Il n'est pas absurde de voir la formule de TAYLOR comme une approximation locale d'une fonction par des polynômes mais on veillera à ne pas trop s'attarder sur ce point. Les polynômes d'interpolation de LAGRANGE peuvent être mentionnés à condition de maîtriser la différence fondamentale entre interpolation et approximation.

L'approximation d'une fonction par des fonctions de classe $C^\infty$ par convolution est une technique qui s'intègre parfaitement dans ce nouvel intitulé et qui doit être illustrée d'applications (approximation de fonctions indicatrices, obtention, par densité, d'inégalités ou de résultats asymptotiques, résolution de l'équation de la chaleur,...)

Dans la même veine, pour aller plus loin, le théorème de FEJÉR (versions $L^1$, $L^p$ ou $C(\mathbf{T})$) offre la possibilité d'un joli développement, surtout s'il est agrémenté d'applications (polynômes trigonométriques lacunaires, injectivité de la transformée de FOURIER sur $L^1$,...). La convolution avec d'autres noyaux (DIRICHLET, JACKSON) est aussi une source de résultats intéressants.

**213 : Espaces de HILBERT. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.**

Il est important de faire la différence entre base algébrique et base hilbertienne, notions qui mettent en difficulté nombre de candidats. Toutefois cette année, le jury se réjouit d'avoir pu constater de réels efforts sur ce point. La formule de la projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie d'un espace de HILBERT doit absolument être connue de même que l'interprétation géométrique de la méthode de GRAM-SCHMIDT. La leçon doit être illustrée par des exemples de bases hilbertiennes (polynômes orthogonaux, séries de FOURIER, entre autres).

Les candidats doivent s'intéresser au sens des formules

$$x = \sum_{n\geqslant 0}(x|e_n)e_n \quad \text{et} \quad ||x||^2 = \sum_{n\geqslant 0}|(x|e_n)|^2$$

en précisant les hypothèses sur la famille $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et en justifiant la convergence. La notation $\sum_{n\in\mathbf{Z}}$ doit être manipulée avec précaution : beaucoup de candidats l'introduisent mais sans en maîtriser les subtilités.

Si le théorème de projection sur les convexes fermés (ou sur un sous-espace vectoriel fermé) d'un espace de HILBERT $H$ est régulièrement mentionné, ses conséquences les plus directes (théorème de projection de RIESZ, orthogonal de l'orthogonal et densité d'un sous-espace via la nullité de son orthogonal,...) le sont malheureusement nettement moins.

La notion d'adjoint d'un opérateur continu peut alors être introduite et, pour aller plus loin, le théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints compacts peut alors être abordé.

Pour aller plus loin dans une autre direction, le programme permet d'aborder la résolution et l'approximation de problèmes aux limites en dimension 1 par des arguments exploitant la formulation variationnelle de ces équations. La construction de l'espace de HILBERT–SOBOLEV $H_0^1(]0,1[)$ pourra donc éventuellement être abordée, ainsi que le théorème de LAX-MILGRAM avec des applications pertinentes. Plus généralement, l'optimisation de fonctionnelles convexes sur les espaces de HILBERT peut être explorée.

**214 : Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.**

Il s'agit d'une leçon qui exige une bonne maîtrise du calcul différentiel. Même si le candidat ne propose pas ces thèmes en développement, on est en droit d'attendre de lui des idées de démonstration des deux théorèmes fondamentaux qui donnent son intitulé à la leçon. Il est indispensable de savoir mettre en pratique le théorème des fonctions implicites au moins dans le cas de deux variables réelles. On attend des applications en géométrie différentielle notamment dans la formalisation de la méthode des multiplicateurs de LAGRANGE. En ce qui concerne la preuve du théorème des extrema liés, la présentation de la preuve par raisonnement « sous-matriciel »est souvent obscure ; on privilégiera si possible une présentation géométrique s'appuyant sur l'espace tangent. Plusieurs inégalités classiques de l'analyse peuvent se démontrer avec ce point de vue : arithmético-géométrique, HÖLDER, CARLEMAN, HADAMARD,...

Pour aller plus loin, l'introduction des sous-variétés est naturelle dans cette leçon. Il s'agit aussi d'agrémenter cette leçon d'exemples et d'applications en géométrie, sur les courbes et les surfaces.

**215 : Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.**

Cette leçon requiert une bonne maîtrise de la notion de différentielle première et de son lien avec les dérivées partielles, mais aussi de ce qui les distingue. Beaucoup de candidats sont mis en difficulté sur les concepts de base du calcul différentiel et ces notions sont à consolider, au-delà de cette leçon en particulier. On doit savoir trouver la différentielle d'applications classiques, comme, par exemple, $M \in GL_n(\mathbf{R}) \mapsto M^{-1}$, $M \mapsto M^2$ ou encore $M \mapsto \det(M)$ en revenant à la définition. Il est important de bien comprendre le développement sous-jacent de $f(x+h)$. La notation $o$ est souvent source de confusions ; trop de candidats l'utilisent sans en maîtriser la signification. On doit pouvoir mettre en pratique le théorème de différentiation composée pour calculer des dérivées partielles de fonctions composées dans des situations simples (par exemple le laplacien en coordonnées polaires). La différentiation à l'ordre 2 est attendue, en lien avec la hessienne, notamment pour les applications classiques quant à l'existence d'extrema locaux. On peut aussi faire figurer dans cette leçon la différentielle d'applications issues de l'algèbre linéaire (ou multilinéaire). La méthode du gradient pour la minimisation de la fonctionnelle $\frac{1}{2}(Ax|x)-(b|x)$, où $A$ est une matrice symétrique définie positive, conduit à des calculs de différentielles qui doivent être acquis par tout candidat.

Pour aller plus loin, l'exponentielle matricielle est une ouverture pertinente. D'autres thèmes issus de la leçon 214 trouvent aussi leur place ici.

**219 : Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.**

Comme souvent en analyse, il est tout à fait opportun d'illustrer dans cette leçon un exemple ou un raisonnement à l'aide d'un dessin. Il faut savoir faire la distinction entre propriétés locales (caractérisation d'un extremum local) et globales (existence par compacité, par exemple). Dans le cas important des fonctions convexes, un minimum local est également global. Les applications de la minimisation des fonctions convexes, qui peuvent être introduites par des problématiques motivées par les options de modélisation, sont nombreuses et sont tout à fait à propos pour illustrer cette leçon.

L'étude des algorithmes de recherche d'extremum y a toute sa place : méthode du gradient et analyse de sa convergence, méthode à pas optimal,... Le cas particulier des fonctionnelles sur $\mathbf{R}^n$ de la forme $\frac{1}{2}(Ax|x)-(b|x)$, où $A$ est une matrice symétrique définie positive, ne devrait pas poser de difficultés (la coercivité de la fonctionnelle pose problème à de nombreux candidats). Les problèmes de minimisation sous contrainte amènent à faire le lien avec les extrema liés et la notion de multiplicateur de Lagrange. Sur ce point, certains candidats ne font malheureusement pas la différence entre recherche d'extremum sur un ouvert ou sur un fermé. Une preuve géométrique des extrema liés sera fortement valorisée par rapport à une preuve algébrique, formelle et souvent mal maîtrisée. On peut ensuite mettre en œuvre ce théorème en justifiant une inégalité classique : arithmético-géométrique, Hölder, Carleman, etc... Enfin, la question de la résolution de l'équation d'Euler-Lagrange peut donner l'opportunité de mentionner la méthode de Newton.

Les candidats pourraient aussi être amenés à évoquer les problèmes de type moindres carrés (avec une discussion qui peut comprendre motivation, formalisation, rôle de la condition de rang maximal, jusqu'aux principes de la décomposition en valeurs singulières), ou, dans un autre registre, le principe du maximum avec des applications.

**220 : Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'études des solutions en dimension 1 et 2.**

**Équations différentielles ordinaires. Exemples de résolution et d'études de solutions en dimension 1 et 2**.

Cette reformulation a pour but de mettre en garde sur le fait que la résolution explicite de certaines équations différentielles standard telles que $y' = y^2$ ou $y'' + ay' + by = \cos(\omega t)$ pose des difficultés à de trop nombreux candidats ; il est important de disposer de méthodes de résolution efficaces. Mais le jury souhaite que les candidats soient conscients que la résolution exacte de telles équations est rare et qu'ils soient donc capables de mener une étude qualitative des solutions sur des exemples et éventuellement d'envisager des stratégies d'approximation numérique des solutions.

Le jury note un effort sur la maîtrise du théorème de Cauchy-Lipschitz ; sa démonstration dans le cadre le plus général est délicate : elle est souvent mal maîtrisée. Une preuve dans le cas globalement lipschitzien constitue déjà un développement appréciable. Le jury attire l'attention sur les notions de solution maximale et de solution globale qui sont souvent confuses. Bien qu'ils ne soient pas souvent mentionnés, le lemme de GRÖNWALL a toute sa place dans cette leçon ainsi que le théorème de sortie de tout compact.

L'utilisation du théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ doit pouvoir être mise en œuvre sur des exemples concrets. Il est souhaitable de produire des exemples d'équations non-linéaires qui pour certaines permettent une résolution exacte et pour d'autres donnent lieu à une étude qualitative (dont on rappelle qu'elle doit être préparée et soignée). Pour les équations autonomes, la notion de point d'équilibre permet des illustrations pertinentes comme par exemple les petites oscillations du pendule. Trop peu de candidats pensent à tracer et discuter des portraits de phase alors que l'intitulé de la leçon y invite clairement.

Le nouvel intitulé est aussi une invitation plus franche à évoquer les problématiques de l'approximation numérique en présentant le point de vue du schéma d'EULER et de sa convergence notamment, voire, pour les candidats qui le souhaitent, d'autres schémas qui seraient mieux adaptés à l'exemple présenté. On peut aller jusqu'à aborder la notion de problèmes raides et la conception de schémas implicites pour autant que le candidat ait une maîtrise convenable de ces questions.

### 221 : Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Le jury attend d'un candidat qu'il sache déterminer rigoureusement la dimension de l'espace vectoriel des solutions. Le cas des systèmes à coefficients constants fait appel à la réduction des matrices qui doit être connue et pratiquée. Le jury attend qu'un candidat puisse mettre en œuvre la méthode de variation des constantes pour résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2 simple (à coefficients constants par exemple) avec second membre ; un trop grand nombre de candidats se trouve déstabilisés par ces questions.

L'utilisation des exponentielles de matrices a toute sa place ici et doit être maîtrisée. Les problématiques de stabilité des solutions et le lien avec l'analyse spectrale devraient être davantage exploités dans cette leçon.

Le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ linéaire constitue un exemple de développement pertinent pour cette leçon. Les résultats autour du comportement des solutions, ou de leurs zéros, de certaines équations linéaires d'ordre 2 (STURM, HILL-MATHIEU,...) sont aussi d'autres possibilités.

Pour aller plus loin, la résolution au sens des distributions d'équations du type $T' + aT = S$ via la méthode de variation de la constante, ou des situations plus ambitieuses, trouvera sa place dans cette leçon.

### 222 : Exemples d'étude d'équations différentielles linéaires et d'équations aux dérivées partielles linéaires.

Cette leçon peut être abordée en faisant appel à des techniques variées et de nombreux développements pertinents peuvent être construits en exploitant judicieusement les éléments les plus classiques du programme. Le candidat ne doit pas hésiter à donner des exemples très simples (par exemple les équations de transport).

Les techniques d'équations différentielles s'expriment par exemple pour traiter $\lambda u - u'' = f$ sur $[0, 1]$ avec des conditions de DIRICHLET en $x = 0$, $x = 1$ ou pour analyser l'équation de transport par la méthode des caractéristiques.

Les séries de FOURIER trouvent dans cette leçon une mise en pratique toute désignée pour résoudre l'équation de la chaleur dans différents contextes, l'équation des ondes ou de SCHRÖDINGER dans le cadre des fonctions périodiques. Des raisonnements exploitant la transformée de FOURIER peuvent également être présentés.

Le point de vue de l'approximation numérique donne lieu à des développements originaux, notamment autour de la matrice du Laplacien et de l'analyse de convergence de la méthode des différences finies.

Pour aller plus loin, la notion de solution faible d'équations aux dérivées partielles linéaires peut également être présentée, avec des applications à la résolution des équations de LAPLACE, de la chaleur, des ondes, ou de l'équation de transport. Des développements sophistiqués se placeront sur le terrain de l'analyse hilbertienne avec par exemple l'application du théorème de LAX–MILGRAM voire la décomposition spectrale des opérateurs compacts dans un espace fonctionnel approprié.

**223 : Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications**

Cette leçon permet souvent aux candidats de s'exprimer. Il ne faut pas négliger les suites de nombres complexes mais les suites vectorielles (dans $\mathbf{R}^n$) ne sont pas dans le sujet. Le jury attire l'attention sur le fait que cette leçon n'est pas uniquement à consacrer à des suites convergentes, mais tout comportement asymptotique peut être présenté. Le théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS doit être cité et le candidat doit être capable d'en donner une démonstration. On attend des candidats qu'ils parlent des limites inférieure et supérieure d'une suite réelle bornée, et qu'ils en maîtrisent le concept. Les procédés de sommation peuvent être éventuellement évoqués mais le théorème de CESÀRO doit être mentionné et sa preuve maîtrisée par tout candidat à l'agrégation. Les résultats autour des sous-groupes additifs de $\mathbf{R}$ permettent d'exhiber des suites denses remarquables et l'ensemble constitue un joli thème. Des thèmes des leçons 225, 226 et 264 peuvent également se retrouver dans cette leçon.

Pour aller plus loin, un développement autour de l'équirépartition est tout à fait envisageable. La méthode de NEWTON peut aussi illustrer la notion de vitesse de convergence.

**226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.**

Le concept de point fixe d'une fonction est évidemment au coeur de cette leçon et l'énoncé d'au moins un théorème de point fixe, qu'il faut savoir mettre en œuvre sur des exemples simples, est évidemment pertinent. Le jury est parfois surpris que des candidats évoquent un théorème de point fixe dans les espaces de BANACH... sans être capables de définir ce qu'est un espace de BANACH ou d'en donner un exemple !

Au niveau élémentaire, les questions de monotonie, les notions de points attractifs ou répulsifs peuvent structurer l'exposition et l'aspect graphique n'est pas à négliger. Le jury attend quelques exemples illustrant la variété des situations et la suite récurrente $u_{n+1} = \sin(u_n)$ n'est que l'un d'entre eux : il doit certes être maîtrisé mais ne peut être le seul exemple. L'aspect vectoriel, pourtant présent dans l'intitulé, est trop souvent négligé. Le comportement des suites vectorielles définies par une relation linéaire $X_{n+1} = AX_n$ fournit pourtant un matériel d'étude conséquent.

L'étude des suites numériques linéaires récurrentes d'ordre $p$ est souvent mal connue, notamment le lien avec l'aspect vectoriel.

La formulation de l'intitulé de cette leçon invite résolument à évoquer les problématiques de convergence d'algorithmes (notamment savoir estimer la vitesse) d'approximation de solutions de problèmes linéaires et non linéaires : dichotomie, méthode de NEWTON (avec sa généralisation au moins dans $\mathbf{R}^2$), algorithme du gradient, méthode de la puissance, méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires, schéma d'EULER,...

**228 : Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.**

Cette leçon est reformulée pour la session 2020 sous la forme

**Continuité, dérivabilité, dérivation faible des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.**

Cette leçon permet des exposés de niveaux, et de forme, très variés. Les théorèmes de base doivent être maîtrisés et illustrés par des exemples intéressants, par exemple le théorème des valeurs intermédiaires pour la dérivée, le théorème de ROLLE... Le jury s'attend évidemment à ce que les candidats connaissent et puissent calculer la dérivée des fonctions usuelles. Les candidats doivent disposer d'un exemple de fonction dérivable de la variable réelle qui ne soit pas continûment dérivable. La stabilité par passage à la limite des notions de continuité et de dérivabilité doit être comprise par les candidats. Pour aller plus loin, les propriétés de régularité des fonctions monotones et des fonctions convexes peuvent être mentionnées. La dérivabilité presque partout des fonctions lipschitziennes peut aussi relever aussi de cette leçon. On peut enfin s'intéresser à des exemples de fonctions continues nulle part dérivables.

Le nouvel intitulé doit conduire à analyser la généralisation de la notion de dérivée d'une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ à l'aide du principe de calcul « par dualité/transposition »de la théorie des distributions. Plus qu'une analyse fonctionnelle poussée, le jury attend une certaine familiarité avec le *calcul de dérivées faibles*, dans ce cadre particulier de *fonctions* de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, qu'on n'hésitera pas à motiver par des applications (en physique, en théorie du signal,...). On peut étudier les liens entre dérivée classique et dérivée faible, calculer la dérivée faible de fonctions discontinues (formule des sauts, par exemple pour des fonctions de classe $C^\infty$ sur $\mathbf{R}\backslash\{0\}$ et $C^\infty$ par morceaux sur $\mathbf{R}$ comme la fonction de Heaviside, la valeur absolue) ou de fonctions du type $x \mapsto \int_a^x f(y)\mathrm{d}y$, $f$ étant intégrable. On peut aussi relier la dérivée faible et la limite du taux d'accroissement au sens des distributions et établir le lien entre fonction croissante et dérivée faible positive. Il est également possible de parler du peigne de DIRAC. Pour aller encore plus loin, des exemples de convergence au sens des distributions peuvent tout à fait illustrer cette leçon.

**229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.**

L'énoncé et la connaissance de la preuve de l'existence de limites à gauche et à droite pour les fonctions monotones sont attendues. Ainsi on doit parler des propriétés de continuité et de dérivabilité à gauche et à droite des fonctions convexes de la variable réelle. Il est souhaitable d'illustrer la présentation de la convexité par des dessins clairs. On notera que la monotonie concerne les fonctions réelles d'une seule variable réelle, mais que la convexité concerne également les fonctions définies sur une partie convexe de $\mathbf{R}^n$, qui fournissent de beaux exemples d'utilisation. L'étude de la fonctionnelle quadratique ou la minimisation de $||Ax-b||^2$ illustrent agréablement cette leçon.

Pour aller plus loin, la dérivabilité presque partout des fonctions monotones est un résultat remarquable (dont la preuve peut être éventuellement admise). L'espace vectoriel engendré par les fonctions monotones (les fonctions à variation bornée) relève de cette leçon. Enfin, la dérivation au sens des distributions fournit les caractérisations les plus générales de la monotonie et de la convexité ; les candidats peuvent s'aventurer utilement dans cette direction.

**230 : Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.**

De nombreux candidats commencent leur plan par une longue exposition des conditions classiques assurant la convergence ou la divergence des séries numériques. Sans être hors sujet, cette exposition ne doit pas former l'essentiel de la matière de la leçon. Un thème important de la leçon est en effet le comportement asymptotique des restes et sommes partielles (équivalents, développements asymptotiques — par exemple pour certaines suites récurrentes — cas des séries de RIEMANN, comparaison séries et intégrales, ...). Trop de présentations manquent d'exemples.

On peut aussi s'intéresser à certaines sommes particulières, que ce soit pour exhiber des nombres irrationnels (voire transcendants), ou mettre en valeur des techniques de calculs non triviales (par exemple en faisant appel aux séries de FOURIER ou aux séries entières). L'utilisation des calculs de séries numériques en théorie des probabilités peut fournir des exemples pertinents illustrant cette leçon.

Enfin, si le jury apprécie que le théorème des séries alternées (avec sa version sur le contrôle du reste) soit maîtrisé, il rappelle aussi que ses généralisations possibles utilisant la transformation d'Abel trouvent toute leur place dans cette leçon.

**234 : Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.**

Cette leçon porte sur les fonctions intégrables au sens de la théorie générale de l'intégration de Lebesgue ainsi que les suites et les espaces de telles fonctions. Elle ne se restreint donc pas au seul cas des fonctions intégrables pour la mesure de Lebesgue mais peut concerner d'autres mesures telles que la mesure de comptage, les mesures absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue, etc., ou encore les mesures de probabilités, qui entrent tout à fait dans le cadre de la leçon.

Le candidat est invité à étudier le comportement de suites de fonctions Lebesgue-intégrables. Il est souhaitable que soient mentionnés l'approximation par des fonctions étagées ainsi que les principaux théorèmes de convergence sous l'intégrale de cette théorie (le lemme de Fatou, le théorème de la convergence monotone et le théorème de convergence dominée) en les illustrant par des exemples et des contre-exemples judicieux. Il faut avoir compris que l'intégrale d'une fonction continue contre la mesure de Lebesgue coïncide avec la notion usuelle d'intégrale dite de Riemann, et connaître l'interprétation d'une série absolument convergente comme une intégrale. Cette leçon nécessite de maîtriser la notion de fonction mesurable et la notion de « presque partout » (et les opérations sur les ensembles négligeables qui sont associées) ainsi que la définition des espaces $L^1$, $L^2$. Toutefois, une connaissance des questions fines de la théorie de la mesure n'est pas exigée.

Une partie de cette leçon peut éventuellement être consacrée aux espaces $L^p$, mais il n'est pas requis d'en faire le cœur de la présentation. Évoquer la convolution entre fonctions $L^1$, et éventuellement entre fonctions de $L^1$ et de $L^p$ ainsi que les propriétés de régularisation et de densité qui en résultent, font partie des attendus (on prendra garde toutefois d'éviter les raisonnements circulaires entre continuité des translations et approximation par convolution). Un développement original, mais techniquement exigeant, peut consister à étudier les conditions assurant la compacité de suites bornées dans $L^p$. Enfin, le cas particulier de l'espace hilbertien $L^2$ mérite attention mais il faut alors se concentrer sur les spécificités d'un espace de fonctions $L^2$ et éviter de faire un catalogue de propriétés vraies pour n'importe quel espace de Hilbert.

**235 : Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.**

Cette leçon s'intéresse aux problèmes d'interversion limite-limite, limite-intégrale et intégrale-intégrale. Il ne s'agit pas de refaire un cours d'intégration. On pourra toutefois mettre en évidence le rôle important joué par des théorèmes cruciaux de ce cours. À un niveau élémentaire, on peut insister sur le rôle de la convergence uniforme (et donc, dans le cas de séries de fonctions bornées, de la convergence normale.)

Les théorèmes de convergence monotone, de convergence dominée et les théorèmes d'interversion de Fubini-Tonelli et Fubini sont des attendus de cette leçon. On choisira des exemples pertinents pour illustrer l'intérêt de chacun de ces résultats, mais on pourra aussi exhiber des contre-exemples montrant que des hypothèses trop faibles ne permettent pas en général d'effectuer l'interversion voulue. Le jury note que ces différents points posent problème à de nombreux candidats, qui sont mis en difficulté sur des exemples assez simples. Ils sont donc invités à consolider ces notions avant de s'aventurer plus loin.

Pour les candidats qui le souhaitent, on pourra parler de la transformée de Fourier et/ou de la transformée de Laplace avec des exemples et des applications.

**236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.**

Cette leçon doit être très riche en exemples, que ce soit l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ ou bien d'autres encore. Il est tout à fait pertinent de commencer par les différentes techniques élémentaires (intégration par parties, changement de variables, décomposition en éléments simples, intégrale à paramètres,...). Trop de candidats manquent d'aisance avec le calcul d'intégrales multiples. Le calcul de l'intégrale d'une gaussienne sur $\mathbf{R}^n$ ou le calcul du volume de la boule unité de $\mathbf{R}^n$ ne devraient pas poser de problèmes insurmontables. Le programme du concours indique que la formule d'intégration par parties multi-dimensionnelle qui relie intégrale de volume et intégrale de surface est admise ; il ne faut pas hésiter à l'exploiter et à l'illustrer par des exemples. On peut également présenter des utilisations du théorème des résidus.

On peut aussi penser à l'utilisation du théorème d'inversion de FOURIER ou du théorème de PLANCHEREL. Certains éléments de la leçon précédente, comme par exemple l'utilisation des théorèmes de convergence monotone, de convergence dominée et/ou de FUBINI, sont aussi des outils permettant le calcul de certaines intégrales.

Enfin, il est tout à fait pertinent d'évoquer les méthodes de calcul approché d'intégrales (méthodes des rectangles, méthode de Monte-Carlo, etc.), une piste qui mériterait d'être davantage explorée.

**239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.**

Les candidats incluent les théorèmes de régularité (version segment — a minima — mais aussi version « convergence dominée ») ce qui est pertinent mais la leçon ne doit pas se réduire seulement à cela. Cette leçon doit être riche en exemples, ce qui parfois n'est pas suffisamment le cas. Elle peut être encore enrichie par des études et méthodes de comportements asymptotiques. Les propriétés de la fonction $\Gamma$ d'EULER fournissent un développement standard, mais non sans risque (on pourra y inclure le comportement asymptotique, voire son prolongement analytique) ; certains candidats sont trop ambitieux pour le temps dont ils disposent. Le jury invite donc à bien préciser ce que le candidat souhaite montrer pendant son développement. Les différentes transformations classiques (FOURIER, LAPLACE,... ) relèvent aussi naturellement de cette leçon. On peut en donner des applications pour obtenir la valeur d'intégrales classiques (celle de l'intégrale de DIRICHLET par exemple). Le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale est trop peu souvent cité.

Pour aller encore plus loin, on peut par exemple développer les propriétés des transformations mentionnées (notamment la transformée de FOURIER, par exemple en s'attardant sur le lien entre régularité de la fonction et décroissance de sa transformée de FOURIER), ainsi que de la convolution.

**241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.**

Les résultats généraux sur les différents types de convergence doivent être présentés et maîtrisés. Le jury attend du candidat qu'il évoque les séries de fonctions particulières classiques : séries entières, séries génératrices, séries de FOURIER, avec des exemples et des applications. On pourra également s'intéresser à la fonction zêta de RIEMANN, ou plus généralement aux séries de DIRICHLET.

Par ailleurs, la leçon n'exclut pas du tout de s'intéresser au comportement des suites et séries de fonctions dans les espaces de type $L^p$ (notamment pour $p = 1$), ou encore aux séries de variables aléatoires indépendantes.

Pour aller plus loin, on pourra présenter comment identifier la limite au sens des distributions d'une famille qui régularise la masse de DIRAC ou encore aborder des exemples de construction de parties finies de HADAMARD.

**Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.**

Cette reformulation a pour objectif de clarifier les attendus, dont font partie les propriétés élémentaires des séries entières. Trop de candidats hésitent sur les différentes notions de convergence, les notions de disque de convergence et des domaines où il y a convergence normale ; un effort de préparation doit être fait sur ces notions afin de lever toute imprécision.

Les candidats évoquent souvent des critères (CAUCHY, D'ALEMBERT) permettant d'estimer le rayon de convergence mais oublient souvent la formule de CAUCHY-HADAMARD ou toute technique utilisant une majoration ou un équivalent. Des faiblesses importantes ont été observées quant à ces techniques. Le jury attend bien sûr que le candidat puisse donner des arguments justifiant qu'une série entière en 0 dont le rayon de convergence est $R$ est développable en série entière en un point $z_0$ intérieur au disque de convergence et de minorer le rayon de convergence de cette série. Sans tomber dans un catalogue excessif, on peut indiquer les formules de développement de fonctions usuelles importantes (exp, log, $1/(1-z)$, sin,...). S'agissant d'exemples fondamentaux et classiques, le jury attend que le candidat puisse les donner sans consulter ses notes. En ce qui concerne la fonction exponentielle, le candidat doit avoir réfléchi au point de vue adopté sur sa définition et donc sur l'articulation entre l'obtention du développement en série entière et les propriétés de la fonction. À ce propos, les résultats sur l'existence du développement en série entière pour les fonctions dont on contrôle toutes les dérivées successives sur un voisinage de 0 sont souvent méconnus. Le comportement de la série entière dans le disque de convergence en relation avec les différents modes de convergence (convergence absolue, convergence uniforme, convergence normale) doit être maîtrisé.

La présentation des fonctions génératrices d'une variable aléatoire discrète peut tout à fait illustrer cette leçon. Le théorème d'ABEL (radial ou sectoriel) trouve toute sa place mais doit être agrémenté d'exercices pertinents. Réciproquement, les théorèmes taubériens offrent aussi de jolis développements. On peut aller plus loin en abordant quelques propriétés importantes liées à l'analyticité de la somme d'une série entière ou encore la résolution de certaines équations différentielles ordinaires par la méthode du développement en série entière.

**245 : Fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbf{C}$. Exemples et applications.**

Cet intitulé ne sera pas utilisé pour la session 2020 où il sera remplacé par

**Fonctions d'une variable complexe. Exemples et applications.**

Cette reformulation a pour objectif d'offrir des points d'entrée plus variés à cette leçon. Ainsi, il est possible, dans un premier temps et si le candidat le souhaite, de parler de polynômes de la variable complexe, de fractions rationnelles, de séries entières, sans immédiatement exposer la théorie des fonctions holomorphes. Le jury attend des exemples illustrant ces notions et montrant la maîtrise des candidats sur ces points.

Concernant les questions d'holomorphie, outre la définition, la signification géométrique des équations de CAUCHY-RIEMANN, la formule de CAUCHY et les résultats concernant l'analyticité, le principe des zéros isolés, ou encore le principe du maximum, sont des attendus de cette leçon. Le lemme de SCHWARZ est un joli résultat permettant de faire un développement élémentaire s'il est agrémenté d'applications pertinentes, comme par exemple déterminer les automorphismes du disque unité. La notation $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ a un sens précis, qu'il faut savoir expliquer. La leçon invite également à présenter le théorème d'holomorphie sous le signe intégral et des exemples de fonctions célèbres (par exemple la fonction Gamma, la fonction zêta,...).

Même si cela ne constitue pas le cœur de la leçon, la définition d'une fonction méromorphe (l'ensemble des pôles doit être une partie fermée discrète) peut être présentée à condition que cette notion soit maîtrisée et accompagnée d'exemples. Le jury attire l'attention sur le fait que le prolongement de la fonction Gamma en fonction méromorphe est très souvent proposé mais insuffisamment maîtrisé. Proposer un développement moins ambitieux mais maîtrisé est une stratégie plus payante, qui ouvre la discussion avec le jury de manière plus positive.

Pour les candidats qui le souhaitent, cette leçon offre des possibilités d'ouverture en lien avec la topologie du plan. La preuve du théorème de l'application conforme de RIEMANN est par exemple un développement de très bon niveau qui ne doit pas être abordé sans une bonne maîtrise des questions en jeu.

**246 : Séries de Fourier. Exemples et applications.**

Les différents résultats autour de la convergence ($L^2$, Fejér, Dirichlet,...) doivent être connus. On prendra garde au sens de la notation $\sum_{n\in\mathbf{Z}}$ (qu'il est plus prudent d'éviter car elle est souvent inadaptée). Il faut avoir les idées claires sur la notion de fonctions de classe $C^1$ par morceaux (elles ne sont pas forcément continues). Le théorème d'isométrie bijective entre espaces $L^2$ et $\ell^2$ doit apparaître. Dans le cas d'une fonction continue et $C^1$ par morceaux on peut conclure sur la convergence normale de la série Fourier sans utiliser le théorème de Dirichlet. Il est classique d'obtenir des sommes de séries remarquables comme conséquence de ces théorèmes.

On peut aussi s'intéresser à la formule de Poisson et à ses conséquences. L'existence d'exemples de séries de Fourier divergentes, associées à des fonctions continues (qu'ils soient explicites ou obtenus par des techniques d'analyse fonctionnelle) peuvent aussi compléter le contenu.

Il est souhaitable que cette leçon ne se réduise pas à un cours abstrait sur les coefficients de Fourier. La résolution d'équations aux dérivées partielles (par exemple l'équation de la chaleur ou l'équation des ondes avec une estimation de la vitesse de convergence) peut illustrer de manière pertinente cette leçon, mais on peut penser à bien d'autres applications (inégalité isopérimétrique, comportements remarquables des fonctions à spectre lacunaire,...).

**250 : Transformation de Fourier. Applications.**

Cette leçon offre de multiples facettes. Les candidats peuvent adopter différents points de vue : $L^1$, $L^2$ et/ou distributions. L'aspect « séries de Fourier » n'est toutefois pas dans l'esprit de cette leçon ; il ne s'agit pas de faire de l'analyse de Fourier sur n'importe quel groupe localement compact mais sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{R}^d$.

La leçon nécessite une bonne maîtrise de questions de base telles que la définition du produit de convolution de deux fonctions de $L^1$. On ne doit pas se limiter à une analyse algébrique de la transformation de Fourier. C'est bien une leçon d'analyse, qui nécessite une étude soigneuse des hypothèses, des définitions et de la nature des objets manipulés. Le lien entre la régularité de la fonction et la décroissance de sa transformée de Fourier doit être fait, même sous des hypothèses qui ne sont pas minimales. Les candidats doivent savoir démontrer le lemme de Riemann-Lebesgue pour une fonction intégrable.

La formule d'inversion de Fourier pour une fonction $L^1$ dont la transformée de Fourier est aussi $L^1$ est attendue ainsi que l'extension de la transformée de Fourier à l'espace $L^2$ par Fourier-Plancherel. Des exemples explicites de calculs de transformations de Fourier classiques comme la gaussienne ou $(1+x^2)^{-1}$ paraissent nécessaires.

Pour aller plus loin, la transformation de Fourier des distributions tempérées ainsi que la convolution dans le cadre des distributions tempérées peuvent être abordées. Les attentes du jury sur ces questions restent modestes, au niveau de ce qu'un cours de première année de master sur le sujet peut contenir. Le fait que la transformée de Fourier envoie $\mathscr{S}(\mathbf{R}^d)$ dans lui même avec de bonnes estimations des semi-normes doit alors être compris et la formule d'inversion de Fourier maîtrisée dans ce cadre. Des exemples de calcul de transformée de Fourier peuvent être donnés dans des contextes liés à la théorie des distributions comme par exemple la transformée de Fourier de la valeur principale de $\frac{1}{x}$. Dans un autre registre, il est aussi possible d'orienter la leçon vers l'étude de propriétés des fonctions caractéristiques de variables aléatoires.

La résolution de certaines équations aux dérivées partielles telles que, par exemple, l'équation de la chaleur sur $\mathbf{R}$, peut être abordée, avec une discussion sur les propriétés qualitatives des solutions.

**253 : Utilisation de la notion de convexité en analyse.**

Il s'agit d'une leçon de synthèse, très riche, qui mérite une préparation soigneuse. Même si localement (notamment lors de la phase de présentation orale) des rappels sur la convexité peuvent être énoncés, ceci n'est pas nécessairement attendu dans le plan. Il s'agit d'aborder différents champs des mathématiques où la convexité intervient. On pensera bien sûr, sans que ce soit exhaustif, aux problèmes d'optimisation (par exemple de la fonctionnelle quadratique), au théorème de projection sur un convexe fermé, au rôle joué par la convexité dans les espaces vectoriels normés (convexité de la norme, jauge d'un convexe,...). Les fonctions convexes élémentaires permettent aussi d'obtenir des inégalités célèbres. On retrouve aussi ce type d'argument pour justifier des inégalités de type BRUNN-MINKOWSKI ou HADAMARD. Par ailleurs, l'inégalité de JENSEN a aussi des applications en intégration et en probabilités.

Pour aller plus loin, on peut mettre en évidence le rôle joué par la convexité dans le théorème de séparation de HAHN-BANACH. On peut aussi parler des propriétés d'uniforme convexité dans certains espaces, les espaces $L^p$ pour $p > 1$, par exemple, et de leurs conséquences.

**260 : Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.**

Cette leçon ne sera pas utilisée pour la session 2020; les notions qui s'y rapportent peuvent être exploitées dans les leçons 261, 262, 264, 266.

Les candidats doivent connaître la définition des moments centrés et les implications d'existence de moments (décroissance des $L^p$). Les connaissances sur les variables aléatoires à densité sont parfois fragiles. Le candidat doit pouvoir citer — mais doit surtout savoir retrouver rapidement — les espérances et variances de lois usuelles, notamment BERNOULLI, binomiale, géométrique, POISSON, exponentielle, normale. La variance de la somme de variables aléatoires indépendantes suscite souvent des hésitations. Les inégalités classiques (de MARKOV, de BIENAYMÉ-CHEBYSHEV, de JENSEN et de CAUCHY-SCHWARZ) pourront être données, ainsi que les théorèmes de convergence (lois des grands nombres et théorème central limite). La notion de fonction génératrice des moments est importante ainsi que les liens entre moments et fonction caractéristique.

**261 : Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.**

Cette leçon est l'occasion de présenter clairement la notion de loi d'une variable aléatoire et de l'illustrer par de nombreux exemples et calculs. On distinguera bien la probabilité $\mathbf{P}$ sur $\Omega$ de la probabilité $\mu_X$ définie sur l'ensemble des valeurs de $X$ par $\mu_X(A) = \mathbf{P}(X \in A) = \mathbf{P}(X^{-1}(A))$. Le théorème de transfert qui calcule $\mathbf{E}[f(X)]$ peut alors être donné comme une extension fonctionnelle de cette définition ensembliste. Inversement, on peut s'intéresser à des classes $\mathcal{C}$ de fonctions telles que la connaissance de $\mathbf{E}[f(X)]$ pour $f \in \mathcal{C}$ détermine la loi de $X$. Ceci mène aux outils usuels de caractérisation de la loi (fonction de répartition, fonction caractéristique, densité éventuelle, mais aussi la fonction génératrice pour des variables entières ou la transformée de LAPLACE de variables positives, ou encore les moments lorsque cela est pertinent). Les principales propriétés des fonctions de répartition des variables réelles doivent être connues. Il est important de savoir qu'il y a une bijection entre les lois sur $\mathbf{R}$ et les fonctions croissantes continues à droite tendant vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$. Il faut savoir interpréter les sauts d'une fonction de répartition, et, lorsque la fonction de répartition est $C^1$, savoir que la variable admet alors une densité qui est la dérivée de la fonction de répartition. Le jury s'attend à ce que le candidat puisse tracer la fonction de répartition de lois simples. Les principales propriétés des fonctions caractéristiques doivent être également connues : continuité, limite à l'infini, régularité plus forte en fonction de l'existence de moments. Des résultats analogues (et plus élémentaires) portant sur les fonctions génératrices de variables entières ou les transformées de LAPLACE de variables positives ont également toute leur place ici. La caractérisation de l'indépendance de $n$ variables en termes de produit de lois entre dans le cadre de cette leçon. Les variables aléatoires à valeurs vectorielles (en restant dans le cadre de la dimension finie) font aussi partie de la leçon et on évoquera la loi conjointe et les lois marginales. La notion d'indépendance pourra alors être décrite. Cette leçon devra être illustrée par de nombreux exemples de calculs de lois : présentation de lois usuelles en lien avec ce qu'elles modélisent, calculs de fonctions caractéristiques ou de densités selon pertinence, loi de $\phi(X)$ à partir de la loi de

$X$, loi de $\max(X_1, \ldots, X_n)$, $\min(X_1, \ldots, X_n)$, $X_1 + \ldots + X_n$, etc.

**262 : Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.**

Les théorèmes limite sont au cœur de cette leçon. Les théorèmes de convergence, lois des grands nombres et théorème central limite, doivent être énoncés et il faut au moins pouvoir en expliquer la signification et en connaître l'architecture des preuves. La maîtrise des différentes définitions des modes de convergence est attendue mais doit être completée par leur mise en pratique dans les différents théorèmes limites. Les différences entre ces théorèmes doivent être abordées avec des exemples et contre-exemples.

Les implications entre les divers modes de convergence, ainsi que les réciproques partielles doivent être connues. Des contre-exemples aux réciproques sont attendus par le jury.

Pour aller plus loin, les candidats pourront s'intéresser au comportement asymptotique de marches aléatoires (en utilisant par exemple le lemme de Borel-Cantelli, les fonctions génératrices,...). Enfin, les résultats autour des séries de variables aléatoires indépendantes comme le théorème de Kolmogorov peuvent tout à fait se placer dans cette leçon.

On peut aussi s'intéresser aux temps de retour pour une marche aléatoire simple. Pour aller plus loin, et pour les candidats maîtrisant ces notions, on peut suggérer aussi l'étude asymptotique de(s) chaînes de Markov, ou encore d'aborder les lois infiniment divisibles, les lois stables, les processus de renouvellement (qui donnent de beaux théorèmes de convergence).

**264 : Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.**

Le jury attend des candidats qu'ils rappellent la définition d'une variable aléatoire discrète et que des lois usuelles soient présentées, en lien avec des exemples classiques de modélisation. Le lien entre variables aléatoires de Bernoulli, binomiale et de Poisson doit être discuté. Il peut être d'ailleurs intéressant de mettre en avant le rôle central joué par les variables aléatoires de Bernoulli.

Les techniques spécifiques aux variables discrètes, notamment à valeurs entières, devront être mises en évidence, comme par exemple la caractérisation de la convergence en loi, la notion de fonction génératrice.

Pour aller plus loin, le processus de Galton-Watson peut se traiter intégralement à l'aide des fonctions génératrices et cette voie a été choisie par plusieurs candidats : cela donne un développement de très bon niveau pour ceux qui savent justifier les étapes délicates.

Pour aller beaucoup plus loin, les candidats pourront étudier les marches aléatoires, les chaînes de Markov à espaces d'états finis ou dénombrables, les sommes ou séries de variables aléatoires indépendantes.

**265 : Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.**

La leçon ne doit pas se cantonner au seul champ des fonctions usuelles (logarithme, exponentielle, trigonométriques, hyperboliques et réciproques) ; un candidat doit être en mesure d'en présenter rapidement les définitions et les propriétés fondamentales, savoir les tracer sans difficultés, et mener l'étude aux bornes de leur domaine, ainsi qu'en connaître les prolongements éventuels, leurs développements de Taylor ou en série entière, leurs applications au calcul intégral, les équations fonctionnelles associées ou formules particulières, etc. Le jury n'attend pas un catalogue de fonctions mais plutôt un choix pertinent et réfléchi, avec des applications en probabilité, convexité, études de courbes, ou autour des développements asymptotiques. Les déterminations du logarithme complexe peuvent tout à fait mériter une discussion approfondie dans cette leçon et donner lieu à des développements de bon niveau, pouvant aller jusqu'à leur interprétation géométrique.

Le domaine des fonctions spéciales est très vaste. Plutôt qu'un catalogue de fonctions, il vaut bien mieux se concentrer sur des exemples restreints, mais fouillés, comme l'étude approfondie (d'une) des fonctions $\Gamma$, $\zeta$ ou $\theta$, leurs propriétés fonctionnelles, leurs prolongements, leur étude asymptotique aux bornes et les domaines d'application de ces fonctions.

Il y a des manières, très différentes, de construire cette leçon. Par exemple, on peut bâtir un exposé organisé selon des problématiques et des techniques mathématiques : suites et séries de fonctions, fonctions holomorphes et méromorphes, problèmes de prolongement, développements asymptotiques, calculs d'intégrales et intégrales à paramètres, transformées de FOURIER ou de LAPLACE, etc. Mais on pourrait tout aussi bien suivre un fil conducteur motivé par un domaine d'application :

- en arithmétique pour évoquer, par exemple, la fonction $\zeta$ et la distribution des nombres premiers,
- en probabilités avec la loi normale et la fonction erreur, ou les lois Gamma et Bêta, la loi du produit de variables aléatoires normales et indépendantes, les fonctions de BESSEL et leurs liens avec la densité du $\chi^2$ non centrée et celle de la distribution de VON MISES-FISHER,
- en analyse des équations aux dérivées partielles où les fonctions spéciales interviennent notamment pour étudier le problème de DIRICHLET pour le Laplacien ou l'équation des ondes,
- il est aussi possible d'évoquer les polynômes orthogonaux, leurs propriétés et leurs diverses applications, en physique (oscillateur harmonique et polynômes de HERMITE), en probabilités (polynômes de HERMITE pour les lois normales, de LAGUERRE pour les lois Gamma, de JACOBI pour les lois Bêta...), pour l'étude d'équations aux dérivées partielles ou pour l'analyse de méthodes numériques,
- en théorie des représentations de groupes avec les fonctions de BESSEL,
- en algèbre en abordant les fonctions elliptiques et la fonction $\wp$ de WEIERSTRASS.

Pour la session 2020, deux nouvelles leçons seront proposées :

**266 : Illustration de la notion d'indépendance en probabilités.**

L'indépendance est centrale en probabilités et démarque cette théorie de celle de l'intégration. La motivation de cette leçon est de présenter cette notion de façon cohérente et de l'illustrer par des énoncés fondamentaux et des modèles importants.

À partir de la notion élémentaire de probabilité conditionnelle, on pourra introduire l'indépendance de deux événements, l'indépendance mutuelle d'une suite d'événements, voire celle d'une suite de tribus, puis l'indépendance de familles de variables aléatoires. Ces notions doivent être illustrées par des exemples et des énoncés simples (indépendance deux à deux et indépendance mutuelle, indépendance et opérations ensemblistes, etc). Il est important de pouvoir présenter un espace de probabilité sur lequel sont définies $n$ variables aléatoires indépendantes, au moins à un niveau élémentaire pour des variables discrètes ou à densité. De façon plus sophistiquée, on peut envisager de donner une construction d'un espace de probabilité sur lequel est définie une suite de variables aléatoires réelles indépendantes ayant des lois prescrites.

Au delà des définitions, il est nécessaire de décliner quelques propriétés simples de l'indépendance, notamment celles en lien avec l'espérance et, plus spécifiquement, les notions de variance et de covariance, ce qui peut s'illustrer par exemple par l'obtention de lois faibles des grands nombres. Une autre illustration possible consiste en la représentation des variables usuelles (binomiales, géométriques, hypergéométriques ...) à l'aide d'expériences indépendantes élémentaires. Grâce aux divers critères utilisant les fonctions ou transformées caractérisant les lois (densité, fonction génératrice, fonction de répartition à $n$ variables, fonction caractéristique, etc) il est possible de présenter les propriétés d'indépendance remarquables dont jouissent les lois usuelles (lois de POISSON, lois normales, lois exponentielles, lois de CAUCHY ou, pour aller plus loin, par exemple, la traduction de l'indépendance des vecteurs gaussiens en termes d'algèbre bilinéaire).

Les réciproques du lemme de BOREL-CANTELLI et la loi du 0-1 de KOLMOGOROV, plus sophistiquée, tiennent une place de choix dans cette leçon ; elles permettent notamment d'obtenir des convergences presque sûres. De manière générale, il est important d'illustrer cette leçon par des exemples tels que l'étude des records ou les propriétés du minimum de variables exponentielles indépendantes ou bien les statistiques d'ordre, ou encore le principe du « singe tapant à la machine », etc. Enfin, la promenade aléatoire simple symétrique sur $\mathbf{Z}$ est une riche source d'exemples.

**267 : Exemples d'utilisations de courbes en dimension 2 ou supérieure.**

Cette leçon de synthèse doit permettre de montrer la variété d'utilisation des courbes dans le plan (ou, dans une perspective plus ambitieuse, de courbes tracées sur un objet géométrique plus élaboré), que celles-ci soient définies sous une forme paramétrique ou une sous forme implicite. Plutôt qu'une théorie générale ou un catalogue de formules relatives à divers systèmes de coordonnées qui seraient donnés sans motivation, le jury attend plutôt une illustration des applications des courbes planes en topologie, en calcul différentiel, en géométrie ou en analyse complexe à partir d'exemples et de résultats pertinents. Il s'agit d'un sujet suffisamment riche qui permet d'aborder des points de géométrie intéressants tout en restant à un niveau mathématique raisonnable. Cette leçon doit présenter différents aspects de l'utilisation des courbes : on ne pourra se contenter d'un seul. La liste qui suit, qui n'est pas exhaustive, présente plusieurs pistes.

Les propriétés métriques des courbes planes (longueur d'arc, voire courbure) font naturellement partie de cette leçon. Un axe de cette leçon pourrait concerner l'obtention du tracé des courbes et l'étude de mouvements ponctuels dans le plan, qu'ils soient donnés sous forme de lieux (coniques, cycloïdes diverses, etc) ou de solutions d'équations différentielles (par exemple inspirés de problème de mécanique du point, comme le mouvement à deux corps et les lois de KEPLER). On peut également penser à l'utilisation d'intégrales premières en vue de l'analyse des solutions de systèmes d'équations différentielles ordinaires (périodicité du mouvement d'un pendule pesant, de solutions du système de LOTKA–VOLTERRA, méthode des caractéristiques pour la résolution d'équations de transport, etc.). Il est important que les exemples de tracés de courbes soient motivés.

L'application des courbes planes à la topologie est un point qui peut illustrer naturellement cette leçon : le concept de connexité par arcs, le théorème du relèvement ainsi que la notion d'indice d'un lacet par rapport à un point en lien avec le théorème intégral de CAUCHY en analyse complexe... sont des sujets d'investigation pertinents pour cette leçon. Pour aller plus loin, cette leçon peut être l'occasion de s'attarder sur ces techniques d'analyse complexe ainsi que sur les divers résultats qui y sont liés comme par exemple, la formule des résidus, l'existence d'une primitive complexe, voire la méthode du col pour l'obtention de développements asymptotiques, l'étude de certaines transformations conformes (comme la transformation de JOUKOVSKI) et leurs applications... Pour les candidats qui le souhaitent, il est enfin possible de développer quelques aspects de géométrie des surfaces en parlant par exemple de vecteurs tangents, de géodésiques sur la sphère ou encore d'extrema liés.

# Chapitre 6

# Épreuves orales de modélisation

## 6.1 Déroulement des épreuves de Modélisation

Lors de l'inscription au concours, quatre options sont proposées :

A. Probabilités et Statistiques,
B. Calcul scientifique,
C. Algèbre et Calcul formel,
D. Informatique.

L'épreuve de modélisation comporte une période de préparation de quatre heures et une interrogation dont la durée est d'une heure, modalités qui s'appliqueront encore pour la session 2022.

Le jury rappelle que, même s'il s'agit d'une épreuve plus appliquée ou moins académique que les deux autres épreuves orales, cela ne dispense en aucun cas les candidats de faire preuve de la rigueur mathématique requise : quand on utilise un théorème, il faut impérativement être capable d'en restituer un jeu d'hypothèses. Par jeu d'hypothèses correct, on entend que le théorème soit vrai et qu'il s'applique effectivement au contexte considéré. Le jury n'attend pas nécessairement un énoncé avec les hypothèses les plus générales possibles.

L'épreuve de modélisation permet aux candidats de mettre en avant diverses qualités : les connaissances mathématiques / informatiques, la réflexion et la mise en perspective des connaissances, l'aptitude à les appliquer à des problèmes concrets de modélisation, la pertinence des illustrations informatiques, les qualités pédagogiques de mise en forme d'un exposé construit et cohérent, la capacité à faire preuve d'initiative pour s'exprimer et manifester des qualités pédagogiques et de synthèse. La capacité des candidats à répondre aux questions fait partie intégrante de l'évaluation de cette épreuve. Comme pour l'ensemble des oraux, le caractère vivant de l'exposé est un atout.

Le texte fourni est la base pour construire et exposer un traitement mathématique / informatique (pour l'option D) d'un problème « concret » en s'appuyant sur les éléments, généralement partiels, disséminés dans le texte. La présentation doit s'appuyer sur un dosage cohérent et harmonieux entre introduction motivée de modèles, preuves mathématiques, illustrations informatiques, critiques éventuelles du texte, réponses aux questions, mise en lumière des connaissances. Les candidats doivent utiliser leurs connaissances mathématiques et informatiques pour justifier les points de leur choix parmi ceux évoqués dans le texte, proposer un retour sur le modèle ainsi qu'une conclusion.

### 6.1.1 Textes

L'épreuve de modélisation repose sur l'exploitation d'un texte d'environ 5 à 6 pages que les candidats choisissent parmi les deux qui leur sont proposés lors du tirage et qu'ils pourront consulter en ligne dans la salle de préparation.

Ces textes sont surmontés, pour les options A, B, C des bandeaux :

> *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte, dont il dispose d'une copie pendant l'interrogation, sans toutefois être censé le connaître. La présentation, bien que totalement libre, doit être organisée et le jury recommande qu'un plan soit annoncé en préliminaire. L'exposé doit être construit en évitant la paraphrase et doit mettre en lumière vos connaissances, à partir des éléments du texte. Il doit contenir des illustrations informatiques réalisées sur ordinateur, ou, à défaut, des propositions de telles illustrations. Des pistes de réflexion, indicatives et largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte.*

Pour l'option D, le bandeau était :

> *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte, dont il dispose d'une copie pendant l'interrogation, sans toutefois être censé le connaître. La présentation, bien que totalement libre, doit être organisée et le jury recommande qu'un plan soit annoncé en préliminaire. L'exposé doit être construit en évitant la paraphrase et mettant en lumière vos connaissances, à partir des éléments du texte. Il doit contenir des illustrations informatiques réalisées sur ordinateur, comportant une part significative de programmation dans un ou plusieurs des langages C, CAML, Java ou Python. Des pistes de réflexion, indicatives et largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte.*

Les textes se termineront par les recommandations suivantes pour les options A, B, C, D :

> *Les pistes de réflexion suivantes ne sont qu'indicatives et il n'est pas obligatoire de les suivre. Vous pouvez choisir d'étudier, ou non, certains des points proposés, de façon plus ou moins approfondie, mais aussi toute autre question à votre initiative. Vos investigations comporteront une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats. À défaut, si vos illustrations informatiques n'ont pas abouti, il est conseillé d'expliquer ce que vous auriez souhaité mettre en œuvre.*

Les textes sont souvent motivés par des problèmes concrets. Ils peuvent présenter des arguments rapides, voire heuristiques, qui sont dans ce cas signalés comme tels, mais ils ne contiennent pas d'assertion délibérément trompeuse et se concluent par une liste de suggestions.

Même si la plupart des textes s'appuient sur des problématiques issues de sciences autres que les mathématiques, aucune connaissance dans ces domaines n'est exigée par le jury. Discuter la modélisation proposée par un texte consiste donc avant tout à dégager les comportements qualitatifs du modèle, la manière dont il dépend d'éventuels paramètres et s'il semble apte à rendre compte des phénomènes qu'il est censé représenter. Toutefois, le jury s'attend à ce que les candidats ne se contentent pas d'un exposé intégralement qualitatif et démontrent certains résultats évoqués dans le texte ; il apprécie particulièrement, sans toutefois l'exiger, qu'un candidat montre sa compréhension du modèle en exhibant par exemple les conséquences d'une variation de paramètres ou de données, notamment dans l'illustration informatique. *A contrario*, des interprétations qualitatives du comportement des modèles sont trop souvent absentes des exposés. Pourtant, montrer que l'on comprend un modèle ne se réduit pas à prouver un théorème, et nécessite d'exposer des expérimentations informatiques à fin d'illustration.

Chaque année, des textes sont rendus publics et sont disponibles sur le site de l'agrégation de mathématiques http://agreg.org. Ces textes sont représentatifs de l'épreuve et permettent aux candidats de se familiariser avec le format des textes, de se faire une idée des attentes du jury, de réfléchir à des illustrations numériques pertinentes dans le cadre du texte, ou, pour l'option D, d'évaluer les exigences de programmation de l'épreuve.

### 6.1.2 Préparation

Durant les quatre heures de préparation, les candidats ont accès à une bibliothèque numérique et disposent d'un ordinateur dont la configuration est décrite sur le site de l'agrégation de mathématiques, à l'adresse http://agreg.org. Les candidats retrouveront le même environnement sur l'ordinateur de la salle d'interrogation. Il n'est évidemment pas réaliste de découvrir les logiciels à disposition des candidats le jour de l'épreuve : la configuration informatique utilisée pour le concours et sa documentation sont accessibles et téléchargeables sur le site http://clefagreg.dnsalias.org/ et permettent de se familiariser avec l'environnement offert lors de l'épreuve.

*Il est instamment demandé aux candidats de pas écrire sur le texte imprimé qui lui est distribué car il est destiné à être utilisé à nouveau pendant la session.*

Il est recommandé aux candidats de consacrer une partie de leur temps de préparation à s'interroger sur le discours qu'ils tiendront, la stratégie d'exploitation du tableau et d'utilisation de l'outil informatique et le temps qu'ils vont consacrer à chacune des parties de leur plan, ce qui leur permettra de mettre au mieux en valeur leurs connaissances et leur compréhension du texte ou d'une partie de celui-ci. Proposer un exposé structuré et cohérent ne peut s'improviser au moment de l'oral et doit faire l'objet d'une réflexion préalable durant la préparation. Il est conseillé aux candidats de consacrer quelques minutes à la fin de leur préparation à une prise de recul sur leur plan. Le plan est un élément important pour le jury, qui pourra, en s'y référant, aider les candidats dans leur gestion du temps de l'exposé, notamment en leur rappelant, si ce n'est fait avant les dernières minutes, que l'illustration informatique doit être présentée au cours de la présentation et non pendant le temps d'échange.

### 6.1.3 Oral

Au début de l'interrogation, le jury rappelle les modalités de l'épreuve, puis invite les candidats à vérifier que les fichiers qu'ils ont créés lors de la préparation ont bien été transférés sur la machine servant pour l'épreuve (dont l'environnement est identique à celui de la salle de préparation). L'épreuve est scindée en deux temps : un exposé de 35 minutes suivi de 25 minutes d'échanges avec le jury. Les candidats ont la recommandation de commencer par donner la structure de leur présentation sous forme d'un plan et le déroulement de l'exposé doit être en cohérence avec cette structure. Grâce à ce plan, le jury pourra ainsi avoir une vision globale de l'exposé et aider, si besoin, les candidats à gérer leur temps. Comme les candidats se le voient rappeler en début d'épreuve, l'exposé doit être accessible à un public qui découvre les problématiques du texte et doit permettre d'en faire comprendre les enjeux à un public qui ne le connaîtrait pas. Le jury, tout en étant conscient des difficultés du concours, attend un minimum d'aisance au tableau, la manifestation d'une certaine volonté de capter l'attention de l'auditoire et un discours clair et précis.

L'exercice de l'exposé en temps limité nécessite un certain entraînement. Il est malheureusement fréquent de voir des exposés un peu trop lents pendant les 20 à 25 premières minutes qui accélerent brutalement dans les 10 dernières minutes et que les candidats peinent à conclure dans le temps imparti. Par ailleurs, si le jury sanctionne un exposé significativement trop bref, la démarche consistant à « jouer la montre » est encore plus sévèrement pénalisée.

Durant l'exposé, les candidats disposent de leurs notes, d'un tableau et d'un ordinateur. Ils peuvent alterner, quand bon leur semble, entre un exposé oral, quelques éléments rédigés au tableau de façon propre et lisible et la présentation de ce qui a été préparé à l'aide de l'outil informatique. Les candidats doivent gérer correctement le tableau et demander, si besoin, au jury les parties qu'ils peuvent effacer, le jury pouvant souhaiter conserver certains passages et y revenir lors des échanges avec les candidats. Le jury n'est pas censé connaître le texte présenté par le candidat, mais chaque membre dispose néanmoins d'un exemplaire papier, afin que les candidats puissent y faire référence pour éviter de recopier les notations, les énoncés complets ou certaines formules. Même si les programmes ne fonctionnent pas comme ils l'auraient souhaité ou si les simulations numériques n'ont pas abouti, les candidats sont invités à expliquer ce qu'ils voulaient mettre en œuvre, illustrer ou programmer. Si, lors de la phase d'exposé, les candidats n'ont pas du tout utilisé l'ordinateur dix minutes avant la fin du temps qui leur est imparti, le jury les en alertera.

Il n'y a pas de « format type » pour cette épreuve. Sur un même texte, des prestations très différentes, tant dans leur forme que dans leur contenu, peuvent conduire également à des notes élevées. Comme dans tout oral, la construction de l'exposé doit être une préoccupation importante des candidats. Une réflexion s'impose afin de produire un tout cohérent et intelligible par un public qui, dans l'esprit de l'épreuve, découvre le texte à travers l'exposé des candidats. Une brève introduction à la problématique avant de s'engager dans une longue digression (succession de définitions, théorèmes,... ) sans lien avec le problème de départ ne peut conduire à une prestation jugée comme satisfaisante et sera sanctionné par le jury.

De même, un exposé se réduisant à la présentation de la problématique du texte et à des illustrations informatiques, ou à l'énumération linéaire des pistes de réflexion proposées par le texte, sans contribution des candidats, ne peut conduire au mieux qu'à un résultat médiocre. Un texte traité de façon partielle mais substantielle et en profondeur peut au contraire donner une note élevée. Plutôt qu'un survol superficiel de l'intégralité du texte sans apport mathématique / informatique ou critique scientifique, les candidats doivent préférer une discussion fouillée d'une portion du texte, bâtie sur des arguments mathématiques / informatiques solides, des simulations pertinentes accompagnées de commentaires de bon aloi. Néanmoins, dans l'ensemble, les candidats semblent avoir perçu la nécessité d'utiliser, au mieux, le temps qui leur est dédié. Le jury apprécie de voir de plus en plus de candidats qui se sont approprié le texte et en donnent une présentation pertinente et autre qu'une paraphrase linéaire.

Pour enrichir leur propos, les candidats sont invités à mobiliser leurs connaissances sur des aspects variés du programme, en étayant les arguments seulement esquissés dans le texte par des énoncés précis. Il est totalement illusoire de chercher à impressionner le jury par une logorrhée de mots savants : les textes proposés peuvent être discutés en exploitant un bagage technique qui n'utilise pas les éléments les plus sophistiqués du programme. En particulier, le jury ne manque pas de s'attarder sur toute notion amenée par les candidats durant leur présentation et il est toujours dommageable de s'aventurer sur des terrains méconnus. Bien plus qu'une démonstration de virtuosité technique, le jury attend que les candidats montrent leur maîtrise d'énoncés relativement simples « en situation » : c'est là que réside une des difficultés principales de l'épreuve. Nombre de candidats peinent à formaliser précisément des notions de base du programme ou à mettre en œuvre certaines de leurs connaissances. De plus, même si le jury ne se formalise pas de petites erreurs de calcul lors des questions, il apprécie particulièrement que, lors de l'exposé, les résultats présentés soient justes.

*A contrario*, utiliser une portion excessive du temps de parole pour recycler un chapitre de cours ou un développement d'une leçon d'Analyse et Probabilités, d'Algèbre et Géométrie ou d'Informatique, en s'éloignant des enjeux du texte, est considéré comme un hors sujet et est sévèrement sanctionné. La paraphrase pure et simple d'amples portions du texte ne constitue en aucun cas un exposé satisfaisant. Les textes fournissent souvent des esquisses de démonstrations qui sont précisément destinées à être complétées et commentées. Les candidats ne doivent pas se contenter de ces esquisses de démonstration. S'ils en font mention, le jury s'assurera que les candidats ont compris en profondeur et qu'ils maîtrisent la démonstration dans sa totalité.

Le jury est sensible à l'honnêteté du discours. Tenter de faire semblant de connaître une notion ou d'avoir compris un point du texte ou une démonstration ou utiliser un extrait du texte comme argument d'autorité sont pénalisés. Un regard critique (« il faudrait prouver que... mais je n'ai pas réussi à le faire », « les hypothèses du théorème de XXX que je connais pour aborder des problèmes similaires ne sont pas satisfaites dans le cas présent »...) est une attitude bien plus payante.

Les candidats sont libres de la gestion de leur exposé ; ils sont encouragés à réfléchir à l'organisation qu'ils vont adopter et qui peut constituer une réelle plus-value. Des formats très différents de prestation ont été valorisés : certains s'éloignant du découpage opéré par le texte et arrangeant les éléments autrement ; d'autres présentant un survol du problème, de la méthode et des résultats obtenus avant de détailler des aspects plus mathématiques ; d'autres au contraire suivant de près la progression du texte mais en y apportant les éclairages et les illustrations nécessaires. De bons exposés ont parfois choisi d'aller loin dans le texte pour en décrire la dynamique globale et l'aboutissement (quitte à ne pas traiter toutes les démonstrations) ; d'autres exposés, tout aussi bons, ont traité un passage plus limité du texte mais de manière détaillée et en fournissant tous les arguments pertinents. L'essentiel est d'*éviter la paraphrase sans plus-value mathématique*. En particulier, *de nombreuses affirmations des textes ne sont pas justifiées et le jury s'attend à ce que le candidat les identifie pendant sa préparation et fournisse les explications manquantes* (ou, à défaut, des pistes). A titre d'exemple, si une preuve très détaillée du texte omet délibérément un point important, le jury déplorera que cette preuve soit intégralement recopiée sans que le point en question ne soit même relevé. Au contraire, le jury valorisera les « lacunes » que le candidat aura repérées et comblées par lui-même. En début d'épreuve, le jury rappelle qu'il a le texte sous les yeux. Ainsi, la réécriture à l'identique et au tableau de longs passages du texte ne présente qu'un intérêt très limité si elle n'est pas accompagnée d'apports du candidat.

### 6.1.4 Echanges avec le jury

Durant 25 minutes, le jury revient sur certains propos des candidats qui méritent précision. Il peut demander un énoncé précis de théorèmes utilisés pour démontrer une assertion ou des éléments de démonstration d'un théorème énoncé par les candidats.

Les échanges peuvent également porter sur la modélisation, les illustrations informatiques ou la programmation pour l'option D.

## 6.2 Recommandations du jury, communes aux options A, B, C

Le jury tient à souligner les attentes partagées entre les trois options A (Probabilités et Statistiques), B (Calcul scientifique) et C (Algèbre et Calcul formel).

Le jury regrette de ne pas voir davantage de dessins (soignés) ou schémas explicatifs qui peuvent rendre l'argumentation plus claire et convaincante. La capacité à revenir sur le problème de départ et à conclure quant à l'efficacité de l'approche mathématique proposée pour y répondre est une qualité très appréciée. La rigueur et la clarté de l'organisation, la gestion du temps, la pertinence des choix opérés parmi les différentes questions soulevées par le texte sont des éléments de l'évaluation. Les qualités de synthèse sont aussi appelées à s'exprimer : il vaut mieux indiquer les étapes cruciales d'un raisonnement que de se lancer dans un long calcul fastidieux qu'on aura du mal à mener à bien et à mettre en valeur. Les candidats doivent être attentifs au fait que les arguments présents dans les textes, notamment au cours des démonstrations, peuvent être partiels. Il est très important que les affirmations des candidats soient étayées et que les preuves exposées soient entièrement reprises et *complètes*. L'évaluation repose pour une grande part sur la capacité des candidats à identifier les lacunes et ellipses volontaires des textes. Enfin, l'aspect pédagogique de l'exposé, même si le texte n'est restitué que partiellement mènera à une note bien plus élevée qu'un catalogue de type paraphrase.

#### Illustration informatique

Le jury rappelle son fort attachement à cet aspect de l'épreuve, dont les ambitions sont clairement délimitées. Il ne s'agit en aucun cas, et pour aucune des trois options, d'un exercice de programmation. L'objectif est d'être capable d'utiliser l'outil informatique pour illustrer, de façon pertinente, le contenu du texte. Il ne s'agit pas d'éblouir le jury par une virtuosité en programmation, au détriment d'un temps raisonnable accord'e à la discussion et l'analyse du modèle.

La réalisation de cet objectif constitue une part incompressible de la note finale attribuée à l'épreuve. Une très bonne évaluation peut résulter d'une exploitation judicieuse de programmes simples, reposant largement sur les routines standards des logiciels fournis. La forme et la nature des illustrations proposées n'obéissent à aucun format préétabli. En revanche, elles doivent faire la preuve d'une véritable réflexion scientifique et être agrémentées de commentaires, sur les résultats et les méthodes. Une analyse sommaire de la complexité des algorithmes est attendue. Une analyse de l'ordre numérique des méthodes, notamment à l'aide de régressions linéaires, peut être demandée aux candidats. Les illustrations informatiques devraient plus souvent permettre de faire un retour sur la problématique du texte et il convient de commenter les résultats obtenus dans le cadre du modèle proposé par le texte. Des illustrations peuvent mettre en valeur les limites du modèle étudié et le jury apprécie particulièrement que les candidats aient un regarde critique sur le texte et ne prennent pas celui-ci pour vérité absolue.

Si un bel effort est produit par la majorité des candidats, un nombre très limité d'entre eux rechignent encore à toucher à l'outil informatique. Cette stratégie, dont on pourrait naïvement penser qu'elle permet de consacrer plus de temps à l'analyse du texte et à la préparation de l'exposé oral, est fortement sanctionnée.

Il est important de se rappeler qu'il s'agit d'une illustration. Les candidats peuvent choisir de présenter leur code, s'ils le souhaitent, mais ils doivent réfléchir à en extraire les points clés ; une présentation exhaustive et linéaire est préjudiciable à l'exposé, car elle risque d'empiéter sur le temps à consacrer à la restitution du texte. Cependant, le jury peut demander des précisions sur un point du code. Dans le cas d'une représentation graphique, il est important de préciser, au moins oralement, ce qui est représenté en abscisses et ordonnées.

Pour finir, le jury est tout à fait conscient de la difficulté de de l'utilisation de l'outil informatique en temps limité et en situation de stress. Il reste bienveillant face aux candidats dont les illustrations informatiques n'ont pas abouti au résultat souhaité. Dans une telle situation les candidats sont encouragés à expliquer ce qu'ils ont fait et quel type de résultats ils espéraient obtenir. Le jury sait prendre en compte dans sa notation la démarche suivie lorsqu'elle est clairement argumentée et permettrait, avec des aménagements mineurs, de mettre en évidence des aspects intéressants du texte.

### Liens avec les épreuves d'Analyse-Probabilités et Algèbre-Géométrie

Les candidats ne doivent pas hésiter à s'appuyer sur leurs connaissances spécifiques pour proposer des développements originaux dans les leçons d'Analyse et Probabilités ou d'Algèbre et Géométrie. Par exemple,

A. les candidats de l'option A peuvent nourrir leurs leçons de thèmes et d'exemples probabilistes (la fonction caractéristique d'une variable aléatoire est une transformée de Fourier, le produit de convolution a un sens probabiliste, les espaces $L^p$ d'une mesure de probabilité sont intéressants, l'étude de certaines séries aléatoires est possible, la fonction de répartition est une fonction monotone digne d'intérêt, le calcul intégral est en lien étroit avec les probabilités,...).

B. les candidats de l'option B peuvent centrer leur propos sur des problématiques motivées par les préoccupations du calcul scientifique (approximation de solutions d'équations linéaires ou non linéaires, d'équations différentielles, convergence d'algorithmes, analyse matricielle, calcul effectif d'exponentielle de matrice,...).

C. les candidats de l'option C peuvent s'appuyer sur leurs connaissances spécifiques en algèbre effective. En revanche, comme rappelé plus haut, l'exposé oral en modélisation ne doit pas donner lieu au recyclage d'un développement de leçon du fait que le texte parle d'un sujet similaire.

# Chapitre 7

# La bibliothèque de l'agrégation

## 7.1 Liste des livres disponibles

Le jury attire l'attention des candidats sur le fait que l'organisation du concours met à leur disposition une bibliothèque complète, bien ordonnée, avec des livres faciles à trouver. Cette bibliothèque fait l'objet d'achats réguliers qui permettent de proposer des ouvrages de référence modernes et adaptés. La liste sera mise à jour sur le site du jury avant les épreuves orales.

| | | |
|---|---|---|
| **ABELSON H.**<br>**SUSSMAN G. J.**<br>**SUSSMAN J.** | Structure and interpretation of computer programs – **1 ex.** – | MIT Press |
| **AEBISCHER B.** | L2 Analyse fonctions de plusieurs variables et géométrie analytique – **1 ex.** – | Vuibert |
| **AEBISCHER B.** | L3 Géometrie – **1 ex.** – | Vuibert |
| **AHUÉS M.**<br>**CHATELIN F.** | Exercices de valeurs propres de matrices – **2 ex.** – | Masson |
| **ALBERT L.**<br>**Collectif** | Cours et exercices d'informatique – **1 ex.** – | Vuibert |
| **ALDON G.** | Mathématiques dynamiques – **2 ex.** – | Hachette |
| **ALESSANDRI M.** | Thèmes de géométrie – **2 ex.** – | Dunod |
| **ALLAIRE G.** | Analyse numérique et optimisation – **2 ex.** – | Editions de l'École polytechnique |

| | | |
|---|---|---|
| **ALLANO-CHEVALIER M.**<br>**OUDOT X.** | Analyse et géométrie différentielle – **1 ex.** – | HACHETTE |
| **ALLOUCHE J. P.**<br>**SHALLIT J.** | Automatic sequences theory, applications, generalizations – **1 ex.** – | CAMBRIDGE |
| **AMAR E.**<br>**MATHERON É.** | Analyse complexe – **2 ex.** – | CASSINI |
| **ANDLER M.**<br>**BLOCH J. D.**<br>**MAILLARD B.** | Exercices corrigés de Mathématiques<br>— Tome 1A - Topologie – **4 ex.** –<br>— Tome 1B - Fonctions numériques – **6 ex.** –<br>— Tome 2 - Suites et séries numériques – **7 ex.** –<br>— Tome 3 - Analyse fonctionnelle – **6 ex.** –<br>— Tome 5 - Algèbre générale, polynômes – **4 ex.** –<br>— Tome 6 - Algèbre linéaire, première partie – **6 ex.** –<br>— Tome 7 - Algèbre linéaire, deuxième partie – **7 ex.** – | ELLIPSES |
| **ANDREWS G.** | Number Theory – **1 ex.** – | DOVER |
| **APPLE A.W.** | Modern compiler implementation<br>— in C – **1 ex.** –<br>— in Java – **1 ex.** –<br>— in ML – **1 ex.** – | CAMBRIGDE |
| **ARIBAUD F.**<br>**VAUTHIER J.** | Mathématiques. Première année de DEUG – **1 ex.** – | ESKA |
| **ARNAUDIÈS J-M.**<br>**BERTIN J.** | Groupes, Algèbres et Géométrie<br>— Tome I – **9 ex.** –<br>— Tome II – **5 ex.** – | ELLIPSES |
| **ARNAUDIÈS J-M.**<br>**DELEZOIDE P.**<br>**FRAYSSE H.** | Exercices résolus d'analyse – **1 ex.** – | DUNOD |
| **ARNAUDIÈS J-M.**<br>**DELEZOIDE P.**<br>**FRAYSSE H.** | Exercices résolus d'algèbre bilinéaire et géométrie du cours de Mathématiques tome 4 – **5 ex.** – | DUNOD |

| | | |
|---|---|---|
| **ARNAUDIÈS J-M.**<br>**FRAYSSE H.** | Cours de Mathématiques<br>— 1. Algèbre – **9 ex.** –<br>— 2. Analyse – **5 ex.** –<br>— 3. Compléments d'analyse – **8 ex.** –<br>— 4. Algèbre bilinéaire et géométrie – **5 ex.** – | DUNOD |
| **ARNAUDIÈS J.-M.**<br>**LELONG-FERRAND J.** | Cours de Mathématiques<br>— Tome 1 pour M-M' : Algèbre – **4 ex.** –<br>— Tome 1 pour A-A' : Algèbre – **4 ex.** –<br>— Tome 2 : Analyse – **9 ex.** –<br>— Tome 3 : Géométrie et cinématique – **5 ex.** –<br>— Tome 4 : Equations différentielles, intégrales multiples – **4 ex.** – | DUNOD |
| **ARNOLD V.** | Chapitre supplémentaire de la théorie des équations différentielles ordinaires – **2 ex.** – | MIR |
| **ARNOLD V.** | Équations différentielles ordinaires – **3 ex.** – | MIR |
| **ARNOLD V.** | Lectures on partial differential equations – **1 ex.** – | SPRINGER |
| **ARNOLD A.**<br>**GUESSARIAN I.** | Mathématiques pour l'informatique – **1 ex.** – | EDISCIENCES |
| **ARTIN E.** | Algèbre géométrique – **1 ex.** – | GAUTHIER-VILLARS |
| **ARTIN E.** | Algèbre géométrique – **4 ex.** – | GABAY |
| **ARTIN M.** | Algebra – **2 ex.** – | PRENTICE HALL |
| **AUBIN J.P.** | Analyse fonctionnelle appliquée<br>— Tome 1 – **1 ex.** –<br>— Tome 2 – **1 ex.** – | PUF |
| **AUDIN M.** | Géométrie de la licence à l'agrégation – **1 ex.** – | BELIN |
| **AUTEBERT J. M.** | Calculabilité et décidabilité – **1 ex.** – | MASSON |
| **AUTEBERT J. M.** | Théorie des langages et des automates – **1 ex.** – | MASSON |

| | | |
|---|---|---|
| **AVEZ A.** | Calcul différentiel – **1 ex.** – | Masson |
| **AVEZ A.** | La leçon d'analyse à l'oral de l'agrégation | Masson |
| **BAASE S.**<br>**VAN GELDER A.** | Computer algorithms<br>Introduction to design & analysis – **1 ex.** – | Addison<br>Wesley |
| **BADOUEL E.**<br>**BOUCHERON S.**<br>**DICKY A., PETIT A.**<br>**SANTHA M., WEIL P., ZEITOUN M.** | Problèmes d'informatique fondamentale – **1 ex.** – | Springer |
| **BAJARD J.C.** | Exercices d'Algorithmique – **1 ex.** – | ITP |
| **BAKHVALOV N.** | Méthodes numériques – **2 ex.** – | MIR |
| **BARANGER J.** | Analyse numérique – **1 ex.** – | Hermann |
| **BARBE Ph.**<br>**LEDOUX M.** | Probabilité (De la licence à l'agrégation) – **1 ex.** – | Belin |
| **BARRET M.**<br>**BENIDIR M.** | Stabilité des filtres et des systèmes linéaires – **1 ex.** – | Dunod |
| **BASILI B.**<br>**PESKINE C.** | Algèbre – **1 ex.** – | Diderot, éditeur Arts et Sciences |
| **BASS J.** | Cours de Mathématiques<br>— Tome 1 – **2 ex.** –<br>— Tome 2 – **2 ex.** – | Masson |
| **BAUER F. L.** | Decrypted secrets. Methods and maxims of cryptology – **1 ex.** – | Springer |
| **BECK V.**<br>**MALICK J.**<br>**PEYRÉ G.** | Objectif Agregation – **3 ex.** – | HK |
| **BELGHITI I.**<br>**MANSUY R.**<br>**VIE J.J.** | Les clefs pour l'info – **1 ex.** – | Calvage & Mounet |

| | | |
|---|---|---|
| **BENAÏM M.**<br>**EL KAROUI N.** | Promenade aléatoire – **1 ex.** – | Les éditions de l'X |
| **BENDER C.**<br>**ORSZAG S.** | Advanced mathematical methods for scientists and engineers – **3 ex.** – | Mc Graw Hill |
| **BENIDIR M.**<br>**BARRET M.** | Stabilité des filtres et des systèmes linéaires – **1 ex.** – | Dunod |
| **BENOIST J.** *et al* | Math L2, Cours complet avec 700 tests et exercices corrigés – **1 ex.** – | Pearson Education |
| **BENOIST J.**<br>**SALINIER A.** | Exercices de calcul intégral – **2 ex.** – | Dunod |
| **BENZONI-GAVAGE S.** | Calcul différentiel et équations différentielles – **2 ex.** – | Dunod |
| **BERCU B.**<br>**CHAFAÏ D.** | Modélisation stochastique et simulation – **1 ex.** – | Dunod |
| **BERGER M.** | Géométrie<br>— Index – **3 ex.** –<br>— 1. Action de groupes, espaces affines et projectifs – **3 ex.** –<br>— 2. Espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères – **2 ex.** –<br>— 3. Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes – **2 ex.** –<br>— 4. Formes quadratiques, quadriques et coniques – **2 ex.** –<br>— 5. La sphère pour elle-même, géométrie hyperbolique, l'espace des sphères – **2 ex.** – | Cédic/Nathan |
| **BERGER M.** | Géométrie tome 2 – **1 ex.** – | Nathan |
| **BERGER M.** | Géométrie vivante – **2 ex.** – | Cassini |
| **BERGER M.**<br>**BERRY J-P.**<br>**PANSU P.**<br>**SAINT RAYMOND X.** | Problèmes de géométrie commentés et rédigés – **3 ex.** – | Cédic/Nathan |
| **BERGER M.**<br>**GOSTIAUX B.** | Géométrie différentielle – **2 ex.** – | Armand Colin |

| | | |
|---|---|---|
| **BERHUY G.** | Algèbre, le grand combat – **1 ex.** – | Calvage & Mounet |
| **BERLINE N.**<br>**SABBAH C.** | Groupes finis, journées X-UPS 2000 – **1 ex.** – | Editions de l'X |
| **BERTHELIN F.** | Equations différentielles – **3 ex.** – | Cassini |
| **BHATIA R.** | Matrix Analysis – **1 ex.** – | Springer |
| **BICKEL P.J.**<br>**DOKSUM K.A.** | Mathematical statistics – **1 ex.** – | Prentice Hall |
| **BIGGS N. L.** | Discrete mathematics – **1 ex.** – | Oxford Science Publications |
| **BINET G.** | Traitement du signal – **2 ex.** – | Ellipse |
| **BILLINGSLEY P.** | Probability and measure – **2 ex.** – | Wiley |
| **BLANCHARD A.** | Les corps non commutatifs – **5 ex.** – | PUF |
| **BLOMME T.**<br>**GASSOT L.**<br>**GUIGNARD Q.**<br>**RANDÉ B.** | Les clefs pour l'oral – **1 ex.** – | Calvage& Mounet |
| **BOAS R.** | A primer of real functions – **1 ex.** – | Mathematical association of America |
| **BOCCARA N.** | Distributions – **2 ex.** – | Ellipses |
| **BOISSONAT J.-D.**<br>**YVINEC M.** | Géométrie algébrique – **1 ex.** – | Ediscience |
| **BON J.-L.** | Fiabilité des systèmes – **1 ex.** – | Masson |

| | | |
|---|---|---|
| **BONNANS J.-F.**<br>**GILBERT J.C.**<br>**LEMARÉCHAL C.**<br>**SAGASTIZABAL C.**<br>**PENNEQUIN D.** | Optimisation numérique – **2 ex.** – | Springer |
| **BONY J.-M.** | Cours d'analyse – **5 ex.** – | Editions de l'École polytechnique |
| **BONY J.-M.** | Méthodes mathématiques pour les sciences physiques – **3 ex.** – | Editions de l'École polytechnique |
| **BORIES-LONGUET F.** | Graphes et combinatoire | Ellipse |
| **BOSTAN A.**<br>**CHYZAK F.**<br>**GIUSTI M.**<br>**LEBTRETON R.**<br>**LECERF G.**<br>**SALVY B.**<br>**SCHOST E.** | Algorithmes efficaces en calcul formel – **2 ex.** – | Chyzak F. ed. |
| **BOUALEM H.**<br>**BROUZET J.C.**<br>**ELSNER B.**<br>**KACZMAREK L.** | Mathématique L1 – **1 ex.** – | Pearson Education |
| **BOURBAKI N.** | Éléments de Mathématique<br>— Topologie générale, chapitres V à X – **2 ex.** –<br>— Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à VII – **2 ex.** –<br>— Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à III – **1 ex.** –<br>— Fascicule XIII Intégration, chapitres I à IV – **2 ex.** – | Hermann |
| **BOURGADE P.** | Annales des Olympiades internationales de mathématiques 1976-2005 – **1 ex.** – | Cassini |
| **BOUVIER A.**<br>**RICHARD D.** | Groupes – **3 ex.** – | Hermann |
| **BRÉMAUD P.** | Introduction aux probabilités – **1 ex.** – | Springer |

| | | |
|---|---|---|
| **BRÉZIS H.** | Analyse fonctionnelle, théorie et applications – **3 ex.** – | MASSON |
| **BRIANE M.**<br>**PAGÈS G.** | Théorie de l'intégration<br>Cours et exercices, 3ème édition – **1 ex.** – | VUIBERT |
| **BROUSSE P.** | Mécanique MP - PC.- Spéciales A. A'. B. B'. – **2 ex.** – | ARMAND COLIN |
| **BRUCE J.W.**<br>**GIBLIN P.J.**<br>**RIPPON P.J.** | Microcomputers and Mathematics – **1 ex.** – | CAMBRIDGE |
| **CABANE R.**<br>**LEBOEUF C.** | Algèbre linéaire<br>— 1. Espaces vectoriels , Polynômes – **4 ex.** –<br>— 2. Matrices et réduction – **4 ex.** – | ELLIPSES |
| **CABANNES H.** | Cours de Mécanique générale – **2 ex.** – | DUNOD |
| **CALAIS J.** | Éléments de théorie des anneaux – **1 ex.** – | PUF |
| **CALAIS J.** | Éléments de théorie des groupes – **1 ex.** – | PUF |
| **CALDERO P.**<br>**GERMONI J.** | Histoires hédonistes de groupes et de géométries – **7 ex.** – | CALVAGE ET MOUNET |
| **CALVO B.** | Cours d'analyse II – **1 ex.** – | ARMAND COLIN |
| **CANDELPERGHER B.** | Calcul intégral – **1 ex.** – | CASSINI |
| **CANDELPERGHER B.** | Théorie des probabilités – **2 ex.** – | CALVAGE ET MOUNET |
| **CARREGA J.C.** | Théorie des corps – **1 ex.** – | HERMANN |
| **CARRIEU H.** | Probabilités : exercices corrigés – **1 ex.** – | EDP SCIENCES |
| **CARTAN H.** | Calcul différentiel (1971) – **5 ex.** – | HERMANN |

| | | |
|---|---|---|
| **CARTAN H.** | Cours de calcul différentiel (1977) – **1 ex.** – | Hermann |
| **CARTAN H.** | Formes différentielles – **4 ex.** – | Hermann |
| **CARTAN H.** | Théorie élémentaire des fonctions analytiques – **6 ex.** – | Hermann |
| **CARTON O.** | Langages formels, calculabilité et complexité – **3 ex.** – | Vuibert |
| **CASAMAYOU A. et al.** | Calcul mathématique avec SAGE – **1 ex.** – | Copyrighted material |
| **CASAMAYOU A.**<br>**CHAUVIN P.**<br>**CONNAN G.** | Programmation en Python pour les mathématiques – **2 ex.** – | Dunod |
| **CASTI J.L.** | Realty Rules : Picturing the world in mathematics I – **1 ex.** – | Wiley Interscience |
| **CASTI J.L.** | Realty Rules : Picturing the world in mathematics II – **1 ex.** – | Wiley Interscience |
| **CASTLEMAN K.R.** | Digital image processing – **1 ex.** – | Prentice Hall |
| **CHABANOL M.-L.**<br>**RUCH J.-J.** | Probabilités et statistiques pour l'épreuve de modélisation à l'agrégation de mathématiques – **2 ex.** – | Ellipse |
| **CHABAT B.** | Introduction à l'analyse complexe – **1 ex.** – | Mir |
| **CHAMBERT-LOIR A.** | Algèbre corporelle – **1 ex.** – | Editions de l'X |
| **CHAMBERT-LOIR A.**<br>**FERMIGER S.** | Exercices de mathématiques pour l'agrégation<br>— Analyse 2 – **1 ex.** –<br>— Analyse 3 – **2 ex.** – | Masson |
| **CHAMBERT-LOIR A.**<br>**FERMIGER S.**<br>**MAILLOT V.** | Exercices de mathématiques pour l'agrégation Analyse 1 (seconde édition revue et corrigée) – **3 ex.** – | Masson |
| **CHARLES J.**<br>**MBEKHTA M.**<br>**QUEFFÉLEC H.** | Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs – **5 ex.** – | Dunod |

| | | |
|---|---|---|
| **CHARLES J.**<br>**MBEKHTA M.**<br>**QUEFFÉLEC H.** | Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs – **4 ex.** – | ELLIPSES |
| **CHARPENTIER E.**<br>**NIKOLSKI N.** | Leçons de mathématiques d'aujourd'hui<br>— Vol 1 – **1 ex.** –<br>— Vol 2 – **1 ex.** –<br>— Vol 3 – **2 ex.** –<br>— Vol 4 – **1 ex.** – | ELLIPSES |
| **CHILDS L.** | A concrete introduction to Higher Algebra – **2 ex.** – | SPRINGER VERLAG |
| **CHOIMET D.**<br>**QUEFFÉLEC H.** | Analyse mathématique – **2 ex.** – | CASSINI |
| **CHOQUET G.** | Cours d'analyse Tome II : Topologie – **6 ex.** – | MASSON |
| **CHOQUET G.** | L'enseignement de la géométrie – **4 ex.** – | HERMANN |
| **CHOQUET-BRUHAT Y.** | Distributions. Théories et problèmes – **1 ex.** – | MASSON |
| **CHRISTOL G.**<br>**PILIBOSSIAN P.**<br>**YAMMINE S.** | — Algèbre 1 – **1 ex.** –<br>— Algèbre 2 – **2 ex.** – | ELLIPSES |
| **CIARLET P.G.** | Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation – **2 ex.** – | MASSON |
| **CIARLET P.G.** | Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation – **1 ex.** – | DUNOD |
| **COGIS O.**<br>**ROBERT C.** | Au-delà des ponts de Könisberg. Théorie des graphes. Problèmes, théorie, algorithmes – **1 ex.** – | VUIBERT |
| **COHN P.M.** | Algebra Volume 1 – **1 ex.** – | JOHN WILEY |
| **COLLET H.**<br>**GIRARD B.**<br>**PERRIER C.** | Mathématique BTS industriel – **1 ex.** – | NATHAN |
| **COLLET P.** | Modeling binary data – **1 ex.** – | CHAPMAN AND HALL |

| | | |
|---|---|---|
| **COLLET J.-F.** | Discrete stochastic processes and applications – **2 ex.** – | SPRINGER |
| **COLMEZ P.** | Éléments d'analyse et d'algèbre – **2 ex.** – | EDITIONS DE L'X |
| **COMBROUZE A.** | Probabilités et statistiques – **1 ex.** – | PUF |
| **CORI R.**<br>**LASCAR D.** | Logique mathématique<br>— 1. Calcul propositionnel, algèbre de Boole, calcul des prédicats – **1 ex.** –<br>— 2. Fonctions récursives, théorème de Gödel, théorie des ensembles, théorie des modèles – **1 ex.** – | DUNOD |
| **CORMEN T. H.**<br>**LEISERSON C. E.**<br>**RIVEST R. L.**<br>**STEIN C.** | Introduction à l'algorithmique – **2 ex.** – | DUNOD |
| **CORTELLA A.** | Théorie des groupes – **2 ex.** – | VUIBERT |
| **COTRELL M.**<br>**GENON-CATALOT V.**<br>**DUHAMEL C.**<br>**MEYRE T.** | Exercices de probabilités – **2 ex.** – | CASSINI |
| **COURANT R.**<br>**HILBERT D.** | Methods of Mathematical Physics<br>— Volume 1 – **1 ex.** –<br>— Volume 2 – **1 ex.** – | JOHN WILEY |
| **COUSINEAU G.**<br>**MAUNY M.** | Approche fonctionnelle de la programmation – **2 ex.** – | EDISCIENCE |
| **COX D.A.** | Galois Theory – **1 ex.** – | WILEY INTERSCIENCE |
| **COXETER H.S.M.** | Introduction to Geometry – **1 ex.** – | JOHN WILEY |
| **CVITANOVIĆ P.** | Universality in Chaos – **1 ex.** – | INSTITUTE OF PHYSICS PUBLISHING |

| | | |
|---|---|---|
| **DACUNHA-CASTELLE D.**<br>**DUFLO M.** | — Probabilités et Statistiques<br>1. Problèmes à temps fixe – **3 ex.** –<br>— Exercices de Probabilités et Statistiques<br>1. Problèmes à temps fixe – **1 ex.** – | MASSON |
| **DACUNHA-CASTELLE D.**<br>**REVUZ D.**<br>**SCHREIBER M.** | Recueil de problèmes de calcul des probabilités – **1 ex.** – | MASSON |
| **DAMPHOUSSE P.** | Petite introduction à l'algorithmique – **1 ex.** – | ELLIPSES |
| **DANTZER J.F.** | Mathématiques pour l'agrégation interne – **3 ex.** – | VUIBERT |
| **DAVID R.**<br>**NOUR K.**<br>**RAFFALI C.** | Introduction à la logique<br>Théorie de la démonstration – **1 ex.** – | DUNOD |
| **DEBREIL A.** | Groupes finis et treillis de leurs sous-groupes – **1 ex.** – | CALVAGE & MOUNET |
| **DEBREIL A.**<br>**EIDEN J.-D.**<br>**MNEIMNÉ R.**<br>**NGUYEN T.-H.** | Formes quadratiques et géométrie : Une introduction, et un peu plus – **1 ex.** – | CALVAGE & MOUNET |
| **DE BIÈVRE S.** | Face au jury du CAPES : Préparer les leçons d'Analyse, l'oral du CAPES de mathématiques – **1 ex.** – | ELLIPSES |
| **DEHEUVELS P.** | L'intégrale – **2 ex.** – | PUF |
| **DEHEUVELS R.** | Formes quadratiques et groupes classiques – **3 ex.** – | PUF |
| **DEHORNOY P.** | Complexité et décidabilité – **1 ex.** – | SPRINGER |
| **DE KONNINCK J.M.**<br>**MERCIER A.** | Introduction à la théorie des nombres – **1 ex.** – | MODULO |
| **DELCOURT J.** | Théorie des groupes – **2 ex.** – | DUNOD |
| **DELTHEIL R.**<br>**CAIRE D.** | Géométrie et compléments – **2 ex.** – | JACQUES GABAY |

| | | |
|---|---|---|
| **DEMAILLY J.P.** | Analyse numérique et équations différentielles – **2 ex.** – | PU GRENOBLE |
| **DEMAZURE M.** | Catastrophes et bifurcations – **1 ex.** – | ELLIPSES |
| **DEMAZURE M.** | Cours d'algèbre : primalité, divisibilité, codes – **2 ex.** – | CASSINI |
| **DEMAZURE M.** | Cours d'algèbre – **2 ex.** – | CASSINI |
| **DEMBO A.**<br>**ZEITOUNI O.** | Large deviations techniques and applications – **1 ex.** – | SPRINGER |
| **DESCHAMPS C.**<br>**WARUSFEL A.**<br>*et al.* | Mathématiques, cours et exercices corrigés<br>— 1ère année MPSI, PCSI, PTSI – **2 ex.** –<br>— 2ème année MP, PC, PSI – **1 ex.** – | DUNOD |
| **DESCOMBES R.** | Éléments de théorie des nombres – **2 ex.** – | PUF |
| **DE SEGUINS PAZZIS C.** | Invitation aux formes quadratiques – **3 ex.** – | CALVAGE & MOUNET |
| **DESPRÉS B.** | Lois de conservations euleriennes, lagrangiennes et méthodes numériques – **2 ex.** – | SPRINGER |
| **DEVANZ C.**<br>**ELHODAIBI M.** | Exercices corrigés de Mathématiques posés à l'oral des Ensi, Tome 2 – **4 ex.** – | ELLIPSES |
| **DI MENZA L.** | Analyse numérique des équations aux dérivées partielles – **2 ex.** – | CASSINI |
| **DIEUDONNÉ J.** | Algèbre linéaire et géométrie élémentaire – **4 ex.** – | HERMANN |
| **DIEUDONNÉ J.** | Calcul infinitésimal – **2 ex.** – | HERMANN |
| **DIEUDONNÉ J.** | Sur les groupes classiques – **1 ex.** – | HERMANN |
| **DIEUDONNÉ J.** | Éléments d'Analyse.<br>— Fondements de l'analyse moderne – **5 ex.** –<br>— Éléments d'Analyse Tome 2. – **4 ex.** – | GAUTHIER-VILLARS |

| | | |
|---|---|---|
| **DIXMIER J.** | Cours de Mathématiques du premier cycle<br>— Première année – **3 ex.** –<br>— Deuxième année – **3 ex.** – | Gauthier-Villars |
| **DOUCHET J.** | Analyse complexe – **2 ex.** – | Presses polytechniques et univ. romandes |
| **DOUCHET J.** | Analyse : recueil d'exercices et aide-mémoire, volume 1 – **2 ex.** – | Presses polytechniques et univ. romandes |
| **DOUCHET J.** | Analyse : recueil d'exercices et aide-mémoire, volume 2 – **2 ex.** – | Presses polytechniques et univ. romandes |
| **DOUCHET J.**<br>**ZWALHEN B.** | Calcul différentiel et intégral – **2 ex.** – | Presses polytechniques et univ. romandes |
| **DOWEK G.**<br>**LÉVY J.-J** | Introduction à la théorie des langages de programmation – **1 ex.** – | Editions de l'X |
| **DRAPPER N.**<br>**SCHMITH H.** | Applied regression analysis – **1 ex.** – | Wiley |
| **DUBUC S.** | Géométrie plane – **4 ex.** – | PUF |
| **DUGAC P.** | Histoire de l'analyse.<br>Autour de la notion de limite et de ses voisinages – **1 ex.** – | Vuibert |
| **DUTERTRET G.** | Initiation à la cryptographie – **1 ex.** – | PUF |
| **DYM H.**<br>**McKEAN H.P.** | Fouriers series and integrals – **1 ex.** – | Academics Press |
| **EBBINGHAUS H.**<br>*et al.* | Les Nombres – **2 ex.** – | Vuibert |
| **EIDEN J.D.** | Géométrie analytique classique – **3 ex.** – | Calvage et Mounet |

| | | |
|---|---|---|
| **EIDEN J.D.** | Le jardin d'Eiden – **1 ex.** – | CALVAGE ET MOUNET |
| **EL KACIMI ALAOUI A.**<br>**QUEFFÉLEC H.**<br>**SACRÉ C.**<br>**VASSALLO V.** | Quelques aspects des mathématiques actuelles – **3 ex.** – | ELLIPSES |
| **ENGEL A.** | Solutions d'expert<br>— Vol 1 – **1 ex.** –<br>— Vol 2 – **1 ex.** – | CASSINI |
| **ÉPISTEMON L.**<br>**(OVAERT J.L.**<br>**VERLEY J.L.)** | Exercices et problèmes<br>— Analyse. Volume 1 – **1 ex.** –<br>— Algèbre. – **3 ex.** – | CÉDIC/NATHAN |
| **ESCOFIER J.-P.** | Théorie de Galois : Cours et exercices corrigés – **2 ex.** – | DUNOD |
| **ESKIN G.** | Lectures on linear partial differential equations – **2 ex.** – | AMS |
| **EXBRAYAT J.M.**<br>**MAZET P.** | Notions modernes de mathématiques<br>— Algèbre 1 : Notions fondamentales de la théorie des ensembles – **3 ex.** –<br>— Analyse 1 : Construction des espaces fondamentaux de l'analyse – **3 ex.** –<br>— Analyse 2 : Éléments de topologie générale – **3 ex.** – | HATIER |
| **FADDEEV D.**<br>**SOMINSKI I.** | Recueil d'exercices d'Algèbre Supérieure – **3 ex.** – | MIR |
| **FAIRBANK X.**<br>**BEEF C.** | POX - Exercices posés au petit oral de l'X – **7 ex.** – | ELLIPSES |
| **FARAUT J.** | Analyse sur les groupes de Lie – **3 ex.** – | CALVAGE ET MOUNET |
| **FARAUT J.**<br>**KHALILI E.** | Arithmétique<br>Cours, Exercices et Travaux Pratiques sur Micro-Ordinateur – **1 ex.** – | ELLIPSES |
| **FELLER W.** | An introduction to probability theory and its applications<br>— Volume 1 – **2 ex.** –<br>— Volume 2 – **2 ex.** – | JOHN WILEY |

| | | |
|---|---|---|
| **FERRIER J.P.** | Mathématiques pour la licence – **2 ex.** – | MASSON |
| **FILBET F.** | Analyse numérique – **1 ex.** – | DUNOD |
| **FLORY G.** | Exercices de topologie et analyse avec solutions<br>— Tome 1 - Topologie – **10 ex.** –<br>— Tome 2 - Fonctions d'une variable réelle – **6 ex.** –<br>— Tome 3 - Fonctions différentiables, intégrales multiples – **7 ex.** –<br>— Tome 4 - Séries, équations différentielles – **7 ex.** – | VUIBERT |
| **FONTANEZ F.**<br>**RANDÉ B.** | Les clefs pour les Mines – **2 ex.** – | CALVAGE ET MOUNET |
| **FRANCHINI J.**<br>**JACQUENS J-C.** | Mathématiques Spéciales<br>— Algèbre – **1 ex.** –<br>— Analyse 1 – **1 ex.** –<br>— Analyse 2 – **1 ex.** – | ELLIPSES |
| **FRANCINOU S.**<br>**GIANELLA H.**<br>**NICOLAS S.** | Exercices de mathématiques<br>Oraux X-ens Algèbre 1 – **5 ex.** – | CASSINI |
| **FRANCINOU S.**<br>**GIANELLA H.**<br>**NICOLAS S.** | Exercices de mathématiques<br>Oraux X-ens Algèbre 2 – **1 ex.** – | CASSINI |
| **FRANCINOU S.**<br>**GIANELLA H.**<br>**NICOLAS S.** | Exercices de mathématiques<br>Oraux X-ens Algèbre 3 – **4 ex.** – | CASSINI |
| **FRANCINOU S.**<br>**GIANELLA H.**<br>**NICOLAS S.** | Exercices de mathématiques<br>Oraux X-ens Analyse 1 – **6 ex.** – | CASSINI |
| **FRANCINOU S.**<br>**GIANELLA H.**<br>**NICOLAS S.** | Exercices de mathématiques<br>Oraux X-ens Analyse 2 – **2 ex.** – | CASSINI |
| **FRANCINOU S.**<br>**GIANELLA H.**<br>**NICOLAS S.** | Exercices de mathématiques<br>Oraux X-ens Analyse 3 – **5 ex.** – | CASSINI |
| **FRANCINOU S.**<br>**GIANELLA H.** | Exercices de Mathématiques Algèbre 1 – **6 ex.** – | MASSON |

| | | |
|---|---|---|
| **FRENKEL J.** | Géométrie pour l'élève-professeur – **1 ex.** – | HERMANN |
| **FRESNEL J.** | Groupes – **1 ex.** – | HERMANN |
| **FRESNEL J.** | Méthodes modernes en géométrie – **1 ex.** – | HERMANN |
| **FRESNEL J.**<br>**MATIGNON M.** | Algèbre et géométrie – **1 ex.** – | HERMANN |
| **FUHRMANN P.** | A polynomial approach to linear algebra – **1 ex.** – | SPRINGER |
| **FULTON W.** | Algebraic Topology A first course – **1 ex.** – | SPRINGER |
| **GABRIEL P.** | Matrices, géométrie, algèbre linéaire – **3 ex.** – | CASSINI |
| **GANTMACHER F.R.** | Théorie des matrices<br>— Tome 1 – **1 ex.** –<br>— Tome 2 – **1 ex.** – | DUNOD |
| **GARET O.** | Probabilités et processus stochastiques – **3 ex.** – | COPYRIGHTED MATERIAL |
| **GARET O.**<br>**KURTZMANN A.** | De l'intégration aux probabilités – **5 ex.** – | ELLIPSES |
| **GAREY M.**<br>**JOHNSON D.** | Computers and intractability – **1 ex.** – | FREEMAN |
| **GARLING D.J.H.** | Inequalities : a journey into linear analysis – **1 ex.** – | CAMBRIDGE |
| **GARNIER J.-M.** | Groupes et géométrie pour l'agrégation – **4 ex.** – | ELLIPSES |
| **GATHEN (von zur) J.**<br>**GERHARD .J** | Modern computer algebra – **1 ex.** – | CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS |
| **GENET J.** | Mesure et intégration. Théorie élémentaire. Cours et exercices résolus – **2 ex.** – | VUIBERT |
| **GHIDAGLIA J.M.** | Petits problèmes d'analyse – **1 ex.** – | SPRINGER |

| | | |
|---|---|---|
| **GINDIKIN S.** | Histoires de mathématiciens et de physiciens – **1 ex.** – | CASSINI |
| **GOBLOT R.** | Algèbre commutative – **2 ex.** – | MASSON |
| **GOBLOT R.** | Thèmes de géométrie – **1 ex.** – | MASSON |
| **GODEMENT R.** | Analyse<br>— Tome 1 – **1 ex.** –<br>— Tome 2 – **4 ex.** –<br>— Tome 3 – **1 ex.** – | SPRINGER |
| **GODEMENT R.** | Cours d'Algèbre – **4 ex.** – | HERMANN |
| **GOLUB G.H.**<br>**VAN LOAN C.F.** | Matrix computations – **1 ex.** – | WILEY |
| **GONNORD S.**<br>**TOSEL N.** | Thèmes d'Analyse pour l'agrégation<br>— Topologie et Analyse fonctionnelle – **2 ex.** –<br>— Calcul différentiel – **1 ex.** – | ELLIPSES |
| **GOSTIAUX B.** | Cours de mathématiques spéciales<br>— Tome 1 - Algèbre – **1 ex.** –<br>— Tome 2 - Topologie et analyse réelle – **1 ex.** –<br>— Tome 3 - Analyse fonctionnelle et calcul différentiel – **1 ex.** –<br>— Tome 4 - Géométrie affine et métrique – **1 ex.** –<br>— Tome 5 - Géométrie : arcs et nappes – **1 ex.** – | PUF |
| **GOUDON T.** | Mathématiques pour la modélisation et le calcul scientifique – **2 ex.** – | ISTE |
| **GOUDON T.** | Intégration – **2 ex.** – | ELLIPSES |
| **GOURDON X.** | Les maths en tête, mathématiques pour M'<br>— Algèbre – **2 ex.** –<br>— Analyse – **1 ex.** – | ELLIPSES |
| **GRAHAM R.**<br>**KNUTH D.**<br>**PATASHNIK O.** | Concrete mathematics – **1 ex.** – | ADISON-WESLEY |

| | | |
|---|---|---|
| **GRAMAIN A.** | Géométrie élémentaire – **2 ex.** – | HERMANN |
| **GRAMAIN A.** | Intégration – **1 ex.** – | HERMANN |
| **GRANJON Y.** | Informatique, algorithmes en pascal et en C – **2 ex.** – | DUNOD |
| **GRENIER J.-P.** | Débuter en algorithmique avec Matlab et Scilab – **1 ex.** – | ELLIPSES |
| **GREUB W.** | Linear Algebra – **1 ex.** – | SPRINGER VERLAG |
| **GRIFONE J.** | Algèbre linéaire – **3 ex.** – | CEPADUES |
| **GRIMMET G.**<br>**WELSH D.** | Probability (an introduction) – **1 ex.** – | OXFORD |
| **GUJARATI D. N.** | Basic Econometrics – **1 ex.** – | WILEY |
| **GUSFIELD D.** | Algorithms on strings, trees and sequences – **1 ex.** – | CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS |
| **HABSIEGER L.**<br>**MARTEL V.** | Exercices corrigés posés à l'oral des ENSI Tome 1 Analyse – **7 ex.** – | ELLIPSES |
| **HALMOS P.** | Problèmes de mathématiciens petits et grands – **1 ex.** – | CASSINI |
| **HAMMAD P.** | Cours de probabilités – **3 ex.** – | CUJAS |
| **HAMMAD P.**<br>**TARANCO A.** | Exercices de probabilités – **2 ex.** – | CUJAS |
| **HAMMER R.**<br>**HOCKS M.**<br>**KULISH U.**<br>**RATZ D.** | C++ toolbox for verified computing – **1 ex.** – | SPRINGER |
| **HARDY G.H.**<br>**WRIGHT E.M.** | An introduction to the theory of numbers – **2 ex.** – | OXFORD |

| | | |
|---|---|---|
| **HAREL D.** | Computer LTD. What they really can't do – **1 ex.** – | OXFORD |
| **HAREL D.**<br>**FELDMAN Y.** | Algorithmics. The spirit of computing – **1 ex.** – | ADDISON WESLEY |
| **HAUCHECORNE B.** | Les contre-exemples en mathématiques – **2 ex.** – | ELLIPSES |
| **HENNEQUIN P.L.**<br>**TORTRAT A.** | Théorie des probabilités et quelques applications – **2 ex.** – | MASSON |
| **HENRICI P.** | Applied and Computational Complex Analysis<br>— Volume 1 – **1 ex.** –<br>— Volume 2 – **1 ex.** –<br>— Volume 3 – **2 ex.** – | WILEY-INTERSCIENCE |
| **HERBIN R.**<br>**GALLOUËT T.** | Mesures, intégration, probabilités – **3 ex.** – | ELLIPSES |
| **HERVÉ M.** | Les fonctions analytiques – **4 ex.** – | PUF |
| **HINDRY M.** | Arithmétique – **2 ex.** – | CALVAGE ET MOUNET |
| **HIRSCH F.**<br>**LACOMBE G.** | Eléments d'analyse fonctionnelle – **3 ex.** – | MASSON |
| **HOCHART M.**<br>**SCIUTO G.** | Algèbre Analyse Géométrie (MPSI/PCSI) – **1 ex.** – | VUIBERT |
| **HOPCROFT J.E.**<br>**MOTWANI R.**<br>**ULLMAN J. D.** | Introduction to automata theory, Languages and Computation – **1 ex.** – | ADDISON WESLEY |
| **HOUZEL C.** | Analyse mathématique : cours et exercices – **1 ex.** – | BELIN |
| **HUBBARD J.**<br>**HUBERT F.** | Calcul scientifique T1 – **3 ex.** – | VUIBERT |
| **HUBBARD J.**<br>**HUBERT F.** | Calcul scientifique T2 – **3 ex.** – | VUIBERT |
| **INGRAO B.** | Coniques projectives, affines et métriques – **2 ex.** – | CALVAGE ET MOUNET |

| | | |
|---|---|---|
| **IRELAND K.**<br>**ROSEN M.** | A Classical Introduction to Modern Numbers Theory – **2 ex.** – | Springer Verlag |
| **ISAAC R.** | Une initiation aux probabilités (Trad. R. Mansuy) – **1 ex.** – | Vuibert-Springer |
| **ITARD J.** | Les nombres premiers – **1 ex.** – | Que sais-je ?<br>PUF |
| **JACOBSON N.** | Basic Algebra<br>— Tome I – **2 ex.** –<br>— Tome II – **2 ex.** – | Freeman and Co |
| **JACOD J.**<br>**PROTTER P.** | L'essentiel en théorie des probabilités – **1 ex.** – | Cassini |
| **JAUME M.** | Éléments de mathématiques discrètes – **2 ex.** – | Ellipses |
| **KAHANE J.P.**<br>**GILLES P.** | Séries de Fourier et ondelettes – **4 ex.** – | Cassini |
| **KATZNELSON Y.** | An Introduction to Harmonic Analysis – **1 ex.** – | Dover |
| **KERBRAT Y.**<br>**BRAEMER J.-M.** | Géometrie des courbes et des surfaces – **1 ex.** – | Hermann |
| **KERNIGHAN B.**<br>**RITCHIE D.** | Le langage C – **1 ex.** – | Dunod |
| **KLOECKNER B.** | Un bref aperçu de la géométrie projective – **1 ex.** – | Calvage et Mounet |
| **KNUTH D.E.** | The art of computer programming<br>— Volume 1 : Fundamental algorithms – **1 ex.** –<br>— Volume 2 : Seminumerical algorithms – **1 ex.** –<br>— Volume 3 : Sorting and Searching – **1 ex.** – | Addison-Wesley |
| **KOBLITZ N.** | A course in number theory and cryptography – **1 ex.** – | Springer |
| **KOLMOGOROV A.**<br>**FOMINE S.** | Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle – **1 ex.** – | Ellipses |

| | | |
|---|---|---|
| **de KONNINCK J.M.**<br>**MERCIER A.** | Introduction à la théorie des nombres – **1 ex.** – | MODULO |
| **KÖRNER T.W.** | Fourier analysis – **2 ex.** – | CAMBRIDGE |
| **KÖRNER T.W.** | Exercises for Fourier analysis – **1 ex.** – | CAMBRIDGE |
| **KOURIS E.** | Une année de colle en maths en MPSI – **1 ex.** – | CALVAGE ET MOUNET |
| **KREE P.** | Introduction aux Mathématiques et à leurs applications fondamentales M.P.2 – **1 ex.** – | DUNOD |
| **KRIVINE H.** | Exercices de Mathématiques pour physiciens – **1 ex.** – | CASSSINI |
| **KRIVINE J.-L.** | Théorie axiomatique des ensembles – **2 ex.** – | PUF |
| **KRIVINE J.-L.** | Théorie des ensembles – **2 ex.** – | CASSINI |
| **KUNG J.P.S.**<br>**ROTA G-C.**<br>**YAN C.H.** | Combinatorics : the Rota way – **1 ex.** – | CAMBRIDGE |
| **LAAMRI E. H.** | Mesures, intégration et transformée de Fourier des fonctions – **1 ex.** – | DUNOD |
| **LACOMME P.**<br>**PRINS C.**<br>**SEVAUX M.** | Algorithmes de graphes – **1 ex.** – | EYROLLES |
| **LAFONTAINE J.** | Introduction aux variétés différentielles – **1 ex.** – | PUF |
| **LALEMENT R.** | Logique, réduction, résolution – **1 ex.** – | MASSON |
| **LANG S.** | Algèbre linéaire<br>— Tome 1 – **2 ex.** –<br>— Tome 2 – **2 ex.** – | INTEREDITIONS |
| **LANG S.** | Algebra – **5 ex.** – | ADDISON-WESLEY |

| | | |
|---|---|---|
| **LANG S.** | Linear Algebra – **6 ex.** – | Addison-Wesley |
| **LAROCHE F.** | Escapades arithmétiques – **1 ex.** – | Ellipses |
| **LASCAR D.** | La théorie des modèles en peu de maux – **1 ex.** – | Cassini |
| **LASCAUX T.**<br>**THÉODOR R.** | Analyse matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur, tomes 1 & 2 – **2 ex.** – | Dunod |
| **LAVILLE G.** | Courbes et surfaces – **1 ex.** – | Ellipses |
| **LAVILLE G.** | Géométrie pour le CAPES et l'Agrégation – **2 ex.** – | Ellipses |
| **LAX P. D.** | Functional analysis – **1 ex.** – | Wiley |
| **LAX P. D.** | Linear Algebra – **1 ex.** – | Wiley |
| **LE BRIS G.** | Maple Sugar : une initiation progressive à Maple – **1 ex.** – | Cassini |
| **LEBOEUF C.**<br>**GUÉGAND J.**<br>**ROQUE J.L.**<br>**LANDRY P.** | Exercices corrigés de probabilités – **1 ex.** – | Ellipses |
| **LEBORGNE D.** | Calcul différentiel et géométrie – **3 ex.** – | PUF |
| **LEBOSSÉ C.**<br>**HÉMERY C.** | Géométrie. Classe de Mathématiques – **1 ex.** – | Jacques Gabay |
| **LEHMANN D.**<br>**SACRÉ C.** | Géométrie et topologie des surfaces – **1 ex.** – | PUF |
| **LEHNING H.**<br>**JAKUBOWICZ D.** | Mathématiques supérieures et spéciales 2 : Dérivation – **8 ex.** – | Masson |

| | | |
|---|---|---|
| **LEHNING H.** | Mathématiques supérieures et spéciales<br>— Tome 1 : Topologie – **8 ex.** –<br>— Tome 3 : Intégration et sommation – **5 ex.** –<br>— Tome 4 : Analyse en dimension finie – **8 ex.** –<br>— Tome 5 : Analyse fonctionnelle – **5 ex.** – | Masson |
| **LEICHTNAM E.**<br>**SCHAUER X.** | Exercices corrigés de mathématiques posés aux oraux X-ENS<br>— Tome I - Algèbre 1 – **2 ex.** –<br>— Tome 2 - Algèbre et géométrie – **5 ex.** –<br>— Tome 3 - Analyse 1 – **4 ex.** –<br>— Tome 4 - Analyse 2 – **9 ex.** – | Ellipses |
| **LELONG-FERRAND J.** | Géométrie différentielle – **3 ex.** – | Masson |
| **LELONG-FERRAND J.** | Les fondements de la géométrie – **2 ex.** – | PUF |
| **LESIEUR L.**<br>**MEYER Y.**<br>**JOULAIN C.**<br>**LEFEBVRE J.** | Algèbre linéaire, géométrie – **1 ex.** – | Armand Colin |
| **LIRET F.** | Maths en pratiques – **1 ex.** – | Dunot |
| **LION G.** | Algèbre pour la licence<br>Cours et exercices (2ème édition) – **1 ex.** – | Vuibert |
| **LION G.** | Géométrie du plan<br>Cours complet avec 600 exercices résolus – **1 ex.** – | Vuibert |
| **LOTHAIRE M.** | Algebraic combinatorics on words – **1 ex.** – | Cambridge |
| **MAC LANE S.**<br>**BIRKHOFF G.** | Algèbre<br>— 1 : Structures fondamentales – **4 ex.** –<br>— 2 : Les grands théorèmes – **4 ex.** – | Gauthier-Villars |
| **MACKI J.**<br>**STRAUSS A.** | Introduction to optimal control theory – **1 ex.** – | Springer |
| **MADÈRE K.** | Leçons d'analyse – **1 ex.** – | Ellipse |

| | | |
|---|---|---|
| **MADÈRE K.** | Leçons d'algèbre – **1 ex.** – | ELLIPSE |
| **MAKAROV B.M.**<br>**GOLUZINA M.G.**<br>**LODKIN A.A.**<br>**PODKORYTOV A.N.** | Problèmes d'analyse réelle – **1 ex.** – | CASSINI |
| **MALLIAVIN M. P.** | Les groupes finis et leurs représentations complexes – **2 ex.** – | MASSON |
| **MALLIAVIN P.** | Géométrie différentielle intrinsèque – **2 ex.** – | HERMANN |
| **MALLIAVIN M. P.**<br>**WARUSFEL A.** | Algèbre linéaire et géométrie classique. Exercices – **3 ex.** – | MASSON |
| **MANIVEL L.** | Cours spécialisé – **1 ex.** – | SMF |
| **MANSUY R.**<br>**MNEIMNÉ R.** | Algèbre linéaire réduction des endomorphismes – **1 ex.** – | VUIBERT |
| **MANSUY R.**<br>**RANDÉ B.** | Les clefs pour l' X – **1 ex.** – | CALVAGE ET MOUNET |
| **Manuels Matlab** | — Using Matlab version 5 – **1 ex.** –<br>— Using Matlab version 6 – **11 ex.** –<br>— Statistics Toolbox – **5 ex.** –<br>— Using Matlab Graphics – **3 ex.** – | |
| **MARCO J.P.**<br>*et al.* | Analyse L3 – **2 ex.** – | PEARSON |
| **MASCART H.**<br>**STOKA M.** | Fonctions d'une variable réelle<br>— Tome 2 : Exercices et corrigés – **1 ex.** –<br>— Tome 3 : Exercices et corrigés – **1 ex.** –<br>— Tome 4 : Exercices et corrigés – **1 ex.** – | PUF |
| **MAURY B.** | Analyse fonctionnelle, Exercices et problèmes corrigés – **15 ex.** – | ELLIPSES |
| **MAWHIN J.** | Analyse : fondements, technique, évolutions – **2 ex.** – | DE BOECK UNIVERSITÉ |
| **MAZET P.** | Algèbre et géométrie pour le CAPES et l'Agrégation – **1 ex.** – | ELLIPSES |

| | | |
|---|---|---|
| **MENEZES A.J.**<br>**van OORSCHOT P.C.**<br>**VANSTONE S.A.** | Handbook of applied cryptography – **1 ex.** – | CRC Press |
| **MERINDOL J.-Y.** | Nombres et algèbre – **2 ex.** – | EDP Sciences |
| **MERKIN D.** | Introduction to the theory of stability – **1 ex.** – | Springer |
| **MÉTIVIER M.** | Probabilités : dix leçons d'introduction.<br>École Polytechnique – **2 ex.** – | Ellipses |
| **MEUNIER P.** | Agrégation interne de Mathématiques<br>Exercices d'oral corrigés et commentés<br>— Tome 2 – **1 ex.** – | PUF |
| **MEUNIER P.** | Algèbre avec applications à l'algorithmique et à la cryptographie – **1 ex.** – | Ellipses |
| **MEYRE T.** | Probabilités, cours et exercices corrigés – **2 ex.** – | Calvage & Mouret |
| **MIGNOTTE M.** | Mathématiques pour le calcul formel – **1 ex.** – | PUF |
| **MILHAU X.** | Statistique – **1 ex.** – | Belin |
| **MITCHELL J. C.** | Concepts in programming languages – **1 ex.** – | Cambridge |
| **MNEIMNÉ R.** | Eléments de géométrie : action de groupes – **3 ex.** – | Cassini |
| **MNEIMNÉ R.** | Réduction des endomorphismes – **2 ex.** – | Calvage et Mounet |
| **MNEIMNÉ R.**<br>**TESTARD F.** | Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques – **5 ex.** – | Hermann |
| **MOISAN J.**<br>**VERNOTTE A.** | Exercices corrigés de mathématiques spéciales<br>Analyse : topologie et séries – **3 ex.** – | Ellipses |
| **MOISAN J.**<br>**VERNOTTE A.**<br>**TOSEL N.** | Exercices corrigés de mathématiques spéciales<br>Analyse : suites et séries de fonctions – **2 ex.** – | Ellipses |

| | | |
|---|---|---|
| **MONIER J.M.** | Cours de mathématiques<br>— Analyse 2 MPSI, PCSI, PTSI – **1 ex.** –<br>— Analyse 3 MP, PSI, PC, PT – **1 ex.** –<br>— Analyse 4 MP, PSI, PC, PT – **1 ex.** –<br>— Algèbre 1 MPSI, PCSI, PTSI – **3 ex.** –<br>— Algèbre 2 MP, PSI, PC, PT – **2 ex.** –<br>— Exercices d'analyse MPSI – **1 ex.** –<br>— Exercice d'algèbre et géométrie MP – **2 ex.** – | Dunod |
| **MUTAFIAN C.** | Le défi algébrique<br>— Tome 1 – **3 ex.** –<br>— Tome 2 – **3 ex.** – | Vuibert |
| **NAGEL E.**<br>**NEWMAN J. R.**<br>**GÖDEL K.**<br>**GIRARD J. Y.** | Le théorème de Gödel – **1 ex.** – | Seuil |
| **NAUDIN P.**<br>**QUITTE C.** | Algorithmique algébrique avec exercices corrigés – **1 ex.** – | Masson |
| **NEVEU J.** | Base mathématique du calcul des probabilités – **1 ex.** – | Masson |
| **NEVEU J.** | Martingales à temps discret – **1 ex.** – | Masson |
| **NIVEN I.** | Irrational numbers – **2 ex.** – | Mathematical Association of America |
| **NORRIS J.R.** | Markov chains – **1 ex.** – | Cambridge |
| **NOURDIN Y.** | Leçons d'analyse, probabilités, algèbre et géométrie – **1 ex.** – | Dunod |
| **O'ROURKE J.** | Computational geometry in C (second edition) – **1 ex.** – | Cambridge |
| **OPREA J.** | Differential geometry – **1 ex.** – | Prentice hall |
| **OUVRARD J.Y.** | — Probabilités 1 (capes, agrégation) – **3 ex.** –<br>— Probabilités 2 (maîtrise, agrégation) – **1 ex.** – | Cassini |

| | | |
|---|---|---|
| **PABION J.F.** | Elements d'analyse complexe – **2 ex.** – | Ellipse |
| **PAPADIMITRIOU C.H.** | Computational complexity – **1 ex.** – | Pearson Education |
| **PAPINI O.**<br>**WOLFMANN J.** | Algèbre discrète et codes correcteurs – **2 ex.** – | Springer |
| **PARDOUX E.** | Processus de Markov et applications – **1 ex.** – | Dunod |
| **PEDOE D.** | Geometry- A comprehensive course – **1 ex.** – | Dover |
| **PERKO L.** | Differential equation and dynamical systems – **1 ex.** – | Springer |
| **PERRIN D.** | Cours d'Algèbre – **3 ex.** – | Ellipses |
| **PERRIN D.** | Cours d'Algèbre – **2 ex.** – | ENSJF |
| **PERRIN D.** | Mathématiques d'école – **1 ex.** – | Cassini |
| **PERRIN D.** | Nombres, mesures et géométrie – **1 ex.** – | Ellipse |
| **PERRIN-RIOU B.** | Algèbre, arithmétique et MAPLE – **3 ex.** – | Cassini |
| **PETAZZONI B.** | Seize problèmes d'informatique – **1 ex.** – | Springer |
| **PETROVŠEK M.**<br>**WILF H.S.**<br>**ZEILBERGER D.** | A=B – **1 ex.** – | A.K. Peters |
| **PEVZNER P.** | Computational molecular biology- an algorithmic approach – **1 ex.** – | MIT press |
| **PEYRÉ G.** | L'algèbre discrète de la transformée de Fourier – **3 ex.** – | Ellipse |
| **PÓLYA G.**<br>**SZEGŐ G.** | Problems and Theorems in Analysis<br>— Volume I – **3 ex.** –<br>— Volume II – **3 ex.** – | Springer Verlag |

| | | |
|---|---|---|
| **POMMELLET A.** | Agrégation de Mathématiques. Cours d'Analyse – **2 ex.** – | Ellipses |
| **PRASOLOV V.** | Polynomials – **1 ex.** – | Springer |
| **PRASOLOV V.** | Problèmes et théorèmes d'algèbre linéaires – **3 ex.** – | Cassini |
| **PREPARATA F.P.**<br>**SHAMOS M.I.** | Computational geometry - an introduction – **1 ex.** – | Springer |
| **PRESS W.**<br>**FLANNERY B.**<br>**TEUKOLSKI S.**<br>**VETTERLING W.** | Numerical recipes in Pascal – **1 ex.** – | Cambridge |
| **PUTZ J.F.** | Maple animation – **1 ex.** – | Chapman and Hall |
| **QUATERONI A.**<br>**SACCO R.**<br>**SALERI F.** | Méthodes numériques – **2 ex.** – | Springer |
| **QUATERONI A.**<br>**SALERI F.**<br>**GERVASIO P.** | Calcul scientifique – **2 ex.** – | Springer |
| **QUEFFÉLEC H.** | Topologie – **3 ex.** – | Dunod |
| **QUEFFÉLEC H.**<br>**ZUILY C.** | Éléments d'analyse – **2 ex.** – | Dunod |
| **QUEFFÉLEC H.**<br>**ZUILY C.** | Analyse pour l'agregation – **1 ex.** – | Dunod |
| **RALSTON A.**<br>**RABINOWITCH P** | A first course in numerical analysis – **3 ex.** – | Internatinal Student Edition |

| | | |
|---|---|---|
| **RAMIS E.**<br>**DESCHAMPS C.**<br>**ODOUX J.** | Cours de Mathématiques spéciales<br>— 1- Algèbre – **7 ex.** –<br>— 2- Algèbre et applications à la géométrie – **8 ex.** –<br>— 3- Topologie et éléments d'analyse – **13 ex.** –<br>— 4- Séries et équations différentielles – **9 ex.** –<br>— 5- Applications de l'analyse à la géométrie – **8 ex.** – | MASSON |
| **RAMIS E.**<br>**DESCHAMPS C.**<br>**ODOUX J.** | Exercices avec solutions<br>— Algèbre – **2 ex.** –<br>— Analyse 1 – **5 ex.** –<br>— Analyse 2 – **7 ex.** – | MASSON |
| **RAMIS J.P.**<br>**WARUSFEL A.** | Mathématiques - Tout en un pour la licence – **2 ex.** – | DUNOD |
| **RAMIS J.P.**<br>**WARUSFEL A.** | Mathématiques - Tout en un pour la licence Niveau 1 – **2 ex.** – | DUNOD |
| **RAMIS J.P.**<br>**WARUSFEL A.** | Mathématiques - Tout en un pour la licence Niveau 2 – **2 ex.** – | DUNOD |
| **RAMIS J.P.**<br>**WARUSFEL A.** | Mathématiques - Tout en un pour la licence Niveau 3 – **2 ex.** – | DUNOD |
| **RAO C.R.** | Linear statistical inference and its application – **1 ex.** – | WILEY |
| **RANDÉ B.** | Les carnets indiens de Srinivasa Ramanujan – **1 ex.** – | CASSINI |
| **RANDÉ B.**<br>**MANSUY R.** | Les clefs pour l'X (2) – **1 ex.** – | CALVAGE MOUNET |
| **RANDÉ B.**<br>**TAIEB F.** | Les clefs pour l'X – **1 ex.** – | CALVAGE MOUNET |
| **REINHARDT F.**<br>**SOEDER H.** | Atlas des mathématiques – **1 ex.** – | LIVRE DE POCHE |
| **REMMERT R.** | Classical topics in complex function theory – **1 ex.** – | SPRINGER |
| **RIDEAU F.** | Exercices de calcul différentiel – **2 ex.** – | HERMANN |

| | | |
|---|---|---|
| **RIESZ F.**<br>**NAGY SZ. B.** | Leçons d'analyse fonctionnelle – **2 ex.** – | GAUTHIER-VILLARS |
| **RIO E.** | Théorie asymptotique des processus aléatoires faiblement dépendants – **2 ex.** – | SPRINGER |
| **RITTAUD, B.** | Newton implique Kepler – **2 ex.** – | ELLIPSES |
| **RIVAUD J.** | Algèbre (Tome 2) – **1 ex.** – | VUIBERT |
| **RIVOIRARD V.**<br>**STOLTZ G.** | Statistique mathématique en action – **3 ex.** – | DUNOD |
| **ROBERT C.** | Contes et décomptes de la statistique - Une initiation par l'exemple – **1 ex.** – | VUIBERT |
| **ROLLAND R.** | Théorie des séries<br>2- Séries entières – **1 ex.** – | CÉDIC/NATHAN |
| **ROMAN S.** | Field theory – **1 ex.** – | SPRINGER-VERLAG |
| **ROMBALDI J.-E.** | Thèmes pour l'agrégation de mathématiques – **2 ex.** – | EDP SCIENCES |
| **ROMBALDI J.-E.** | Analyse matricielle – **1 ex.** – | EDP SCIENCES |
| **ROMBALDI J.-E.** | Mathématiques pour l'agrégation – **2 ex.** – | DEBOECK SUP. |
| **ROMBALDI J.E.** | Analyse matricielle – **1 ex.** – | EDP SCIENCES |
| **ROTMAN J. J.** | An introduction to the theory of groups – **1 ex.** – | SPRINGER-VERLAG |
| **ROUDIER H.** | Alèbre linéaire. Cours et exercices – **1 ex.** – | VUIBERT |
| **ROUSSEAU Y.**<br>**SAINT-AUBIN Y.** | Mathématiques et technologie – **1 ex.** – | SPRINGER (SUMAT) |
| **ROUVIÈRE F.** | Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation – **3 ex.** – | CASSINI |

| | | |
|---|---|---|
| **ROUX C.** | Initiation à la théorie des graphes – **1 ex.** – | Ellipses |
| **RUAUD J.F.**<br>**WARUSFEL A.** | Exercices de Mathématiques Algèbre 3 – **2 ex.** – | Masson |
| **RUDIN W.** | Analyse réelle et complexe – **2 ex.** – | Masson |
| **RUDIN W.** | Functional analysis – **2 ex.** – | Mc Graw Hill |
| **RUDIN W.** | Real and complex analysis – **1 ex.** – | Mc Graw Hill |
| **SA EARP R.**<br>**TOUBIANA E.** | Introduction à la Géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann – **1 ex.** – | Cassini |
| **SAINSAULIEU L.** | Calcul scientifique – **1 ex.** – | Dunod |
| **SAINT RAYMOND J.** | Topologie, calcul différentiel et variable complexe – **1 ex.** – | Calvage et Mounet |
| **SAKAROVITCH J.** | Eléments de théorie des automates – **1 ex.** – | Vuibert |
| **SAKS S.**<br>**ZYGMUND A.** | Fonctions analytiques – **2 ex.** – | Masson |
| **SAMUEL P.** | Géométrie projective – **1 ex.** – | PUF |
| **SAMUEL P.** | Théorie algébrique des nombres – **3 ex.** – | Hermann |
| **SARMANT M.C.**<br>**MERLIER T.**<br>**PILIBOSSIAN Ph.**<br>**YAMMINE S.** | Analyse 1 – **1 ex.** – | Ellipses |
| **SAVIOZ J.C.** | Algèbre linéaire, cours et exercices – **1 ex.** – | Vuibert |
| **SCHATZMAN M.** | Analyse numérique, une approche mathématique – **2 ex.** – | Dunod |
| **SCHNEIER B.** | Applied cryptography – **1 ex.** – | Wiley |

| | | |
|---|---|---|
| **SCHWARTZ L.** | Analyse<br>— I Topologie générale et analyse fonctionnelle – **4 ex.** –<br>— II Calcul différentiel et équations différentielles – **1 ex.** – | Hermann |
| **SCHWARTZ L.** | Cours d'Analyse<br>— Tome 1 – **2 ex.** –<br>— Tome 2 – **3 ex.** – | Hermann |
| **SCHWARTZ L.** | Méthodes Mathématiques pour les sciences physiques – **1 ex.** – | Hermann |
| **SEDGEWICK R.** | Algorithms – **1 ex.** – | Addison Wesley |
| **SEDGEWICK R.** | Algorithmes en Java – **1 ex.** – | Pearson Education |
| **SEDGEWICK R.** | Algorithmes en langage C – **2 ex.** – | Dunod |
| **SEGUINS PAZZIS (de) C.** | Invitation aux formes quadratiques – **1 ex.** – | Calvage et Mounet |
| **SELBERHERR S.**<br>**STIPPEL H.**<br>**STRASSER E.** | Simulation of semi-conductor devices and processes – **1 ex.** – | Springer |
| **SERRE D.** | Les matrices, théorie et pratique – **3 ex.** – | Dunod |
| **SERRE J.P.** | Cours d'arithmétique – **3 ex.** – | PUF |
| **SHAPIRO H.N.** | Introduction to the theory of numbers – **1 ex.** – | Dover |
| **SIDLER J.C.** | Géométrie Projective – **1 ex.** – | Dunod |
| **SILVESTER J. R.** | Geometry, ancient and modern – **1 ex.** – | Oxford Univ. Press |
| **SIPSER M.** | Introduction to the theory of computation – **1 ex.** – | Thomson C. T. |
| **SKANDALIS G.** | Topologie et analyse – **1 ex.** – | Dunod |

| | | |
|---|---|---|
| **SKANDALIS G.** | Agrégation interne : Algèbre générale, algèbre linéaire et un peu de géométrie – **2 ex.** – | Calvage & Mounet |
| **STANLEY R.P.** | Enumerative combinatorics Volume I – **2 ex.** – | Waddworth and Brooks |
| **STEIN E.** | Functional Analysis – **2 ex.** – | Princeton |
| **STEIN E.** | Complex Analysis – **2 ex.** – | Princeton |
| **STEIN E.** | Fourier Analysis – **2 ex.** – | Princeton |
| **STEIN E.** | Real Analysis – **2 ex.** – | Princeton |
| **STEWART I.** | Galois theory – **2 ex.** – | Chapman and Hall |
| **STROUSTRUP B** | Le langage C++ – **1 ex.** – | Pearson Education |
| **SZPIRGLAS A.** | Exercices d'algèbre – **1 ex.** – | Cassini |
| **SZPIRGLAS A.** *et al.* | Mathématiques : Algèbre L3 – **1 ex.** – | Pearson |
| **TAUVEL P.** | Cours de Géométrie – **1 ex.** – | Dunod |
| **TAUVEL P.** | Cours d'algèbre – **1 ex.** – | Dunod |
| **TAUVEL P.** | Corps commutatifs et théorie de Galois – **1 ex.** – | Calvage et Mounet |
| **TAUVEL P.** | Mathématiques générales pour l'agrégation – **1 ex.** – | Masson |
| **TAUVEL P.** | Exercices de mathématiques pour l'agrégation Algèbre 2 – **2 ex.** – | Masson |
| **TAUVEL P.** | Analyse complexe pour la licence – **2 ex.** – | Dunod |

| | | |
|---|---|---|
| **TENENBAUM G.** | Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres T 1 – **1 ex.** – | S. M. F. |
| **TENENBAUM G.** | Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres – **2 ex.** – | BELIN |
| **TENENBAUM G.**<br>**MENDÈS-FRANCE M.** | Les nombres premiers – **2 ex.** – | QUE SAIS-JE ?<br>PUF |
| **TENENBAUM G.**<br>**WU J.** | Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres T 2 – **1 ex.** – | S. M. F. |
| **TESTARD F.** | Analyse mathématique – **3 ex.** – | CALVAGE ET MOUNET |
| **TEYTAUD O.**<br>**ANTONINI C.**<br>**BORGNAT P.**<br>**CHATEAU A.**<br>**LEBEAU E.** | Les maths pour l'agreg – **1 ex.** – | DUNOD |
| **TISSERON C.** | Géométries affine, projective et euclidienne – **1 ex.** – | HERMANN |
| **TISSIER A.** | Mathématiques générales : exercices avec solutions – **4 ex.** – | BRÉAL |
| **TITCHMARSH E.C.** | The theory of functions – **2 ex.** – | OXFORD UNIV. PRESS |
| **TORTRAT A.** | Calcul des probabilités et introduction aux processus aléatoires – **1 ex.** – | MASSON |
| **TRIGNAN J.** | Constructions géométriques et courbes remarquables – **1 ex.** – | VUIBERT |
| **TURING A.**<br>**GIRARD J. Y.** | La Machine de Turing – **1 ex.** – | SEUIL |
| **ULMER F.** | Théorie des groupes – **2 ex.** – | ELLIPSES |
| **VALIRON G.** | Cours d'analyse mathématique<br>— I Théorie des fonctions – **2 ex.** –<br>— II Équations fonctionnelles - Applications – **2 ex.** – | MASSON |

| | | |
|---|---|---|
| **VAUTHIER J.**<br>**PRAT J-J.** | Cours d'Analyse Mathématique de l'Agrégation – **3 ex.** – | Masson |
| **VAZIRANI V.V.** | Algorithmes d'approximation – **1 ex.** – | Springer |
| **VERGNAUD D.** | Exercices et problèmes de cryptographie – **2 ex.** – | Dunod |
| **VINBERG E. B.** | A course in algebra – **1 ex.** – | AMS |
| **WAGSCHAL C.** | Fonctions holomorphes - Équations différentielles – **1 ex.** – | Hermann |
| **WAGSCHAL C.** | Topologie et analyse fonctionnelle – **1 ex.** – | Hermann |
| **WAGSCHAL C.** | Distributions, analyse microlocale, équations aux dérivées partielles – **2 ex.** – | Hermann |
| **WARIN B.** | L'algorithmique, votre passeport informatique pour la programmation – **1 ex.** – | Ellipses |
| **WARUSFEL A.** | Structures algébriques finies – **2 ex.** – | Classiques Hachette |
| **WARUSFEL A.**<br>**ATTALI P.**<br>**COLLET M.**<br>**GAUTIER C.**<br>**NICOLAS S.** | Mathématiques<br>— Analyse – **1 ex.** –<br>— Arithmétique – **1 ex.** –<br>— Géométrie – **1 ex.** –<br>— Probabilités – **1 ex.** – | Vuibert |
| **WATERMAN M.S.** | Introduction to computational biology – **1 ex.** – | Chapman and hall / CRC |
| **WEST D. B.** | Introduction to graph theory – **1 ex.** – | Prentice Hell |
| **WHITTAKER E.T.**<br>**WATSON G.N.** | A course of modern analysis – **3 ex.** – | Cambridge |
| **WILF H.** | Generatingfunctionology – **1 ex.** – | Academic Press |
| **WILF H.** | Algorithms and complexity – **1 ex.** – | A.K. Peters |

| | | |
|---|---|---|
| **WILLEM M.** | Analyse fonctionnelle élémentaire – **2 ex.** – | Cassini |
| **WILLEM M.** | Principes d'analyse fonctionnelle – **3 ex.** – | Cassini |
| **WINSKEL G.** | The formal semantics of programming languages – **1 ex.** – | MIT Press |
| **YALE P.B.** | Geometry and Symmetry – **1 ex.** – | Dover |
| **YGER A.** | Analyse complexe – **2 ex.** – | Ellipse |
| **YGER A.**<br>**WEIL J.-A.**<br>*et al.* | Matématiques appliquées L3 – **1 ex.** – | Pearson |
| **YOUNG D.M.**<br>**GREGORY R.T.** | A survey of numerical mathematics – **1 ex.** – | Dover |
| **ZAVIDOVIQUE M.** | Un max de math – **1 ex.** – | Calvage et Mounet |
| **ZÉMOR G.** | Cours de cryptographie – **3 ex.** – | Cassini |
| **ZUILY C.** | Éléments de distributions et d' équations aux dérivées partielles – **2 ex.** – | Dunod |
| **ZUILY C.**<br>**QUEFFÉLEC H.** | Éléments d'analyse pour l'agrégation – **1 ex.** – | Masson |
| **ZUILY C.**<br>**QUEFFÉLEC H.** | Analyse pour l'agrégation – **2 ex.** – | Dunod |
| **ZUILY C.**<br>**QUEFFÉLEC H.** | Problèmes de distributions – **3 ex.** – | Cassini |

## 7.2 Bibliothèque numérique

En 2021, les candidats ont pu utiliser une bibliothéque numérique pendant la préparation de l'épreuve de modélisation. La liste des livres disponibles est décrite ci-dessous. Cette liste sera actualisée en 2022, en tenant compte de la disparition de l'option D. La liste 2022 sera disponible sur le site du concours agreg.org.

- Serge Abiteboul, Benjamin Nguyen, Yannick Le Bras : Introduction aux Bases de Données Relationnelles
- Grégoire Allaire : Analyse numerique et optimisation (Éditions de l'École polytechnique)
- Gilles Bailly-Maitre : Arithmétique et cryptologie (Ellipses, 2e édition)
- Philippe Barbe et Michel Ledoux - Probabilité (EDP Sciences)
- Danièle Beauquier, Jean Berstel, Philippe Chrétienne : Eléments d'algorithmique (Masson)
- Sylvie Benzoni-Gavage : Calcul différentiel et équations différentielles (Dunod, 2e édition)
- Florent Berthelin : Équations différentielles (Cassini)
- Frédéric Bertrand, Myriam Maumy Bertrand : Initiation à la statistique avec R (Dunod)
- Alin Bostan et al. : Algorithmes efficaces en calcul formel (Hal.inria.fr)
- Richard Brent, Paul Zimmermann : Modern Computer Arithmetic (Cambridge University Press)
- Hervé Carrieu : Probabilité (EDP Sciences)
- Alexandre Casamayou-Boucau, Pascal Chauvin et Guillaume Connan : Programmation en Python pour les mathématiques (Dunod, 2e édition)
- Alexandre Casamayou et al. : Calcul mathématique avec Sage
- Marie-Line Chabanol, Jean-Jacques Ruch : Probabilités et statistiques (Ellipses)
- Djalil Chafai, Pierre-André Zitt : Probabilités, préparation à l'agrégation interne
- Djalil Chafai, Florant Malrieu : Recueil de modèles aléatoires (HAL Id : hal-01897577, version 3)
- Jean-Pierre Demailly - Analyse numérique et équations différentielles (EDP Sciences, 4e édition)
- Michel Demazure : Cours d'algèbre (Cassini)
- Laurent di Menza : Analyse numérique des équations aux dérivées partielles (Cassini)
- Gilles Dowek : Les démonstrations et les algorithmes (Éditions de l'École polytechnique)
- Gilles Dowek : Introduction à la théorie des langages de programmation (Éditions de l'École polytechnique)
- Christoph Dürr, Jill-Jenn Vie : Programmation efficace. 128 algorithmes qu'il faut avoir compris et codés en Python au cours de sa vie (Ellipses)
- Jérôme Escoffier : Probabilités et statistiques (Ellipses, 3e édition)
- Francis Filbet : Analyse numérique (Dunod, 2e édition)
- Loïc Foissy et Alain Ninet : Algèbre et calcul formel (Ellipses)
- Christine Froidevaux ,Marie-Claude Gaudel,Michèle Soria : Types de données et algorithmes Broché de (MC-Graw Hill)
- Olivier Garet et Aline Kurtzmann : De l'intégration aux probabilités (Ellipses, 2e édition)
- Thierry Goudon : Mathématiques pour la modélisation et le calcul scientifique (ISTE)
- Thérèse Hardin et al. : Concepts et sémantique des langages de programmation 1. Constructions fonctionnelles et impératives avec OCaml, Python, C et C++ (ISTE)
- Jean-Baptiste Hiriart-Urruty : Optimisation et analyse convexe (EDP Sciences)
- John Hubbard, Beverly West : équations différentielles et systèmes dynamiques (Cassini)
- Mathieu Jaume, Matthieu Journault, Marie-Jeanne Lesot, Pascal Manoury, Isabelle Mounier : Logique pour l'informatique (Ellipses)
- Pascal Lafourcade, Levy Michel , Dewismes Stéphane : Logique et démonstration automatique - Introduction à la logique propositionnelle et à la logique du premier ordre (Ellipses)
- Laurent Le Floch et Frédéric Testard : Probabilités 1 (Calvage et Mounet)
- Thierry Meyre : Probabilités, cours et exercices corrigés. Tome 1 (Calvage et Mounet
- Thierry Meyre : Probabilités, cours et exercices corrigés. Tome 2 (Calvage et Mounet)

- Denis Monasse : Cours d'option informatique MPSI (Spartacus IDH)
- Denis Monasse : Cours d'option informatique MP/MP* (Spartacus IDH)
- Jean-Yves Ouvrard : Probabilités. tome 1 (Cassini, 2e édition)
- Jean-Yves Ouvrard : Probabilités. tome 2 (Cassini, 2e édition)
- Sylvain Perifel : Complexité Algorithmique (Ellipses)
- Jean-Étienne Rombaldi : Analyse matricielle (EDP Sciences, 2e édition)
- François Rouvière : Petit guide de calcul différentiel (Cassini, 4e édition)
- Patrice Séébold : Fondamentaux de la théorie des automates (Ellipses)
- Victor Shoup : Computational introduction to number theory and algebra (Cambride University Press)
- Damien Vergnaud : Exercices et problèmes de cryptographie (Dunod, 3e édition)