MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE LA JEUNESSE ET DES SPORTS

Liberté
Égalité
Fraternité

Concours de recrutement du second degré

Rapport de jury

Concours : Agrégation externe

Section : Mathématiques

Session 2020

Rapport de jury présenté par : Thierry Goudon
Président du jury

Table des matières

Les rapports des jurys des concours sont établis sous la responsabilité des présidents de jury.

Chapitre 1

Introduction

Ce rapport vise à décrire le déroulement de la session 2020, marquée bien évidemment par la crise sanitaire de la COVID-19. En particulier, il donne des éléments sur la manière dont le jury a décidé d'appréhender la suppression des épreuves orales, transformant les épreuves écrites en seules épreuves d'admission. Cette situation exceptionnelle conduit à détailler, peut être davantage qu'à l'accoutumée, les attentes pour les épreuves écrites.

En vue de la préparation de la session 2021, le jury recommande de consulter attentivement les rapports des éditions précédentes, et notamment le rapport 2019, pour bien comprendre l'articulation des différentes épreuves et les attendus du jury. Afin que ce rapport reste l'indispensable complément du programme du concours et un guide pratique pour les futurs candidats, il présente aussi en annexe des commentaires sur les leçons qui seront proposées à la session 2021.

Le concours externe de l'agrégation a pour vocation de recruter des professeurs agrégés destinés à exercer dans l'enseignement secondaire (lycées d'enseignement général et technologique et, exceptionnellement, collèges) ou dans l'enseignement supérieur (universités, instituts universitaires de technologie, grandes écoles, classes préparatoires aux grandes écoles, sections de techniciens supérieurs). Le jury estime donc que le niveau visé devrait permettre au professeur agrégé d'intervenir sereinement et efficacement sur le créneau « bac−3/bac+3 » ; cet objectif calibre la conception du programme et les critères d'évaluation. Le programme et la nature des épreuves, écrites et orales, font l'objet de publications sur le site officiel du ministère de l'Éducation nationale http://www.devenirenseignant.gouv.fr. Le programme 2020 est reconduit pour 2021, à quelques précisions près ; il est disponible à l'URL https://media.devenirenseignant.gouv.fr/file/agregation_externe_21/90/9/p2021_agreg_ext_mathematiques_1274909.pdf

Le site officiel de l'agrégation externe de mathématiques agreg.org donne de nombreuses informations utiles et des conseils aux candidats. Les visiteurs peuvent aussi y trouver des archives : sujets d'écrits et leurs corrigés et exemples de textes de modélisation. L'environnement informatique du concours pour l'épreuve de modélisation, la `ClefAgreg`, est accessible sur ce site : il est ainsi possible de se familiariser avec cet environnement. L'URL http://clefagreg.dnsalias.org/8.0/ fournit un guide décrivant de manière détaillée les étapes de construction de cette clef. Cette épreuve, sur texte et où la production d'illustrations informatiques est attendue, est assez spécifique ; s'y préparer suffisamment tôt permet de bien appréhender ses spécificités et aide nécessairement à renforcer les capacités de synthèse sur l'ensemble du programme. De plus, il est aussi possible de consulter sur agreg.org une série de vidéos, réalisées par le jury, qui détaillent le déroulement des épreuves orales de leçons et en précisent les attentes. Enfin, le jury rappelle qu'une réunion est traditionnellement organisée en début d'année universitaire sous l'égide des sociétés savantes de mathématiques et d'informatique (Société Mathématique de France, Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles, Société Informatique de France) pour évoquer le bilan et les perspectives du concours. Cette réunion est publique, préparateurs et candidats de tous horizons y sont bienvenus.

Le jury conseille aux candidats de se préoccuper suffisamment tôt des questions liées à la gestion de leur carrière auxquelles ils seront confrontés en cas de succès au concours. Afin de les guider, l'inspection générale collecte les textes réglementaires relatifs aux différentes situations que les lauréats de l'agrégation externe peuvent rencontrer et édite une note indiquant les recommandations correspondantes http://igmaths.org/spip/spip.php?rubrique17. Le site agreg.org procure des informations complémentaires sur les textes de référence concernant les modalités d'affectation et d'organisation de l'année de stage et sur le statut des doctorants ou des docteurs agrégés qui suscite des questions fréquentes et demande une vigilance particulière.

Tout en étant pleinement conscient des enjeux de couverture des besoins d'enseignement, le jury recommande qu'une attitude positive soit réservée aux demandes de report ou de détachement de jeunes docteurs ou de doctorants en fin de thèse. Des dispositions restrictives, dont la motivation à très court terme peut se comprendre, obèrent les perspectives des doctorants agrégés et sont susceptibles de gravement perturber le fonctionnement et l'attractivité des formations de l'enseignement supérieur en mathématiques, avec des conséquences qui peuvent s'avérer néfastes à plus long terme. Comme la préparation au concours de l'agrégation joue, traditionnellement, un rôle structurant majeur sur l'ensemble de ces formations, on peut craindre un impact négatif sur les parcours conduisant vers la recherche en mathématiques, domaine où le pays excelle au tout meilleur niveau international, tout comme sur l'attractivité du concours.

Chapitre 2

Déroulement du concours et statistiques

2.1 Déroulement du concours

Les épreuves écrites d'admissibilité étaient prévues les 19 et 20 Mars 2020, les épreuves orales du 19 juin au 4 juillet. Le confinement annoncé le lundi 16 mars 2020 par le président de la République a conduit à la suspension de ce calendrier. Le 15 avril le ministère a annoncé une série d'aménagements exceptionnels se traduisant, pour ce concours, par la suppression des épreuves orales, les écrits devenant des épreuves d'admission. Il était aussi annoncé la mise en place d'une procédure spécifique de titularisation, autour d'un oral organisé un an après le concours. Dès que possible, le jury a ouvert sur agreg.org une « FAQ-session 2020 » pour diffuser au mieux les informations disponibles. En particulier, la possibilité de modifier les sujets n'a jamais été envisagée et ce point était précisé sur le site : les candidats ont été évalués sur des sujets tout à fait conformes à la lignée des années précédentes. Les épreuves se sont finalement déroulées les 24 (mathématiques générales) et 25 juin (analyse et probabilités), sur les sujets prévus.

Le concours fait l'objet de conventions internationales qui lient la France, le Maroc et la Tunisie : les sujets d'écrit servent aussi pour l'admissibilité aux agrégations de mathématiques en Tunisie et au Maroc. La délibération du jury est ainsi menée conjointement avec les présidents des agrégations marocaine et tunisienne. La délibération, le 23 juillet 2020, a donc fixée une barre d'admissibilité pour les étudiants de ces deux pays et une barre d'admission pour le concours français.

Dès l'annonce de la modification de la nature des épreuves, le jury s'est investi pour envisager la nécessaire adaptation à ces circonstances inédites. Plusieurs réunions, qui ont ont mobilisé largement le jury, ont été organisées afin de dégager des principes généraux d'évaluation de cette session. Il ressort de ces discussions que le jury devait s'attacher à

- se concentrer sur l'évaluation disciplinaire, en dehors de toute autre considération,
- se garder de toute concession en matière de niveau,
- s'assurer autant que possible de la maîtrise des socles du programme par les candidats au dessus de la barre,
- veiller, au delà des capacités techniques, aux qualités d'exposition, de rigueur, de clarté, de présentation attendues d'un professeur, qualités habituellement au cœur des épreuves orales.

Afin de rassurer les candidats et les guider dans leur préparation à ces épreuves, le jury avait diffusé sur agreg.org des

Conseils aux candidats pour les épreuves de la session 2020

Les candidats doivent se faire confiance et faire confiance à leur préparation. Les sujets de la session 2020 sont tout à fait dans la lignée des sujets des dernières années. Ils sont progressifs et permettront de valoriser un travail de préparation sérieux. La préparation au concours est un tout et l'investissement pour préparer les leçons et la modélisation a permis aux candidats de renforcer leurs connaissances et de gagner en maturité et recul sur les notions du programme ; ce travail d'ensemble ne peut être que *payant. Les sujets comprennent un certain nombre d'exercices et énoncés classiques ou basiques. Le jury considère que ces parties des sujets sont de nature à faire la preuve d'une maîtrise minimale du socle disciplinaire. Elles devront donc être particulièrement soignées. Par ailleurs, tout candidat peut trouver matière à s'exprimer durant tout le temps imparti aux épreuves qu'il faut pleinement exploiter.*

Le jury est mobilisé pour gérer la situation inédite qu'implique la suppression des épreuves orales et mène une réflexion approfondie pour adapter son évaluation à cette situation, avec la préoccupation de ne rien céder sur les exigences disciplinaires d'un concours d'accès aux corps des agrégés. Compte tenu du caractère spécifique de cette session, une attention renforcée sera attribuée aux critères suivants :

- *une démarche suivie et opiniâtre sera récompensée sur une stratégie de grapillage cherchant à traiter des questions éparses dans le sujet,*
- *rigueur de la logique et des raisonnements, attention à la nature des objets manipulés, gestion des parenthèses, précision des énoncés, vérification soignée des hypothèses, cohérence et honnêteté intellectuelle,*
- *l'efficacité de la rédaction doit permettre d'expliquer clairement les raisonnements, en évitant de delayer sur une longueur excessive des arguments confus et le verbiage fuligineux,*
- *le jury sera vigilant quant au soin apporté aux notions d'implication, d'équivalence, de contraposée, à la quantification des objets (soit, quel que soit, il existe, il existe un unique...) et aux raisonnements par récurrences. L'accumulation d'erreurs grossières, même si le sujet est largement abordé par ailleurs, sera sanctionnée.*

Enfin, la clarté de l'expression, l'orthographe et la présentation générale seront valorisées.

Ces recommandations sont de nature relativement universelle ; il s'agissait plus de précisions, destinées aussi à montrer l'implication du jury pour faire face à la situation et à maintenir un contact avec candidats et préparateurs, et en aucune manière d'une révolution sur les attentes.

Le jury a pleinement pris conscience de la modification radicale de l'enjeu des épreuves écrites. En temps normal elles servent, compte tenu du nombre de places ouvertes, à retenir de l'ordre de 800 admissibles. La nature du vivier conduit alors à adopter des critères de sélection relativement lâches, avec l'idée de donner leur chance à de nombreux candidats, en dépit de résultats modestes à cette phase du concours, et aussi en assumant une dimension formatrice qui peut aider certains candidats à franchir l'obstacle en plusieurs étapes. Pour cette session, il s'agissait de décider de l'admission sur les seuls écrits et de recruter des enseignants au vu de ces seules prestations, sur lesquelles devait se forger une évaluation des compétences disciplinaires aussi robuste que possible. Ce changement radical de paradigme a été abordé avec beaucoup de détermination et une réflexion intense, avec pour préoccupation prioritaire de s'assurer au mieux, au vu du matériel disponible, de la qualité scientifique et des capacités de transmission des candidats retenus.

Le jury a donc adopté un certain nombre de modalités spécifiques, conformément à ses annonces :

- identification sur chaque sujet d'un certain nombre de « questions-clefs », de niveau relativement « élémentaire » (typiquement du niveau L1-L2), représentatives de la maîtrise minimale attendue d'un agrégé ;
- mise en place « d'indicateurs-qualité », disjoints dans un premier temps de la grille de notation, à la fois sur ces questions-clefs et sur l'ensemble de la copie. Ces indicateurs étaient soit de nature positive pour distinguer un effort remarquable de rédaction, de compréhension du sujet ou de présentation, soit de nature négative pour faire ressortir des faiblesses d'argumentation, de rigueur ou de connaissances. Ces indicateurs ont permis un suivi affiné des performances des candidats afin de bien déterminer comment situer la barre ;
- renforcement des procédures d'harmonisation.

2.2 Commentaires généraux et statistiques sur la session 2020

2.2.1 Commentaires généraux

Le nombre de postes ouverts en 2020 est dans la lignée du dimensionnement adopté en 2018 et 2019. Le recrutement externe est par ailleurs complété par un concours externe spécial, réservé à des candidats titulaires d'un doctorat. Seize postes étaient ouverts à ce titre. Ce concours indépendant fait l'objet d'un rapport spécifique.

Année	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Postes ouverts	391	395	457	467	457	381	391	387
Concours spécial					15	16	16	16

Le jury a déclaré admis 325 candidats ; le premier admis a une moyenne de 19,75/20 et les derniers une moyenne de 8/20. Ce volume et ce seuil sont semblables à ceux des années passées.

Les moyennes et écarts-types des présents aux deux épreuves écrites et des admis sont résumés dans les tableaux ci-dessous :

	Ecrit MG	Ecrit AP
moyenne	5,2	5,54
écart-type	3,76	4,27

Moyennes et écarts-types des candidats présents (y compris Maroc-Tunisie) à l'ensemble des épreuves

	Ecrit MG	Ecrit AP
moyenne	10,45	11,78
écart-type	3,04	3,18

Moyennes et écarts-types des candidats admis

On résume dans le tableau ci-dessous l'évolution des barres d'admission depuis 2008 :

Année	Nombre de postes attribués	Barre d'admission (/20)
2020	325	8
2019	308	8,1
2018	315	8,1
2017	305	8,1
2016	304	8,1
2015	274	8,1
2014	275	8,48
2013	323	7,95
2012	308	8,1
2011	288	9,33
2010	263	9,8
2009	252	10,15
2008	252	10,1

La barre retenue et les volumes correspondants sont pleinement cohérents avec les données des dernières années, un signe encourageant quant à la gestion de cette situation de crise par les candidats et leurs préparateurs. L'indéniable qualité des copies a même permis, sans aucune concession sur le niveau d'exigence, de retenir un nombre de candidats légérement plus élevé que les années précédentes. Les excellentes prestations observées en tête du classement constituent aussi un signal extrêmement positif.

Le tableau suivant donne une indication sur la répartition des notes qui reste très similaire à la répartition sur les admis (c'est-à-dire sur l'ensemble des cinq épreuves) de 2019.

Rang	Moyenne
1	19,75
1-10	19,75–17,5
10-50	17,5–14,5
50-100	14,5–12,6
100-200	12,6–10
200-300	10–8,5

Les sujets ont largement permis aux candidats de s'exprimer ; c'est un motif de satisfaction, tout particulièrement en Analyse et Probabilités où le sujet a été exploré de manière assez avancée par une forte proportion des candidats. Aussi, le signal obtenu était riche et donnait beaucoup de matière à réflexion sur les compétences techniques. Comme indiqué plus haut, sur chaque sujet des « questions-clefs » avaient été identifiées, en début de sujet et considérées représentatives du niveau minimal attendu du professeur agrégé. Ces questions qui ont fait l'objet d'un suivi renforcé sont les suivantes :

- Sujet Mathématiques Générales
  - Exercice 1. Cet exercice testait la capacité à mener des calculs et raisonnements en algèbre linéaire dans un contexte très concret (dimension 4). Il devait conduire à réfléchir et raisonner sans se jeter sur le calcul direct en exploitant les notions de rang, dimension, et diagonalisation qui doivent, en particulier, être maîtrisées.
  - Exercice 2, questions 1 à 3. Cet exercice permettait d'évaluer des capacités de raisonnement élémentaire sur une question explicitement au programme du concours (disques de Gershgorin). Il conduisait à manipuler des inégalités élémentaires sur des nombres complexes et on attendait qu'un raisonnement exhaustif soit produit.
  - Exercice 3, questions 1-(a), (b), (c). Cet exercice mettait en valeur les qualités de rédaction et de clarté du raisonnement. Il fallait bien s'adapter au fil conducteur proposé par le sujet et produire au moins une récurrence, énoncée et prouvée précisément.
  - Partie 1, questions 1-(a), 1-(b) et 2. Ces questions faisaient appel à des concepts et raisonnements élémentaires en algèbre linéaire, ainsi que des calculs un peu abstraits et, encore, des raisonnements par récurrence qu'il fallait identifier et expliquer.
- Sujet Analyse et Probabilités
  - Question I.2
  - Question I.4 a)
  - II.1 et II.4
  - question III.3 c).

  Ces questions permettaient de tester des compétences de niveau L, notamment
  - la connaissance et les manipulations de séries usuelles (séries alternées, séries entières usuelles) et de fonctions usuelles (sin, exp, ln, puissances...),
  - les notions de convergence simple et uniforme de suites de fonctions continues,
  - le calcul de primitive et l'intégration par parties, la notion d'intégrale impropre et la notion d'intégrabilité,
  - la maîtrise de techniques de majoration : accroissements finis, inégalités de convexité, études de fonctions, manipulations de modules de nombres complexes, inégalité triangulaire.

Le jury estime que la capacité à hiérarchiser les niveaux de difficulté, à identifier par soi-même de telles questions « basiques » et y apporter des réponses précises, sans ambiguité, avec une rédaction efficace fait partie des attendus exigibles d'un professeur agrégé. Le rôle de ces questions dans la notation ne doit pas être sur-interprété. Un faible score à celles-ci n'était pas rédhibitoire et leur réussite ne suffisait pas à garantir l'admission. Mais elles ont servi, parmi d'autres, d'indicateurs quant à la fiabilité technique des candidats et la clarté de leur argumentation. De fait, en Mathématiques Générales, tous les reçus ont une note à ces seules questions supérieure à 8/20. En Analyse-Probabilités, seuls 25 candidats sur les 361 au dessus de la barre d'admission ont une note inférieure à 8/20 à ces questions suivies. Ces données paraissent un indicateur de la maîtrise solide des notions de base. Par ailleurs, une attention renforcée etait attribuée à certains critères. Ainsi, au delà de la quantité des questions traitées, et du caractère « juste » des réponses apportées, la qualité de la présentation de l'argumentation a fait partie des critères d'appréciation : il fallait inspirer confiance aux correcteurs de manière efficace et les défauts en la matière ont pu être fortement pénalisants.

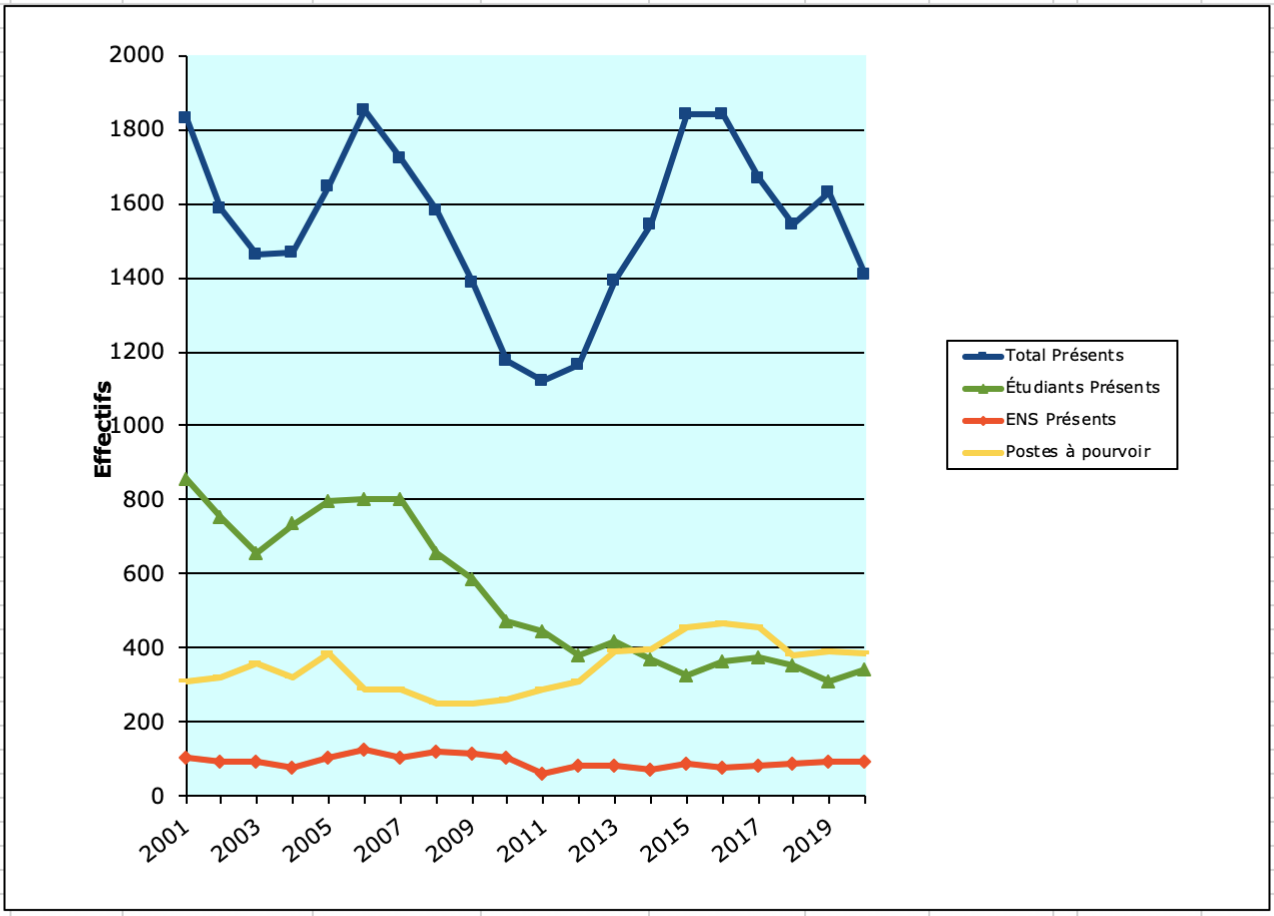
2.2.2 Données statistiques diverses

Les tableaux et graphiques suivants présentent un bilan statistique du concours, selon le statut des candidats, leur diplôme, leur genre, leur origine géographique, leur âge. Ces statistiques portent sur les candidats dont le statut permet d'être admis au concours et n'incluent pas les étudiants marocains et tunisiens.

Effectifs détaillés. Le tassement du nombre des inscrits, passé sous la barre des 3000 en 2019, se confirme, accompagné par une baisse du nombre des présents. Le nombre des candidats (déclarés comme) normaliens est stable. Le jury rappelle son attachement à la justification historique commune aux Écoles Normales Supérieures, et le contrat implicite de leurs élèves qui était, en contrepartie de leur statut privilégié et de leur rémunération, de passer l'agrégation (source : Rapport public de la Cour des comptes 2012). Leur participation contribue au rôle structurant du concours sur les formations universitaires en mathématiques, à sa qualité scientifique et au delà à l'excellence de la discipline au niveau international. Le jury souhaite donc que les responsables d'études des Écoles Normales Supérieures restent conscients de ces enjeux et encouragent les élèves à se préparer et à passer le concours. Une dizaine de candidats déclarés normaliens n'ont pas été en mesure de franchir la barre d'admission : même pour ces candidats a priori très sélectionnés, la réussite au concours n'est pas une certitude. On observe une légère remontée du nombre de candidats étudiants présents aux deux épreuves. Cependant, et ce signal n'est pas positif, leur nombre parmi les admis est en baisse sensible. Le nombre de candidats certifiés inscrits et présents poursuit sa décroissance, mais cette population reste toujours de très loin la plus importante. Dans la configuration particulière d'un vivier restreint par rapport au nombre de postes, le concours externe peut offrir une réelle opportunité de promotion pour des professeurs certifiés. Le volume conséquent de ces candidats en poste témoigne d'une volonté manifeste de progression ; le jury est conscient des efforts que représente pour cette population la préparation au concours, une mobilisation qui mériterait d'être soutenue par l'octroi d'un plus grand nombre de congés-formation. La réussite des candidats certifiés à cette session sans épreuves orales est une observation remarquable de ce bilan : ils sont trois fois plus nombreux à être admis par rapport à 2019 (dont un est classé parmi les 30 premiers). Cette réussite s'explique en partie par la forte participation de lauréats du concours interne à cette session. En effet, habituellement les résultats du concours interne sont publiés avant le début des épreuves orales du concours externe, et les admis du concours interne se désistent de leur participation à celles-ci. Or, cette année les résultats du concours interne n'ont été dévoilés qu'entre les deux épreuves écrites du concours externe. Ainsi, alors qu'en 2019, sur les 66 candidats admis à l'interne et déclarés admissibles à l'externe, seuls 10 sont venus à l'oral, en 2020, 55 agrégés du concours interne ont passé les 2 épreuves du concours externe auquel 12 sont déclarés admis. Toutefois, la corrélation est étonnamment faible (0,126) entre les classements à ces deux concours. Comme les années précédentes, on observe une présence substantielle de candidats diplômés d'une école d'ingénieurs, dont la réussite n'a pas été affectée par la suppression des épreuves orales. Enfin, bien qu'il existe un concours spécifiquement réservé aux titulaires d'un doctorat, on en trouve un nombre relativement important parmi les présents, dont la réussite comparée aux années précédentes tire plutôt bénéfice d'un concours circonscrit aux seules épreuves écrites.

Année	Total Inscrits	Total Présents	Étudiants Présents	ENS Présents	Postes à pourvoir	Présents par poste
2001	**2663**	**1828**	857	105	310	**5,9**
2002	**2343**	**1584**	753	95	320	**5,0**
2003	**2217**	**1463**	657	93	360	**4,1**
2004	**2333**	**1470**	735	76	321	**4,6**
2005	**2560**	**1644**	795	105	388	**4,2**
2006	**2849**	**1853**	800	129	290	**6,4**
2007	**2801**	**1722**	800	106	290	**5,9**
2008	**2491**	**1579**	659	119	252	**6,3**
2009	**2351**	**1384**	585	116	252	**5,5**
2010	**2332**	**1177**	474	106	263	**4,5**
2011	**2500**	**1124**	445	62	288	**3,9**
2012	**2673**	**1163**	379	82	308	**3,8**
2013	**2673**	**1393**	420	81	391	**3,6**
2014	**3001**	**1546**	371	72	395	**3,9**
2015	**3252**	**1841**	328	89	457	**4,0**
2016	**3525**	**1841**	364	78	467	**3,9**
2017	**3582**	**1668**	374	86	457	**3,6**
2018	**3285**	**1545**	352	89	381	**4,1**
2019	**2787**	**1628**	309	92	391	**4,2**
2020	**2710**	**1409**	344	93	387	**3,6**

Évolution du nombre de présents aux deux épreuves d'écrit



Courbes de l'évolution des effectifs

Professions et Diplômes.

Profession	Inscrit	Compose	Admissible
CERTIFIE	1146	557	29
ETUD.HORS ESPE (PREPA MO.UNIV)	371	344	134
SANS EMPLOI	224	82	23
ETUD.HORS ESPE (SANS PREPA)	118	80	19
CADRES SECT PRIVE CONV COLLECT	117	35	7
ENS.STAGIAIRE 2E DEG. COL/LYC	100	44	5
ELEVE D'UNE ENS	96	93	82
CONTRACTUEL 2ND DEGRE	90	26	1
PLP	46	18	
PERS ENSEIG TIT FONCT PUBLIQUE	37	9	2
SALARIES SECTEUR TERTIAIRE	32	10	3
PROFESSIONS LIBERALES	26	6	2
ETUDIANT EN ESPE EN 1ERE ANNEE	22	9	1
ETUDIANT EN ESPE EN 2EME ANNEE	21	9	1
AGREGE	20	6	2
ENSEIGNANT DU SUPERIEUR	20	6	3
PROFESSEUR ECOLES	19	4	
MAITRE CONTR.ET AGREE REM TIT	18	12	
ETUD.HORS ESPE (PREPA CNED)	18	9	1
PERS FONCTION PUBLIQUE	17	2	
FORMATEURS DANS SECTEUR PRIVE	17	3	1
PROFESSEUR ASSOCIE 2ND DEGRE	14	6	1
MAITRE AUXILIAIRE	13	6	1
SALARIES SECTEUR INDUSTRIEL	12	3	
CONTRACT ENSEIGNANT SUPERIEUR	11	3	2
FONCT STAGIAIRE FONCT PUBLIQUE	10	6	
VACATAIRE DU 2ND DEGRE	9	1	
ASSISTANT D'EDUCATION	9	4	1
VACATAIRE ENSEIGNANT DU SUP.	7	2	1
AG NON TITULAIRE FONCT PUBLIQ	7	2	2
ARTISANS / COMMERCANTS	5	1	
PERS ENSEIG NON TIT FONCT PUB	4	3	
INSTITUTEUR	4		
ENSEIG NON TIT ETAB SCOL.ETR	4	1	
PROF DES ECOLES STAGIAIRE	3		
PERS FONCT TERRITORIALE	2	2	
EMPLOI AVENIR PROF.2ND D.PUBLI	2	1	
AGENT ADMI.MEMBRE UE(HORS FRA)	2		
CONTRACTUEL APPRENTISSAGE(CFA)	2		
CONTRACTUEL FORMATION CONTINUE	2	1	
PERSONNEL D'INSPECTION	2		
MILITAIRE	2	2	1
MAITRE DELEGUE	1		
CONTRACT MEN ADM OU TECHNIQUE	1		
COP STAGIAIRE EN CENTRE DE FOR	1		
INSTITUTEUR SUPPLEANT	1		
PERS ADM ET TECH MEN	1		
ADJOINT D'ENSEIGNEMENT	1		
CE D'EPS	1		
EMPLOI AVENIR PROF.2ND D.PRIVE	1		
MAITRE CONTR.ET AGREE REM MA	1	1	

Résultat du concours par catégories professionnelles[1]

Diplome	Inscrit	Compose	Admissible
MASTER	1428	861	246
ENSEIGNANT TITUL-ANCIEN TITUL CAT A	366	161	9
DIPLOME D'INGENIEUR (BAC+5)	353	159	25
DOCTORAT	205	76	18
DIP POSTSECONDAIRE 5 ANS OU +	104	44	6
DIPLOME GRANDE ECOLE (BAC+5)	99	45	16
DISP.TITRE 3 ENFANTS	62	30	1
GRADE MASTER	61	22	4
ADMIS ECH.REM.CERTIFIE PLP PEPS	18	8	
DIPLOME CLASSE NIVEAU I	13	3	
ADMIS ECH.REM PROFESSEUR ECOLE	1		

Diplômes des candidats hors étudiants tunisiens et marocains

Répartition selon le genre. Le jury, qui cette année avait une composition exactement paritaire, est résolument investi sur les questions liées aux enjeux de parité. La correction des épreuves écrites se fait de manière totalement dématérialisée et le jury ne dispose d'absolument aucune information sur les candidats : il n'a accès qu'aux copies repérées par un numéro. Il n'est donc pas possible d'envisager des mesures pour identifier et corriger un éventuel biais. En cette année sans épreuves orales, le taux de réussite des femmes s'avère extrêmement faible. Alors que la répartition hommes/femmes restait stable au cours des années aux différentes étapes du concours, la session 2020 est marquée par un décrochage

1. Les catégories professionnelles et les catégories par diplômes listées correspondent aux déclarations des candidats lors de l'inscription : elles ne font l'objet d'aucune vérification et doivent être considérées avec prudence.

sensible de la proportion des admises avec seulement 15,7% de femmes parmi les reçus, contre une proportion située entre 20 et 25% les années antérieures, pour 29,5% des inscrits, 27,3% des présents, ces dernières données étant semblables à celles des années précédentes. Par ailleurs, on ne trouve que deux femmes parmi les 30 premiers, et seulement 5 parmi les 50 premiers, un reflet aussi de la faible proportion de femmes parmi les élèves des ENS.

Sexe	Inscrit	Compose	Admissible
M.	1910	1000	274
MME	800	409	51

Répartition selon le genre

Répartition selon l'âge. Le tableau de répartition des candidats suivant l'âge indique que l'essentiel des admis de l'agrégation externe se regroupe dans la tranche 22-27 ans, comme les années précédentes. On note toutefois un recul du nombre d'admis de 23 ans et un étalement des réussites vers des âges plus avancés.

Age	Inscrit	Compose	Admissible
20	1		
21	5	5	2
22	53	49	31
23	235	217	97
24	182	151	60
25	144	100	25
26	119	64	19
27	98	53	14
28	97	43	7
29	94	35	2
30	89	23	2
31	85	35	8
32	59	27	1
33	76	25	3
34	80	36	1
35	67	27	3
36	63	21	1
37	60	26	3
38	57	30	2
39	67	22	3
40	64	34	4
41	57	26	2
42	66	29	
43	70	28	4
44	66	33	3
45	58	18	1
46	71	29	1
47	68	24	3
48	57	31	5
49	42	15	1
50	59	25	1
51	41	17	2
52	41	17	2
53	42	17	1
54	29	14	3
55	24	12	3
56	27	9	2
57	21	12	
58	18	8	2
59	5	3	
60	11	2	
61	15	6	1
62	8	6	
63	5	1	
64	7	2	
65	3	1	
66	4	1	

Tableau de répartition des candidats en fonction de l'âge

Répartition selon l'académie. Les centres de Paris-Créteil-Versailles, Rennes et Lyon concentrent les plus importants effectifs de candidats présents et reçus. En dehors de ces académies hôtes d'Écoles

Normales Supérieures, les académies d'Aix-Marseille, Lille et Toulouse sont les plus importantes en nombres de présents ; pour le nombre d'admis on trouve Toulouse, Strasbourg et Grenoble.

Academie	Inscrit	Compose	Admissible
CRETEIL-PARIS-VERSAIL.	779	385	110
LYON	149	92	37
LILLE	137	80	10
RENNES	130	96	47
NICE	125	45	5
AIX-MARSEILLE	121	70	9
TOULOUSE	112	65	19
POITIERS	104	21	2
MONTPELLIER	96	40	7
NANTES	95	56	10
STRASBOURG	86	44	15
GRENOBLE	85	53	13
NANCY-METZ	79	43	9
BORDEAUX	75	45	10
ORLEANS-TOURS	72	38	4
AMIENS	59	26	1
ROUEN	59	25	1
LA REUNION	53	32	3
CAEN	41	26	3
REIMS	41	28	2
CLERMONT-FERRAND	38	22	2
BESANCON	36	24	5
DIJON	29	13	1
GUADELOUPE	25	6	
MARTINIQUE	19	8	
LIMOGES	15	8	
POLYNESIE FRANCAISE	13	7	
NOUVELLE CALEDONIE	12	3	
CORSE	9	3	
MAYOTTE	9	3	
GUYANE	7	2	

Répartition par académies

Compte tenu du contexte spécifique de cette session, il peut être pertinent d'étudier l'évolution du taux de réussite admis/présents à l'écrit entre 2019 et 2020. Dans l'ensemble celui-ci est plutôt stable, avec cependant des performances notables pour Toulouse et Strasbourg ainsi que La Réunion et des contre-performances pour Reims, Besançon et Dijon. Ces données sont à relativiser compte tenu des faibles effectifs de certaines de ces populations, et de leur nature variable (proportion de candidats inscrits dans les préparations universitaires ou de certifiés, etc).

Académies	A/P 2020	A/P 2019	Evolution
CRETEIL-PARIS-VERSAIL	0,29	0,26	1,12
LYON	0,4	0,47	0,85
LILLE	0,13	0,1	1,3
RENNES	0,49	0,52	0,94
NICE	0,11	0,12	0,92
AIX-MARSEILLE	0,13	0,16	0,81
TOULOUSE	0,29	0,13	2,23
POITIERS	0,1	0,04	2,5
MONTPELLIER	0,18	0,1	1,8
NANTES	0,18	0,25	0,72
STRASBOURG	0,34	0,18	1,89
GRENOBLE	0,25	0,33	0,76
NANCY-METZ	0,21	0,29	0,72
BORDEAUX	0,22	0,24	0,92
ORLEANS-TOURS	0,11	0,15	0,73
AMIENS	0,04	0,07	0,57
ROUEN	0,04	0,05	0,8
LA REUNION	0,09	0	
CAEN	0,12	0,22	0,55
REIMS	0,07	0,15	0,47
CLERMONT-FERRAND	0,09	0,07	1,29
BESANCON	0,21	0,52	0,4
DIJON	0,08	0,23	0,35
GUADELOUPE	0	0	
MARTINIQUE	0	0	
LIMOGES	0	0	
POLYNESIE FRANCAISE	0	0	
NOUVELLE CALEDONIE	0	0	
CORSE	0	0	
MAYOTTE	0	0	
GUYANE	0	0	

Évolution du taux de réussite par académies entre 2019 et 2020

Les sociétés savantes collectent des informations sur les volumes horaires consacrés aux préparations selon les universités ; ces données révèlent de très grandes disparités : sur les effectifs des promotions, sur le nombre d'options préparées et en termes de volume horaire consacré à la préparation au concours, ce dernier pouvant varier d'un rapport de 1 à 4 ! La faiblesse des effectifs présents dans certaines préparations peut être une difficulté puisque l'émulation et le travail en groupe jouent souvent un rôle important dans le succès des formations. À cet égard, l'incorporation dans les préparations de candidats du concours spécial réservé aux docteurs, dont on pourrait légitimement attendre une plus grande maturité scientifique, peut être un stimulant efficace.

Chapitre 3

Épreuve écrite de mathématiques générales

Le sujet est disponible à l'URL https://media.devenirenseignant.gouv.fr/file/agregation_externe/97/6/s2020_agreg_externe_math_1_1302976.pdf ou sur le site agreg.org.

3.1 Commentaires sur l'épreuve écrite de mathématiques générales

3.1.1 Présentation du sujet

Le sujet traitait de l'algorithmique de la factorisation des polynômes à coefficients rationnels, en suivant la stratégie de Lenstra, Lenstra et Lovasz [LLL]. De manière succincte, la stratégie générale consiste à calculer une factorisation modulo p^n, pour p^n assez grand. Les facteurs mod p^n correspondant à la réduction modulo p^n de facteurs entiers peuvent alors être reconnus parce que leurs coefficients sont « petits ». Cette remarque heuristique peut être rendue précise (partie II) et justifie la stratégie, qui consiste alors à partir d'un facteur « irréductible » modulo p^n (dans le sujet $n = 1$ et les guillemets sont superflus) et à chercher un multiple de celui-ci ayant un relèvement dans $\mathbf{Z}[X]$ dont les coefficients sont petits.

Dans le sujet, on a choisi $n = 1$. Ce choix est mauvais à divers égards (il conduit à une méthode probabiliste, cf. partie III, plutôt que déterministe, et est moins efficace dans l'absolu), mais permet d'éviter des considérations un peu délicates d'arithmétique des polynômes modulo p^n.

Comparativement à Lenstra, Lenstra et Lovasz, si la stratégie générale est conservée, la plupart des ingrédients ont été modifiés ; là encore, ces choix ont été dictés par le contexte et sont inefficaces en pratique : utilisation de la méthode de Cantor-Zassenhaus [CZ], partie III, plutôt que celle de Berlekamp pour factoriser modulo p, et utilisation de la méthode BKZ [Sch], en partie V – la partie I étant une partie préparatoire à l'analyse de cet algorithme – plutôt que LLL pour le calcul de vecteurs courts (non nuls) dans un réseau. Ce dernier choix nécessite l'étude d'une variante dégradée de l'algorithme de Gauss de réduction des formes quadratiques binaires (partie IV, écrite dans le langage des réseaux).

Des éléments préliminaires des différentes parties, considérées comme classiques et appartenant en principe au corpus de connaissances du candidat à l'agrégation bien préparé ont été regroupées dans des exercices.

L'exercice 1 est un exercice élémentaire de mise en jambes, qui consiste en une étude sommaire de la matrice A de la partie I en dimension $d = 4$. L'exercice permettait ainsi de tester, dans un contexte totalement explicite, la manipulation et le calcul avec des notions élémentaires que sont noyau, rang, valeurs propres, diagonalisation.

L'exercice 2 prépare la partie II ; il établit (par le chemin des écoliers) la borne de CAUCHY pour les racines d'un polynôme, et en déduit une borne sur les coefficients des facteurs. On pouvait reconnaître le lemme de HADAMARD-GERSHGORIN, explicitement au programme du concours (question 2.1). L'exercice 3 introduit l'orthogonalisation de GRAM-SCHMIDT, qui est centrale dans la partie V, et l'utilise pour établir l'inégalité de HADAMARD pour le déterminant, commode dans la partie II. Enfin, l'exercice 4 prouve une partie de la décomposition classique $t^{p^n} - t = \prod_{\phi \in C_n} \phi$, où C_n est l'ensemble des polynômes irréductibles de $\mathbf{F}_p$ de degré divisant n ; c'est une des clés de la première étape de l'algorithme de CANTOR-ZASSENHAUS, qui sépare les facteurs irréductibles selon leur degré (*distinct degree factorization*).

Même si tous les ingrédients sont là, le sujet ne ferme pas tout à fait la boucle ; il faudrait adapter la borne de la partie II pour tenir compte du fait que la méthode de la partie V ne trouve pas un vecteur non nul le plus court (c'est un problème NP-complet) mais un vecteur dans un rapport $2^{O(d)}$ du vecteur le plus court ; c'est en réalité sans difficulté particulière (il suffit d'augmenter p). Il faudrait également indiquer comment trouver un système de d vecteurs engendrant $L_p(h)$ – il suffit, dans la définition, de limiter h_2 à un degré $\leqslant \deg h - 1$. Un travail approfondi sur $\|A\|_2$ permettrait également de contrôler le nombre d'itérations de la méthode de la partie V, en l'état pas du tout explicite.

Pour une présentation plus adéquate et plus à jour du sujet, en particulier l'algorithme de van Hoeij [vH] qui combine les mêmes ingrédients de manière plus subtile et est considérablement plus satisfaisant en théorie comme en pratique, on renvoie par exemple à l'ouvrage de référence [Bo].

Références

[Bo] A. Bostan, *Algorithmes efficaces en calcul formel* (2017) disponible à l'URL https://hal.archives-ouvertes.fr/AECF/.

[CZ] D. G. Cantor, H. Zassenhaus, *A new algorithm for factoring polynomials over finite fields*, Math. Comput., **36** (1983), n. 154, 587–592.

[LLL] A.K Lenstra, H.W Lenstra Jr., L. Lovasz, *F*actoring polynomials with rational coefficients, Math. Annalen **261** (1982), 515-534.

[Sch] C. P. Schnorr, *A hierarchy of polynomial lattice basis reduction algorithms*, Theoretical Computer Science, **53** (1987), n. 2-3, 201-224.

[vH] M. van Hoeij, *Factoring polynomials and the knapsack problem*, J. Number Th. **95** (2002), 67-189.

3.1.2 Remarques générales

Le sujet était conçu pour permettre aux candidats ayant des connaissances solides en algèbre linéaire (et bilinéaire) et étant précis dans leurs arguments et leur rédaction de tirer leur épingle du jeu ; les exercices 1, 2, 3 et la partie I leur étaient largement accessibles. Les exercices, plus largement, très proches du cours (HADAMARD-GERSHGORIN, GRAM-SCHMIDT, construction des corps finis) ou de développements d'oral classiques (inégalité de HADAMARD, décomposition de $t^{p^n} - t$ sur $\mathbf{F}_p$) devaient plus largement permettre aux candidats de valoriser leur travail de préparation.

Les questions préliminaires, ou les exercices, sont des passages obligés pour convaincre les correcteurs des qualités de précision, rigueur, efficacité et clarté du candidat, qualités indispensables à un enseignant. Il n'est pas envisageable de faire l'impasse sur ces questions, et le barême traduit ce fait. En particulier, certaines questions de cours sont posées en début de sujet ; elles demandent dans ce cas une démonstration (et non une réponse laconique sur le mode « c'est le théorème de Z »). Il n'y a pas lieu de s'inquiéter de ce fait mais plutôt de tirer parti d'une préparation efficace pour redémontrer ce qui doit l'être avec clarté et efficacité.

Les attendus du jury varient fort peu : guère de démonstration de virtuosité (les parties finales sont là pour ceux qui souhaitent s'essayer à l'exercice, intellectuellement stimulant mais pas forcément très rémunérateur) mais une précision la plus grande possible dans les réponses, la rédaction, l'enchaînement des arguments. Il s'agit d'un concours de recrutement d'enseignants, et non d'une épreuve olympique. Outre la capacité à résoudre une question, il faut convaincre le correcteur de la capacité à présenter la réponse à un public moins expert, a priori, que le candidat : il n'appartient pas au correcteur de colmater les brèches ! Enfin, le soin apporté à la rédaction des premières questions ou des premiers exercices ne peut que mettre le correcteur dans de bonnes dispositions pour la suite de la copie ; en particulier, écrire très proprement le premier raisonnement par récurrence peut permettre de passer plus rapidement sur les suivants.

Plus largement, dans le contexte d'un écrit d'agrégation, la rédaction est un enjeu clé. Cette année où le second filtre que constitue l'oral n'était pas opérant, l'exigence sur ce point a été particulièrement importante, et les copies incapables de formaliser des arguments simples de manière claire, enchaînée, et précise, ont été sévèrement pénalisées. En moyenne, la rédaction est globalement faible, et omet souvent des justifications importantes. Ce souci de précision a réellement fait la différence entre les candidats admis et les autres, certains candidats aux connaissances mathématiques peut être limitées ayant « fait le plein de points » sur les exercices 1, 2, 3 et le début de la partie I grâce à une rédaction irréprochable.

La mission de l'agrégation n'est pas de détecter de brillants mathématiciens. Elle est de recruter des mathématiciens solides, qui sachent transmettre leurs connaissances, tant mathématiques que méthodologiques et qui font la preuve de leurs capacités à raisonner et à s'exprimer clairement. En particulier, à destination des candidats convaincus qu'il faut aller très vite pour en faire le plus possible, il faut insister sur le fait que le jury veillera toujours à ce qu'il ne soit pas rentable de confondre vitesse et précipitation.

Quelques qualités : des réponses concises mais précises, s'appuyant sur des arguments construits et réfléchis, identifiant clairement les points clés, et sur des calculs menés avec adresse. Les théorèmes utilisés sont clairement pointés, (toutes !) leurs hypothèses sont vérifiées ; les résultats établis dans les questions précédentes qui sont utilisés sont là encore pointés avec la référence adéquate (et leurs hypothèses sont là encore vérifiées), etc. (liste non limitative).

Quelques défauts : des arguments désordonnés, amenant nombre d'éléments inutiles ; ou peu construits, parce que jetés sur la copie au fil de la plume ; des théorèmes appliqués sans vérification des hypothèses ; des récurrences dont l'hypothèse n'a pas été énoncée précisément ; des arguments d'autorité (« on a », ou « il est bien clair que ») ; des pattes de mouche illisibles ou des ratures qui délimitent mal ce que le candidat propose à l'attention du correcteur et ce qu'il ne souhaite pas que ce dernier évalue, etc. (liste non limitative là encore).

Enfin, tout rapport de concours tend à verser – c'est inhérent à l'exercice – dans la critique des faiblesses et insuffisances trouvées dans les copies (le propre du rapport étant de donner aux candidats ultérieurs les clés pour éviter les erreurs de leurs prédécesseurs). Le jury a toutefois le grand plaisir de saluer sincèrement les meilleures copies, qui ont montré une maîtrise solide, une capacité à se promener dans les différents domaines de l'algèbre balayés par le sujet, et souvent une vraie élégance dans le raisonnement algébrique. Ces productions méritent les plus chaleureuses félicitations.

Remarques mathématiques d'ordre général

Raisonnement

- Confondre raisonnement par l'absurde et raisonnement par contraposée est au moins inélégant – les candidats usent souvent du second en croyant faire usage du premier.
- Année après année, le jury rappelle son attachement au fait qu'au moins un raisonnement par récurrence soit conduit dans les règles de l'art : le domaine d'entiers sur lequel la propriété porte est clairement indiqué, l'hypothèse de récurrence est clairement énoncée, l'initialisation est identifiée et traitée, ainsi à son tour que l'hérédité, et la conclusion est tirée.
- Les imprécisions de raisonnement sont fréquentes dans le cas d'équivalences, d'égalités d'ensemble ou d'expressions par double implication ou double inégalité quand un des deux sens est évident (1.1, 3.1a par exemple). L'absence de toute mention du sens réciproque (même pour simplement pointer qu'il est évident) n'est pas considérée comme une omission mais comme une erreur de raisonnement à part entière.

Incompréhensions fréquentes

- Il semble que l'opération de changement de base soit, et c'est peu dire, mal comprise par les candidats : elle se réduit à un formulaire dans lequel on pioche, de manière un peu aléatoire et guidé par le résultat que l'on souhaite obtenir. Un changement de base agit sur un objet mathématique, et modifie sa représentation matricielle. La forme que prend cette modification dépend de l'objet que la matrice représente ; or, une matrice peut représenter une large variété d'objets : bases, homomorphismes, endomorphismes, formes quadratiques, pour citer les plus courants – chacun ayant sa « formule » de changement de base(s) correspondante. On ne peut pas appliquer une formule au choix sans revenir à l'objet mathématique que la matrice représente.
- L'équivalence des normes en dimension finie est parfois mal comprise. Elle a servi à des candidats à remplacer une norme qui ne les arrangeait pas par une norme qui les arrangeait mieux dans des inégalités. Ainsi, dans la question 2.4 elle a permis à certains d'utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour la norme infinie afin de majorer $\|fg\|_\infty$ par $\|f\|_\infty\|g\|_\infty$ (inégalité qui ne résiste au demeurant guère au test sur un exemple, comme $f(x) = g(x) = x + 1$). Cela semble révéler que les candidats ne comprennent pas qu'il s'agit d'un énoncé qualitatif (les normes sont comparables de manière uniforme, ou encore induisent la même topologie d'espace vectoriel normé) et non quantitatif : on perd, dans les deux sens, une constante à déterminer.
- Dans un registre thaumaturgique similaire, les candidats utilisent parfois la trigonalisation pour remplacer une matrice par une matrice triangulaire, sous la forme « A est trigonalisable donc on peut sans perte de généralité supposer A triangulaire ». C'est un procédé classique qui simplifie assez souvent la vie. Toutefois, il faut réaliser que cela implique un changement de base ; typiquement, dans 2.1 ou 3.2, il faut réaliser qu'on ne peut pas à la fois supposer A triangulaire et ayant les mêmes coefficients que la matrice de départ.
- La théorie des systèmes d'équations linéaires, avec ou sans second membre (I.6, II.1c), est mal connue ou mal maîtrisée, y compris de manière surprenante dans de bonnes copies. Cela amène dans I.6 les candidats à faire appel à des énoncés d'utilisation beaucoup plus délicate pour se sortir d'affaire ; il faut travailler ces sujets. [1]
- De manière générale, il est bon de s'interroger sur les notions invariantes sous l'influence de tel ou tel paramètre : un argument du style « on peut supposer que » devrait être systématiquement justifié par un argument expliquant que le résultat souhaité est bien indépendant de l'hypothèse faite ou comment on revient au cas général à partir des cas particuliers génériques traités.

1. Ce constat corrobore l'analyse des résultats sur les leçons spécifiques à ces points du programme lors des oraux des années précédentes.

3.1.3 Commentaires détaillés

La grande majorité des candidats s'est cantonnée aux exercices (avec une préférence pour les trois premiers) et à la partie I, n'abordant la partie II qu'à la recherche de points faciles à prendre (ce qui est, il faut insister sur ce point, à peu près toujours un mauvais calcul). Les toutes meilleures copies ont généralement traité les quatre exercices et les deux premières parties dans leur quasi-intégralité ; elles se sont souvent attaquées à la partie III, parfois à la partie IV (quelques copies traitant cette dernière quasi-intégralement). Aucun candidat n'est réellement rentré dans la partie V, qui n'a été abordée qu'au travers des questions relativement élémentaires (et extrêmement peu rémunératrices) que sont V.1, V.4, V.6, V.7a.

Exercice 1

On peut s'en étonner, mais c'est une réalité : cet exercice, conçu sans difficulté particulière, et qui était censé valoriser précision des arguments et de la rédaction, n'a été que très moyennement réussi. Moins de 20% (resp moins de 40%) des candidats ont obtenu la totalité (resp. la quasi-totalité) des points, et les candidats n'ont obtenu en moyenne que 60% des points environ. Il est vraiment frappant – et ce fait interroge – que des candidats à la peine sur cet exercice 1 parviennent néanmoins à traiter des questions nettement plus abstraites, et qui devraient être plus délicates, dans la suite du sujet.

1.1 et **1.2** sont fréquemment traitées de conserve, la dimension du noyau étant déduite du rang. Le calcul de ce dernier est souvent, hélas, mal argumenté. Les arguments procèdent souvent par double inégalité, ce qui n'est que rarement pointé explicitement. On lit souvent essentiellement « les deux premières colonnes sont égales et les trois dernières indépendantes » – un cas typique où les éléments sont là mais le correcteur doit colmater les brèches pour transformer ces ingrédients en argument précis et consistant ; les candidats se donnent d'ailleurs rarement la peine d'argumenter le fait que les trois dernières colonnes sont indépendantes (mineur 3×3 non nul ou vecteurs échelonnés). Certains échelonnent la matrice A elle-même ; dans ce cas, il n'est pas inutile de pointer que les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes ne changent pas le rang.

La dimension du noyau est déduite du théorème du rang ; ce dernier doit être énoncé, pas nécessairement sous une forme abstraite, mais au moins sous la forme $\dim(\mathbf{R}^4) = \dim(\mathrm{Ker}A) + \dim(\mathrm{Im}\, A)$. Au registre des perles, outre le classique $\mathbf{R}^4 = \mathrm{Ker}A \oplus \mathrm{Im}\, A$ qu'on ne présente plus, on a également vu cette année à plusieurs reprises l'inventif $\dim(M_4(\mathbf{R})) = \dim(\mathrm{Ker}A) + \dim(\mathrm{Im}\, A)$, voire l'inattendu $\dim(M_4(\mathbf{R})) = 8$.

1.2 Il est frappant de constater que beaucoup de candidats prouvent que le noyau de A est non trivial et ont néanmoins besoin de calculer explicitement le déterminant ; on souhaite y lire un manque de confiance en soi plus qu'une lacune dans l'articulation des connaissances, mais c'est néanmoins pour le moins surprenant à l'écrit de l'agrégation.

1.3 Beaucoup de calculs du polynôme caractéristique ; peu de candidats ont le réflexe de la trace dans cette situation où il ne manque qu'une valeur propre – d'aucuns essaient en utilisant le déterminant, mais... Les candidats calculent fréquemment le polynôme caractéristique par développement direct (sans utiliser d'opérations sur les lignes ou colonnes) ; certains candidats écrivent l'identité $Ax = \lambda x$ et éliminent les coordonnées de x pour en déduire une condition sur λ, réinventant de manière peu élégante le polynôme caractéristique. Beaucoup de candidats donnent « les » valeurs propres, sans justifier que la liste est complète. Enfin, dernier point, quand on parle de multiplicité d'une valeur propre, il est toujours préférable de préciser, d'une manière ou d'une autre, ce qu'on entend par multiplicité (algébrique *versus* géométrique, ou multiplicité comme racine du polynôme caractéristique/dimension du sous-espace caractéristique associé *versus* dimension du sous-espace propre associé).

On lit, assez fréquemment pour que ce soit préoccupant, des choses étonnantes sur la réduction des endomorphismes : lien entre inversibilité et diagonalisabilité, entre rang et (nombre de) valeurs propres, sans parler des différences entre sous-espace propre et caractéristique. Le jury constate une très nette perte de maîtrise sur ces notions.

Exercice 2

Exercice globalement mal traité : les 3/4 des candidats l'ayant abordé n'ont obtenu que de l'ordre de 30% des points en moyenne.

2.1 (pourtant au programme) est méconnu – rappelons qu'à ce stade du sujet et quand la question porte à ce point explicitement sur un énoncé du programme, une preuve est attendue – et correctement traité dans 1/4 des copies.

2.2 beaucoup de candidats, ayant lu l'énoncé trop vite, essaient de redémontrer (et y parviennent parfois) que f est le polynôme caractéristique de A_f ; ce fait était donné dans le préambule.

2.3 peu de candidats identifient correctement les différents cas à traiter (ligne 1, lignes 2 à $d-1$, ligne d) et le fait que $\|f\|_\infty$ n'est pas $\max_{0\leqslant i\leqslant d-1}|f_i|$.

2.4 question très peu traitée, mais généralement assez bien. Les relations coefficients-racines sont un chemin ; il est judicieux de justifier sommairement la borne sur les binomiaux utilisée. Raisonner par récurrence sur le degré du facteur est une bonne idée, mais il est hors de question de parachuter des inégalités sur la norme d'un produit de deux polynômes – généralement fausses, d'ailleurs – même en arguant de l'équivalence des normes en dimension finie (on se demande ce qu'elle vient faire dans cette galère).

Exercice 3

Cet exercice avait pour but de rappeler la construction d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, puis d'en tirer l'inégalité de Hadamard sur le déterminant. La difficulté de la construction est de justifier la possibilité de choisir des coefficients $\mu_{ij} = (b_i|b_j^*)/\|b_j^*\|^2$, c'est-à-dire, de la liberté de la famille $(b_1,\ldots,b_i)$, tirer le fait que $b_j^* \neq 0$ pour tout j.

Une des difficultés de l'exercice consistait en la capacité de comprendre et suivre la démarche imposée par l'énoncé, même si son articulation diffère des preuves du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt vues par les candidats durant leur formation. Cette faculté d'adaptation est une qualité souhaitable chez de futurs enseignants. Le sujet imposait donc un chemin, étudiant d'abord la question de la non-nullité de b_j^* dans un contexte abstrait, avant de faire construire la base de Gram-Schmidt. Il faut reconnaître que cette démarche a été mal comprise par les candidats.

De manière générale, il y a du progrès à faire sur la précision de la rédaction des récurrences (en particulier la formulation de l'hypothèse de récurrence).

3.1a Il s'agissait ici principalement de conduire un raisonnement par récurrence précis et rigoureux. Des candidats argumentent parfois autour d'égalités quelque peu parachutées sur les sous-espaces engendrés, typiquement $\mathrm{Vect}(b_1,\ldots,b_i,b_{i+1}+\sum_{j<i}\alpha_{ij}b_j) = \mathrm{Vect}(b_1,\ldots,b_{i+1})$; ces dernières doivent, a minima, être argumentées. Il est bien préférable, à ce stade encore précoce du sujet, d'argumenter proprement par double inclusion. Notons qu'un nombre significatif de candidats oublie une des deux inclusions – généralement la plus simple. Quelques candidats pointent rapidement et élégamment que, pour tout i, $b_i \in \mathrm{Vect}(b_1^*,\ldots,b_i^*)$; par suite, $\mathrm{Vect}(b_1,\ldots,b_i) \subset \mathrm{Vect}(b_1^*,\ldots,b_i^*)$ et on conclut pour des raisons de dimension (la dimension du premier est i, la dimension du second est $\leqslant i$).

3.1b Les candidats ont généralement mal compris ce qui était attendu dans cette question ; il s'agissait de s'appuyer sur 3.1a pour montrer par récurrence que l'on pouvait construire la base de Gram-Schmidt ; pour un certain i, les b_j^*, pour $j<i$, sont non nuls (par application répétitive de 3.1a à la famille $(b_1,...,b_j)$) de sorte que l'on peut légitimement définir les μ_{ij} par la formule donnée par l'énoncé, puis b_i^*. On voit souvent des constructions par récurrence, mais le fait que $b_j^* \neq 0$ est rarement pointé. Certains candidats pensent que la question posée ici est l'orthogonalité ([P3]), et traitent donc 3.1c sans traiter 3.1b. Enfin, un petit nombre de candidats se contente de mentionner « C'est la construction de Gram-Schmidt » – ce qui ne saurait suffire.

3.1c Il est particulièrement important ici que la récurrence soit posée très clairement, ce qui n'a été que rarement le cas (cf. plus haut pour les attendus précis). Après avoir prouvé une identité du type $(b_i^*|b_j^*) = 0$ pour $i < j$, seule une petite minorité de candidats pointe explicitement l'utilisation de la symétrie.

3.2 Beaucoup d'abominations dans cette question. Les candidats qui l'ont abordée ont presque toujours réalisé que la matrice de Gram associée à une base orthogonale est diagonale, et conclu justement que le point clé était de prouver que $\det {}^tBB = \det {}^tB^*B^*$. Dès lors, tous les moyens sont bons, surtout celui d'affirmer de façon péremptoire que les deux matrices ${}^tBB$ et ${}^tB^*B^*$ sont semblables, voire – c'est plus sûr – orthogonalement semblables ; ou encore de s'appuyer sur « l'invariance du déterminant par changement de base ». Les différentes formules de changement de base proposées ont fait voir du paysage au jury. On trouve parfois même des produits matriciels incompatibles pour des raisons de taille.

Certains candidats aboutissent, plus ou moins bien, en remarquant que 3.1b s'interprète comme une suite d'opérations sur les lignes / colonnes, sans faire le lien avec une écriture matricielle de cette suite d'opérations sur les lignes et les colonnes (qui pourrait pourtant être plus naturelle au vu des formules).

3.3 Question souvent bien traitée par ceux qui s'y sont essayé ; ici, il ne saurait suffire d'affirmer péremptoirement (ou, pire encore, au nom de l'inégalité triangulaire) que $\|b_i^*\| \leqslant \|b_i\|$ alors que c'est manifestement le point-clé. Il faut le prouver en développant ou par un argument géométrique (b_i^* est le projeté de b_i orthogonalement à $(b_1, \ldots, b_{i-1})$; le théorème de Pythagore donne alors $\|b_i\|^2 = \|b_i^*\|^2 + \|b_i - b_i^*\|^2$).

Exercice 4

L'exercice mêlait arithmétique et corps finis ; les candidats qui l'ont abordé se sont majoritairement attaqués à l'arithmétique : 4.1 (un peu) et 4.2 (surtout) ; les corps finis (4.3 et 4.4) étant, davantage, réservés aux bons candidats.

4.1 Question plus délicate qu'il n'y paraît, beaucoup de tentatives dont peu aboutissent. En particulier, beaucoup d'erreurs dans les calculs avec puissances imbriquées, sur le mode $t^{p^{qk+r}} = t^{p^{qk}} t^{p^r}$. Quelques candidats regardent cette question via les racines complexes, en montrant que $P_n(z) = P_k(z)$ pour tout z racine de P_r (il ne faut dans ce cas pas oublier de discuter la question des multiplicités). Pour tous les arguments qui n'explicitent pas Q, il faut penser à justifier que Q est bien dans $\mathbf{Z}[t]$, ce qui ne saurait se faire simplement en excipant de l'« unicité de la division euclidienne dans $\mathbf{Z}[t]$ »... Enfin, inversement, donner Q sous forme d'une fraction rationnelle ne saurait suffire : il faut argumenter que ladite fraction rationnelle définit bien un polynôme, à coefficients dans $\mathbf{Z}[t]$.

4.2. Les candidats font naturellement le lien avec l'algorithme d'Euclide ; un certain nombre pensent nécessaire de montrer que l'identité de la question 1 est une division euclidienne – ce qu'elle est effectivement. C'est inutile, comme d'ailleurs dans l'algorithme d'Euclide : la seule chose importante est la décroissance des restes successifs que la propriété de division euclidienne garantit (mais une division « centrée », dont les restes sont dans $[-q/2, q/2]$, convient aussi bien dans l'algorithme d'Euclide). Ici, la propriété clé est $\operatorname{pgcd}(P_n, P_r) = \operatorname{pgcd}(P_r, P_k)$. Ce fait est pointé par beaucoup. S'arrêter là en indiquant que l'algorithme d'Euclide sur P_n et P_r imite l'algorithme d'Euclide sur n, r omet la condition d'arrêt ; il faut, au moins (ici comme souvent l'énoncé d'une identité du type $\operatorname{pgcd}(P_n, P_r) = \operatorname{pgcd}(P_{r_i}, P_{r_{i+1}})$ pour tout i, pouvant être prouvée par une récurrence simple est préférable) indiquer que $P_0 = 0$ pour conclure. Ce n'est pas une attente de pure forme : le résultat serait faux si on avait $P_0 = 1$.

4.3 Il est manifeste qu'il ne suffit pas d'invoquer la théorie des corps finis pour trivialiser la question, mais qu'il est ici demandé d'en rappeler sommairement les rudiments – ce que les candidats qui attaquent la question font, bien qu'avec un bonheur inégal ; les arguments sont généralement corrects dans l'esprit, mais pêchent fréquemment dans le détail fin. Par exemple, quand on applique le théorème de Lagrange pour obtenir $t^{p^d-1} = 1 \bmod f$, il faut indiquer dans quel groupe on travaille ; ou encore bien pointer que l'implication f irréductible $\Rightarrow$ (f) maximal dépend du fait que $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t]$ est principal ; enfin, $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t]/(f)$ n'est pas « égal » à l'ensemble des polynômes de degré $< r$ sur $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, même s'il y a bijection (voire un peu plus) entre les deux ensembles.

4.4 Peu traitée également, mais globalement mieux que la précédente, cette question reprenait une partie d'un développement fréquemment proposé par les candidats à l'oral dans la leçon corps finis. Signalons simplement qu'a priori c'est le ppcm des ϕ qui divise $t^{p^n} - t$ et que pour obtenir que le produit des ϕ divise $t^{p^n} - t$, il faut bien rappeler que les polynômes ϕ sont irréductibles et deux à deux non associés.

Partie I.

I. 1a. Question globalement bien traitée, en particulier les parties « vecteur propre » et « stabilité ». La preuve de la somme directe fait apparaître, parfois (et répétitivement dans la suite de la partie) des confusions entre supplémentaire et complémentaire, ou encore des énoncés du type « $\mathrm{Vect}(E) \cap H = \varnothing$ ». Les candidats se partagent équitablement entre ceux qui exhibent une décomposition explicite et ceux qui utilisent un argument de dimension – certains allant jusqu'à exhiber une base de H (d'ailleurs sortie du chapeau sans argument) pour argumenter que la dimension de ce dernier est $d - 1$.

I. 1b. Le calcul conduisant à l'inégalité est souvent assez inélégant. Quelques copies justifient l'inégalité $x^2+y^2 \geqslant (x+y)^2/2$ en l'affublant de noms variés : Minkowski, Cauchy-Schwarz, etc. ou la déduisent d'inégalités créatives telles que la majoration de $(x + y)^2$ par $x^2 + y^2$.

I. 2 Il y a peu à dire sur cette question facile. L'écriture $\prod_{i=1}^n M_i$ est à proscrire, ou alors il faut définir précisément ce que l'on entend par là : est-ce $M_1...M_i$ ou $M_i....M_1$? Mais surtout que les mots « par récurrence » (idéalement, « par récurrence on a, pour tout i, $M_i...M_1E = E$, et $M_i...M_1H \subset H$ ») remplacent, souvent, avantageusement des points de suspension ou la formule « et ainsi de suite ».

I.3 À l'inverse, cette question d'apparence facile est plus délicate qu'il n'y paraît, et a été bien mal traitée. Même de très bonnes copies ne voient pas la difficulté : certes I1.b montre qu'on a la chaîne d'inégalités $\|Ax\| \leqslant \|M_{d-1}...M_1x\| \leqslant ... \leqslant \|M_1x\| \leqslant \|x\|$ et qu'on doit avoir égalité à chaque étape. Mais les candidats concluent alors trop vite que donc, $x_i = x_{i+1}$ pour tout i. Pour obtenir ce fait, il faut soit prouver par récurrence que $x_{i+1} = x_i$ et $M_i...M_1x = x$ pour tout i, soit considérer (ce qui revient au même) le plus petit i tel que $x_i \neq x_{i+1}$, et pas un indice i arbitraire ; une remarque très élégante proposée dans une des copies permet de simplifier la rédaction : pour tout k, on note que $\|M_kx\| = \|x\|$ si et seulement si $M_kx = x$; dès lors on tire facilement $M_ix = x$ pour tout $i \leqslant d-1$, soit $x_i = x_{i+1}$ pour tout $i \leqslant d - 1$.

I.4 Ici encore, question globalement mal traitée. Une part significative des candidats pense à introduire la norme subordonnée à $\|.\|_2$ sur $\mathbf{R}^d$, qui induit une norme sous-multiplicative sur $L(H)$, mais beaucoup de candidats déduisent du seul travail de I.3, sans se poser de question, que $\|A\|_2 < 1$. La présence d'un argument de compacité réussi (supremum atteint ou suite extraite convergente) est un marqueur de bonnes copies. Quelques copies prennent la route du rayon spectral, en oubliant que le travail préparatoire ne prend en compte que les seuls vecteurs propres réels et qu'il faut commencer par le généraliser. Enfin, un nombre significatif de copies se borne à remarquer que $\|A^kx\|$ est une suite décroissante minorée, donc convergente, et une bonne part ajoute « vers 0 » (ce qui est certes vrai, mais ne saurait être déduit des arguments proposés).

I.5 À l'instar de la précédente la question n'est que rarement bien traitée. Une très faible minorité des copies fait plus que la convergence ponctuelle $A^kx \to \Pi x$, ce qui conduit à s'interroger : les candidats savent-ils ce qu'est la convergence d'une suite d'endomorphismes ? Certaines copies (plus honnêtes ?) expliquent d'ailleurs qu'ils n'ont obtenu que la convergence simple, et qu'il faudrait encore traiter de la « convergence uniforme ». Enfin, des écritures du type $A = A_E + A_H$ n'ont guère de sens : A_E est un endomorphisme vivant dans $L(\mathrm{Vect}(E))$, et A_H un endomorphisme de $L(H)$; une bonne écriture pour exploiter l'idée sous-jacente serait $A = \Pi + (A - \Pi)$.

I.6 Il faut avouer une certaine perplexité devant l'utilisation répandue, y compris dans des copies très moyennes, de théorèmes de point fixe (on a même vu le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ ici..) pour traiter cette question. Ce n'est pas faux, et n'a pas, bien entendu, été évalué comme tel. Mais le lien entre l'existence de solutions à cette équation vectorielle et la valeur propre 1 ne semble que rarement venir à l'esprit des candidats, certains écrivant directement qu'il suffit de prendre $X = (I - A)^{-1}G$ sans discuter le moins du monde l'inversibilité de $I - A$ (alors qu'il y a pourtant à dire...). Quelques copies, dans cette question ou la suivante, écrivent $(I - A)^{-1} = \sum_{i \geqslant 0} A^i$ sans se poser de question sur la convergence de la série. Un nombre important de copies se limite à prouver l'unicité – déduite au demeurant du fait que 1 n'est pas valeur propre de A_H... On voit également un nombre significatif d'écritures $X(I - A) = G$.

Dans la mesure où le lien entre cette question et $\mathrm{Ker}(Id_H - A_H)$ n'est pas correctement identifié, les arguments pour déduire la solution générale du problème sont généralement très peu construits ou rigoureux, même dans des bonnes copies.

I.7 La suite arithmético-géométrique – ou même le réflexe de soustraire la limite, ici donnée, pour se ramener à prouver qu'une suite tend vers 0 – ne semble plus faire partie de la culture mathématique des candidats. De ce fait, ces derniers se battent souvent avec des calculs pour arriver à une expression explicite du k-ème terme sous la forme d'une somme de deux termes avant de passer à la limite séparément dans ces deux termes, limites dont ils ne justifient généralement pas qu'elles existent.

Partie II.

II.1.a Il faut ici être très soigneux, et expliquer pourquoi on va chercher u et v dans $\mathbf{Q}[t]$: $\mathbf{Q}$ étant un corps, $\mathbf{Q}[t]$ est principal (ce qui n'est pas le cas de $\mathbf{Z}[t]$) et on peut donc y obtenir une identité de BEZOUT parce que f et g, premiers entre eux dans $\mathbf{Z}[t]$, le restent dans $\mathbf{Q}[t]$. La condition sur les degrés est souvent omise, pas justifiée, voire présentée comme évidente ; quelques candidats la tirent élégamment de l'algorithme d'EUCLIDE étendu (qui garantit effectivement ces bornes), la plupart d'une division euclidienne (dans un anneau qui gagnerait à être spécifié).

II.1.b Question globalement bien traitée, le lien avec l'exercice 3 est généralement fait. Quelques rares candidats vérifient correctement les hypothèses de ce dernier et pointent que la matrice $M(f, g)$ est inversible (donné par l'énoncé) ou que l'inégalité de HADAMARD reste trivialement valable si la matrice n'est pas inversible, avant d'appliquer l'exercice 3 (une démarche qui a été valorisée).

II.1.c Cette question n'est traitée sérieusement que par les très bonnes copies, les autres en simple quête de points se limitant à indiquer que $uf + vg = 1 \Rightarrow (ru)f + (rv)g = r$, ce qui est banal et, à ce stade de l'épreuve, ne saurait être valorisé. Il semble que beaucoup de candidats aient du mal à réaliser que u et v vivent dans $\mathbf{Q}[t]$ et que la question posée est de contrôler les dénominateurs.

Les candidats qui réussissent utilisent surtout la comatrice ; les formules de CRAMER semblent passées de mode. Pourtant, s'il faut inlassablement contrebattre l'idée qu'elles servent à résoudre les systèmes linéaires, elles devraient avoir l'avantage de venir plus naturellement à l'esprit quand on entreprend, comme ici, l'étude théorique des solutions d'un système d'équations.

II.1.d La quasi-totalité des candidats oublie de signaler le point clé de cette question, à savoir que $\det M(f, g) \neq 0$.

II.2. Il y a peu à dire sur cette question qui a surtout été (bien) traitée par de très bonnes à excellentes copies.

Partie III.

La partie III, nécessitant une bonne maîtrise des corps finis, n'a été abordée sérieusement que par un nombre très limité de candidats, généralement de très bonnes copies, qui ont globalement rendu des productions de bonne tenue. L'erreur d'énoncé (cf. le corrigé) ne semble pas avoir posé de problème sérieux aux candidats qui s'y sont confrontés – un certain nombre l'ont soulevée ; il va sans dire que ceux qui n'ont rien vu (ou ont fait mine de ne rien voir) n'ont pas été pénalisés.

Partie IV.

Là encore, une partie peu traitée, même si son caractère élémentaire a amené des candidats à aller y chercher des points (IV.1, IV.3, IV.4, IV.5).

IV.1 a fréquemment été mal traitée ; minimiser sur les réels est un bon indicateur, pour voir où il faut regarder, mais ne saurait suffire. Quelques copies convainquent sans calculs ou presque grâce à un dessin bien commenté.

IV.4. Une des preuves observées fréquemment passe par l'égalité $L(u_n, v_n) = L(u_{n+1}, v_{n+1})$; on note alors une certaine tendance à vouloir raisonner trop vite directement par égalités d'ensembles, raisonnement qui est délicat à conduire. Il vaut bien mieux travailler par double inclusion, la symétrie de la situation $(u_n, v_n) \leftrightarrow (u_{n+1}, v_{n+1})$ faisant que la preuve d'une des inclusions s'applique mécaniquement à l'autre. Des candidats visiblement plus familiers des réseaux prouvent directement l'identité demandée en s'appuyant sur IV.3.

Partie V.

Comme indiqué plus haut, aucun candidat n'est vraiment entré dans cette partie autrement qu'en détectant les questions faciles et en les traitant comme des exercices indépendants.

3.2 Corrigé de l'épreuve de mathématiques générales

Exercice 1

Question 1.

Soit $x = {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4$. On a alors

$$Ax = \begin{pmatrix} x_1/2 + x_2/2 \\ x_1/4 + x_2/4 + x_3/2 \\ x_1/8 + x_2/8 + x_3/4 + x_4/2 \\ x_1/8 + x_2/8 + x_3/4 + x_4/2 \end{pmatrix}.$$

Or, $x \in \operatorname{Ker} A \Leftrightarrow Ax = 0$. On en déduit que $x \in \operatorname{Ker} A$ si et seulement si

$$\begin{cases} x_1/2 + x_2/2 & = & 0 \\ x_1/4 + x_2/4 + x_3/2 & = & 0 \\ x_1/8 + x_2/8 + x_3/4 + x_4/2 & = & 0 \\ x_1/8 + x_2/8 + x_3/4 + x_4/2 & = & 0 \end{cases}$$

La première équation donne $x_2 = -x_1$; la deuxième devient alors $x_3 = 0$, et les deux dernières montrent que nécessairement $x_4 = 0$. Par conséquent, $\operatorname{Ker} A$ est inclus dans $\mathbf{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Inversement, on vérifie que, pour tout α dans $\mathbf{R}$, $A \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$, d'où le résultat par double inclusion. Le noyau de A est donc de dimension 1.

Bien entendu, on peut également remarquer que le bloc supérieur droit 3×3 de A est de déterminant 1/8, donc le rang de A est au moins 3, et le noyau de A est donc, via le théorème du rang, de dimension au plus 1. Il suffit alors de pointer le vecteur $(1, -1, 0, 0)$ pour conclure ; ou alors de dire que le rang est aussi au plus 3 car les deux premières colonnes sont liées, et d'invoquer le théorème du rang pour conclure.

Question 2.

Le noyau de A est non réduit à $\{0\}$; par suite, la matrice A n'est pas inversible et **le déterminant de A est nul.** En vertu du théorème du rang, $\dim(\operatorname{Ker} A) + \operatorname{rg}(A) = \dim(\mathbf{R}^4) = 4$, donc $\operatorname{rg}(A) = 3$.

Question 3.

On pose $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

En suivant l'indication, on vérifie que $Av_1 = v_1$ et que $Av_2 = v_2/2$. Par conséquent, 1 et 1/2 sont valeurs propres de A. En vertu de la question 1, 0 est également valeur propre de A. Or, si l'on note $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1/2, \lambda_4$ les racines (a priori complexes) du polynôme caractéristique de A, on a $3/2 = \operatorname{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i = 3/2 + \lambda_4$. Par suite, $\lambda_4 = 0$.

Les valeurs propres de A sont $\{0, 1/2, 1\}$.

0 est racine double du polynôme caractéristique ; ainsi le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre 0 est de dimension 2 tandis que le sous-espace propre associé est de dimension 1 (Question 1). Par suite, A **n'est pas diagonalisable.**

Exercice 2.

Question 1

On suppose que $A - \lambda I_d$ n'est pas inversible ; alors, en particulier, l'endomorphisme associé n'est pas injectif, et il existe $x \in \mathbf{C}^d, x \neq 0$ tel que $(A - \lambda I_d)x = 0$. Cette identité se réécrit

$$\forall i, \sum_{j=1}^{d} a_{ij} x_j - \lambda x_i = 0,$$

ou encore

$$\forall i, \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{d} a_{ij} x_j = -(a_{ii} - \lambda) x_i.$$

En particulier, on a, pour tout i,

$$\begin{aligned} |a_{ii} - \lambda||x_i| &\leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{d} |a_{ij}||x_j|, \\ &\leqslant \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{d} |a_{ij}| \right) \max_{1 \leqslant j \leqslant d} |x_j|. \end{aligned}$$

Soit i_0 tel que $|x_{i_0}| = \max_{1\leqslant j\leqslant d} |x_j|$. Comme $x \neq 0$, on a $|x_{i_0}| > 0$; on peut donc diviser l'inégalité précédente pour $i = i_0$ par $|x_{i_0}|$, pour déduire

$$|a_{ii} - \lambda| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{d} |a_{ij}|,$$

en contradiction avec l'hypothèse. Le résultat s'ensuit par contraposition.

Question 2

L'énoncé indique que le polynôme caractéristique de A_f est f. Par suite, si λ est une racine de f, λ est une valeur propre de la matrice A_f, et donc $A_f - \lambda I_d$ n'est pas inversible.

Question 3

L'hypothèse de l'énoncé implique $|\mu| > |f_0|$ et $|\mu| > 1 + |f_i|$ pour $1 \leqslant i \leqslant d-2$. Enfin, $|\mu + f_{d-1}| \geqslant |\mu| - |f_{d-1}| > 1$ par hypothèse. Au vu de la question 1, on en déduit que $A_f - \mu I_d$ est inversible. La question 2 montre alors que μ n'est pas une racine de f.

Par contraposée, si ρ est une racine de f, on a

$$|\rho| \leqslant 1 + \max_{i\in\{0,\dots,d-1\}} |f_i| \leqslant 1 + \max_{i\in\{0,\dots,d\}} |f_i| = 1 + \|f\|_\infty.$$

Question 4

On note $\rho_1, \dots \rho_k \in \mathbf{C}$ les racines de g. On a alors, g étant unitaire,

$$g = \prod_{1\leqslant i\leqslant k} (t - \rho_i) = t^k + \sum_{j=0}^{k-1} \sigma_j(\rho_1, \dots, \rho_k) t^j,$$

où

$$\sigma_j(\rho_1, \dots, \rho_k) = (-1)^{k-j} \sum_{1\leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_{k-j} \leqslant k} \rho_{i_1}\rho_{i_2}\dots\rho_{i_{k-j}}.$$

À un j-uplet $(i_1, \dots, i_{k-j})$ tel qu'intervenant dans la somme ci-dessus, on associe la partie $\{i_1, \dots, i_{k-j}\}$ de $\{1, \dots, k\}$. Cette partie est de cardinal $k-j$, et inversement à toute partie de cardinal $k-j$ on peut associer le $k-j$-uplet de ses éléments classés par ordre croissant. Le nombre de termes de la somme est donc $\begin{pmatrix} k \\ k-j \end{pmatrix}$.

Or, on a $\sum_{j=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} = (1+1)^k = 2^k$ en vertu de la formule du binôme de Newton. En particulier, les coefficients binomiaux étant positifs ou nuls, chacun des coefficients binomiaux est au plus égal à 2^k.

Par suite, $|\sigma_j(\rho_1, \dots, \rho_k)| \leqslant 2^k \max_{1\leqslant i\leqslant k} |\rho_i|^j$. La question 3 montre alors que

$$|\sigma_j(\rho_1, \dots, \rho_k)| \leqslant 2^k(1 + \|f\|_\infty)^j \leqslant (2 + 2\|f\|_\infty)^k.$$

Le résultat suit alors de $\|g\|_\infty = \max(1, \max_{0\leqslant i\leqslant k-1} |\sigma_j(\rho_1, \dots, \rho_k)|)$.

On peut également procéder par récurrence en remarquant que l'assertion est claire pour $k = 0$, et que l'on a, pour tout polynôme g,

$$\|(t - \rho)g\|_\infty \leqslant (1 + |\rho|)\|g\|_\infty \leqslant (2 + \|f\|_\infty)\|g\|_\infty,$$

où la première inégalité se prouve en explicitant le produit, et la dernière inégalité suit de la question 3 – on obtient alors une borne légèrement meilleure que celle demandée dans l'énoncé.

Exercice 3

Question 1.

a. On prouve l'assertion par double inclusion. De l'identité $b_k = b_k^\sharp + \sum_{j<k} \alpha_{kj} b_j^\sharp$, on tire $b_k \in \mathrm{Vect}\,(b_1^\sharp, \ldots, b_k^\sharp) \subset \mathrm{Vect}\,(b_1^\sharp, \ldots, b_i^\sharp)$ pour tout $k \leqslant i$; d'où $\mathrm{Vect}\,(b_1, \ldots, b_i) \subset \mathrm{Vect}\,(b_1^\sharp, \ldots, b_i^\sharp)$.

On prouve par récurrence sur k l'assertion « $\mathrm{Vect}\,(b_1^\sharp, \ldots, b_k^\sharp) \subset \mathrm{Vect}\,(b_1, \ldots, b_k)$ ».

Pour $k = 1$, on a $b_1 = b_1^\sharp$.

Soit $k \geqslant 2$; on suppose $\mathrm{Vect}\,(b_1^\sharp, \ldots, b_{k-1}^\sharp) \subset \mathrm{Vect}\,(b_1, \ldots, b_{k-1}) \subset \mathrm{Vect}\,(b_1, \ldots, b_k)$. Il s'ensuit que $\sum_{j<k} \alpha_{kj} b_j^\sharp \in \mathrm{Vect}\,(b_1, \ldots, b_{k-1})$, et donc que $b_k^\sharp = b_k - \sum_{j<k} \alpha_{kj} b_j^\sharp \in \mathrm{Vect}\,(b_1, \ldots, b_k)$; par suite, $\mathrm{Vect}\,(b_1^\sharp, \ldots, b_k^\sharp) \subset \mathrm{Vect}\,(b_1, \ldots, b_k)$, ce qui conclut la preuve par récurrence.

En prenant $k = i$, on obtient l'inclusion réciproque.

On peut également conclure suite à la première inclusion pour des raisons de dimension : on a (la première égalité suit de l'hypothèse que (b_i) est libre) $i = \dim\mathrm{Vect}\,(b_1, \ldots, b_i) \leqslant \dim\mathrm{Vect}\,(b_1^\sharp, \ldots, b_i^\sharp) \leqslant i$, d'où $\dim\mathrm{Vect}\,(b_1, \ldots, b_i) = \dim\mathrm{Vect}\,(b_1^\sharp, \ldots, b_i^\sharp)$ et, vu l'inclusion déjà connue, l'égalité des deux sous-espaces vectoriels.

Les b_i étant linéairement indépendants, on a

$$\dim\mathrm{Vect}\,(b_1, \ldots, b_i) = i = \dim\mathrm{Vect}\,(b_1^\sharp, \ldots, b_i^\sharp)\ ;$$

en particulier, les $b_i^\sharp$ sont linéairement indépendants, et $b_i^\sharp$ est non nul pour tout i.

b. On définit les b_i^* par récurrence sur i.

On pose d'abord $b_1^* = b_1$. On suppose maintenant $b_1^*, \ldots, b_{i-1}^*$ définis. En appliquant la question 1 à la famille $(b_1^*, \ldots, b_{i-1}^*)$, on obtient que $b_k^* \neq 0$ pour $k \leqslant i-1$. En particulier, $(b_j^*|b_j^*) \neq 0$ et on peut alors définir $\mu_{ij} = (b_i|b_j^*)/(b_j^*|b_j^*)$, puis poser $b_i^* = b_i - \sum_{j<i} \mu_{ij} b_j^*$.

Par récurrence, on obtient ainsi la famille $(b_i^*)_{1 \leqslant i \leqslant d}$., qui vérifie **[P1]** et **[P2]**.

c. On va montrer par récurrence sur i que pour tout i, la famille $(b_1^*, \ldots, b_i^*)$ vérifie **[P3]**.

L'assertion est vide pour $i = 1$.

On suppose cette assertion vraie au rang $i-1$ et on calcule $(b_i^*|b_k^*)$ pour $k < i$. On a

$$\begin{aligned}
(b_i^*|b_k^*) &= (b_i|b_k^*) - \sum_{j<i} \mu_{ij}(b_j^*|b_k^*), \\
&= (b_i|b_k^*) - \mu_{ik}(b_k^*|b_k^*), \text{car par l'hypothèse de récurrence } (b_j^*|b_k^*) = 0 \text{ pour } j,k < i, j \neq k, \\
&= 0, \text{par définition de } \mu_{ik}.
\end{aligned}$$

Par symétrie du produit scalaire, on a également $(b_k^*|b_i^*) = 0$, ce qui complète la vérification de **[P3]** pour $(b_1^*, \ldots, b_i^*)$ et conclut la preuve par récurrence. Le cas $i = d$ répond alors à la question.

Question 2.

On note $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant d}$ la matrice triangulaire supérieure avec $a_{ii} = 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant d$, $a_{ij} = 0$ pour $j > i$, $a_{ij} = \mu_{ij}$ pour $j < i$. On a alors $B = B^*A$, où B^* est la matrice dont les colonnes sont les b_i^* et B la matrice dont les colonnes sont les b_i (dans l'ordre naturel dans les deux cas).

Par conséquent, ${}^tBB = {}^tA{}^tB^*B^*A$, d'où, au vu de $\det A = 1$, $\det {}^tBB = \det {}^tB^*B^*$.

Au vu de 1(c), le coefficient (i, j) de la matrice ${}^tB^*B^*$ est $(b_i^*|b_j^*)$, soit $\delta_{ij}\|b_i^*\|_2^2$; par conséquent, ${}^tB^*B^*$ est une matrice diagonale de déterminant $\prod_{i=1}^d \|b_i^*\|_2^2$.

On a donc bien $\det {}^tBB = \|b_i^*\|_2^2$, d'où $(\det {}^tBB)^{1/2} = \prod_{i=1}^d \|b_i^*\|_2$, les deux membres étant positifs ou nuls.

Question 3.

Si $d = n$, $\det {}^tBB = (\det {}^tB)(\det B) = (\det B)^2$. De plus, de $b_i = b_i^* + \sum_{j<i} \mu_{ij} b_j^*$, on tire, grâce au fait que la base b_i^* est orthogonale ([**P3**]), que $\|b_i\|^2 = \|b_i^*\|^2 + \sum_{j<i} \mu_{ij}^2 \|b_j^*\|^2 \geqslant \|b_i^*\|^2$. On a donc

$$|\det B| = (\det {}^tBB)^{1/2} = \prod_{i=1}^d \|b_i^*\| \leqslant \prod_{i=1}^d \|b_i\|,$$

comme requis.

Exercice 4

Question 1

On a $t^{p^r} = t \bmod (t^{p^r} - t)$, où ici comme dans toute cette question la relation de congruence s'entend dans l'anneau $\mathbf{Z}[t]$.

En élevant cette identité $q - 1$ fois à la puissance p^r, on voit que $t^{p^{qr}} = t \bmod (t^{p^r} - t)$, soit, en élevant encore à la puissance p^k, $t^{p^n} = t^{p^k} \bmod (t^{p^r} - t)$, ou encore $t^{p^n} - t = t^{p^k} - t \bmod (t^{p^r} - t)$.

En d'autres termes, $P_n = P_k \bmod P_r$; par définition de la relation de congruence dans $\mathbf{Z}[t]$, il existe un polynôme Q dans $\mathbf{Z}[t]$ tel que requis.

Question 2

On écrit l'algorithme d'EUCLIDE pour n et r : on introduit la suite d'entiers $s_0 = n$, $s_1 = r$, s_{i+1} le reste de la division euclidienne de s_{i-1} par s_i. Alors il existe k tel que $s_k = 0$ et $s_{k-1} = \operatorname{pgcd}(n, r)$.

On définit une suite de polynômes Q_i par $Q_i = P_{s_i}$. En particulier, $Q_k = P_0 = 0$. En s'appuyant sur la question 1, on prouve par récurrence que $\operatorname{pgcd}(Q_0, Q_1) = \operatorname{pgcd}(Q_i, Q_{i+1})$ pour tout i. En particulier, $\operatorname{pgcd}(P_n, P_r) = \operatorname{pgcd}(Q_0, Q_1) = \operatorname{pgcd}(Q_{k-1}, Q_k) = Q_{k-1} = P_{\operatorname{pgcd}(n,r)}$, comme demandé.

Question 3

L'énoncé donne que $F = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t]/(f)$ est un anneau. Soit alors $g \in F$ non nul, et G dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t]$ un représentant de la classe g. Si G n'était pas premier avec f, on aurait $f|G$ (car f irréductible) soit $g = 0$; par suite, f et G sont premiers entre eux, et l'identité de BEZOUT dans l'anneau principal $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t]$ donne l'existence de $U, V \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t]$ tels que $Uf + VG = 1$; si v est la classe de V modulo f, on a alors dans F l'identité $vg = 1$, qui montre que g est inversible. Tous les éléments non nuls de l'anneau F sont donc inversibles, et F est un corps.

La division euclidienne par f montre que chaue classe modulo f de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t]$ contient un unique représentant de degré $< r$; F est donc fini de cardinal p^r car en bijection avec D, l'ensemble des polynômes de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t]$ de degré $< r$.

Pour conclure, t est un élément du groupe multiplicatif $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t]/(f) - \{0\}$ dont l'ordre divise le cardinal de ce dernier, soit $p^r - 1$. Par suite, $t^{p^r-1} = 1$ dans F, ce qui peut s'écrire $t^{p^r-1} - 1 = \operatorname{mod} f$ dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t]$, ou encore $f|t^{p^r} - t$ dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t]$; or $\pi_p(P_r) = t^{p^r} - t$.

Question 4

Soit f un polynôme irréductible unitaire de degré $d \geqslant 1$, avec $d|n$. Alors, en vertu de ce qui précède, $f|t^{p^d} - t = \pi_p(P_d)$ dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t]$. Or, la question 2 montre que si $d|n$, $t^{p^d} - t|t^{p^n} - t$.

En particulier, $\pi_p(P_n)$ est divisible par tous les polynômes irréductibles de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t]$ de degré divisant n, donc par leur ppcm ; comme ils sont deux à deux premiers entre eux, ce dernier est aussi leur produit, à savoir Q. On a donc bien $Q|\pi_p(P_n)$.

Partie 1

Question 1.

a. Soit $x = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant d} \in \mathrm{Vect}\,(\mathcal{E}) \cap H$. Alors il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $x = \lambda\mathcal{E}$, soit $x_i = \lambda$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$. Comme $x \in H$, on a $0 = \sum_{i=1}^d x_i = d\lambda$; par suite $\lambda = 0$ et, comme $0 \in \mathrm{Vect}\,(\mathcal{E}) \cap H$, on a bien $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{E}) \cap H = \{0\}$.

On peut alors conclure en remarquant que si $x = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant d} \in \mathbf{R}^d$ et si l'on pose $\alpha = d^{-1}\sum_{i=1}^d x_i$, alors $x = \alpha\mathcal{E} + (x_i - \alpha)_{1\leqslant i\leqslant d}$, où le premier terme de la somme est dans $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{E})$ et le second dans H. On a donc bien $\mathrm{Vect}\,\mathcal{E} \oplus H = \mathbf{R}^d$.

Bien entendu, une fois la première partie faite, on peut également observer que $\dim(\mathrm{Vect}\,\mathcal{E} \oplus H) = 1 + (d-1) = d$, *ce qui implique directement* $\mathrm{Vect}\,\mathcal{E} \oplus H = \mathbf{R}^d$.

Posons $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant d} = Y = M_k\mathcal{E}$. Alors on a manifestement $y_i = \mathcal{E}_i = 1$ pour $i \notin \{k, k+1\}$, et $y_k = y_{k+1} = (\mathcal{E}_k + \mathcal{E}_{k+1})/2 = 1$. Par suite, $Y = \mathcal{E}$ et $\mathcal{E}$ est un vecteur propre de M_k associé à la valeur propre 1.

Enfin, si $x = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant d} \in H$, posons $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant d} = Y = M_k x$; on a

$$\sum_{i=1}^d y_i = \sum_{i\neq k,k+1} x_i + (x_k + x_{k+1})/2 + (x_k + x_{k+1})/2 = \sum_{i=1}^d x_i = 0,$$

ce qui prouve que H est stable par M_k.

b. On reprend le calcul précédent, avec un x quelconque :

$$\begin{aligned}\|M_k x\|_2^2 &= (x_k + x_{k+1})^2/2 + \sum_{i\neq k,k+1} x_i^2,\\ &\leqslant \sum_{i=1}^d x_i^2 = \|x\|_2^2,\end{aligned}$$

en vertu de $x_k^2 + x_{k+1}^2 = (x_k + x_{k+1})^2/2 + (x_k - x_{k+1})^2/2$.

On a $\|M_k x\|_2 \leqslant \|x\|_2$, et il y a égalité si et seulement si $x_k = x_{k+1}$.

Question 2.

On a, pour tout k, $M_k\mathcal{E} = \mathcal{E}$; on en déduit alors par récurrence que pour tout $0 \leqslant j \leqslant d-1$, $M_j \ldots M_1\mathcal{E} = \mathcal{E}$; pour $j = d-1$ on trouve que $A\mathcal{E} = \mathcal{E}$ et que $\mathcal{E}$ (qui est bien non nul) est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.

De même, $M_k H \subset H$ pour tout k ; H est donc stable par toute composition des M_k, donc en particulier par A.

Question 3.

On suppose que $x \notin \operatorname{Vect} \mathcal{E}$; en particulier, il existe j tel que $x_j \neq x_{j+1}$, et soit j le plus petit tel entier.

Alors, $M_{j-1} \dots M_1 x = x$, et par 1(b) on a $\|M_j x\|_2 < \|x\|_2$, soit $\|M_j \dots M_1 x\|_2 < \|x\|_2$. Par 1(b) à nouveau, il suit $\|M_{d-1} \dots \dots M_1 x\|_2 \leqslant \|M_j \dots M_1 x\|_2 < \|x\|_2$, soit $\|Ax\|_2 < \|x\|_2$.

Or, si x est un vecteur propre associé à la valeur propre 1, $Ax = x$ donc $\|Ax\|_2 = \|x\|_2$. Par suite, $x \in \operatorname{Vect}(\mathcal{E})$. L'inclusion réciproque suit de la question 2.

Question 4.

Il y a plusieurs manières d'arriver à ce résultat ; en voici deux.

Version 1. Pour tout $x \in H - \{0\}$, grâce à I.1(a) et I.3, on a $\|A_H x\|_2 < \|x\|_2$.

On observe que la restriction à H de la norme euclidienne de $\mathbf{R}^d$ est encore une norme (qui, en vertu de l'équivalence des normes en dimension finie, induit sur H sa topologie standard d'evn). Soit $B = \{x \in H / \|x\|_2 \leqslant 1\}$ la boule unité de H pour cette norme, qui est compacte car H est de dimension finie.

En particulier, $\sup_{x \in B} \|A_H x\|_2$ est atteint ; il existe donc x_0 tel que $\|x_0\| \leqslant 1$ et

$$\sup_{x \in B} \|A_H x\|_2 \leqslant \|A_H x_0\| < \|x_0\| \leqslant 1.$$

On pose alors $\beta = \|A_H x_0\| < 1$. Si l'on note $|||\cdot|||$ la norme de $L(H)$ subordonnée à la norme définie plus haut sur H, on a $|||A_H||| = \sup_{\|x\|_2 = 1} \|A_H x\|_2 \leqslant \beta$, et $|||A_H^n||| \leqslant |||A_H|||^n \leqslant \beta^n \to 0$.

Version 2. Soit $\lambda \in \mathbf{C}$ une valeur propre de A et $x \in \mathbf{C}^d$ tel que $Ax = \lambda x$; on écrit alors $x = x_1 + i x_2$, avec $x_1, x_2 \in \mathbf{R}^d$. On a alors

$$\|Ax_1\|_2^2 + \|Ax_2\|_2^2 = |\lambda|^2 (\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2).$$

Mais, par I3. on a $\|Ax_1\|_2^2 + \|Ax_2\|_2^2 \leqslant (\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2)$, avec égalité si et seulement si $x_1, x_2 \in \operatorname{Vect}(\mathcal{E})$ (c'est-à-dire $\lambda = 1$). Par suite, si $\lambda \neq 1$ est une valeur propre de A_H, on a $|\lambda| < 1$, et le rayon spectral de A_H est < 1. Un résultat classique affirme alors que $A_H^n \to 0$.

On peut également remarquer, pour la première partie, que la preuve de I.1b s'étend au cas où $x \in \mathbf{C}^d$ et $\|\cdot\|_2$ est la norme hermitienne sur $\mathbf{C}^d$).

Question 5.

On considère $B_n = A^n - \Pi$. Si $x \in \mathbf{R}^d$, on écrit $x = \Pi(x) + (x - \Pi(x))$, avec $x - \Pi(x) \in H$ par définition de Π.

On note que $\mathcal{E}$ est orthogonal à H, d'où $\|x\|_2^2 = \|\Pi(x)\|_2^2 + \|x - \Pi(x)\|_2^2$.

Grâce à I.2, $B_n x = A^n(x - \Pi(x)) = A_H^n(x - \Pi(x))$.

Par suite, $\|B_n x\|_2 \leqslant |||A_H^n||| \cdot \|x - \Pi(x)\|_2 \leqslant |||A_H^n||| \cdot \|x\|_2$, d'où l'on tire $|||B_n||| \leqslant |||A_H^n|||$, puis grâce à la question 4, que $B_n \to 0$ et $A^n \to \Pi$.

Question 6.

Pour $X \in H$, l'équation s'écrit $(\mathrm{Id}_H - A_H)X = G$, où Id_H est l'endomorphisme identité sur H. Or, I.3 implique que 1 n'est pas valeur propre de A_H, donc $\mathrm{Id}_H - A_H$ est inversible, et l'équation admet donc la solution unique $(\mathrm{Id}_H - A_H)^{-1} G$.

On note Z cette solution, c'est-à-dire que $(\mathrm{Id} - A)Z = G$; si $X \in \mathbf{R}^d$ est une autre solution de l'équation, on a alors $X - Z = A(X - Z)$, soit $(\mathrm{Id} - A)(X - Z) = 0$, soit $X - Z \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id} - A)$; or, I.3 implique que le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{E})$.

Par suite, $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id} - A) = \mathrm{Vect}\,(\mathcal{E})$ et l'ensemble des solutions est de la forme $\{(\mathrm{Id}_H - A_H)^{-1}G + \lambda\mathcal{E}, \lambda \in \mathbf{R}\}$.

Question 7.

On introduit la suite $Y_\ell = X_\ell - Z$, et on observe que, pour tout ℓ, $Y_{\ell+1} = AY_\ell$, d'où $Y_\ell = A^\ell(X_0 - Z)$ et $X_\ell = A^\ell(X_0 - Z) + Z$. Grâce à I. 5, on déduit $\lim_{\ell\to\infty} X_\ell = \Pi(X_0 - Z) + Z = \Pi(X_0) + Z$, car Π est la projection sur $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{E})$ parallèlement à H, et $Z \in H$.

Partie II

Question 1.

(a). Les polynômes f et g sont premiers entre eux dans $\mathbf{Z}[t]$; d'après les rappels, on a alors aussi $\mathrm{pgcd}\,(f, g) = 1$ dans $\mathbf{Q}[t]$. L'anneau $\mathbf{Q}[t]$ étant principal (et même euclidien, car $\mathbf{Q}$ est un corps), il existe $U, V \in \mathbf{Q}[t]$ tels que $Uf + Vg = 1$.

Il faut maintenant prouver l'assertion sur les degrés. On note alors v le reste de la division euclidienne de V par f dans $\mathbf{Q}[t]$ euclidien : il existe q tel que $V = fq + v$, avec $\deg v < \deg f$. Par suite, on a $(U + qg)f + vg = 1$. On pose alors $u = U + qg$, et on a $uf = 1 - vg$, d'où, en prenant les degrés, $\deg u + \deg f < \deg f + \deg g$, soit $\deg u < \deg g$, comme attendu.

On peut également observer que l'algorithme d'Euclide étendu garantit cette propriété.

(b). La matrice $M(f, g)$ est à coefficients dans $\mathbf{Z}$, et le déterminant peut s'écrire comme un polynôme à coefficients entiers en les coefficients (de la matrice). En particulier $\det M(f, g)$ est un entier relatif, et $|\det M(f, g)|$ un entier naturel.

Au vu de l'exercice 3 – les colonnes de $M(f, g)$ forment une famille libre puisque le déterminant $\det M(f, g)$ est, par hypothèse, non nul – on a

$$|\det M(f, g)| \leqslant \prod_{i=0}^{\deg g - 1} \|w_i\|_2 \prod_{j=0}^{\deg f - 1} \|z_j\|_2.$$

Le résultat s'ensuit en notant que pour $0 \leqslant i \leqslant \deg g - 1$, $\|w_i\|_2 = \|f\|_2$ et que pour $0 \leqslant j \leqslant \deg f - 1$, $\|z_j\|_2 = \|g\|_2$.

(c.) On applique les formules de Cramer à l'écriture matricielle de l'identité $uf + vg = 1$ proposée par l'énoncé ; chaque coefficient de u ou de v s'écrit alors comme le quotient du déterminant d'une matrice à coefficients entiers (qui est donc un entier) par $\det M(f, g)$. En particulier, les polynômes $\tilde{u} = ru$ et $\tilde{v} = rv$ sont deux polynômes à coefficients entiers. Enfin, $\tilde{u}f + \tilde{v}g = r(uf + vg) = r$.

(d.) (i). On applique π_p à l'identité $\tilde{u}f + \tilde{v}g = r$. On obtient $\pi_p(\tilde{u})\pi_p(f) + \pi_p(\tilde{v})\pi_p(g) = \pi_p(r)$. Par hypothèse, il existe $h \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t]$ non constant qui divise $\pi_p(f)$ et $\pi_p(g)$; en vertu de ce qui précède, h divise $\pi_p(r)$; pour des raisons de degré, ce n'est possible que si $\pi_p(r) = 0$, ce qui équivant à $p | r = |\det M(f, g)|$, ou encore à $p | \det M(f, g)$.

(ii). Par suite, il existe $q \in \mathbf{Z}$ tel que $pq = \det M(f, g)$; comme $\det M(f, g)$ est non nul, on a $|q| \geqslant 1$, d'où $|\det M(f, g)| \geqslant p$. Le résultat suit alors de II.1(b).

Question 2.

(a.) On écrit la décomposition de f en produits de facteurs irréductibles sur $\mathbf{Z}[t]$:

$$f = \prod_{i=1}^{r} g_i,$$

avec les g_i deux à deux distincts.

En particulier, $\pi_p(f) = \prod_{i=1}^{r} \pi_p(g_i)$; de $\pi_p(h)|\pi_p(f)$ et du fait que $\pi_p(h)$ est irréductible, on tire qu'il existe i tel que $\pi_p(h)|\pi_p(g_i)$, avec g_i irréductible dans $\mathbf{Z}[t]$ et $g_i|f$.

(b.) On suppose que f n'est pas irréductible ; alors, on peut trouver g comme dans (a), avec $\deg g < \deg f$; comme g divise f dans $\mathbf{Z}[t]$, g est nécessairement unitaire.

Au vu de l'exercice 2, on a $\|g\|_\infty \leqslant (2 + 2\|f\|_\infty)^{\deg g} \leqslant (2 + 2\|f\|_\infty)^{\deg f - 1}$. On suit la suggestion de l'énoncé et on prouve que $g \in \mathcal{L}_p(h)$: comme $\pi_p(h)|\pi_p(g)$, il existe $H_1 \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t]$, $\deg H_1 + \deg \pi_p(h) = \deg \pi_p(g)$ tel que $\pi_p(h)H_1 = \pi_p(g)$.

Comme h est unitaire, $\deg \pi_p(h) = \deg h$ et on a donc $\deg h + \deg H_1 \leqslant \deg g < \deg f$. Soit h_1 un polynôme de $\mathbf{Z}[t]$ de même degré que H_1 et tel que $\pi_p(h_1) = H_1$; on a alors $\pi_p(g - hh_1) = 0$, soit $p|g - hh_1$; on pose donc $g - hh_1 = ph_2$, et on a $\deg h_2 \leqslant \max(\deg g, \deg hh_1) \leqslant \deg f - 1$, comme attendu. Il suffit donc de prendre $u = g$ pour conclure.

Réciproquement, on suppose qu'il existe u comme indiqué dans l'énoncé ; alors $\|u\|_2 \leqslant (1+\deg u)^{1/2}(2+2\|f\|_\infty)^{\deg f - 1}$, soit $\|u\|_2 \leqslant (\deg f)^{1/2}(2+2\|f\|_\infty)^{\deg f - 1}$. En particulier, l'hypothèse faire sur p assure $p > \|u\|_2^{\deg f}\|f\|_2^{\deg f - 1} \geqslant \|u\|_2^{\deg f}\|f\|_2^{\deg u}$ (car $\|f\|_2 \geqslant 1$). De plus, par construction, $\pi_p(h)|\mathrm{pgcd}\,(\pi_p(f), \pi_p(u))$, et ces deux derniers polynômes ne sont pas premiers entre eux.

Au vu de II.1d, cela n'est possible que si u et f ne sont pas premiers entre eux ; en particulier, comme $\deg u < \deg f$, $\mathrm{pgcd}\,(u, f)$ est un diviseur de f, distinct de f et de 1, comme requis.

Partie III

Question 1.

(a.) Par récurrence, on a, pour tout i, $g_r \prod_{i=1}^{r} u_i = f$. Il suffit donc d'établir que $g_n = 1$. Pour ce faire, on montre par récurrence que g_i n'a pas de facteur irréductible de degré $\leqslant i$. En vertu de l'exercice 4, u_1 est le produit des facteurs irréductibles de f de degré 1 ; par suite, $g_1 = f/u_1$ a tous ses facteurs irréductibles de degré $\geqslant 2$. L'étape de récurrence se montre par le même argument, ce qui permet de voir que g_n n'a que des facteurs irréductibles de degré $> n$; comme son degré est $\leqslant n$ (car c'est un diviseur de f), on déduit que g_n est constant, et vaut nécessairement 1 car tant f que les u_i sont unitaires.

(b.) En particulier, les diviseurs irréductibles de u_i divisent g_{i-1} (donc sont de degré $\geqslant i - 1$) et $t^{p^i} - t$ (donc leur degré divise i, cf. exercice 4). Ils sont donc de degré exactement i.

(c.) **Erreur dans l'énoncé : l'indice correct est $g_{E(n/2)}$, sans quoi le sens direct de la propriété est faux pour $n \in \{1, 2\}$. On donne ici une preuve de ce qui est demandé dans l'énoncé sous l'hypothèse $n \geqslant 3$; cette preuve s'adapte *mutadis mutandis* à la situation de l'énoncé corrigé.**

Enfin, $g_{E(n/2)+1}$ n'a aucun facteur irréductible de degré $\leqslant E(n/2) + 1$, donc a fortiori pas de facteur irréductible de degré $\leqslant n/2$; si $f = g_{E(n/2)+1}$, cela implique que tous les facteurs irréductibles de f

sont de degré $> n/2$. Si g est un facteur irréductible de f, on a donc $\deg(f/g) < n/2$, ce qui, en vertu de ce qui précède, implique $f/g = 1$ et $f = g$; f est irréductible.

Inversement, si f est irréductible, alors pour tout $k \leqslant n-1$, $f = g_k$ (car g_k est le produit des facteurs irréductibles de f de degré $< k$) ; dès que $E(n/2)+1 \leqslant n-1$ (soit $n \geqslant 3$) la propriété affichée est donc vraie.

Question 2.

Sous les hypothèses sur f, on a, en vertu de l'exercice 4, $f|t^{p^d} - t$, soit $\omega(t)^{p^d} = \omega(t)$; par suite, $\omega(t^i)^{p^d} = \omega(t^i)$ pour tout i, et par linéarité de l'application $x \mapsto x^{p^d}$ en caractéristique p, on en déduit que pour tout $h \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t]$, on a $\omega(h)^{p^d} = \omega(h)$.

Ici, h est premier avec f donc $\omega(h)$ est inversible ; il s'ensuit que $\omega(h)^{p^d-1} = 1$, comme requis.

Question 3.

En vertu du théorème des restes chinois, on a l'isomorphisme d'anneaux

$$\begin{aligned} \theta\ : \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t]/(f) &\to \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t](f_1) \times \cdots \times \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t]/(f_r) \\ \omega(h) &\mapsto (\omega_1(h), \ldots, \omega_r(h)), \end{aligned}$$

où ω_i est la projection canonique de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t]$ sur $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t]/(f_i)$. En particulier, $\overline{C}^{-1}(\{-1\})$ est en bijection avec le produit cartésien des ensembles

$$E_i = \{h_i \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t]/(f_i)/h_i^{(p^d-1)/2} = -1\},$$

et $\overline{C}^{-1}(\{1\})$ est en bijection avec le produit cartésien des ensembles

$$E'_i = \{h_i \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t]/(f_i)/h_i^{(p^d-1)/2} = 1\}.$$

Le morphisme du groupe $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t]/(f_i))^*$ donné par $C_i\ : h \mapsto h^{(p^d-1)/2}$ est non constant (sans quoi le polynôme $T^{(p^d-1)/2} - 1$ aurait $p^d - 1$ racines dans le corps $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t]/(f_i)$, ce qui n'est pas), à valeurs dans $\{-1, 1\}$, donc $\{-1\}$ et $\{1\}$ ont des préimages de même cardinal. Par suite $\#E_i = \#E'_i = (p^d-1)/2$, d'où le résultat.

Question 4.

(a.) On calcule la probabilité de $\overline{A} \cap \overline{B}$. On a

$$\begin{aligned} \overline{A} \cap \overline{B} &= \{U/\mathrm{pgcd}\,(U,f) \in \{1,f\} \text{et pgcd}\,(C(U)-1,f) \in \{1,f\}\}, \\ &= \{U/\mathrm{pgcd}\,(U,f) = 1 \text{ et pgcd}\,(C(U)-1,f) \in \{1,f\}\} \cup \\ &\qquad \{U/\mathrm{pgcd}\,(U,f) = f \text{ et pgcd}\,(C(U)-1,f) \in \{1,f\}\}, \end{aligned}$$

les deux derniers ensembles, que l'on note F_1 et F_2 étant manifestement disjoints.

Dans la mesure où $\deg U < \deg f$, l'événement $\mathrm{pgcd}\,(U,f) = f$ équivaut à $U = 0$ et alors on a bien $\mathrm{pgcd}\,(C(U)-1,f) = \mathrm{pgcd}\,(-1,f) = 1$. En particulier, $\Pr(F_2) = p^{-rd}$.

Si maintenant $\mathrm{pgcd}\,(U,f) = 1$, on a $\overline{C}(\omega(U))^2 = 1$ d'après la question 2. En particulier, $f|(C(U)-1)(C(U)+1)$, et

- si $\mathrm{pgcd}\,(f, C(U)-1) = 1$, on a $f|C(U)+1$, soit $\omega(U) \in \overline{C}^{-1}(\{-1\})$.
- Si $\mathrm{pgcd}\,(f, C(U)-1) = f$, on a $f|C(U)-1$ et $\omega(U) \in \overline{C}^{-1}(\{1\})$.

En particulier, comme ω induit une bijection de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t]_{rd}$ sur $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t]/(f)$, on a $\Pr(F_1) = 2((p^d - 1)/2p^d)^r$ (on note que les deux sous-cas sont disjoints, car $p \neq 2$).

Par conséquent, on a $\Pr(\overline{A} \cap \overline{B}) = p^{-rd} + 2((p^d - 1)/2p^d)^r$.

Posant $x = p^{-d} \leqslant 1/3$, cette quantité vaut $x^r + 2^{1-r}(1-x)^r$, dont la dérivée vaut $rx^{r-1} - r2^{1-r}(1-x)^{r-1}$, qui est négative pour $x < 1/3$. À r fixé, la valeur maximale de $\Pr(\overline{A} \cap \overline{B})$ est donc majorée par la valeur pour $x = 0$, qui vaut $2^{1-r} \leqslant 1/2$ car $r \geqslant 2$.

(b). La variable S suit la loi géométrique de paramètre $\Pr(A \cup B) > 0$. Son espérance est donc bien définie et vaut $\mathbb{E}[S] = 1/\Pr(A \cup B) \leqslant 2$.

Partie IV

Question 1.

On pose $q_0 = (u|v)/\|v\|_2^2$; on a alors

$$\|u - qv\|_2^2 = \|u - q_0 v\|_2^2 + (q - q_0)(q\|v\|_2^2 + q_0\|v\|_2^2 - 2(u|v)) = \|u - q_0 v\|_2^2 + (q - q_0)^2\|v\|_2^2.$$

Pour q entier, cette quantité est donc minimale quand $q - q_0$ est minimal, c'est-à-dire quand q est l'entier le plus proche (ou l'un des deux entiers les plus proches si $2q_0 \in \mathbf{Z}$, par exemple $E(q_0 + 1/2)$) de q_0.

Question 2.

On a $(u - Q(u,v)v|v) = (u|v) - Q(u,v)\|v\|^2 = \|v\|^2(\frac{(u|v)}{\|v\|^2} - Q(u,v))$, d'où le résultat au vu de $|Q(u,v) - (u|v)/\|v\|^2| \leqslant 1/2$.

Question 3.

On note que, pour tout n, on a soit l'égalité $\mathcal{M}(u_{n+1}, v_{n+1}) = \mathcal{M}(u_n, v_n)I_2$, soit l'égalité $\mathcal{M}(u_{n+1}, v_{n+1}) = \mathcal{M}(u_n, v_n)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_n \end{pmatrix}$. En particulier, pour tout n il existe $M_n \in \mathcal{M}_2(\mathbf{Z})$ tel que $|\det M_n| = 1$ et $\mathcal{M}(u_{n+1}, v_{n+1}) = \mathcal{M}(u_n, v_n)M_n$. En posant $\Gamma_0(u,v) = I_2$ et $\Gamma_{n+1}(u,v) = \Gamma_n(u,v) \cdot M_n$, on obtient alors le résultat par récurrence.

Question 4.

Le résultat suit par récurrence de $L(u_{n+1}, v_{n+1}) = L(u_n, v_n)$ pour tout n ; on prouve donc ce fait.

Si $(u_n, v_n) = (u_{n+1}, v_{n+1})$, c'est clair ; dans le cas contraire, on a $u_{n+1} = v_n$, $v_{n+1} = u_n - q_n v_n$; par suite,

$$L(u_{n+1}, v_{n+1}) = \{(a - q_n b)v_n + bu_n, a, b \in \mathbf{Z}\} \subset \{a'u_n + b'v_n, a', b' \in \mathbf{Z}\} = L(u_n, v_n).$$

Pour conclure, on remarque simplement que symétriquement $u_n = v_{n+1} + q_n u_{n+1}$ et $v_n = u_{n+1}$; le même argument permet donc de prouver l'inclusion réciproque.

On peut également utiliser le fait que Γ est dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z})$ et, étant de déterminant 1, a son inverse dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z})$ – ce qui revient au même en factorisant les étapes en une seule.

Question 5

On a $(u_1, u_2) \in \mathbf{Q}^2$ et $(v_1, v_2) \in \mathbf{Q}^2$; si l'on note λ le ppcm des dénominateurs de u_1, u_2, v_1, v_2 (écrits sous forme irréductible), on a $\lambda u \in \mathbf{Z}^2$ et $\lambda v \in \mathbf{Z}^2$. Si $w = au + bv \in L(u, v)$ avec $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$, on en déduit immédiatement que $\lambda w = a(\lambda u) + b(\lambda v) \in \mathbf{Z}^2$.

Question 6

Soit $p_n = \|u_n\|_2^2$; alors, on note que si $n > 0$ et $(u_{n+1}, v_{n+1}) \neq (u_n, v_n)$, on a $p_{n+1} < p_n/2$; en particulier, si $(u_{n+1}, v_{n+1}) \neq (u_n, v_n)$ pour tout $1 \leqslant n \leqslant N$, on a $p_N < p_1/2^{N-1}$.

De plus, comme le rang de (u_n, v_n) est égal à 2 pour tout n grâce à IV.3, on a $u_n \neq 0$ pour tout n ; par suite, au vu de IV.5, p_n est un rationnel positif non nul de dénominateur divisant λ^2 et est donc $\geqslant 1/\lambda^2$ pour tout n.

En particulier, si N est comme plus haut, on doit avoir $p_1/2^{N-1} \geqslant 1/\lambda^2$, donc N est borné : il existe k tel que $(u_{k+1}, v_{k+1}) = (u_k, v_k)$.

La décroissance géométrique n'est pas indispensable et on peut se contenter de remarquer que $\lambda^2 \|u_n\|^2$ est une suite d'entiers strictement positifs et donc que la décroissance ne peut être indéfiniment stricte.

Question 7

Au vu de la définition, on a nécessairement $k > 0$. En prenant k minimal, on note qu'on a $\|w\|_2^2 = \|v_k\|^2 - \frac{(v_k|u_k)^2}{\|u_k\|^2}$.

Mais $(v_k|u_k)^2 = (u_{k-1} - q_{k-1}v_{k-1}|v_{k-1})^2 \leqslant^{(IV.2)} \|v_{k-1}\|^4/4 = \|u_k\|^4/4$; par suite, par définition de k, $\|w\|_2^2 \geqslant \|v_k\|^2 - \|u_k\|^2/4 \geqslant \|u_k\|^2/4$.

Partie V.

Question 1.

Soit $\lambda_1 = \inf_{x \in L(b_1,\ldots,b_d) - \{0\}} \|x\|_2$. Alors, il existe $x \in L(b_1, \ldots, b_d) - \{0\}$ tel que $\|x\|_2 \leqslant \lambda_1 + 1$.

En particulier, l'infimum peut être pris sur les x de $L(b_1, \ldots, b_d) - \{0\}$ tels que $\|x\|_2 \leqslant \lambda_1 + 1$; comme $L(b_1, \ldots, b_d) \subset \mathbf{Z}^n$, l'ensemble des tels x est fini (toutes leurs coordonnées sont dans $[-\lambda_1 - 1, \lambda_1 + 1]$, et l'infimum est nécessairement atteint.

Question 2.

Soit $x \in L(b_1, \ldots, b_d) - \{0\}$. On écrit $x = \sum_{i=1}^d u_i b_i$ avec $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant d} \in \mathbf{Z}^d$. Alors, on a, par [P2] :

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{d} u_i (b_i^* + \sum_{j<i} \mu_{ij} b_j^*), \\ &= \sum_{i=1}^{d} u_i b_i^* + \sum_{j=1}^{d-1} \left(\sum_{i=j+1}^{d} \mu_{ij} u_i \right) b_j^*, \\ &= \sum_{j=1}^{d} \left(u_j + \sum_{i=j+1}^{d} \mu_{ij} u_i \right) b_j^*. \end{aligned}$$

Grâce à [P3], on obtient

$$\|x\|_2^2 = \sum_{j=1}^{d} \left(u_j + \sum_{i=j+1}^{d} \mu_{ij} u_i \right)^2 \|b_j^*\|^2.$$

Soit $k = \max\{1 \leqslant i \leqslant d / u_i \neq 0\}$. Dans ce cas, le terme $j = k$ de la somme ci-dessus est simplement $u_k^2 \|b_k^*\|^2 \geqslant \|b_k^*\|_2^2$. Par conséquent, pour tout $x \in L(b_1, \ldots, b_d) - \{0\}$, il existe $1 \leqslant k \leqslant d$ tel que $\|x\|_2 \geqslant \|b_k^*\| \geqslant \min_{1 \leqslant j \leqslant d} \|b_j^*\|_2$.

Question 3.

On étend la notation L à un nombre quelconque de vecteurs de $\mathbf{R}^n$. Le même argument qu'en IV.3 montre que $L(b_k, b_{k+1}) = L(b'_k, b'_{k+1})$.

Par suite,

$$\begin{aligned} L(T_k(b_1, \ldots, b_d)) &= \{\sum_{i=1}^{d} x_i b_i, (x_i) \in \mathbf{Z}^d\}, \\ &= \{u + v, u \in L(b_1, \ldots, b_{k-1}, b_{k+2}, \ldots, b_d), v \in L(b'_k, b'_{k+1})\}, \\ &= \{u + v, u \in L(b_1, \ldots, b_{k-1}, b_{k+2}, \ldots, b_d), v \in L(b_k, b_{k+1})\}, \\ &= L(b_1, \ldots, b_d). \end{aligned}$$

Question 4.

On a, pour tout i, $(Mu)_i = \sum_{k=1}^{d} m_{ik} u_k \leqslant \sum_{k=1}^{d} m_{ik} v_k = (Mv)_i$, l'inégalité suivant du fait que $m_{ik} \geqslant 0$ pour tout k et $u_k \leqslant v_k$ pour tout k.

Preuve du fait admis.

Soit $(c_1, \ldots, c_d) = T_\ell(b_1, \ldots, b_d)$, et $(c_1^*, \ldots, c_d^*)$ la base orthogonale associée par l'exercice 2. Alors on a

- pour $i < \ell$, $c_i^* = b_i^*$, au vu des formules de l'exercice 2.
- pour $i \geqslant \ell + 2$, $c_i^* = b_i^*$; cela suit du fait que c_i^* est le projeté de c_i orthogonalement à $\mathrm{Vect}\,(c_1, \ldots, c_{i-1})$; or, pour $i \geqslant \ell + 2$, $c_i = b_i$ et $\mathrm{Vect}\,(c_1, \ldots, c_{i-1}) = \mathrm{Vect}\,(b_1, \ldots, b_{i-1})$.
- la matrice de passage de $B = (b_1, \ldots, b_d)$ à $C = (c_1, \ldots, c_d)$ est l'identité avec le bloc $\tilde{\Gamma}(\omega_\ell(b_\ell), \omega_\ell(b_{\ell+1}))$ en position $(k, k+1)$ sur la diagonale. À ce titre elle a déterminant 1, donc $\det {}^tBB = \det {}^tCC$; par suite, au vu de l'exercice 2, $\|c_\ell^*\| \|c_{\ell+1}^*\| = \|b_\ell^*\| \|b_{\ell+1}^*\|$.

Pour $i \neq \ell$, l'identité annoncée s'écrit

$$\sum_{j=1}^{i} \log \|c_j^*\| \leqslant \sum_{j=1}^{i} \log \|b_j^*\|,$$

et elle est clairement vraie au vu de ce qui précède.

Pour $i = \ell$, l'identité annoncée s'écrit

$$\sum_{j=1}^{\ell} \log \|c_j^*\| \leqslant \sum_{j=1}^{\ell-1} \log \|b_j^*\| + \frac{1}{2} \left(\log \|b_\ell^*\| + \| \log b_{\ell+1}^* \| \right) + \gamma,$$

soit encore

$$\|c_\ell^*\|^2 \leqslant 2 \|b_\ell^*\| \|b_{\ell+1}^*\| \Leftrightarrow \|c_\ell^*\| \leqslant 2 \|c_{\ell+1}^*\|.$$

Enfin, comme $\mathrm{Vect}\,(b_1,\ldots,b_{\ell-1}) = \mathrm{Vect}\,(c_1,\ldots,c_{\ell-1})$, on a $c_\ell^* = \omega_\ell(c_\ell)$, et $c_{\ell+1}^*$ est le projeté de $\omega_\ell(c_{\ell+1})$ orthogonalement à $\omega_\ell(c_\ell)$ dans le plan $<\omega_\ell(c_\ell),\omega_\ell(c_{\ell+1})>$. Si on note Ω_ℓ la matrice de ω_ℓ, on a alors par définition $c_\ell = b_\ell\tilde{\Gamma}(\omega_\ell(b_\ell),\omega_\ell(b_{\ell+1}))$, soit encore $\Omega_\ell c_\ell = \Omega_\ell b_\ell\tilde{\Gamma}(\omega_\ell(b_\ell),\omega_\ell(b_{\ell+1}))$, et une identité similaire pour $c_{\ell+1}$; cela prouve que c_ℓ^* et $c_{\ell+1}^*$ jouent le rôle de u_k et w dans IV.7, et établit l'identité admise.

Question 5.

On note que $P = I_d + N + N^2 + \cdots + N^{d-1}$, où N est la matrice $(\delta_{i-1,j})$ et que $N^d = 0$, qui a pour conséquence que P est inversible, d'inverse $P^{-1} = I_d - N$.

En calculant le produit PM_kP^{-1} par blocs, on voit que PM_kP^{-1} est égal à l'identité pour les lignes et colonnes $\notin \{k,k+1\}$, et au bloc

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pour les lignes et colonnes $k, k+1$.

Par suite, pour tout k, la matrice PM_kP^{-1} a tous ses coefficients positifs ou nuls.

En réécrivant le résultat admis sous la forme, pour tout $1 \leqslant k \leqslant d$,

$$PV(T_k(b_1,\ldots,b_d)) \leqslant PM_kP^{-1}(PV(b_1,\ldots,b_d)) + \gamma PC_k,$$

et en utilisant V.4 et le fait que PM_kP^{-1} est à coefficients positifs ou nuls, on prouve par récurrence que, pour tout k,

$$PV(T_k(T_{k-1}(\ldots(T_1(b_1,\ldots,b_d))))) \leqslant P(M_kM_{k-1}...M_1V(b_1,\ldots,b_d) + g_k),$$

d'où le résultat s'ensuit pour $k = d-1$.

Question 6

Pour $j \notin \{k,k+1\}$, on a $(M_kZ)_j = Z_j = (Z - \gamma C_k)_j$. Pour $j \in \{k,k+1\}$, on a $(M_kZ)_j = \gamma((d-2k+1) + (d-2k+3))/2 = (d-2k)\gamma$.

En particulier, $(M_kZ)_k = Z_k - \gamma$, et $(M_kZ)_{k+1} = Z_{k+1} + \gamma$, d'où $M_kZ = Z - \gamma C_k$. Par récurrence, on obtient donc $M_k \ldots M_1Z = Z - g_k$, et $AZ = Z - G$. Le fait que $Z \in H$ est une vérification directe.

Question 7

(a) On vérifie immédiatement que $X_0 = V(b_1,\ldots,b_d) \in H$, d'où $\Pi(X_0) = 0$ et I.7 entraîne de manière directe que la suite X_n converge vers Z.

(b) On remarque que $PAP^{-1} = PM_{d-1}P^{-1}PM_{d-2}P^{-1}\ldots PM_1P^{-1}$ est à coefficients positifs ou nuls comme produit de matrices à coefficients positifs ou nuls. x

On prouve alors le résultat demandé par récurrence pour $\ell \geqslant 0$, le cas $\ell = 0$ suivant de la définition de X_0 ; le supposant vrai au rang $n-1$, on écrit

$$\begin{aligned} PV(T^n(b_1,\ldots,b_d)) &\leqslant PAV(T^{n-1}(b_1,\ldots,b_d) + G), \\ &= PAP^{-1}P(V(T^{n-1}(b_1,\ldots,b_d)) + PG, \\ &\leq PAP^{-1}PX_{n-1} + PG \quad [PAP^{-1} \geqslant 0 + \mathrm{HR}], \\ &\leq P(AX_{n-1} + G) = PX_n. \end{aligned}$$

(c) Au vu de V7(a), il existe $N_0(\varepsilon)$ tel que, pour $n \geqslant N_0(\varepsilon)$, on a $\|X_n - Z\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Par suite, la première ligne de V7(b) donne, si $c_1^*, \dots, c_d^*$ est la base de Gram-Schmidt associée à $c_1, \dots, c_d$:

$$\left| \log \|c_1^*\|_2 - \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{d} \log \|c_k^*\|_2 \right| \leqslant \gamma(d-1) + \varepsilon = \log(\exp(\varepsilon) 2^{(d-1)/2}).$$

La première inégalité s'ensuit.

L'avant-dernière ligne de V7(b) s'écrit

$$\left| \sum_{k=1}^{d-1} \left(\log \|c_k^*\|_2 - \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{d} \log \|c_k^*\|_2 \right) \right| \leqslant \gamma(d-1) + (d-1)\varepsilon,$$

Mais on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{d-1} \left(\log \|c_k^*\|_2 - \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{d} \log \|c_k^*\|_2 \right), &= \sum_{k=1}^{d-1} \log \|c_k^*\|_2 - \frac{d-1}{d} \sum_{k=1}^{d} \log \|c_k^*\|_2 \\ &= -\log \|c_d^*\| + \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{d} \log \|c_k^*\|. \end{aligned}$$

En particulier,

$$\frac{1}{d} \sum_{k=1}^{d} \log \|c_k^*\|_2 \leqslant \log \|c_d^*\|_2 + \gamma(d-1) + (d-1)\varepsilon.$$

Pour conclure, il reste à montrer que $\sum_{k=1}^{d} \log \|c_k^*\|_2 = \sum_{k=1}^{d} \log \|b_k^*\|_2$. Sur ce fait, on note que la définition de T_k montre que, si B est la matrice dont les colonnes sont les $b_1, \dots, b_d$ et B' la matrice dont les colonnes sont les éléments de $T_k(b_1, \dots, b_d)$, alors $\det {}^tBB = \det {}^tB'B'$. Par récurrence, il s'ensuite que, si C est la matrice dont les colonnes sont les $c_1, \dots, c_d$, $\det {}^tBB = \det {}^tCC$. On conclut alors grâce à la question 2 de l'exercice 3.

Question 8.

On montre alors par récurrence que pour tout i,

$$L(c_1^{(i)}, \dots, c_{d-i}^{(i)}, c_{d-i+1}^{(i-1)}, \dots, c_d) = L(b_1, \dots, b_d).$$

Dans V7, par V3 et par récurrence, on a $L(c_1, \dots, c_d) = L(b_1, \dots, b_d)$; cela initialise la récurrence.

Si l'on suppose que c'est vrai au rang $i-1$, alors par le même type d'argument que V3, cela suit de $L(c_1^{(i)}, \dots, c_{d-i}^{(i)}, c_{d-i+1}^{(i-1)}) = L(c_1^{(i-1)}, \dots, c_{d-i}^{(i-1)}, c_{d-i+1}^{(i-1)})$, ou encore de $L(c_1^{(i)}, \dots, c_{d-i}^{(i)}) = L(c_1^{(i-1)}, \dots, c_{d-i}^{(i-1)})$, qui suit du même argument que l'initialisation de la récurrence. Cela prouve le premier point.

Soient $\beta_1^*, \dots, \beta_d^*$ la base de Gram-Schmidt associée à $\beta_1, \dots, \beta_d$, et pour chaque i, $c_k^{(i)*}$ la base de Gram-Schmidt associée à $(c_1^{(i)}, \dots, c_d^{(i)})$.

On va montrer qu'on a alors $\beta_i^* = {c_{d-i}^{(i)}}^*$. En effet, ${c_{d-i}^{(i)}}^*$ est le projeté de $c_{d-i}^{(i)} = \beta_i$ orthogonalement à $\operatorname{Vect}(c_1^{(i)}, \dots, c_{d-i-1}^{(i)})$; or,

$$\begin{aligned} \operatorname{Vect}(c_1^{(i)}, \dots, c_{d-i-1}^{(i)}) &= \operatorname{Vect}(L(c_1^{(i)}, \dots, c_{d-i-1}^{(i)})), \\ &= \operatorname{Vect}(L(\beta_1, \dots, \beta_{i-1})), \\ &= \operatorname{Vect}(\beta_1, \dots, \beta_{i-1}), \end{aligned}$$

ce qui prouve l'affirmation.

Or, par V7(c), $\|{c_{d-i}^{(i)}}^*\|_2 \geqslant \exp(-(d-i)\varepsilon)2^{1-(d-i)}\|c_1^{(i)}\|_2 \geqslant \exp(-d\varepsilon)2^{1-d}\min_{1\leqslant i\leqslant d}\|c_1^{(i)}\|_2$, soit, pour tout i,

$$\|\beta_i^*\|_2 \geqslant \exp(-d\varepsilon)2^{1-d}\min_{1\leqslant i\leqslant d}\|c_1^{(i)}\|_2.$$

Le résultat suit alors de V2 et de $L(\beta_1,\ldots,\beta_d) = L(b_1,\ldots,b_d)$.

Chapitre 4

Épreuve écrite d'analyse et probabilités

Le sujet est disponible à l'URL https://media.devenirenseignant.gouv.fr/file/agregation_externe/38/2/s2020_agreg_externe_math_2_1303382.pdf ou sur le site agreg.org.

4.1 Commentaires sur l'épreuve écrite d'analyse et probabilités

4.1.1 Présentation du sujet

Le sujet d'Analyse et Probabilités de la session 2020 porte sur le critère de BAÉZ-DUARTE pour l'hypothèse de RIEMANN. Ce critère, qui précise le critère de BEURLING et NYMANN, établit un lien entre l'hypothèse de RIEMANN et la famille de fonctions $\{x \mapsto \{1/(nx)\},\ n \in \mathbf{N}^*\}$ où $\{\cdot\}$ est la partie fractionnaire. Plus précisément, si $\mathcal{B}$ désigne le sous-espace de $L^2(]0,+\infty[)$ engendré par la famille $\{x \mapsto T_n\rho(x) = \{1/(nx)\},\ n \in \mathbf{N}^*\}$, ce critère énonce une équivalence entre l'existence d'une suite de $\mathcal{B}$ qui converge dans $L^2(]0,+\infty[)$ vers la fonction indicatrice de l'intervalle $]0,1]$ et la non annulation de la fonction ζ de RIEMANN dans la bande verticale $\{s \in \mathbf{C}, 1/2 < \mathrm{Re}(s) < 1\}$, ce qui équivaut à l'hypothèse de RIEMANN avec nos connaissances actuelles sur la fonction zêta. Dans le sujet, seul le sens direct du critère est démontré. Le sens réciproque, beaucoup plus ardu, fait appel ou bien à des manipulations subtiles de contours d'intégration en analyse complexe ou bien à des résultats profonds de structure des espaces de HARDY. La question traitée dans le sujet est donc une question de théorie analytique des nombres en lien avec l'analyse fonctionnelle. Les domaines de l'analyse complexe, de l'analyse réelle, de l'intégration, de l'analyse de FOURIER, de l'analyse fonctionnelle dans $L^2(]0,+\infty[)$ et la théorie des opérateurs sont donc abordés dans ce sujet.

Chaque partie commence par des questions simples ou classiques, qui peuvent être parfois calculatoires mais devraient être à la portée d'une grande majorité des candidats à l'agrégation. Comme toujours, le sujet a été conçu pour permettre au plus grand nombre de traiter les premières parties et particulièrement les premières questions de chacune des parties. Ces premières parties devaient permettre de se familiariser avec les objets manipulés, aussi est-il hasardeux de négliger ces parties pour aborder directement les suivantes. La stratégie consistant à ne traiter que le début de chaque partie n'est pas recommandée non plus. Elle ne permet pas de s'approprier le sujet autant qu'une approche linéaire et le barème est conçu pour fortement favoriser un traitement conséquent et suivi des premières parties plutôt qu'un grapillage de questions éparses du sujet.

La partie I est consacrée à quatre questions préliminaires, essentiellement calculatoires et très classiques, qui servent dans la suite du problème. On y manipule des séries de fonctions (séries entières, séries alternées, séries de FOURIER) et une intégrale impropre très connue que l'on calcule à l'aide du théorème des résidus. L'objectif de la partie II, assez courte, est d'établir quelques propriétés de la transformée de MELLIN : domaine de définition [1], calculs simples de quelques transformées, action des opérateurs de dilatation-contraction. La partie III est consacrée au prolongement méromorphe de la fonction zêta de RIEMANN, initialement définie sur le demi-plan $\{s \in \mathbf{C} \text{ tel que } \mathrm{Re}(s) > 1\}$ au demi-plan $\{s \in \mathbf{C} \text{ tel que } \mathrm{Re}(s) > 0\}$. Elle comporte des questions calculatoires et techniques de manipulation de sommes et d'inégalités sur les modules ainsi que quelques questions relatives à l'holomorphie (théorème d'holomorphie pour les séries de fonctions, prolongement analytique, calcul de résidu). Dans la partie IV, on exprime la transformée de MELLIN de la fonction ρ à l'aide de la fonction zêta de RIEMANN. Le début est consacré à l'étude de la fonction réelle ρ, la suite à des questions d'intégrabilité et à des calculs d'intégrales. L'une de ces questions nécessite une certaine finesse dans les calculs avec une interversion de somme et d'intégrale ; les autres calculs sont plus immédiats. Dans la partie V, on démontre par l'absurde le sens direct du théorème de BAÉZ-DUARTE en prouvant que si la fonction indicatrice de l'intervalle $]0,1]$ est dans l'adhérence d'un certain sous-espace vectoriel $\mathcal{B}$ dans $L^2(]0,+\infty[)$, alors la fonction zêta ne s'annule pas dans la bande verticale $\{s \in \mathbf{C} : 1/2 < \mathrm{Re}(s) < 1\}$. Pour ce faire, on commence par se ramener à des fonctions presque partout nulles sur $]1,+\infty[$ (fonctions de $\tilde{\mathcal{B}}$) et on utilise les résultats des parties précédentes pour exprimer la transformée de MELLIN d'une fonction de $\tilde{\mathcal{B}}$ en fonction de ζ. Il reste alors à interpréter la transformée de MELLIN comme un produit scalaire de $L^2(]0,1])$ pour conclure. La structure hilbertienne de $L^2(]0,1])$ et des manipulations sur les intégrales font l'essentiel de cette partie. Dans la partie VI, plus longue et ardue, on étudie certains opérateurs (applications linéaires) continus de $L^2(]0,+\infty[)$: opérateurs de dilatation D_θ, opérateur d'inversion J, opérateur de HARDY H (c'est un opérateur de moyenne), opérateur de FOURIER C et on construit un endomorphisme continu V de $L^2(]0,+\infty[)$, qui commute avec les opérateurs de dilatation D_θ et agit comme J sur la fonction ρ étudiée en partie IV. Cette partie comporte des questions difficiles, calculatoires et théoriques, autour de la structure d'espace vectoriel normé et de la structure hilbertienne de $L^2(]0,+\infty[)$. La mener à bien en justifiant les manipulations faites nécessite une compréhension fine de ces notions. Enfin, dans la partie VII, on construit à l'aide de la fonction μ de MÖBIUS, une suite de $\mathcal{B}$ qui converge simplement vers la fonction indicatrice de l'intervalle $]0,1]$ sur $]0,+\infty[$. Pour cela, on démontre certaines propriétés de convolution de la fonction μ de MÖBIUS. On montre ensuite à l'aide de l'opérateur V et de ses propriétés que cette suite diverge dans $L^2(]0,+\infty[)$. On finit donc le sujet sans avoir démontré l'hypothèse de RIEMANN !

Le théorème de BEURLING et NYMAN est démontré dans l'article [Be55] et analysé dans [BS] ; il a été précisé par BAÉZ-DUARTE (on passe de dilatées quelconques de ρ aux dilatées entières) dans [BD03]. La partie V où l'on passe de $L^2(]0,+\infty[)$ à $L^2(]0,1])$ est un développement d'une partie de [BDBLS]. Les parties VI et VII sont inspirées de l'article [BD99], où l'opérateur V est construit, son action étudiée et où l'auteur établit la divergence dans $L^2(]0,+\infty[)$ d'une suite de $\mathcal{B}$, construite à l'aide de μ, qui converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction indicatrice de l'intervalle $]0,1]$.

Références

[BD99] L. Báez-Duarte, *A class of invariant unitary operators*, Adv. in Math **144** (1999), 1-12.

[BD03] L. Báez-Duarte, *A strengthening of the Nyman-Beurling criterion for the Riemann hypothesis*, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei **9** (2003), n. 1, 5-11.

[BDBLS] L. Báez-Duarte, M. Balazard, B. Landreau, E. Saias, *Note sur la fonction zeta de Riemann, 1II*, Adv. in Maths. **149** (2000), n. 1, 130-144.

[BS] M. Balazard, E. Saias, *Note sur la fonction zeta de Riemann, 1*, Adv. in Maths. **139** (1998),

1. Les candidats qui avaient préparés sérieusement le concours avaient pu reconnaître des éléments du sujet du concours docteurs 2019

310-321.

[Be55] A. Beurling, *A closure problem related to the Riemann Zeta-function*, Proc. Nat. Acad. Sci. **41** (1955), 312-314.

4.1.2 Remarques générales

Cette année, une partie substantielle du sujet d'analyse et probabilités a été traitée dans une majorité des copies. Beaucoup de questions ont été abordées et on a trouvé assez peu de copies « vides ». Les parties I, II, III et IV ont été abordées par une majorité de candidats (à 99%, 77%, 82% et 85% respectivement). Toutefois la partie II a été moins commencée que les parties III et IV. Un quart des candidats environ a traité les premières questions de la partie V, 30% pour la partie VI. Dans un cas comme dans l'autre, moins de 10% des candidats se sont aventurés au delà de la question 3. La partie VII n'a été que très rarement abordée (à part la première question, majoritairement en cas de grapillage, sur laquelle 15% des candidats se sont aventurés). Dans l'ensemble, on note un nombre non négligeable de copies où seules les toutes premières questions de chaque partie sont abordées. Cette approche donne une impression négative et le barème récompense une démarche plus opiniâtre avec une volonté de traiter les premières parties de façon conséquente.

Certaines copies, heureusement minoritaires, comportent des incohérences majeures. On a pu voir ainsi des erreurs graves dans les manipulations des fonctions usuelles, des variables d'intégration sorties de l'intégrale, des inégalités entre nombres complexes... Les commentaires qui suivent s'appliquent au reste des candidats et des copies.

Dans l'ensemble, les calculs, même exigeants, sont souvent bien menés. On constate néanmoins dans les copies cette année encore des difficultés majeures dans les manipulations des nombres complexes et des modules. Les calculs manquent parfois aussi de rigueur. Beaucoup de candidats n'hésitent pas à diviser par une quantité sans se préoccuper de préciser qu'elle ne s'annule pas. Plus fondamentalement encore, les justifications des calculs sont souvent oubliées. C'est le cas pour les passages à la limite, l'existence des intégrales ou des séries, les interversions de sommes et d'intégrales, les changements de variables, les intégrations par parties. Trop souvent, les objets mathématiques sont traités comme des objets formels sans soucis de notion de convergence : un objet défini par une intégrale, une limite ou comme la somme d'une série, n'a d'existence et de sens que si la convergence a été (préalablement) établie.

Le jury souhaite insister sur un point important qui pose problème presque chaque année dans les copies d'analyse. Il porte sur les séries et les intégrales généralisées. Si $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, la notation $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ désigne la série de terme général a_n. Cette série peut être convergente ou divergente. En cas de convergence, on note $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ sa somme (ce sont des conventions de notations usuelles), qui est alors un nombre réel ou complexe. Dans le cas où $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de réels positifs, on peut toujours définir la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ qui est un réel en cas de convergence de la série et est $+\infty$ en cas de divergence de la série (car la suite des sommes partielles d'une série à termes positifs est ou bien convergente, ou bien diverge vers $+\infty$). Dans le cas d'un terme général positif, et dans ce cas seulement, on peut donc écrire $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$ pour signifier que la série converge. Dans le cas général, si on peut toujours écrire $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ pour désigner une série, qui sera éventuellement divergente, on ne peut écrire d'équations faisant intervenir la somme de la série qu'une fois la convergence de la série démontrée. Pour les intégrales impropres, la confusion est plus fréquente encore. Dans ce cas, si f est une fonction localement intégrable sur $[a, b[$ avec $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ et $a < b$, la notation $\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t$ désigne à la fois une intégrale impropre qui peut être convergente ou divergente et la valeur de l'intégrale en cas de convergence. À nouveau, lorsque f est à valeurs positives, on peut toujours assigner une valeur à $\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t$ qui est un réel en cas de convergence de l'intégrale et est $+\infty$ en cas de divergence (car la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est croissante et admet donc une limite en b^- dans $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$). Dans le cas d'une fonction positive, et dans ce cas seulement, on peut donc écrire $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t < +\infty$ pour signifier que l'intégrale converge (la fonction est intégrable). Dans le cas général, on ne peut écrire d'équations faisant intervenir l'intégrale qu'une fois la convergence démontrée. Les inégalités $|\int f| \leqslant \int |f|$, respectivement $|\sum a_n| \leqslant \sum |a_n|$, apparaissent souvent dans les copies à propos de la convergence d'une intégrale ou d'une série : elles sont considérées comme abusives et sont sanctionnées dans la notation. Il convient de commencer par établir l'intégrabilité de la fonction, respectivement la convergence absolue de la série. Ensuite seulement, on peut écrire que l'intégrale, respectivement la série, existe et on peut majorer son module. Ainsi, le jury recommande instamment de ne jamais écrire $|\int f| < +\infty$ ou $|\sum a_n| < +\infty$ pour une fonction f ou un terme général a_n qui ne sont pas de signe constant (on a lu par exemple $\left|\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right| < +\infty$ comme conclusion de la question I.4(a), expression considérée comme fautive). Avant toute considération, il faut montrer la convergence de l'intégrale ou de la série.

Les différentes notions de convergences (simple, uniforme, absolue, normale), la localité ou la globalité, ne semblent pas claires. De même les notions d'intégrabilité ou de convergence uniforme ainsi que leur rôle pour des interversions de limites par exemple ne sont pas assimilées par de nombreux candidats. Ce sont pourtant des notions fondamentales en analyse qui doivent être comprises par un futur agrégé. La notion d'holomorphie demeure aussi une difficulté pour beaucoup de candidats.

4.1.3 Commentaires détaillés

Partie I

Cette partie rassemblait des résultats très classiques en analyse. Elle a révélé chez certains candidats une connaissance partielle des séries alternées, des séries de Fourier et pour de nombreux candidats une incompréhension de la notion de convergence uniforme ou de la notion d'intégrabilité.

1. Le résultat de cette question est utilisé intensivement dans le sujet et cette question était essentiellement là pour le rappeler. Toutefois, on attendait dans cette question facile des justifications qui n'ont été que peu souvent explicitées (scission des modules, positivité de l'exponentielle réelle, e^{ix} de module 1 si x est réel).
2. (a) Cette question a été particulièrement discriminante. Elle a révélé une incompréhension majeure de la notion de convergence uniforme chez certains candidats. Il a trop souvent été lu que la convergence uniforme sur tout $[0, a]$ (pour $0 < a < 1$), qui peut se montrer correctement par convergence normale, par propriété du rayon de convergence ou par majoration directe, entraîne la convergence uniforme sur $[0, 1[$: c'est une erreur grave, la convergence uniforme ne passe pas du local au global.
   Par ailleurs, le critère spécial des séries alternées n'est pas toujours bien énoncé, il possède trois hypothèses qu'il convient de citer explicitement et deux conclusions : la convergence de la série et la majoration de la valeur absolue du reste. La convergence uniforme découle de cette dernière. Les manipulations de la valeur absolue sont bien souvent hasardeuses et montrer que la suite $(x^n/n)_n$ est décroissante pour $x \in [0, 1]$ est une difficulté rarement surmontée dans les copies (on rappelle que la majoration par une suite décroissante ne permet pas d'obtenir la décroissance). En revanche, le théorème de continuité des séries de fonctions uniformément convergentes est en général bien énoncé et utilisé.

   (b) L'énoncé de la question, une question de cours, appelait clairement à une justification pour le rayon de convergence, que de nombreuses copies ont omise. Lorsque la justification est présente, elle est souvent correcte (d'Alembert ou définition du rayon). Lorsque le critère de d'Alembert est utilisé pour $|(-1)^n x^n/n|$, il est bon de préciser que x est non nul. Quelques candidats ont trouvé un rayon de convergence négatif ! Pour le rappel de la somme de la série, une erreur de signe a été très fréquente.

(c) La continuité ou la convergence uniforme sont trop rarement invoquées pour justifier le passage à la limite dans la somme.

3. (a) Cette question a été abordée dans plus de 90% des copies. La plupart des candidats ont pensé à l'intégration par parties, très peu la justifient (fonctions de classe C^1). Les calculs sont souvent bien menés avec toutefois des erreurs de signe fréquentes et parfois des $e^{2i\pi n}$ non simplifiés. Le cas $n = 0$ a souvent été oublié. Notons enfin que la fonction considérée n'est impaire que sur $\mathbf{R}\backslash\mathbf{Z}$, ce qui suffit toutefois à justifier la nullité des coefficient a_n.

   (b) Cette question n'a été que très rarement bien traitée et a été très discriminante. Les hypothèses du théorème de DIRICHLET ne sont que trop rarement connues (beaucoup de candidats semblent penser que la continuité par morceaux et la périodicité suffisent à établir la convergence simple de la série de FOURIER d'une fonction vers cette fonction), sa conclusion assure la convergence simple de la série de FOURIER vers la régularisée de la fonction considérée, ce qui donne dans cette question la convergence vers la fonction elle-même sur $\mathbf{R}\backslash\mathbf{Z}$.

4. (a) La convergence de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ est une question classique traitée dans la plupart des cours d'intégration. Il s'agit là de l'exemple le plus commun d'une intégrale impropre convergente d'une fonction non intégrable. Cette question a révélé une incompréhension des notions d'intégrabilité et de convergence d'intégrale chez certains candidats mais de nombreux candidats l'ont aussi bien traitée.
   Il faudrait commencer par annoncer la continuité de la fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ sur $]0, +\infty[$, ce qui assure l'intégrabilité locale et amène donc à prouver la convergence en 0 et en $+\infty$. La convergence en 0 peut être obtenue par prolongement par continuité mais ne doit pas être oubliée. La convergence en $+\infty$ résulte d'une intégration par parties.
   On a vu sur cette question beaucoup de bêtises : intégration par parties sur $]0, +\infty[$ qui crée une divergence en 0 ou sur $[1, +\infty[$ sans justification de convergence, conclusion de la forme $|\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x| < +\infty$. Il convient à un futur agrégé d'être sensible à la nature des objets manipulés, à la justification de leur définition et de leur sens.

   (b) Moins de la moitié des candidats se sont risqués sur cette question relative à l'analyse complexe, pourtant très classique[2]. L'énoncé du théorème des résidus est souvent approximatif (l'absence de pôle sur le contour ne suffit pas à justifier que l'intégrale est nulle). Parmi ceux qui vont plus loin, on constate pour certains une absence de justification des passages à la limite dans les intégrales sur les demi-cercles, alors qu'une bonne maîtrise du théorème de convergence dominée pour les passages à la limite avec une gestion satisfaisante des modules a été valorisée.

Partie II

Dans cette partie, on constate à nouveau que la variable complexe est une difficulté majeure pour un nombre important de candidats et que la notion d'intégrabilité manque de clarté dans certaines copies. Toutefois, cette partie comportait des questions calculatoires abordables qui ont permis à de nombreux candidats de bien la réussir.

1. Cette question, abordée par un peu moins de 70% des candidats a été très discriminante et peu réussie. On a vu de très graves erreurs dans un nombre non négligeable de copies : croissance de $x \mapsto t^x$ sans distinction selon la position de t par rapport à 1, inégalités $|\int f| \leqslant \int |f|$ avant d'avoir établi la convergence des intégrales (et donc l'existence même de $\int f$), critère de convergence des intégrales de RIEMANN en 0 et $+\infty$ méconnu. Ces erreurs ont été lourdement sanctionnées. Plusieurs copies proposent une réponse à cette question très élégante, qui utilise la convexité des intervalles de $\mathbf{R}$ et l'inégalité de HÖLDER.

2. Une poignée de candidats a tenté de proposer une autre méthode de calcul que celle proposée par l'énoncé. Dans ces cas-là, des points ont été attribués uniquement lorsque cette démonstration était complète et correcte.

2. Cette question a été assez bien traitée par les candidats qui l'ont abordée. La plupart d'entre eux ont pensé à utiliser l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ. Il faut toutefois veiller à restreindre l'intervalle d'intégration à $]0,1]$ avant d'appliquer l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ ou faire apparaître la fonction indicatrice de $]0,1]$ dans l'intégrande car $t \mapsto t^{2\sigma-2}$ n'est jamais intégrable sur $]0,+\infty[$.
3. De trop nombreux candidats écrivent l'intégrale « définissant » $\mathcal{M}f(s)$ sans avoir justifié son existence. Or l'objet de la question était l'existence de cette intégrale. Une part importante de ces copies montrent une majoration du module de cette intégrale, pour justifier sa convergence : or les objets introduits n'ont de sens qu'une fois démontrée l'intégrabilité de la fonction. Cela a été lourdement sanctionné. Ajoutons qu'en remplaçant l'intervalle d'intégration par $[a,b]$, l'inégalité triangulaire ne permet pas de conclure : une fonction bornée n'admet pas nécessairement de limite.
4. Cette question se voulait très facile et la majorité des candidats l'ont parfaitement traitée. Toutefois, trop de candidats sont troublés par la variable complexe et ne savent pas intégrer t^{s-1} sur $]0,1[$ lorsque s est complexe.
5. La justification du changement de variable (C^1 difféomorphisme de $]0,+\infty[$) dans l'intégrale impropre est souvent omise. Elle donne pourtant directement une équivalence d'intégrabilité et donc $I(f) = I(T_\lambda f)$. Les calculs en revanche sont souvent bien menés.

Partie III

Il y a eu quelques confusions sur la nature des convergences de séries. La partie technique relative à la sommation d'ABEL a souvent été bien menée. En revanche, les majorations de fonctions d'une variable réelle sont peu souvent menées à terme, la manipulation de modules est souvent hasardeuse, la confusion entre estimation locale et globale est présente dans un nombre non négligeable de copies. Globalement, cette partie III a été moins réussie que les deux précédentes par les 80% de candidats qui l'ont entamée. De plus, la moitié des candidats seulement sont allés au delà de la question 2.

1. (a) De trop nombreux candidats font une confusion entre convergence normale et convergence absolue. Il fallait dans cette question préciser que la convergence absolue implique bien la convergence simple pour conclure. Ici aussi, on a vu beaucoup d'inégalités de la forme $|\sum f_n| \leqslant \sum |f_n|$ avant d'avoir démontré l'existence de la première somme. Cette question a néanmoins été bien réussie par une majorité de candidats.

   (b) Cette question a montré que la notion de convergence normale n'est pas toujours comprise. Trop de candidats majorent le terme général par une quantité qui dépend de la variable s et concluent pourtant à une convergence normale. L'holomorphie du terme général est rarement justifiée. Faire apparaître la fonction exponentielle est une justification suffisante. Les correcteurs ont en revanche apprécié de lire une justification convaincante de l'existence de $\min\{\mathrm{Re}(s), s \in K\}$ pour un compact K de $\mathbf{C}$ dans un nombre non négligeable de copies.
2. Les candidats qui ont abordé cette question (seulement la moitié des candidats) ont pensé à séparer termes pairs et impairs ou à simplifier $\zeta + G$. Toutefois, dans le cas de la séparation des termes pairs et impairs, il faut rappeler que la série définissant G converge absolument (donc commutativement), ce qui justifie la séparation des séries. C'est rarement fait dans les copies. De même, très peu de candidats pensent à vérifier que le dénominateur ne s'annule pas (parfois ils y pensent mais oublient les zéros autres que 1 du dénominateur).
3. (a) 40% des candidats ont traité cette question, avec succès en général. On a parfois vu un calcul peu élégant (qui part du membre de droite), mais juste. Le jury rappelle cependant ici qu'il est inutile et contre-productif de tenter de tromper les correcteurs qui repèrent aisément les erreurs de calcul qui se résorbent miraculeusement à la dernière ligne.

   (b) Si cette question a été abordée par un plus grand nombre de candidats que la précédente, elle a aussi été beaucoup moins réussie. C'était une question complexe, qui nécessitait de mener à bien plusieurs étapes de raisonnement. La plupart des candidats ont su borner $(B_\varepsilon(N))_{N\in\mathbf{N}^*}$ et en déduire que la suite $(B_\varepsilon(N)/(N+1)^{s-\varepsilon})_{N\in\mathbf{N}^*}$ converge vers 0. La majoration du terme général de la série était subtile et a souvent été omise. Notons que l'on ne peut pas appliquer directement le critère de convergence d'Abel pour les séries oscillantes ou le critère des séries alternées pour justifier la convergence de la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^s}$ car s est ici un nombre complexe. Le calcul du (a) et cette question permettent justement d'obtenir la convergence de cette série d'une autre manière.

(c) Les trois questions de ce 3 (c) visaient à démontrer des inégalités portant sur des fonctions d'une variable réelle. Rappelons qu'un développement limité en x_0 ne permet de démontrer une majoration qu'au voisinage de x_0 : il faut un autre outil pour démontrer des majorations globales, par exemple l'inégalité des accroissements finis.

   i. On pouvait appliquer l'inégalité des accroissements finis, c'est souvent ce qui a été fait. On pouvait aussi factoriser par l'angle moitié pour se ramener à une fonction à valeurs réelles et utiliser des inégalités de convexité. On attendait alors une justification (même rapide) des inégalités (le mot convexité suffisait). On a vu dans cette question beaucoup trop de majorations fantaisistes avec les complexes.

   ii. Ici encore, l'inégalité des accroissements finis donnait le résultat. On a vu quelques confusions sur la variable par rapport à laquelle on dérivait. Cette question, qui pourtant ne contenait pas la difficulté de porter sur une fonction à valeurs complexes, a été moins réussie et moins traitée que la précédente.

   iii. Cette question a très peu inspiré les candidats.

(d) Seulement un tiers des candidats ont traité cette question.

4. Beaucoup de candidats oublient les pôles éventuels en $1+2i\pi n$. Très peu donnent un calcul convaincant du résidu.

Partie IV

Le début de cette partie, consacré à l'étude d'une fonction réelle, a été traité par 85% des copies. Les questions subtiles de prolongement analytique et d'intégrabilité dans la suite de cette partie ont moins inspiré les candidats.

1. (a) Cette première question a été majoritairement correctement traitée.

   (b) Certains candidats pensent que ρ est une fonction affine sur $]1/(n+1), 1/n[$. Les autres donnent en général une représentation correcte de la fonction.

   (c) Le domaine de continuité et l'encadrement de ρ sont souvent bien traités. Pour le domaine de continuité, on attendait cependant une justification de la non continuité en $1/n$, ce qui est rarement fait. Il est faux de dire que ρ est continue sur l'union des intervalles $]1/(n+1), 1/n]$. La justification de l'inclusion de l'image dans [0,1[est très souvent bien faite mais l'inclusion réciproque (avec le théorème des valeurs intermédiaires par exemple) est très souvent omise.

2. Cette seconde question, traitée par presque 60% des candidats, a été partiellement bien faite. La majoration sur $[1,+\infty[$ est en général satisfaisante. Sur $]0,1]$ en revanche, on a vu beaucoup de découpages de la forme $\int_0^1 \rho = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{1/(n+1)}^{1/n} \rho$ sans justification de convergence de la somme. De façon générale, toute égalité faisant intervenir un processus limite (somme infinie, borne supérieure, limite d'une suite ou d'une fonction) doit être accompagnée d'un argument de bonne définition.

3. Cette question facile a été traitée par la moitié des candidats, en général avec succès.

4. (a) Le théorème d'holomorphie sous l'intégrale n'est pas toujours connu. Cette question a été globalement peu réussie par les 40% de candidats qui l'ont abordée.

(b) Les justifications de convergence et d'échange de somme et intégrale sont souvent manquantes.

(c) L'argument d'unicité du prolongement analytique est souvent omis (on a montré au III.4 la méromorphie de zêta sur $\{\mathrm{Re}(s) > 0\}$).

5. L'argument d'unicité du prolongement analytique est souvent omis dans cette question aussi.

Partie V, VI et VII

Le début de la partie V a été abordé par un nombre non négligeable de candidats (un quart). Beaucoup moins à partir de la question V.3. Les premières questions de la partie VI ont été traitées par 30% des candidats, la question 1 de la partie VII par 15% des candidats. Seules les meilleures copies ont traité la partie VI de façon conséquente. Seulement une dizaine de copies ont traité la fin des parties VI et VII. Il y avait dans la partie VI des questions difficiles sur les opérateurs dans $L^2(]0,+\infty[)$ et des calculs ardus. Le jury a été très impressionné par 5 copies, d'un excellent niveau, dans lesquelles les six premières parties sont traitées de manière remarquable, démontrant un grand niveau de maîtrise de l'analyse fonctionnelle !

Notons que dans la question V.1, qui a été assez réussie, les candidats raisonnent souvent par double implication alors qu'un calcul de $f(x)$ pour $x > 1$ permet de démontrer une équivalence directement.

Dans la question VI.1, on note dans certaines copies une confusion (grave) entre la loi de groupe sur $\{D_\theta, \theta > 0\}$ et la structure d'espace vectoriel sur $L^2(]0,+\infty[)$. Même en analyse, les notions de groupe et de sous groupe sont essentielles. Il est attendu qu'un futur agrégé soit capable de distinguer ces deux notions, pour par exemple montrer que l'ensemble $\{D_\theta, \theta > 0\}$ est un sous groupe du groupe $\mathrm{GL}(L^2(]0,+\infty[))$ (par stabilité) : il faut alors citer précisément ce qu'on démontre. On pouvait aussi raisonner ex nihilo, mais il faut alors vérifier tous les axiomes d'un groupe, et veiller à ne pas se cantonner à une vérification des diverses stabilités. La question VI.2. (b) a été en général mal traitée : les actions des opérateurs ne sont pas claires pour beaucoup de candidats.

4.2 Corrigé de l'épreuve d'analyse et probabilités

Partie I. Exercices préliminaires

1. Pour $s \in \mathbf{C}$ et $t > 0$, on a

$$\begin{aligned} |t^s| &= |\exp(\mathrm{Re}(s)\ln t + i\mathrm{Im}(s)\ln t)| = \left|e^{\mathrm{Re}(s)\ln(t)} \cdot e^{i\mathrm{Im}(s)\ln(t)}\right| \\ &= |e^{\mathrm{Re}(s)\ln(t)}| \cdot |e^{i\mathrm{Im}(s)\ln(t)}|. \end{aligned}$$

Or $|e^{i\theta}| = 1$ si $\theta \in \mathbf{R}$ donc $|e^{i\mathrm{Im}(s)\ln(t)}| = 1$ et $e^x \in \mathbf{R}^{+*}$ si $x \in \mathbf{R}$ donc $|e^{\mathrm{Re}(s)\ln(t)}| = e^{\mathrm{Re}(s)\ln(t)} = t^{\mathrm{Re}(s)}$. Ainsi, on a $|t^s| = t^{\mathrm{Re}(s)}$.

2. (a) Si $x \in [0,1]$, la série de fonctions de terme général $\frac{(-1)^n}{n}x^n$ est une série alternée. La suite de fonctions $(x^n/n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite décroissante positive qui converge simplement vers 0 sur $[0,1]$. En effet pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbf{N}^*$, on a

$$0 \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{x^{n+1}}{n} \leqslant \frac{x^n}{n} \leqslant \frac{1}{n}$$

et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc le théorème des encadrements permet de conclure. Ainsi par le critère de Leibniz pour les séries alternées, la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}x^n$ converge simplement sur $[0,1]$ et on a pour $x \in [0,1]$ et $N \in \mathbf{N}^*$

$$|R_N(x)| := \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}x^n\right| \leqslant \frac{|x|^{N+1}}{N+1} \leqslant \frac{1}{N+1}.$$

Ainsi par le théorème des encadrements,

$$\lim_{N\to+\infty} \sup_{x\in[0,1]} |R_N(x)| = 0$$

et donc la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ converge uniformément sur $[0,1]$. Comme de plus pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$ la fonction $\left(x \mapsto \frac{(-1)^n}{n} x^n\right)$ est continue sur $[0,1]$, par le théorème de continuité des séries de fonctions uniformément convergentes, la somme de cette série de fonctions est une fonction continue sur $[0,1]$.

(b) Le rayon de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ est $R = 1$ car si $a_n = |(-1)^n/n|$, comme a_n est non nul pour tout entier positif n, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

et la règle de D'ALEMBERT permet de conclure.
On reconnaît le développement en série entière de $-\ln(1+x)$ donc pour $x \in]-1,1[$, on a

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n = -\ln(1+x).$$

(c) Par continuité de la somme de la série et de $x \mapsto -\ln(1+x)$ sur $[0,1]$ et par 2(b), on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n = \lim_{x\to 1^-} -\ln(1+x) = -\ln(2).$$

3. (a) Soit $n \in \mathbf{Z}^*$. La fonction $x \mapsto \{x\} - \frac{1}{2}$ est 1-périodique et C^1 par morceaux, ce qui assure l'existence de ses coefficients de FOURIER. Son n-ième coefficient de FOURIER est, par intégration par parties (les fonctions $x \mapsto x - 1/2$ et $x \mapsto \frac{e^{-2i\pi nx}}{-2i\pi n}$ sont de classe C^1 sur $[0,1]$) :

$$\begin{aligned} c_n = \int_0^1 \left(\{x\} - \frac{1}{2}\right) e^{-2i\pi nx} dx &= \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) e^{-2i\pi nx} dx \\ &= \left[\frac{e^{-2i\pi nx}}{-2i\pi n}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{-2i\pi nx}}{-2i\pi n} dx \\ &= \frac{1}{-2i\pi n}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) - \left[\frac{e^{-2i\pi nx}}{(-2i\pi n)^2}\right]_0^1 = \frac{1}{-2i\pi n}. \end{aligned}$$

De plus, $c_0 = \int_0^1 (x - \frac{1}{2})\, dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\right]_0^1 = 0$. Ainsi $a_n = 0$ et $b_n = \frac{1}{-\pi n}$ et la série de FOURIER de $\left(x \mapsto \{x\} - \frac{1}{2}\right)$ est $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(2\pi nx)}{-\pi n}$.

(b) La fonction $\left(x \mapsto \{x\} - \frac{1}{2}\right)$ est de classe C^1 par morceaux, 1-périodique et les entiers sont ses uniques points de discontinuité. D'après le théorème de DIRICHLET sur la convergence des séries de FOURIER, la série de FOURIER $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(2\pi nx)}{-\pi n}$ converge simplement vers $x \mapsto \{x\} - \frac{1}{2}$ sur $\mathbf{R}\backslash\mathbf{Z}$.

4. (a) La fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est continue donc localement intégrable sur $]0,+\infty[$, il suffit donc d'étudier l'intégrabilité en 0 et en $+\infty$. De plus elle se prolonge par continuité en 0 car

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

et est donc intégrable sur $[0,1]$. Soit $X > 1$ un réel. Les fonctions $x \mapsto 1/x$ et $x \mapsto -\cos x$ étant de classe C^1 sur $[1,+\infty[$, une intégration par parties donne

$$\int_1^X \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-\cos x}{x}\right]_1^X - \int_1^X \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Or la majoration $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$ assure que $x \mapsto \frac{\cos x}{x^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ car $x \mapsto 1/x^2$ l'est, et la majoration $|\cos x| \leqslant 1$ assure que $\lim_{X\to+\infty} \frac{\cos X}{X} = 0$ donc le membre de droite admet une limite lorsque X tend vers l'infini. Ainsi l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ converge.
Pour la convergence en $+\infty$, on peut aussi utiliser le théorème d'Abel pour les intégrales oscillantes :
La fonction sin est continue et admet une primitive bornée sur $[1,+\infty[$, la fonction $x \mapsto 1/x$ est de classe C^1, décroissante, positive sur $[1,+\infty[$ et admet 0 pour limite en $+\infty$, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ converge.

(b) Soit ε et R deux réels tels que $0 < \varepsilon < R$. On applique le théorème des résidus à la fonction $F(z) = e^{iz}/z$ sur le contour $\gamma_{\varepsilon,R}$. Comme F est holomorphe sur un ouvert contenant le fermé borné délimité par le contour $\gamma_{\varepsilon,R}$, on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-R}^{-\varepsilon} F(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} F(\varepsilon e^{i\theta})\varepsilon i e^{i\theta} d\theta + \int_{\varepsilon}^{R} F(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} F(Re^{i\theta}) Rie^{i\theta} d\theta \\ &= \int_{\varepsilon}^{R} F(-x)\,\mathrm{d}x - i\int_0^{\pi} e^{i\varepsilon e^{i\theta}} d\theta + \int_{\varepsilon}^{R} F(x)\,\mathrm{d}x + i\int_0^{\pi} e^{iRe^{i\theta}} d\theta. \end{aligned}$$

Or $\int_{\varepsilon}^{R} F(-x)\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{R} F(x)\,\mathrm{d}x = 2i\int_{\varepsilon}^{R} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$. De plus $\left|e^{iRe^{i\theta}}\right| = e^{-R\sin\theta} \leqslant 1$ et $\left|e^{i\varepsilon e^{i\theta}}\right| = e^{-\varepsilon\sin\theta} \leqslant 1$ donc par le théorème de convergence dominée, on peut passer à la limite dans les intégrales sur $[0,\pi]$ et on obtient

$$\lim_{R\to+\infty} \int_0^{\pi} e^{iRe^{i\theta}} d\theta = \int_0^{\pi} 0 d\theta = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{\pi} e^{i\varepsilon e^{i\theta}} d\theta = \int_0^{\pi} 1 d\theta = \pi.$$

On obtient donc en faisant tendre ε vers 0 et R vers $+\infty$, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.
On pouvait aussi, plus simplement, utiliser le théorème de Cauchy pour les fonctions holomorphes car F est holomorphe dans l'ouvert $\mathbf{C}\backslash\{0\}$ et le chemin $\gamma_{\varepsilon,R}$ sur lequel on intègre est homotope à un point dans cet ouvert, donc l'intégrale de la fonction F le long du chemin est nulle.

Partie II. Autour de la transformée de Mellin

1. Si $I(f)$ est non vide, soient α, β des éléments de $I(f)$ tels que $\alpha \leqslant \beta$ et soit $\sigma \in [\alpha,\beta]$. On a

$$t^{\sigma-1} \leqslant \begin{cases} t^{\beta-1} & \text{si } t \geqslant 1 \\ t^{\alpha-1} & \text{si } 0 < t < 1. \end{cases}$$

donc $|f(t)|t^{\sigma-1} \leqslant |f(t)|t^{\alpha-1}\mathbf{1}_{]0,1]}(t) + |f(t)|t^{\beta-1}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(t) \leqslant |f(t)|t^{\alpha-1} + |f(t)|t^{\beta-1}$. La fonction $t \mapsto |f(t)|t^{\sigma-1}$ est majorée par une fonction intégrable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de deux fonctions intégrables donc elle est intégrable et $\sigma \in I(f)$. Ainsi $I(f)$ est un intervalle de $\mathbf{R}$.

2. Soit $\sigma > 1/2$. La fonction $t \mapsto t^{2\sigma-2}$ est intégrable sur $]0,1]$ par le critère de convergence des intégrales de Riemann. Si de plus $f \in L^2(]0,+\infty[)$ est nulle sur $]1,+\infty[$, alors par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\int_0^{+\infty} |f(t)|t^{\sigma-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 |f(t)|t^{\sigma-1}\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\int_0^1 |f(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \left(\int_0^1 t^{2\sigma-2}\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} < +\infty.$$

Ainsi si la fonction f est presque partout nulle sur l'intervalle $]1,+\infty[$ et si $f \in L^2(]0,+\infty[)$, alors $]1/2,+\infty[\subset I(f)$.

3. Soit $s \in D(f)$ alors $|f(t)t^{s-1}| = |f(t)|t^{\mathrm{Re}(s)-1}$. Comme $t \mapsto |f(t)|t^{\mathrm{Re}(s)-1}$ est intégrable puisque $\mathrm{Re}(s) \in I(f)$, $\mathcal{M}f(s)$ est bien définie.
4. Pour $\sigma \in \mathbf{R}$, la fonction $t^{\sigma-1}\mathbf{1}_{]0,1]}(t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si $\sigma > 0$ donc $I(\mathbf{1}_{]0,1]}) =]0,+\infty[$ et pour $s \in D(\mathbf{1}_{]0,1]})$, on a
$$\mathcal{M}\mathbf{1}_{]0,1]}(s) = \int_0^1 t^{s-1}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^s}{s}\right]_0^1 = \frac{1}{s}$$
car $\lim_{t\to0^+}|t^s| = \lim_{t\to0^+} t^{\mathrm{Re}(s)} = 0$ puisque $\mathrm{Re}(s) > 0$.
5. La fonction $x \mapsto \lambda x$ est une bijection strictement croissante de classe C^1 de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$ et de dérivée la fonction constante égale à λ donc par le théorème de changement de variable, pour $\sigma \in \mathbf{R}$, $T_\lambda f(t)t^{\sigma-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si $f(t)t^{\sigma-1}$ l'est donc $I(f) = I(T_\lambda f)$. De plus pour $s \in D(f)$, on a
$$\mathcal{M}(T_\lambda f)(s) = \int_{]0,+\infty[} f(\lambda t)t^{s-1}\,\mathrm{d}t = \int_{]0,+\infty[} f(u)\left(\frac{u}{\lambda}\right)^{s-1}\frac{\mathrm{d}u}{\lambda} = \lambda^{-s}\mathcal{M}f(s).$$

Partie III. Fonction zêta de Riemann

1. (a) Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $s \in \mathbf{C}$, on a
$$\left|\frac{1}{n^s}\right| = \left|\frac{(-1)^n}{n^s}\right| = \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(s)}}$$
et la série de Riemann $\sum_n 1/n^\alpha$ converge pour $\alpha > 1$ donc les séries définissant ζ et G convergent absolument donc simplement sur $\{s \in \mathbf{C}\ \text{ tel que} \,\mathrm{Re}(s) > 1\}$.

   (b) Pour chaque entier $n \geqslant 1$, la fonction $\left(s \mapsto 1/n^s = e^{-s\ln n}\right)$ est holomorphe sur $\mathbf{C}$ car exp l'est.
Soit K un compact du demi-plan $\{\mathrm{Re}(s) > 1\}$. Alors $a := \inf\{\mathrm{Re}(s), s \in K\}$ vérifie $a > 1$ car cette borne inférieure est en fait un minimum puisque l'image du compact K par l'application continue $s \mapsto \mathrm{Re}(s)$ est un compact de $]1,+\infty[$. Pour tout $s \in K$, on a $\mathrm{Re}(s) \geqslant a$ donc
$$\left|\frac{1}{n^s}\right| = \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(s)}} \leqslant \frac{1}{n^a}.$$
Or pour $a > 1$, la série de Riemann $\sum_n \frac{1}{n^a}$ converge donc la série $\sum_{n\geqslant1}\frac{1}{n^s}$ converge normalement donc uniformément sur K.
Par le théorème d'holomorphie pour les séries de fonctions, la fonction ζ est donc holomorphe sur le demi-plan $\{\mathrm{Re}(s) > 1\}$. Pour G, les arguments sont les mêmes.
2. Soit $s \in \mathbf{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$. Alors
$$\begin{aligned} G(s)+\zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n)^s} \\ &= \frac{1}{2^{s-1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \frac{\zeta(s)}{2^{s-1}}, \end{aligned}$$
or $2^{s-1} = e^{(s-1)\ln 2} \neq 1$ car $\mathrm{Re}(s) > 1$ donc $\zeta(s) = \frac{2^{s-1}}{1-2^{s-1}}G(s)$.
3. Soit ε un réel strictement positif.

(a) Soient $s \in \mathbf{C}$ et $N \geqslant 1$. Comme pour $n \geqslant 1$, $B_\varepsilon(n) - B_\varepsilon(n-1) = \frac{(-1)^n}{n^\varepsilon}$ et $B_\varepsilon(0) = 0$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n^s} &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{s-\varepsilon}}(B_\varepsilon(n) - B_\varepsilon(n-1)) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{s-\varepsilon}} B_\varepsilon(n) - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{s-\varepsilon}} B_\varepsilon(n-1) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{s-\varepsilon}} B_\varepsilon(n) - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{(n+1)^{s-\varepsilon}} B_\varepsilon(n) \\
&= \sum_{n=1}^{N} B_\varepsilon(n) \left(\frac{1}{n^{s-\varepsilon}} - \frac{1}{(n+1)^{s-\varepsilon}} \right) + \frac{B_\varepsilon(N)}{(N+1)^{s-\varepsilon}} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{B_\varepsilon(n)}{(n+1)^{s-\varepsilon}} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{s-\varepsilon} - 1 \right) + \frac{B_\varepsilon(N)}{(N+1)^{s-\varepsilon}}.
\end{aligned}$$

(b) Comme $B_\varepsilon(N)$ est la somme partielle d'ordre N d'une série alternée convergente puisque $(1/n^\varepsilon)_n$ est décroissante et converge vers 0, la suite $(B_\varepsilon(n))_n$ est bornée par $|B_\varepsilon(1)| = 1$. De plus, pour $\mathrm{Re}(s) > \varepsilon$, $\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{(N+1)^{s-\varepsilon}} = 0$ car $\left| \frac{1}{(N+1)^{s-\varepsilon}} \right| = \frac{1}{(N+1)^{\mathrm{Re}(s)-\varepsilon}}$.
On a aussi

$$0 \leqslant \left| \frac{B_\varepsilon(n)}{(n+1)^{s-\varepsilon}} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{s-\varepsilon} - 1 \right) \right| \leqslant \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(s)-\varepsilon}} \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{s-\varepsilon} - 1 \right|.$$

Enfin $\left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{s-\varepsilon} - 1 \right| \sim \frac{|s-\varepsilon|}{n}$ lorsque n tend vers l'infini. En effet, pour $z \in \mathbf{C}$, en exploitant la formule de Taylor-Young appliquée à $t \mapsto (1+t)^z$, on obtient, lorsque n tend vers l'infini,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^z = 1 + \frac{z}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ainsi

$$\frac{1}{n^{\mathrm{Re}(s)-\varepsilon}} \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{s-\varepsilon} - 1 \right| \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{|s-\varepsilon|}{n^{\mathrm{Re}(s)-\varepsilon+1}}$$

donc c'est le terme général d'une série absolument convergente et donc la série de terme général $\frac{B_\varepsilon(n)}{(n+1)^{s-\varepsilon}} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{s-\varepsilon} - 1 \right)$ converge absolument donc converge lorsque $\mathrm{Re}(s) > \varepsilon$, ce qui implique la convergence de la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^s}$ définissant G et l'égalité

$$G(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B_\varepsilon(n)}{(n+1)^{s-\varepsilon}} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{s-\varepsilon} - 1 \right).$$

(c) i. Pour $u > 0$ et $t \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\left| (1+u)^{it} - 1 \right| &= \left| e^{i\frac{t}{2}\ln(1+u)} \left(e^{i\frac{t}{2}\ln(1+u)} - e^{-i\frac{t}{2}\ln(1+u)} \right) \right| \\
&= \left| 2i \sin\left(\frac{t}{2} \ln(1+u) \right) \right| \leqslant |t \ln(1+u)| \\
&\leqslant |t| u.
\end{aligned}$$

Dans la pénultième inégalité, on a utilisé l'inégalité $|\sin(x)| \leqslant |x|$ pour x réel (inégalité des accroissements finis). Dans la dernière, on a utilisé l'inégalité de convexité $0 \leqslant \ln(1+u) \leqslant u$ pour $u \geqslant 0$.

ii. Pour $x \in [0,1]$, la fonction $h : u \mapsto (1+u)^x$ est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ de dérivée $h'(u) = x(1+u)^{x-1}$. Or $x-1 \leqslant 0$ et $u > 0$ donc $0 \leqslant (1+u)^{x-1} \leqslant 1$ et $0 \leqslant h'(u) \leqslant x$ car $x \geqslant 0$.
Par l'inégalité des accroissements finis, pour $x \in [0,1]$ et $u > 0$, on a

$$0 \leqslant |(1+u)^x - 1| \leqslant xu.$$

iii. Soit $s = \sigma + it$ avec $\sigma, t \in \mathbf{R}$ et $\sigma \in [\varepsilon, 1+\varepsilon]$.
Comme $\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{it}\right| = \left|e^{it\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right| = 1$, en utilisant les inégalités précédentes, on a

$$\begin{aligned}\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s-\varepsilon} - 1\right| &= \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{it}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sigma-\varepsilon} - 1\right) + \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{it} - 1\right)\right| \\ &\leqslant \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sigma-\varepsilon} - 1\right| + \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{it} - 1\right| \\ &\leqslant \frac{\sigma - \varepsilon + |t|}{n} \leqslant \frac{1+|t|}{n}.\end{aligned}$$

(d) Soient $\varepsilon \in]0,1[$ et $T > 0$. On pose
$\mathcal{A}(\varepsilon, T) := \{s \in \mathbf{C},\, 2\varepsilon \leqslant \mathrm{Re}(s) \leqslant 1+\varepsilon,\, |\mathrm{Im}(s)| \leqslant T\}$.
Rappelons que pour tout $n \geqslant 1$, on a $|B_\varepsilon(n)| \leqslant 1$. Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout nombre complexe s de partie réelle $\sigma \in [2\varepsilon, 1+\varepsilon]$ et de partie imaginaire $t \in [-T, T]$, on a en utilisant III.3 c)

$$\begin{aligned}\left|\frac{B_\varepsilon(n)}{(n+1)^{s-\varepsilon}}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s-\varepsilon} - 1\right)\right| &\leqslant \frac{1}{(n+1)^{\sigma-\varepsilon}}\frac{1+T}{n} \\ &\leqslant \frac{1+T}{n^{1+\sigma-\varepsilon}} \leqslant \frac{1+T}{n^{1+\varepsilon}}.\end{aligned}$$

Comme $\frac{1+T}{n^{1+\varepsilon}}$ est le terme général d'une série convergente, cela implique la convergence normale donc uniforme de la série de fonctions définissant G dans III.3(b) sur

$$\mathcal{A}(\varepsilon, T) := \{s \in \mathbf{C},\, 2\varepsilon \leqslant \mathrm{Re}(s) \leqslant 1+\varepsilon,\, |\mathrm{Im}(s)| \leqslant T\}.$$

Puisque chaque terme de la série définissant G est une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$, le théorème d'holomorphie pour les séries de fonctions assure que G est holomorphe sur tout ouvert de la forme $\{s \in \mathbf{C},\, 2\varepsilon < \mathrm{Re}(s) < 1+\varepsilon\}$. On en déduit que G est holomorphe sur l'ouvert $\{s \in \mathbf{C},\, 0 < \mathrm{Re}(s) < 2\}$. D'après III.1(b), la fonction G est holomorphe sur le demi-plan $\{s : \mathrm{Re}(s) > 1\}$. Finalement, la fonction G est holomorphe sur le demi-plan des nombres complexes de partie réel le strictement positive.

4. La fonction G est holomorphe sur le demi-plan $\{s \in \mathbf{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > 0\}$ d'après la question précédente et $s \mapsto \frac{2^{s-1}}{1-2^{s-1}}$ est méromorphe sur $\mathbf{C}$ car exp est une fonction entière. Ainsi, la fonction $s \mapsto 2^{s-1}/(1-2^{s-1})G(s)$ est méromorphe sur $\{s \in \mathbf{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > 0\}$. L'identité démontréée en III. 2 assure que cette fonction prolonge ζ. On en déduit que ζ se prolonge en une fonction méromorphe sur le demi-plan $\{s \in \mathbf{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > 0\}$, que l'on note toujours ζ dans la suite. De plus, on a (comme au 3(b) pour le DL de l'exponentielle)

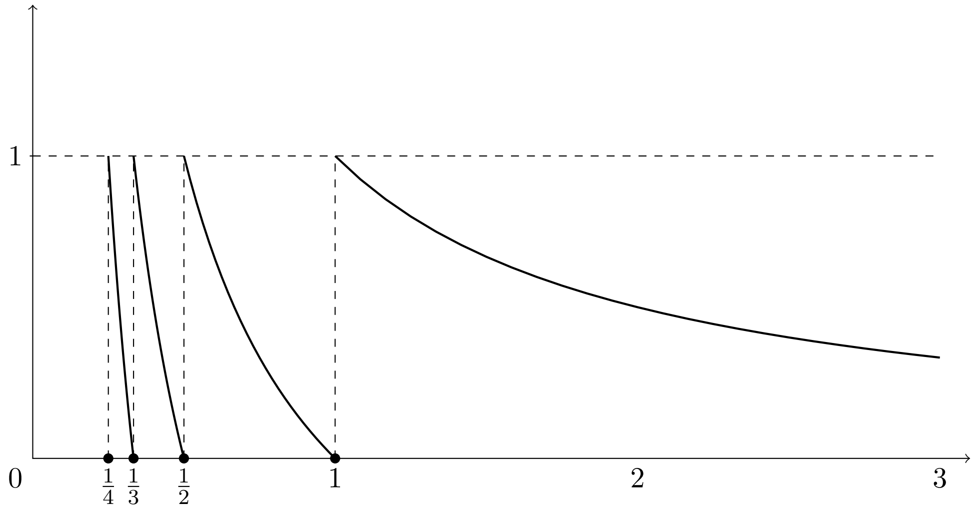
$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \frac{2^{s-1}}{1-2^{s-1}}G(s) = \left(2^{-(s-1)} - 1\right)^{-1} G(s) \\ &= \frac{G(s)}{-(s-1)\ln 2 + O((s-1)^2)} = \frac{G(1) + O(s-1)}{-(s-1)\ln 2 + O((s-1)^2)} \\ &= \frac{1}{s-1}\left(\frac{G(1)}{-\ln(2)}\right)(1 + O(s-1))\end{aligned}$$

et $G(1) = -\ln(2)$ donc $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ est bornée au voisinage de 1 et donc ζ admet un pôle simple en $s = 1$ de résidu 1.

Partie IV. Fonction partie fractionnaire

1. (a) Si $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$, alors $n \leqslant \frac{1}{x} < n+1$ donc $\lfloor 1/x \rfloor = n$ et $\rho(x) = \frac{1}{x} - n$. On a en particulier $\rho(1/n) = 0$. Si $x > 1$, alors $0 < 1/x < 1$ donc $\lfloor 1/x \rfloor = 0$ et $\rho(x) = 1/x$.

   (b) Le graphe de la fonction ρ sur l'intervalle $[1/4, 3]$ est le suivant.



   (c) La fonction ρ est continue sur $\mathbf{R}^{+*} \backslash \{1/n,\, n \in \mathbf{N}^*\}$ car pour $n \geqslant 1$ et $x \in]1/(n+1), 1/n[$, $\rho(x) = \frac{1}{x} - n$. En revanche, ρ n'est pas continue en $1/n$ car $\lim_{x \to (1/n)^-} \rho(x) = \lim_{x \to (1/n)^-} \frac{1}{x} - n = 0$ alors que $\lim_{x \to (1/n)^+} \rho(x) = \lim_{x \to (1/n)^+} \frac{1}{x} - (n-1) = 1$.
   Pour tout $x > 0$, on a $0 \leqslant \rho(x) < 1$ donc ρ est bornée et $\rho(\mathbf{R}^{+*}) \subset [0, 1[$.
   De plus, par le théorème des valeurs intermédiaires, comme ρ est continue sur $]1/2, 1]$ et $\lim_{x \to 1/2^+} \rho(x) = 1$ et $\rho(1) = 0$, on a $\rho(\mathbf{R}^{+*}) = [0, 1[$.

2. Les fonctions $f_n = \rho \mathbf{1}_{]1/n, +\infty[}$ sont mesurable sur $]0, +\infty[$ car r continues par morceaux donc $\rho = \sup_{n \in \mathbf{N}^*} f_n$ est mesurable.
   Pour tout $x > 1$, $1/x < 1$ et donc $\rho(x) = 1/x$. Pour $0 < x \leqslant 1$, $0 \leqslant \rho(x) < 1$. Ainsi
$$|\rho(x)|^2 \leqslant \begin{cases} 1/x^2 & \text{si } x > 1 \\ 1 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$
   ρ^2 est donc dominée par une fonction intégrable sur $\mathbf{R}^{+*}$ donc ρ est de carré intégrable sur $]0, +\infty[$ et
$$\|\rho\|_2 \leqslant \left(\int_0^1 1^2 \, \mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \right)^{1/2} = (1+1)^{1/2} = \sqrt{2}.$$

3. Pour tout $x > 1$, $\rho(x) = 1/x$ et $|\rho(x) x^{s-1}| = x^{\mathrm{Re}(s) - 2}$. Pour $s \in \mathbf{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) < 1$, on a $\mathrm{Re}(s) - 2 < -1$ et donc $\left(x \mapsto \rho(x) x^{s-1}\right)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ car majorée en module par une fonction intégrable. De plus, si $\mathrm{Re}(s) < 1$, on a
$$I_1(s) = \int_1^\infty \rho(x) x^{s-1} \, \mathrm{d}x = \int_1^\infty x^{s-2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{1-s}.$$

4. (a) Soit $\alpha > 0$. Pour tout $x > 0$, on a $0 \leqslant \rho(x) < 1$ donc pour $s \in \mathbf{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > \alpha$ et pour $x \in]0, 1]$, on a $|\rho(x) x^{s-1}| \leqslant x^{\alpha - 1}$ et la fonction $\left(x \mapsto x^{\alpha-1}\right)$ est intégrable sur $]0, 1]$ (intégrale de Riemann) donc la fonction $\left(x \mapsto \rho(x) x^{s-1}\right)$ est intégrable sur $]0, 1]$ si $\mathrm{Re}(s) > \alpha$. La fonction $\left(s \mapsto \rho(x) x^{s-1}\right)$ est de plus holomorphe sur $\{\mathrm{Re}(s) > \alpha\}$ pour $x > 0$ donc par le théorème d'holomorphie pour les intégrales, I_2 est holomorphe sur l'ouvert $\{\mathrm{Re}(s) > \alpha\}$ pour tout $\alpha > 0$ donc sur $\{\mathrm{Re}(s) > 0\}$.

(b) Pour $s \in \mathbf{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$, on a dans $\mathbf{R}^+ \cup \{+\infty\}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 |x^{s-1}\mathbf{1}_{]0,1/n]}(x)|\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{1/n} x^{\mathrm{Re}(s)-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{Re}(s)}(1/n)^{\mathrm{Re}(s)}$$
$$= \frac{1}{\mathrm{Re}(s)} \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\mathrm{Re}(s)} = \frac{\zeta(\mathrm{Re}(s))}{\mathrm{Re}(s)} < +\infty,$$

donc par le théorème de TONELLI-FUBINI, on a pour $s \in \mathbf{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$,

$$\frac{\zeta(s)}{s} = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{1/n} x^{s-1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\sum_{n \leqslant 1/x} 1\right) x^{s-1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lfloor 1/x \rfloor x^{s-1}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{x} - \rho(x)\right) x^{s-1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{s-2}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \rho(x) x^{s-1}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{s-1} - \int_0^1 \rho(x) x^{s-1}\,\mathrm{d}x.$$

(c) On a pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, d'après (b)

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - sI_2(s).$$

La fonction I_2 est holomorphe sur $\{\mathrm{Re}(s) > 0\}$ d'après (a) donc $s \mapsto \frac{s}{s-1} - sI_2(s)$ est holomorphe sur $\{\mathrm{Re}(s) > 0\}\backslash\{1\}$ et admet un unique pôle en 1. Comme ζ est méromorphe sur $\{\mathrm{Re}(s) > 0\}$ par III.4, par unicité du prolongement analytique sur un ouvert connexe, les fonctions $s \mapsto \frac{s}{s-1} - sI_2(s)$ et ζ sont égales sur l'ouvert connexe $\{\mathrm{Re}(s) > 0\}\backslash\{1\}$ et ζ admet dans le demi plan $\{s \in \mathbf{C}, \Re(s) > 0\}$ un unique pôle, simple, en $s = 1$ de résidu 1.

5. Par 3 et 4(a), pour $0 < \sigma < 1$, $\rho(s)x^{\sigma-1} \in L^1(]0,+\infty[)$ donc $]0,1[\subset I(\rho)$. Pour s tel que $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$, $\mathcal{M}\rho(s) = I_1(s) + I_2(s) = I_2(s) - \frac{1}{s-1}$.
On vient de voir que pour $\mathrm{Re}(s) > 0$ et $s \neq 1$, on a $\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - sI_2(s)$. En particulier pour $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$, on a $\mathcal{M}\rho(s) = I_2(s) - \frac{1}{s-1} = -\frac{\zeta(s)}{s}$.

Partie V. Distance de $\mathbf{1}_{]0,1]}$ à un espace de fonctions

L'énoncé oubliait de préciser que $\{T_n\rho, 1 \leqslant n \leqslant N\}$ est une famille libre de $\mathcal{B}_N$, ce qui garantit l'unicité du polynôme de DIRICHLET Q_f associé à f, que les notations sous-entendent. L'utilisation de cette unicité sans justification n'a pas été sanctionnée dans les copies. Dans la correction, on a privilégié des réponses ne l'utilisant pas.

1. Soit $f \in \mathcal{B}_N$. Pour $x > 1$ et $n \geqslant 1$, on a $nx > 1$ donc $\rho(nx) = \frac{1}{nx}$ donc

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n \rho(nx) = \sum_{n=1}^{N} c_n \frac{1}{nx} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{N} \frac{c_n}{n} = \frac{1}{x} Q_f(1).$$

Ainsi $f \in \widetilde{\mathcal{B}_N}$ si et seulement si f est nulle sur $]1,+\infty[$.
Ici, l'unicité de Q_f n'est pas utilisé mais celle de $Q_f(1)$ est démontrée.

2. Si $f \in \mathcal{B}_N$, on note $\tilde{f} = f - Q_f(1)\rho$.

(a) Pour $x > 0$, $\tilde{f}(x) = (c_1 - Q_f(1))\rho(x) + \sum_{n=2}^{N} c_n \rho(nx)$ donc $\tilde{f} \in \mathcal{B}_N$ et $Q_{\tilde{f}}(s) = (c_1 - Q_f(1)) + \sum_{n=2}^{N} c_n n^{-s}$ et $Q_{\tilde{f}}(1) = \sum_{n=1}^{N} \frac{c_n}{n} - Q_f(1) = 0$ d'où $\tilde{f} \in \widetilde{\mathcal{B}_N}$.

(b) Comme $\tilde{f} = f - Q_f(1)\rho$ est nulle sur $]1, +\infty[$, on a

$$\int_1^{+\infty} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \left|\tilde{f}(x) + Q_f(1)\rho(x)\right|^2 \, \mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} |Q_f(1)\rho(x)|^2 \, \mathrm{d}x$$
$$= |Q_f(1)|^2 \int_1^{+\infty} |\rho(x)|^2 \, \mathrm{d}x = |Q_f(1)|^2 \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x = |Q_f(1)|^2.$$

(c) D'après IV.2,

$$\|f - \tilde{f}\|_2^2 = \int_0^{+\infty} |f(x) - \tilde{f}(x)|^2 \, \mathrm{d}x = |Q_f(1)|^2 \int_0^{+\infty} |\rho(x)|^2 \, \mathrm{d}x \leqslant 2|Q_f(1)|^2.$$

Comme $|Q_f(1)|^2 = \int_1^{+\infty} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} |f(x) - \mathbf{1}_{]0,1]}(x)|^2 \, \mathrm{d}x \leqslant \|f - \mathbf{1}_{]0,1]}\|_2^2$, on obtient

$$\|\tilde{f} - \mathbf{1}_{]0,1]}\|_2 \leqslant \|\tilde{f} - f\|_2 + \|f - \mathbf{1}_{]0,1]}\|_2 \leqslant (1 + \sqrt{2})\|f - \mathbf{1}_{]0,1]}\|_2.$$

3. Par IV.5, $]0, 1[\subset I(\rho)$ donc par II.5, pour tout $n \geqslant 1$, $]0, 1[\subset I(T_n\rho)$ et par linéarité, $]0, 1[\subset I(\tilde{f})$ pour $\tilde{f} = \sum_{n=1}^{N} \tilde{c_n} T_n\rho$. Comme $\tilde{f}$ est nulle sur $]1, +\infty[$, pour $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$, on a

$$\int_0^1 \tilde{f}(x)x^{s-1} \, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \tilde{f}(x)x^{s-1} \, \mathrm{d}x = \mathcal{M}\tilde{f}(s)$$
$$= \mathcal{M}\left(\sum_{n=1}^{N} \tilde{c_n} T_n\rho\right)(s) = \left(\sum_{n=1}^{N} \tilde{c_n} n^{-s}\right) \mathcal{M}\rho(s)$$
$$= -Q_{\tilde{f}}(s)\frac{\zeta(s)}{s}$$

par linérarité, II.5 et IV.5.

4. Soit $f \in \mathcal{B}_N$. On a pour $s \in \mathbf{C}$ tel que $1/2 < \mathrm{Re}(s) < 1$

$$\left|\int_0^1 (\tilde{f}(x) - 1)x^{s-1} \, \mathrm{d}x\right| \leqslant \left(\int_0^1 |\tilde{f}(x) - 1|^2 \, \mathrm{d}x\right)^{1/2} \left(\int_0^1 |x^{s-1}|^2 \, \mathrm{d}x\right)^{1/2},$$

or d'après V.3,

$$\int_0^1 |x^{s-1}|^2 \, \mathrm{d}x = \int_0^1 x^{2\mathrm{Re}(s)-2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\mathrm{Re}(s) - 1} \quad \text{et} \quad \int_0^1 (\tilde{f}(x) - 1)x^{s-1} \, \mathrm{d}x = -Q_{\tilde{f}}(s)\frac{\zeta(s)}{s} - \frac{1}{s}.$$

S'il existe $\beta \in \mathbf{C}$ tel que $1/2 < \mathrm{Re}(\beta) < 1$ et $\zeta(\beta) = 0$, alors on obtient en prenant $s = \beta$,

$$\frac{1}{|\beta|} \leqslant \left(\int_0^1 |\tilde{f}(x) - 1|^2 \, \mathrm{d}x\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{Re}(\beta) - 1}}$$

donc par positivité de l'intégrale sur $[1, +\infty[$,

$$\|\tilde{f} - \mathbf{1}_{]0,1]}\|_2 \geqslant \left(\int_0^1 |\tilde{f}(x) - 1|^2 \, \mathrm{d}x\right)^{1/2} \geqslant \frac{\sqrt{2\mathrm{Re}(\beta) - 1}}{|\beta|}.$$

5. Si la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{]0,1]}$ appartient à l'adhérence du sous-espace vectoriel de $L^2(]0, +\infty[)$ engendré par les fonctions $T_n\rho$ avec $n \geqslant 1$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbf{N}^*$, il existe $f \in \mathcal{B}_N$ tel que $\|f - \mathbf{1}_{]0,1]}\|_2 \leqslant \varepsilon$. Or on a

$$\|f - \mathbf{1}_{]0,1]}\|_2 \geqslant \frac{1}{1 + \sqrt{2}}\|\tilde{f} - \mathbf{1}_{]0,1]}\|_2$$

donc avec la question précédente, si ζ s'annule en un point β tel que $1/2 < \mathrm{Re}(\beta) < 1$, alors

$$\|f - \mathbf{1}_{]0,1]}\|_2 \geqslant \frac{1}{1+\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2\mathrm{Re}(\beta)-1}}{|\beta|}.$$

On obtient une contradiction dès que $\varepsilon < \frac{1}{1+\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2\mathrm{Re}(\beta)-1}}{|\beta|}$.
Ainsi si la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{]0,1]}$ appartient à l'adhérence du sous-espace vectoriel de $L^2(]0,+\infty[)$ engendré par les fonctions $T_n\rho$ avec $n \geqslant 1$, alors ζ ne s'annule pas dans la bande verticale $\{s \in \mathbf{C}$ tel que $1/2 < \mathrm{Re}(s) < 1\}$.

Partie VI. Applications linéaires de $L^2(]0,+\infty[)$.

1. (a) Soit $\theta > 0$. Si $f, g \in L^2(]0,+\infty[)$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, alors pour $x > 0$,

$$D_\theta(\lambda f + \mu g)(x) = \sqrt{\theta}(\lambda f + \mu g)(\theta x) = \lambda(\sqrt{\theta} f(\theta x)) + \mu(\sqrt{\theta} g(\theta x)) = \lambda D_\theta f(x) + \mu D_\theta g(x)$$

donc D_θ est linéaire. Soit $f \in L^2(]0,+\infty[)$. En faisant le changement de variable $x \mapsto \theta x$ qui est un C^1-difféomorphisme de $]0,+\infty[$, on obtient

$$\int_{]0,+\infty[} |D_\theta f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_{]0,+\infty[} |f(\theta x)|^2 \,\theta \,\mathrm{d}x = \int_{]0,+\infty[} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x,$$

ainsi pour tout $f \in L^2(]0,+\infty[)$, $D_\theta f \in L^2(]0,+\infty[)$ et $\|D_\theta f\|_2 = \|f\|_2$.
De plus, D_θ est bijective de bijection réciproque $D_{1/\theta}$. En effet pour $f \in L^2(]0,+\infty[)$ et $x > 0$, on a

$$D_\theta D_{1/\theta} f(x) = \sqrt{\theta} D_{1/\theta} f(\theta x) = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}} f(x) = f(x)$$

donc $D_\theta D_{1/\theta} f = f$. De même $D_{1/\theta} D_\theta f = f$.

(b) Montrons que $(\{D_\theta, \theta > 0\}, \circ)$ est un sous-groupe du groupe $GL(L^2(]0,+\infty[))$ des applications linéaires bijectives de $L^2(]0,+\infty[)$ dans $L^2(]0,+\infty[)$ muni de la composition. D'après la question précédente, pour tout $\theta > 0$, D_θ est une application linéaire bijective de $L^2(]0,+\infty[)$ dans $L^2(]0,+\infty[)$.
On a $D_1 = I$, $D_\theta D_{\theta'} = D_{\theta\theta'} = D_{\theta'\theta} = D_{\theta'} D_\theta$ et $(D_\theta)^{-1} = D_{1/\theta}$ donc l'ensemble $\{D_\theta, \theta > 0\}$ est non vide, stable par composition et passage à l'inverse, et donc un sous-groupe commutatif de $GL(L^2(]0,+\infty[))$ (donc un groupe).

2. (a) J est clairement linéaire. Soit $f \in L^2(]0,+\infty[)$. En faisant le changement de variable $x \mapsto 1/x$ qui est un C^1-difféomorphisme de $]0,+\infty[$ de dérivée $-1/x^2$, on obtient

$$\int_{]0,+\infty[} |Jf(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_{]0,+\infty[} \frac{1}{x^2} |f(1/x)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_{]0,+\infty[} |f(u)|^2 du.$$

Ainsi $Jf \in L^2(]0,+\infty[)$ et J est continue de norme 1.

(b) On a $JD_\theta = D_{1/\theta} J$. En effet, si $f \in L^2(]0,+\infty[)$, $\theta > 0$ et $x > 0$, alors

$$JD_\theta f(x) = \frac{1}{x} D_\theta f(1/x) = \sqrt{\theta} \frac{1}{x} f\left(\frac{\theta}{x}\right)$$

et

$$D_{1/\theta} J f(x) = \frac{1}{\sqrt{\theta}} Jf(x/\theta) = \frac{1}{\sqrt{\theta}} \frac{1}{x/\theta} f(\theta/x) = \sqrt{\theta} \frac{1}{x} f\left(\frac{\theta}{x}\right).$$

3. (a) Soit $f \in L^2(]0,+\infty[)$ que l'on suppose de plus continue.
On pose $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. La fonction f étant continue, F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et $F' = f$. On peut donc intégrer par parties et on a pour $0 < \xi < X$, en posant $g(x) = 1/x$

$$\begin{aligned}\int_\xi^X Hf(x)^2\,\mathrm{d}x &= -\int_\xi^X F^2(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = -\left[g(x)F^2(x)\right]_\xi^X + \int_\xi^X g(x)2f(x)F(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{X}F^2(X) + \frac{1}{\xi}F^2(\xi) + \int_\xi^X 2Hf(x)f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{1}{\xi}F^2(\xi) + 2\left(\int_\xi^X (f(x))^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_\xi^X (Hf(x))^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

On a donc si $\int_\xi^X (Hf(x))^2\,\mathrm{d}x \neq 0$

$$\left(\int_\xi^X (Hf(x))^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \leqslant \frac{\frac{1}{\xi}F^2(\xi)}{\left(\int_\xi^X (Hf(x))^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}} + 2\left(\int_\xi^X (f(x))^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\frac{1}{\xi}F^2(\xi) \leqslant \frac{1}{\xi}\left(\xi\int_0^\xi f(x)^2\,\mathrm{d}x\right) = \int_0^\xi f(x)^2\,\mathrm{d}x$$

et par intégrabilité de f^2, la limite lorsque ξ tend vers 0 du membre de droite est nulle. Les intégrales $\int_0^X (Hf)^2(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_0^X f(x)^2\,\mathrm{d}x$ sont bien définies dans $\overline{\mathbf{R}}$ en tant qu'intégrales de fonctions positives et continues sur $]0,+\infty[$. On a donc pour $X > 0$ et $\int_0^X (Hf(x))^2\,\mathrm{d}x \neq 0$ (donc $\int_\xi^X (Hf(x))^2\,\mathrm{d}x \neq 0$ pour ξ proche de 0),

$$\left(\int_0^X (Hf(x))^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \leqslant 2\left(\int_0^X (f(x))^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

ce qui reste vrai si $\int_0^X (Hf(x))^2\,\mathrm{d}x$ est nulle. Ainsi, comme $f \in L^2(]0,+\infty[)$, on a $Hf \in L^2(]0,+\infty[)$ et

$$\left(\int_0^{+\infty} (Hf(x))^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \leqslant 2\left(\int_0^{+\infty} (f(x))^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

(b) D'après 3(a), H est une application linéaire sur $L^2(]0,+\infty[)$, continue de norme $\leqslant 2$ sur le sous-espace C^0 des applications continues de $L^2(]0,+\infty[)$. C^0 est dense dans $L^2(]0,+\infty[)$ donc par le théorème de prolongement des applications linéaires continues rappelé en introduction du sujet, H se prolonge de façon unique en une fonction H' linéaire, continue sur $L^2(]0,+\infty[)$ de norme $\leqslant 2$.
Montrons que $H = H'$. Soit f une fonction de $L^2(]0,+\infty[)$ et $(f_n)_n$ une suite de C^0 qui converge vers f dans $L^2(]0,+\infty[)$. On sait déjà que $Hf_n = H'f_n$. De plus, à x fixé, la fonction $g \mapsto Hg(x)$ est continue de $L^2(]0,+\infty[)$ dans $\mathbf{R}$ donc $Hf(x) = \lim_{n\to+\infty} Hf_n(x)$. Par le lemme de Fatou, on a donc

$$\begin{aligned}\|Hf - H'f\|_2^2 &= \int_{]0,+\infty[} \lim_{n\to+\infty} \left|Hf_n(x) - H'f(x)\right|^2\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \lim_{n\to+\infty} \int_{]0,+\infty[} \left|Hf_n(x) - H'f(x)\right|^2\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{n\to+\infty} \int_{]0,+\infty[} \left|H'f_n(x) - H'f(x)\right|^2\,\mathrm{d}x = 0\end{aligned}$$

car H' est continue donc $(H'f_n)_n$ converge vers $H'f$ dans $L^2(]0,+\infty[)$.

4. (a) Si $f \in L^2(]0,+\infty[)$, alors en notant f la fonction égale à f sur $]0,+\infty[$ et nulle sur $\mathbf{R}^-$, on a $f \in L^2(\mathbf{R})$ et donc la transformée de FOURIER-PLANCHEREL de cette fonction existe et appartient à $L^2(\mathbf{R})$. Ainsi, la limite dans $L^2(\mathbf{R})$ muni de la norme quadratique lorsque T tend vers l'infini de

$$x \mapsto \int_{-T}^{T} f(u)e^{-2i\pi xu}du$$

existe. Comme

$$2\int_0^T f(u)\cos(2\pi xu)du = \int_{-T}^{T} f(u)e^{-2i\pi xu}du + \int_{-T}^{T} f(u)e^{2i\pi xu}du,$$

on a bien l'existence de $\mathcal{G}$ dans $L^2(\mathbf{R})$.

(b) On vient de voir que si $f \in L^2(]0,+\infty[)$, alors $Cf \in L^2(]0,+\infty[)$. De plus C est linéaire donc C est un endomorphisme de $L^2(]0,+\infty[)$.
De plus d'après les propriétés de la transformée de FOURIER-PLANCHEREL, on a pour $f \in L^2(]0,+\infty[)$

$$\begin{aligned}\|Cf\|_2 &\leqslant \left(\int_{\mathbf{R}} |\mathcal{G}(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \leqslant \left(\int_{\mathbf{R}} \left|\hat{f}(2\pi x) + \hat{f}(-2\pi x)\right|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \\ &\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{\mathbf{R}} \left|\hat{f}(x) + \hat{f}(-x)\right|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \leqslant 2\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} \left|\hat{f}(x)\right|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \\ &= 2\left(\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2} = 2\|f\|_2\end{aligned}$$

donc $|||C||| \leqslant 2$ et C est continue.

5. (a) V est une composée d'endomorphismes continus donc V est un endomorphisme continu de $L^2(]0,+\infty[)$.

(b) Soit $f \in L^2(]0,+\infty[)$ à valeurs réelles. On suppose de plus f de support $[a,b]$ compact, continue sur $[a,b]$. Alors $Jf \in L^2(]0,+\infty[)$ est de support $[1/b,1/a]$ et continue sur son support, ce qui justifie la convergence des intégrales ci-dessous. On a donc

$$\begin{aligned}CJf(t) &= 2\int_0^{+\infty} Jf(u)\cos(2\pi tu)du = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{u}f(1/u)\cos(2\pi tu)du \\ &= 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{v}f(v)\cos(2\pi t/v)dv \\ &= 2\int_a^b \frac{1}{v}f(v)\cos(2\pi t/v)dv.\end{aligned}$$

Ainsi par continuité des fonctions à intégrer sur un produit de compacts,

$$\begin{aligned}HCJf(x) &= \frac{1}{x}\int_0^x 2\int_a^b \frac{1}{v}f(v)\cos(2\pi t/v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{x}\int_a^b \int_0^x \frac{1}{v}f(v)\cos(2\pi t/v)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}v \\ &= \frac{2}{x}\int_a^b \frac{1}{v}f(v)\left(\int_0^x \cos(2\pi t/v)\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{x}\int_a^b f(v)\frac{1}{\pi}\sin(2\pi x/v)\,\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}(H-I)CJf(x) &= \frac{1}{x}\int_a^b f(v)\frac{1}{\pi}\sin(2\pi x/v)dv - 2\int_a^b \frac{1}{v}f(v)\cos(2\pi x/v)\,\mathrm{d}v\\ &= \int_a^b f(v)\left(\frac{\sin(2\pi x/v)}{\pi x} - \frac{2}{v}\cos(2\pi x/v)\right)\,\mathrm{d}v\\ &= \int_a^b f(v)\frac{d}{dv}\frac{\sin(2\pi x/v)}{\pi x/v}\,\mathrm{d}v\\ &= \int_0^{+\infty} f(v)\frac{d}{dv}\frac{\sin(2\pi x/v)}{\pi x/v}\,\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

(c) Soit $f \in L^2(]0,+\infty[)$ et $\theta > 0$. On suppose f à support $[a,b]$ compact et continue sur $[a,b]$. Alors $D_\theta f$ est encore continue sur son support compact $[a/\theta, b/\theta]$ et on a

$$\begin{aligned}VD_\theta f(x) &= \int_0^{+\infty}(D_\theta f)(v)\left(\frac{\sin(2\pi x/v)}{\pi x} - \frac{2}{v}\cos(2\pi x/v)\right)dv\\ &= \int_0^{+\infty}\sqrt{\theta}f(\theta v)\left(\frac{\sin(2\pi x/v)}{\pi x} - \frac{2}{v}\cos(2\pi x/v)\right)dv\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\theta}}f(u)\left(\frac{\sin(2\pi x\theta/u)}{\pi x} - \frac{2\theta}{u}\cos(2\pi x\theta/u)\right)du\\ &= \sqrt{\theta}\int_0^{+\infty}f(u)\left(\frac{\sin(2\pi x\theta/u)}{\pi\theta x} - \frac{2}{u}\cos(2\pi x\theta/u)\right)du\\ &= D_\theta Vf(x).\end{aligned}$$

Les applications linéaires continues de $L^2(]0,+\infty[)$ VD_θ et $D_\theta V$ coïncident sur l'ensemble des fonctions à support compact continues sur leur support. Cet ensemble est dense dans $L^2(]0,+\infty[)$ donc $VD_\theta = D_\theta V$.

(d) i. Pour $x > 0$, on a $J\mathbf{1}_{]1/n,n]}(x) = \frac{1}{x}\mathbf{1}_{[1/n,n[}(x)$.
Examinons séparément les cas $x \notin [1/n,n]$, $1/n < x \leqslant 1$ et $1 < x < n$.

- Si $x > n$ ou $x < 1/n$, alors

$$J\mathbf{1}_{]1/n,n]}(x) - \sum_{j=1}^{n-1} j\mathbf{1}_{]1/(j+1),1/j]}(x) = 0 = \rho(x)\mathbf{1}_{]1/n,n]}(x) = 0.$$

- Si $1 < x < n$, alors

$$J\mathbf{1}_{]1/n,n]}(x) - \sum_{j=1}^{n-1} j\mathbf{1}_{]1/(j+1),1/j]}(x) = \frac{1}{x} = \rho(x)\mathbf{1}_{]1/n,n]}(x).$$

- Si $\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{j_0+1} < x \leqslant \frac{1}{j_0} \leqslant 1$, alors

$$J\mathbf{1}_{]1/n,n]}(x) - \sum_{j=1}^{n-1} j\mathbf{1}_{]1/(j+1),1/j]}(x) = \frac{1}{x} - j_0 = \rho(x)\mathbf{1}_{]1/n,n]}(x).$$

Ainsi, pour $x \in]0,+\infty[\setminus\{1/n,n\}$, on a

$$\rho(x)\mathbf{1}_{]1/n,n]}(x) = (J\mathbf{1}_{]1/n,n]})(x) - \sum_{j=1}^{n-1} j\mathbf{1}_{]1/(j+1),1/j]}(x).$$

ii. Par linéarité de V, changement de variable et en calculant la somme téléscopique, on obtient pour $x \in]0,+\infty[\setminus\{1/n,n\}$

$$\begin{aligned}
V(\rho \mathbf{1}_{]1/n,n]})(x) &= V(J\mathbf{1}_{]1/n,n]})(x) - \sum_{j=1}^{n-1} jV\mathbf{1}_{]1/(j+1),1/j]}(x)\\
&= \int_0^{+\infty} (J\mathbf{1}_{]1/n,n]})(v)\frac{d}{dv}\frac{\sin(2\pi x/v)}{\pi x/v}dv\\
&- \sum_{j=1}^{n-1} j\int_0^{+\infty} (\mathbf{1}_{]1/(j+1),1/j]})(v)\frac{d}{dv}\frac{\sin(2\pi x/v)}{\pi x/v}dv\\
&= \int_{1/n}^{n} \frac{1}{v}\frac{d}{dv}\frac{\sin(2\pi x/v)}{\pi x/v}dv - \sum_{j=1}^{n-1} j\int_{1/(j+1)}^{1/j} \frac{d}{dv}\frac{\sin(2\pi x/v)}{\pi x/v}dv\\
&= \frac{1}{n}\frac{\sin(2\pi x/n)}{\pi x/n} - n\frac{\sin(2\pi xn)}{\pi xn} + \int_{1/n}^{n}\frac{1}{v^2}\frac{\sin(2\pi x/v)}{\pi x/v}dv\\
&- \sum_{j=1}^{n-1} j\left(\frac{\sin(2\pi xj)}{\pi xj} - \frac{\sin(2\pi x(j+1))}{\pi x(j+1)}\right)\\
&= \frac{\sin(2\pi x/n)}{\pi x} - \frac{\sin(2\pi xn)}{\pi x} + \int_{1/n}^{n}\frac{\sin(2\pi xu)}{\pi xu}du\\
&- \sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{\sin(2\pi xj)}{\pi x} - \frac{(j+1-1)\sin(2\pi x(j+1))}{\pi x(j+1)}\right)\\
&= \frac{\sin(2\pi x/n)}{\pi x} - \frac{\sin(2\pi xn)}{\pi x} + \frac{1}{\pi x}\int_{2\pi x/n}^{2\pi xn}\frac{\sin(u)}{u}du\\
&- \sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{\sin(2\pi xj)}{\pi x} - \frac{\sin(2\pi x(j+1))}{\pi x} + \frac{\sin(2\pi x(j+1))}{\pi x(j+1)}\right)\\
&= \frac{1}{\pi x}\left(\sin(2\pi x/n) - \sin(2\pi x) + \int_{2\pi x/n}^{2\pi xn}\frac{\sin(u)}{u}du - \sum_{j=1}^{n-1}\frac{\sin(2\pi x(j+1))}{j+1}\right)\\
&= \frac{1}{\pi x}\left(\sin(2\pi x/n) + \int_{2\pi x/n}^{2\pi xn}\frac{\sin(u)}{u}du - \sum_{j=1}^{n}\frac{\sin(2\pi xj)}{j}\right)
\end{aligned}$$

iii. Pour $x > 0$ non entier, on a d'après I.3(b), $-\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{\sin(2\pi xj)}{\pi j} = \{x\} - 1/2$. On a aussi $\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du = \frac{\pi}{2}$ et sinus tend vers 0 en 0 donc avec la question précédente, la limite lorsque n tend vers l'infini de $V(\rho\mathbf{1}_{]1/n,n]})(x)$ est pour $x > 0$ non entier,

$$\frac{1}{\pi x}\left(0 + \int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du - \sum_{j=1}^{+\infty}\frac{\sin(2\pi xj)}{j}\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2} + \{x\} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\{x\}}{x} = J\rho(x).$$

iv. Comme $\rho \in L^2(]0,+\infty[)$, les restes d'intégrales convergentes $\int_0^{1/n}\rho^2(u)du$ et $\int_n^{+\infty}\rho^2(u)du$ tendent vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Ainsi

$$\lim_{n\to 0}\|\rho\mathbf{1}_{]1/n,n]} - \rho\|_2^2 = 0.$$

Par continuité de V, on a donc

$$\lim_{n\to 0}\|V\rho\mathbf{1}_{]1/n,n]} - V\rho\|_2^2 = 0.$$

La suite $(V(\rho \mathbf{1}_{]1/n,n]}))_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge simplement vers $J\rho \in L^2(]0,+\infty[)$ sur $]0,+\infty[$ et elle converge en norme quadratique vers $V\rho \in L^2(]0,+\infty[)$. Par le lemme de Fatou, on a

$$\begin{aligned}\|J\rho - V\rho\|_2^2 &= \int_{]0,+\infty[} \lim_{n\to+\infty} \left|V(\rho\mathbf{1}_{]1/n,n]})(x) - V\rho(x)\right|^2 \mathrm{d}x \\ &\leqslant \lim_{n\to+\infty} \int_{]0,+\infty[} \left|V(\rho\mathbf{1}_{]1/n,n]})(x) - V\rho(x)\right|^2 \mathrm{d}x = 0\end{aligned}$$

donc $V\rho = J\rho$ presque partout sur $]0,+\infty[$.

Partie VII. Convergence d'une suite de $\cup_N \mathcal{B}_N$ vers $\mathbf{1}_{]0,1]}$

1. Soit n un entier strictement positif. Si $n=1$, alors $\sum_{d|n}\mu(d) = \mu(1) = 1$. Sinon, on décompose n en produit de facteurs premiers. On a donc $n = p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}$ et l'ensemble des diviseurs de n est l'ensemble des entiers $d = p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_k^{m_k}$ avec $0 \leqslant m_i \leqslant n_i$ pour tout $i \in [1,k]$ et $\mu(d) = 0$ si il existe un indice i pour lequel $m_i \geqslant 2$. Ainsi
$$\sum_{d|n}\mu(d) = \sum_{(m_1,\cdots,m_k)\in\{0,1\}^k} (-1)^{m_1+\cdots+m_k}.$$
Si $k=1$, on a bien $(-1)^0 + (-1)^1 = 0$. Si $k \geqslant 2$, on a
$$\begin{aligned}\sum_{(m_1,\cdots,m_k)\in\{0,1\}^k} (-1)^{m_1+\cdots+m_k} &= \sum_{(m_1,\cdots,m_{k-1})\in\{0,1\}^{k-1}} (-1)^{m_1+\cdots+m_{k-1}+0} \\ &+ \sum_{(m_1,\cdots,m_{k-1})\in\{0,1\}^{k-1}} (-1)^{m_1+\cdots+m_{k-1}+1} \\ &= 0.\end{aligned}$$

2. Si $0 \leqslant y < 1$, alors la somme est vide donc $\sum_{n\leqslant y}\mu(n)\lfloor y/n\rfloor = 0$. On suppose ensuite $y \geqslant 1$ et il vient
$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant y}\mu(n)\lfloor y/n\rfloor &= \sum_{n\leqslant y}\sum_{k\leqslant y/n}\mu(n) \\ &= \sum_{(k,n),kn\leqslant y}\mu(n) \\ &= \sum_{m\leqslant y}\sum_{n|m}\mu(n) = 1\end{aligned}$$
d'après 1.

3. (a) $S_N = \sum_{n=1}^N(-\mu(n))T_n\rho \in \mathcal{B}_N$.

   (b) On a
$$\begin{aligned}S_N(x) = -\sum_{n=1}^N \mu(n)\rho(nx) &= -\sum_{n=1}^N \mu(n)\frac{1}{nx} + \sum_{n=1}^N \mu(n)\left\lfloor \frac{1}{nx}\right\rfloor \\ &= -\frac{1}{x}\sum_{n=1}^N \frac{\mu(n)}{n} + \sum_{n=1}^N \mu(n)\left\lfloor\frac{1/x}{n}\right\rfloor.\end{aligned}$$
   Or pour $N > y$, on a
$$\sum_{n=1}^N \mu(n)\left\lfloor\frac{y}{n}\right\rfloor = \sum_{n\leqslant y}\mu(n)\left\lfloor\frac{y}{n}\right\rfloor = \begin{cases}1 & \text{si } y \geqslant 1\\ 0 & \text{si } y\in[0,1[\end{cases}$$

donc pour $x > 0$, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(n) \left\lfloor \frac{1/x}{n} \right\rfloor = \mathbf{1}_{]0,1]}(x)$ et en utilisant que la série $\sum_{n\geqslant 1} \mu(n)/n$ converge et admet 0 pour somme, on obtient que la suite $(S_N)_{N\in\mathbf{N}^*}$ converge simplement vers la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{]0,1]}$ sur $]0, +\infty[$.

4. (a) V est une application linéaire invariante telle que $V\rho = J\rho$ d'après VI.5. Ainsi,

$$VS_N = V\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{\mu(n)}{\sqrt{n}} D_n\rho\right) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\mu(n)}{\sqrt{n}} VD_n\rho$$
$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{\mu(n)}{\sqrt{n}} D_nV\rho = \sum_{n=1}^{N} \frac{\mu(n)}{\sqrt{n}} D_nJ\rho.$$

Comme pour $0 < x < 1/N$ et $k \leqslant N$, on a $\{kx\} = kx$, on obtient pour $x \in]0, 1/N[$

$$VS_N(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\mu(k)}{\sqrt{k}} D_kJ\rho(x) = \sum_{k=1}^{N} \mu(k) \frac{\{kx\}}{kx} = \sum_{k=1}^{N} \mu(k)$$

et finalement

$$\int_0^{1/N} |VS_N(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{N} \left|\sum_{k=1}^{N} \mu(k)\right|^2.$$

(b) On raisonne par l'absurde en supposant que la suite $(VS_N)_{N\in\mathbf{N}^*}$ converge dans $L^2(]0, +\infty[)$; on note alors S sa limite. On a

$$\left(\int_0^{1/N} |VS_N(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \leqslant \left(\int_0^{1/N} |VS_N(x) - S(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2} + \left(\int_0^{1/N} |S(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$
$$\leqslant \|VS_N - S\|_2 + \left(\int_0^{1/N} |S(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

Or le reste d'intégrale convergente $\int_0^{1/N} |S(x)|^2 \,\mathrm{d}x$ converge vers 0 lorsque N tend vers l'infini et $\|VS_N - S\|_2$ tend aussi vers 0 donc $\int_0^{1/N} |VS_N(x)|^2 \,\mathrm{d}x$ converge vers 0, ce qui contredit ce qui est admis. Ainsi la suite $(VS_N)_{N\in\mathbf{N}^*}$ ne converge pas dans $L^2(]0, +\infty[)$ et par continuité de V, la suite $(S_N)_{N\in\mathbf{N}^*}$ ne converge pas dans $L^2(]0, +\infty[)$.

Annexe A

Liste des leçons d'oral qui seront proposées en 2021

A.1 Leçons d'algèbre et géométrie

101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

102 Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.

103 Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

104 Groupes abéliens et non abéliens finis. Exemples et applications.

105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

107 Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbf{C}$-espace vectoriel. Exemples.

108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

120 Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

121 Nombres premiers. Applications.

122 Anneaux principaux. Applications.

123 Corps finis. Applications.

125 Extensions de corps. Exemples et applications.

126 Exemples d'équations en arithmétique.

141 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

142 PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.

144 Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.

150 Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

151 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

152 Déterminant. Exemples et applications.

153 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

154 Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

155 Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

156 Exponentielle de matrices. Applications.

157 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

158 Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

159 Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

160 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

161 Distances et isométries d'un espace affine euclidien.

162 Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

170 Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

171 Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

181 Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

191 Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie.

A.2 Leçons d'analyse et probabilités

201 Espaces de fonctions. Exemples et applications.

203 Utilisation de la notion de compacité.

204 Connexité. Exemples et applications.

205 Espaces complets. Exemples et applications.

207 Prolongement de fonctions. Exemples et applications.

208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

209 Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples et applications.

213 Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

219 Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

220 Équations différentielles ordinaires. Exemples de résolution et d'études de solutions en dimension 1 et 2.

221 Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

222 Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires.

223 Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

228 Continuité, dérivabilité, dérivation faible des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

233 Analyse numérique matricielle. Résolution approchée de systèmes linéaires, recherche d'éléments propres, exemples.

234 Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.

235 Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.

236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

241 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

243 Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

245 Fonctions d'une variable complexe. Exemples et applications.

246 Séries de Fourier. Exemples et applications.

250 Transformation de Fourier. Applications.

253 Utilisation de la notion de convexité en analyse.

261 Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.

262 Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.

264 Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

265 Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.

266 Illustration de la notion d'indépendance en probabilités.

267 Exemples d'utilisation de courbes en dimension 2 ou supérieure.

A.3 Leçons de mathématiques pour l'informatique (option D)

101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

104 Groupes abéliens et non abéliens finis. Exemples et applications.

105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

120 Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

121 Nombres premiers. Applications.

123 Corps finis. Applications.

126 Exemples d'équations en arithmétique.

141 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

151 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

152 Déterminant. Exemples et applications.

153 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

156 Exponentielle de matrices. Applications.

157 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

158 Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

159 Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

162 Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

170 Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

191 Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie.

203 Utilisation de la notion de compacité.

208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

219 Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

220 Équations différentielles ordinaires. Exemples de résolution et d'études de solutions en dimension 1 et 2.

221 Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

223 Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

228 Continuité, dérivabilité, dérivation faible des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

233 Analyse numérique matricielle. Résolution approchée de systèmes linéaires, recherche d'éléments propres, exemples.

236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

241 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

243 Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

246 Séries de Fourier. Exemples et applications.

250 Transformation de Fourier. Applications.

262 Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.

264 Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

265 Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.

A.4 Leçons d'informatique fondamentale (option D)

901 Structures de données. Exemples et applications.

903 Exemples d'algorithmes de tri. Correction et complexité.

907 Algorithmique du texte. Exemples et applications.

909 Langages rationnels et automates finis. Exemples et applications.

912 Fonctions récursives primitives et non primitives. Exemples.

913 Machines de Turing. Applications.

914 Décidabilité et indécidabilité. Exemples.

915 Classes de complexité. Exemples.

916 Formules du calcul propositionnel : représentation, formes normales, satisfiabilité. Applications.

918 Systèmes formels de preuve en logique du premier ordre. Exemples.

921 Algorithmes de recherche et structures de données associées.

923 Analyses lexicale et syntaxique. Applications.

924 Théories et modèles en logique du premier ordre. Exemples.

925 Graphes : représentations et algorithmes.

926 Analyse des algorithmes : complexité. Exemples.

927 Exemples de preuve d'algorithme : correction, terminaison.

928 Problèmes NP-complets : exemples et réduction.

929 Lambda-calcul pur comme modèle de calcul. Exemples.

930 Sémantique des langages de programmation. Exemples.

931 Schémas algorithmiques. Exemples et applications.

932 Fondements des bases de données relationnelles.

A.5 Sélection de leçons de mathématiques pour le concours spécial docteurs

101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

107 Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbf{C}$-espace vectoriel. Exemples.

108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

120 Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

121 Nombres premiers. Applications.

123 Corps finis. Applications.

126 Exemples d'équations en arithmétique.

141 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

142 PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.

151 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

152 Déterminant. Exemples et applications.

153 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

156 Exponentielle de matrices. Applications.

157 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

158 Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

159 Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

162 Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

191 Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie.

203 Utilisation de la notion de compacité.

208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

213 Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

219 Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

220 Équations différentielles ordinaires. Exemples de résolution et d'études de solutions en dimension 1 et 2.

222 Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires.

226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

228 Continuité, dérivabilité, dérivation faible des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

233 Analyse numérique matricielle. Résolution approchée de systèmes linéaires, recherche d'éléments propres, exemples.

234 Fonctions et espaces de fonctions LEBESGUE-intégrables.

235 Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.

236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

241 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

245 Fonctions d'une variable complexe. Exemples et applications.

246 Séries de FOURIER. Exemples et applications.

250 Transformation de FOURIER. Applications.

262 Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.

265 Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.

266 Illustration de la notion d'indépendance en probabilités.

Annexe B

Recommandations pour les épreuves orales de leçons : Algèbre et Géométrie ; Analyse et Probabilités ; Mathématiques–Option D ; Informatique fondamentale–Option D

Depuis quelques années, le jury annonce à l'avance les leçons qui seront proposées aux candidats lors de la session à venir. Ainsi on trouvera en annexe de ce présent rapport la liste des leçons pour la session 2021, identique à la liste 2020. Cette pratique s'inscrit dans la logique d'aider les candidats à bien se préparer et à ne leur tendre aucun piège. Il convient par ailleurs de couper court à toute stratégie qui se baserait sur un pronostic très hasardeux des méthodes de couplages des sujets que le jury adopte. Tous les couplages sont *a priori* possibles et le jury veille scrupuleusement à ce que l'apparition des intitulés de leçons soit équiprobable dans l'ensemble des sujets proposés. Cette annexe détaille les attentes pour les épreuves de leçons en vue de la session 2021. Le jury espère que candidats et préparateurs sauront se saisir de ces indications pour affiner leur sélection et usage des développements classiques mais aussi pour proposer des développements originaux : il n'y a pas de format standard et des manières différentes d'aborder les leçons peuvent toutes permettre d'obtenir d'excellents résultats.

B.1 Organisation générale des épreuves

Modalités. Pour les épreuves de leçons, les candidats tirent au sort un couple de sujets. Le candidat est libre de choisir le sujet qui lui plaît parmi ces deux sujets proposés, celui où il se sent le plus à même de mettre en valeur ses connaissances. Il n'a pas à justifier ou commenter son choix.

Les candidats préparent l'interrogation pendant 3 heures. Durant tout ce temps, ils ont libre accès aux livres de la bibliothèque de l'agrégation, à ceux mis à disposition par les préparations universitaires ou à leurs propres ouvrages. Seuls sont autorisés les ouvrages avec un numéro ISBN et jouissant d'un minimum de diffusion commerciale. L'attention des candidats est attirée sur le fait que l'ISBN ne suffit pas, une « diffusion commerciale avérée » est tout autant importante. Ainsi, un polycopié de cours, propre à un établissement, même muni d'un ISBN, pourra être refusé. Cette restriction est motivée par le principe d'égalité des candidats : les ressources documentaires autorisées doivent être facilement accessibles à tout candidat au concours. Les ouvrages imprimés par les candidats eux-mêmes (ou les bibliothèques universitaires) ne sont pas autorisés et les livres doivent être vierges d'annotation. Il n'est pas autorisé non plus de venir avec des livres dont certaines pages auraient été marquées au préalable, fût-ce de manière amovible, au moyen de post-it par exemple. (Il est toutefois possible de se munir de tels marque-pages à apposer durant la préparation.) Le représentant du directoire présent lors de la préparation peut interdire tout ouvrage personnel ou envoyé par une préparation universitaire. Évidemment, les notes personnelles, manuscrites ou dactylographiées, ne sont autorisées ni pendant l'épreuve proprement dite, ni pendant la préparation. Il est possible, et même recommandé, de venir aux épreuves orales muni d'un exemplaire du rapport du jury de l'agrégation externe de mathématiques, complet, relié et sans annotation. Les candidats n'ont pas accès à Internet et la possession d'un dispositif de communication ou de stockage de données (téléphone, calculatrice, clé USB, montre connectée,...) serait considérée comme une tentative de fraude, susceptible d'entraîner l'exclusion du concours. À l'issue de cette phase de préparation, le jury fait procéder à la photocopie des plans de la leçon élaborés par les candidats. Le temps de préparation est décompté dès l'ouverture des enveloppes contenant les sujets. Lorsque les plans des leçons sont ramassés pour leur reproduction, les candidats disposent encore de quelques minutes pour finaliser leur réflexion et ils peuvent, bien sûr, continuer à noter leurs idées sur leurs brouillons qu'ils emmèneront en salle d'interrogation.

Les plans sont donc des documents manuscrits, communiqués à la commission d'interrogation. Ils comportent *au maximum 3 pages* au format A4, éventuellement complétées par une page de figures. Les candidats doivent veiller à la lisibilité de leur document, en tenant compte du fait qu'ils vont être photocopiés : écrire suffisament gros, soigner la présentation, faire apparaître des titres, éviter l'utilisation de couleurs,... Le candidat doit clairement signaler sur ce plan les résultats qu'il estime significatifs, représentatifs de la leçon et qu'il propose de développer devant le jury.

L'épreuve s'organise en trois temps, prévus pour une durée totale de *55 minutes environ* : une présentation du plan de la leçon éventuellement suivie d'une brève discussion, un développement de 15 minutes maximum et enfin une partie consacrée au dialogue et aux questions. *Le candidat peut utiliser sa copie du plan pendant toute l'épreuve.* Pendant la première phase de l'interrogation consacrée à la présentation du plan, il peut utiliser toutes les notes manuscrites produites durant la préparation. Le développement doit quant à lui se faire sans utiliser ces notes manuscrites ; si le plan comporte lui-même trop de détails sur les développements proposés, le jury peut restreindre l'utilisation de ce document durant cette seconde phase de l'épreuve.

Commentaires généraux. Le jury met en garde contre trois écueils qui peuvent altérer les performances des candidats :

— *le hors-sujet*. Le hors-sujet se manifeste de deux manières, qui dans tous les cas sont lourdement sanctionnées. Quelques candidats prennent des libertés quant au libellé de la leçon et s'en écartent notablement : les titres des leçons définissent le champ précis qu'il faut traiter. Par ailleurs, le jury constate l'abus de « recyclage » de thèmes plus ou moins classiques, mais qui ne sont pas exploités avec à propos dans les leçons et qui, parfois, prennent une place sans commune mesure avec leur importance mathématique.

— une mauvaise évaluation des attentes et du niveau, conduisant à un *défaut de maîtrise*. Le rapport distingue très clairement des niveaux différents auxquels peuvent être abordées les leçons. Trop de candidats proposent plan et développements au dessus de leur niveau, une stratégie qui ne peut pas être payante, tant ils se mettent en perdition lors de l'épreuve. Des connaissances des bases fermement maîtrisées et intelligemment utilisées valent mieux qu'un étalage artificiel de savoirs emmagasinés sans recul et à peine digérés, voire pas assimilés du tout. Une maîtrise avérée et solide des bases assure déjà une note très convenable, certainement de nature à permettre l'admission, en l'état du concours.

— *la fatigue et le stress*. Une grande majorité des candidats se présente avec une forte charge émotionnelle, à la mesure de l'enjeu et de leur investissement personnel, qui peut nuire à l'expression de leurs connaissances. Cela est d'autant plus vrai que l'épreuve ne se réduit pas à la simple récitation d'un cours mais à un échange avec le jury et donc, là encore, à une réflexion personnelle, à une prise de hauteur et à la démonstration, dans un temps court, non seulement de la

> maîtrise technique mais aussi de l'aptitude à construire un raisonnement. Le jury est pleinement conscient de ces difficultés et s'emploie à en réduire les effets négatifs en mettant en pratique une posture de bienveillance constante. Le jury ne cherche en rien à déstabiliser le candidat pendant l'épreuve, mais au contraire cherche à valoriser les connaissances du candidat. Les premières questions, parfois très simples, visent souvent à préciser une notation, un point du plan ou du développement, pour que le jury s'assure de la compréhension par le candidat des notions qu'il vient d'exposer et non pour lui tendre un quelconque piège. Mettre le candidat en confiance, le respecter, l'écouter, poser des questions ouvertes, permettre au candidat déstabilisé de se reprendre sans l'acculer au silence, stimuler le dialogue sont autant d'objectifs que s'assignent les membres du jury.

Une liste d'énoncés, quelque sophistiqués qu'ils soient, ne peut suffire à convaincre le jury. Il faut savoir motiver les énoncés et expliquer comment ils s'enchaînent et en quoi ils sont pertinents. Les leçons doivent donc être illustrées avec des exemples judicieusement choisis. De nombreux titres de leçons se terminent d'ailleurs par « exemples et applications » : le jury attend donc que le plan soit riche en exemples et applications et/ou que le candidat puisse en développer lors de la présentation de son plan.

La rédaction des commentaires sur les leçons tente de distinguer les notions « de base », incontournables pour l'intitulé proposé et dont la maîtrise est attendue des candidats, et des suggestions d'ouverture. Ces suggestions sont de niveaux variés et peuvent concerner des champs différents, par exemple qui trouvent leurs motivations dans des problématiques propres aux options de modélisation. Certaines pistes se placent aussi aux frontières du programme et peuvent faire écho à des sujets spécialisés abordés durant la formation du candidat. Il ne s'agit là que de propositions qui ne revêtent aucun caractère obligatoire, introduites par des formulations comme « pour aller plus loin » ou « si les candidats le désirent »... ; le jury n'attend certainement pas un balayage exhaustif de ces indications et il n'est pas nécessaire de développer les éléments les plus sophistiqués pour obtenir une note élevée. Enfin, certains commentaires font part de l'expérience du jury pour évoquer le dosage pas toujours approprié entre théorie et exemples, souligner des points de faiblesse qui méritent une attention particulière ou mettre en garde contre de possibles écueils (oublis, hors-sujets, erreurs fréquentes, positionnement mal à propos, etc). Ces commentaires sont complétés par un ensemble de vidéos, réalisées par le jury et accessibles à l'URL https://agreg.org/index.php?id=le-deroulement-des-epreuves-en-video : ces vidéos décrivent le déroulement des épreuves de leçons, expliquent comment le jury mène l'interrogation et précisent les éléments auxquels il est particulièrement sensible.

Les leçons proposées ont toutes leurs spécificités qu'un principe unique ne saurait résumer ou englober. Une partie des sujets sont très délimités, alors que certains intitulés de leçons sont très ouverts et obligent le candidat à opérer des choix thématiques et de points de vue. Ces sujets sont pensés pour offrir de multiples points d'entrée, avec une échelle de niveaux techniques assez large, l'objectif étant de permettre à l'ensemble des candidats de s'exprimer au mieux et de mettre en valeur leurs connaissances. La pertinence des choix adoptés et leur motivation au regard de l'intitulé de la leçon entrent alors tout particulièrement dans l'appréciation, ainsi, bien entendu, que la maîtrise du contenu proposé. Ces leçons de synthèse exigent certainement un important recul ; elles réclament un effort conséquent de réflexion et méritent tout particulièrement d'être préparées en amont du concours. En retour, elles permettent de consolider un matériel mathématique qui peut être réinvesti avec profit dans d'autres thèmes.

B.1.1 Première partie : présentation de la leçon

Dans cette première phase de l'épreuve, le candidat est convié à utiliser son temps de parole, *6 minutes maximum*, pour présenter, argumenter, mettre en valeur et faire une synthèse de sa leçon.

Pour cette partie de l'épreuve, le candidat devrait s'imaginer dans la situation où il doit introduire à un auditoire, pendant 6 minutes, une leçon destinée ensuite à être développée sur plusieurs séances. Quel est l'intérêt du sujet ? Comment se positionne-t-il dans un paysage mathématique plus large ? Comment s'articulent les différentes sections qui composent la leçon ? Comment s'expliquent et se motivent les enchaînements ? Comment se hiérarchisent les résultats et les difficultés ? Il s'agit aussi de s'interroger sur les enjeux didactiques de la leçon, c'est-à-dire dans quel ordre et comment présenter les choses pour que le tout soit cohérent, compréhensible et pédagogiquement efficace. De plus, cette présentation doit être illustrée. Des exemples doivent bien mettre en évidence les difficultés, faire ressortir le rôle des hypothèses et décrire des applications met en valeur l'intérêt des résultats. Enfin, des figures peuvent aussi contribuer à expliquer les idées maîtresses. Si l'enjeu principal est d'argumenter la construction du plan de la leçon, il est aussi parfois pertinent de mettre en valeur les liens logiques et l'intérêt des notions présentées dans d'autres domaines (sans forcément les introduire dans le plan écrit).

Le rapport du concours indique des pistes pour chaque leçon ; il ne s'agit que de suggestions que le candidat n'est pas tenu de suivre et qui ne constituent pas une trame obligatoire pour le plan. Notamment le rapport distingue clairement le cœur des leçons et des extensions dont le contenu peut être techniquement plus exigeant. La vocation de ces commentaires n'est donc pas d'être repris de manière exhaustive ; il ne s'agit que de guider les candidats dans leur auto-évaluation et les encourager à présenter des notions avec lesquelles ils sont à l'aise. Notamment, ils peuvent tout à fait exploiter des notions ou des applications qui trouvent leur motivation dans les options de modélisation qu'ils ont choisies.

Il existe maintenant de nombreux plans *tout faits* disponibles dans la littérature, plus ou moins pertinents, de plus ou moins grande valeur. Il est naturel que les candidats s'inspirent de sources de qualité et, d'une certaine manière, le choix de ces sources, la capacité à s'en affranchir ou à pleinement se les approprier, participent au regard que le jury peut porter sur leur maturité scientifique. Il est bien entendu que se contenter simplement de recopier un plan ou le réciter par cœur n'a pas d'intérêt. Le jury ne cherche pas des plans absolument originaux, le plus important est que le plan soit bien structuré, maîtrisé par le candidat et qu'y figure une quantité substantielle d'exemples et de mathématique. Exploiter des ouvrages de référence n'a rien de condamnable, mais le jury attend que le candidat fasse preuve d'un investissement personnel sur le sujet et qu'il explique pourquoi il adopte cette présentation et qu'il soit en mesure de la commenter. Le jury met aussi en garde les candidats sur le fait que la plupart des livres « de leçons » sont le fruit du travail de mathématiciens professionnels aguerris : la présentation des leçons qui y est faite est généralement (très) ambitieuse, exhaustive et dépasse souvent le contenu attendu pour obtenir déjà une très bonne note. S'inspirer de telles références est louable mais requiert un indispensable travail d'appropriation, d'adaptation et de personnalisation.

Il s'agit d'une épreuve *orale*. Le document écrit transmis au jury se justifie pour servir de base pour la discussion et constitue un fil conducteur qui guide le jury pour mener la partie consacrée au dialogue et aux questions. Ce plan ne doit être ni une énumération d'énoncés, ni un cours ou un exposé complet avec développement des démonstrations. En revanche, il doit définir avec suffisamment de précision les notions mathématiques introduites, donner les énoncés complets (notamment les hypothèses) des résultats fondamentaux, citer des exemples et des applications. Le plan est important puisqu'il calibre l'ensemble de la leçon, il détermine l'orientation et le niveau choisis par le candidat. Les choix doivent être motivés lors de la présentation et éventuellement lors de la discussion avec le jury. Il est nécessaire d'être en mesure de démontrer les résultats importants et de pouvoir les illustrer avec des exemples simples. Soigner la présentation d'un document écrit qui sert de support pour un cours est une compétence professionnelle importante du métier d'enseignant. Aussi, la formalisation mathématique et le français doivent être soignés, ainsi que la mise en forme, autant que possible dans le temps de préparation imparti : ces éléments ne peuvent que faciliter les interactions avec le jury. Il est contre-productif de chercher à remplir à tout prix les 3 feuilles autorisées, surtout avec des éléments que le candidat ne maîtrise manifestement pas.

Un exposé oral qui se réduit à relire simplement ce qui est écrit sur le document photocopié n'a pas beaucoup d'intérêt. Trop de candidats se contentent d'une présentation linéaire, sans expliquer ou mettre en valeur les articulations du plan, ni faire ressortir les méthodes ou les résultats importants. Il est inutile de recopier le plan au tableau, puisque le jury dispose d'une copie de ce document. Toutefois le jury encourage les candidats à exploiter le tableau comme support pédagogique. Faire apparaître la structure de la leçon, illustrer une difficulté technique ou le principe d'une démonstration par une figure... permet au candidat de s'affranchir de ses notes et rend l'exposé plus vivant. La présentation orale, la qualité d'expression, la compréhension synthétique, la plus-value de l'exposé par rapport au plan écrit, la capacité du candidat à intéresser son auditoire sur une leçon donnée, constituent des éléments importants d'évaluation. Le jury se réjouit d'ailleurs des progrès constatés ces dernières années sur cette partie de l'épreuve.

Le jury attache une grande importance à la *maîtrise du plan* qui intervient de manière substantielle dans la grille de notation. Le plan ne peut être considéré comme maîtrisé si l'exposé ressemble à une récitation. Les résultats exposés doivent être compris ainsi que l'organisation d'ensemble de la leçon. Il est souhaitable que le candidat connaisse dans leurs grandes lignes les démonstrations des résultats figurant au programme du concours. Il est indispensable que le candidat ait une idée assez claire de la difficulté des démonstrations des résultats qu'il évoque dans son plan. Le jury rappelle qu'il n'est pas nécessaire de s'aventurer au-delà des contours du programme pour prétendre à une très bonne note ! Plus généralement, il vaut mieux se cantonner à un niveau où l'on se sait solide plutôt que de chercher à placer des énoncés débordant du programme mais sans le recul, ni l'assurance technique nécessaires. Bien entendu, réussir cette partie de l'épreuve ne s'improvise pas et le discours doit avoir été réfléchi durant la préparation de l'épreuve, et plus largement tout au long du parcours qui conduit les candidats jusqu'au concours.

À la fin de cette présentation de la leçon, le jury peut éventuellement questionner très brièvement le candidat et aborder quelques points techniques, sans entrer dans des détails qui retarderaient le début du développement.

B.1.2 Deuxième partie : le développement

Le jury demande au candidat de proposer *deux développements au moins*. Il s'agit de résultats représentatifs de la leçon que le candidat est en mesure d'exposer en détail et sans notes.

Proposer un seul développement ou des développements de niveaux trop disparates conduit à une minoration de la note. Ces propositions de développements doivent être clairement mentionnées sur le plan écrit et non pas vaguement évoquées à l'oral. Dans cet esprit, le candidat motivera soigneusement le choix des développements qu'il propose, expliquant en quoi il estime que ces résultats ou énoncés sont centraux ou jouent à ses yeux un rôle particulier sur le sujet. Le candidat doit aussi préciser, sur son plan écrit, ce qu'il va démontrer et, le cas échéant, les résultats de son plan qu'il va admettre pour mener à bien son développement. Il faut prendre garde dans ce choix à ne pas déclarer admis un énoncé majeur qui, une fois acquis, rend l'objet du développement trivial. De même il faut prendre garde aux « raisonnements circulaires » en faisant appel à un énoncé qu'on interpréterait comme une conséquence de celui qu'on cherche à démontrer. De telles maladresses sont perçues comme un défaut de maîtrise et de recul qui est pénalisé.

Le jury choisit le développement qui va être effectivement exposé par le candidat. Le candidat dispose de 15 minutes (maximum) pour mener à bien son développement. La gestion du temps est une des difficultés de l'épreuve. Un exposé trop court est le signe d'un sujet mal choisi, inapproprié au concours ; une démonstration inachevée dans le temps imparti témoigne d'un manque de maîtrise. Le jury demande au candidat de bien gérer son tableau, en particulier le candidat doit demander aux membres du jury l'autorisation d'effacer. Lors du développement, le jury attend du candidat des explications sur la preuve et sur l'utilisation pertinente des notions développées durant l'exposé oral ; il peut être opportun, lors du développement, de se référer explicitement au plan présenté. Trop peu de candidats commencent leur développement par une rapide synthèse des grandes idées ou des étapes qui le composent. Expliquer l'approche adoptée, et les difficultés, au début du développement est une démarche pédagogique appréciée. Un ou plusieurs dessins peuvent aider à clarifier la discussion technique. Il est inutile de se précipiter ou de parler trop vite ; on veillera au contraire à préciser ses notations, à soigner sa présentation, à placer sa voix et à regarder de temps en temps le jury. Le développement ressemble parfois à une succession plus ou moins convaincante de résultats intermédiaires *ad hoc*. Cette phase de l'épreuve vise à mettre en valeur des qualités pédagogiques autant que techniques et l'exposé doit faire la preuve de la compréhension du sujet par le candidat. La récitation mécanique d'un développement ne peut pas être convaincante ; le jury veille à ce que les futurs enseignants comprennent ce qu'ils exposent et sachent exposer ce qu'ils comprennent. C'est une qualité essentielle d'un futur agrégé. Un choix judicieux des notations utilisées contribuent à la clarté de l'exposé ; par exemple il peut être maladroit de noter deux polynômes P et P'... surtout si on doit travailler avec les dérivées de ceux-ci. Enfin, même si le jury laisse évoluer le candidat durant son développement, en intervenant le moins possible, il peut, en cas de lacunes ou d'erreurs manifestes, interrompre le candidat pour demander des explications. Cette intervention ne donne pas droit à une extension du temps consacré au développement.

Le jury veille à la cohérence du plan et des propositions de développements. Il est souhaitable que le candidat recherche une adéquation entre le niveau auquel il souhaite se placer et les développements proposés. Un candidat ne sera pas avantagé s'il présente un développement non maîtrisé, manifestement mal compris. Si le niveau de l'agrégation ne peut se cantonner aux notions abordées dans une classe de Terminale ou une première année post-bac, trop de candidats se lancent, curieusement, dans des propositions, parfois aux limites du programme, qui dépassent largement leur niveau technique. Dans un cas comme dans l'autre, il en résulte une appréciation négative. Le développement doit être en lien direct avec le thème de la leçon présentée. L'utilisation d'un résultat qui n'apparaît pas dans le plan écrit doit être explicitement signalée par le candidat. Toute utilisation d'un lemme non démontré et enfermant l'essence de la preuve est sanctionnée. Le jury peut exiger la démonstration d'un lemme admis, si celui-ci est essentiellement le cœur du développement. Il faut éviter de présenter ou d'utiliser un résultat préliminaire ou intermédiaire sans explication convaincante. Dans le cas d'un développement difficile, il ne faut pas négliger les cas élémentaires et les détails utiles à la compréhension du jury. Le jury déplore l'abus de certains développements plus ou moins classiques, qui ne sont pas toujours utilisés à bon escient et qui occupent parfois une place disproportionnée (l'ellipsoïde de John, la décomposition de Dunford, le théorème de Bernstein, le processus de Galton-Watson,...). Trop de candidats ont tendance à replacer exagérément et de manière inappropriée de tels développements et se retrouvent ainsi hors sujet, impair qui est sévèrement sanctionné. Il faut aussi veiller au fait que des thèmes peuvent être exploités dans des leçons différentes... mais avec des points de vue différents, qu'il faut savoir mettre en exergue.

Le programme du concours comprend maintenant un chapitre spécifique consacré aux méthodes numériques. Les candidats sont invités à explorer ce champ, éventuellement en s'appuyant sur leurs connaissances spécifiques à l'option de modélisation qu'ils ont choisie, pour proposer des développements originaux en lien avec l'analyse d'algorithmes de calcul. La description des leçons indique quelques pistes dans cette direction. Le jury se réjouit qu'un nombre croissant de candidats saisisse ces opportunités et espère que cette tendance, qui enrichit les contenus, se renforcera.

La pertinence des explications, le souci pédagogique, la capacité à mener à bien et complètement le sujet dans le temps imparti, l'aisance technique sont des éléments importants d'appréciation. Par ailleurs, le candidat doit s'attendre à être interrogé lors de la période de discussion sur des applications ou illustrations élémentaires de son développement. Il est donc essentiel qu'il soit capable de reconnaître dans une question donnée un cas particulier simple du résultat général qu'il vient d'exposer.

B.1.3 Troisième partie : questions et dialogue

Le jury teste systématiquement la maîtrise du plan présenté. Une part importante de la discussion porte donc sur le plan, ou trouve sa source dans le plan présenté par le candidat. Il faut éviter que ce plan dépasse largement le niveau que l'on maîtrise. Le candidat doit se préparer à des questions élémentaires voire considérées comme « évidentes » sur tout énoncé mis dans son plan, questions auxquelles il doit répondre avec précision. Des candidats après des prestations relevées ont parfois pu être surpris par de telles questions portant sur les bases ; elles sont pourtant quasi-systématiques, le jury souhaitant précisément s'assurer de la maîtrise de ces bases. Le jury peut aussi proposer des calculs illustrant les notions évoquées par le plan.

Cette phase de l'épreuve requiert un certain recul qui ne peut être que le fruit d'un travail de préparation approfondi en amont du concours où l'on doit se demander si on est capable de mettre en œuvre des énoncés sur des situations simples et, pour certains théorèmes, réfléchir à des exemples ou des contre-exemples.

Les réponses aux questions des examinateurs ne prennent pas forcément une forme unique et ceux-ci se placent dans une posture de dialogue avec le candidat. Le jury pose aussi des exercices en rapport direct avec la leçon et le plan proposé mais ne s'attend pas à ce que le candidat trouve une solution immédiatement. Ces exercices ont plutôt pour objectif de voir évoluer le futur agrégé dans une démarche scientifique rigoureuse et méthodique. Le candidat doit réfléchir, utiliser son plan et rattacher l'exercice à sa leçon. Le fait de ne pas résoudre un exercice ne doit pas être perçu comme un échec et le candidat ne doit pas se décourager : plus qu'achever l'exercice, ce sont les réactions du candidat qui importent (par exemple en identifiant l'énoncé de la leçon qui permettrait de traiter le problème et en se demandant si les hypothèses d'application sont satisfaites). Dans cette partie de l'épreuve le candidat doit faire preuve de capacité d'écoute, qui est aussi évaluée ; il doit rester attentif aux suggestions du jury. Il est souvent utile d'exploiter le tableau pour bien reformuler la question, formaliser les pistes de réflexion et donner un support écrit à l'échange. Pendant cette discussion, le jury veille à laisser un temps raisonnable au candidat pour réfléchir, sans le submerger de questions. Des exemples et des explications sur la nature des questions posées par le jury sont données dans les vidéos https://agreg.org/index.php?id=le-deroulement-des-epreuves-en-video.

Enfin, l'objet du concours étant de recruter de futurs enseignants, le jury peut aussi, comme l'indique l'article 8 de l'arrêté du 25 juillet 2014, poser toute question qu'il juge utile *lui permettant d'apprécier la capacité du candidat, en qualité de futur agent du service public d'éducation, à prendre en compte dans le cadre de son enseignement la construction des apprentissages des élèves et leurs besoins, à se représenter la diversité des conditions d'exercice du métier, à en connaître de façon réfléchie le contexte, les différentes dimensions (classe, équipe éducative, établissement, institution scolaire, société) et les valeurs qui le portent, dont celles de la République. Le jury peut, à cet effet, prendre appui sur le référentiel des compétences professionnelles des métiers du professorat et de l'éducation fixé par l'arrêté du 1er juillet 2013.*

B.2 L'épreuve orale d'algèbre et géométrie

S'il est attendu que les candidats connaissent les énoncés fondamentaux de la leçon qu'ils traitent, il est non moins important d'être en mesure de les mettre en œuvre et de savoir les appliquer à des cas simples. Par exemple il est indispensable de savoir

— justifier qu'une matrice est diagonalisable ou en déterminer un polynôme annulateur ;

— effectuer des manipulations élémentaires sur les éléments appartenant à diverses structures algébriques standards ($\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, $\mathfrak{S}_n$, $\mathbf{F}_q$, etc.) ;

— mettre en œuvre des algorithmes exposés dans le plan (opérations élémentaires sur des systèmes ou des déterminants, réduction de Gauss d'une forme quadratique, etc.).

Comme y invite clairement l'intitulé de l'épreuve, les exemples et applications motivés par la géométrie sont particulièrement bienvenus. Les thèmes relevant de la théorie des groupes se prêtent tout particulièrement à de telles illustrations. De plus, les connaissances spécifiques à chacune des trois options A, B et C fournissent des exemples d'applications très appréciés par le jury. Les notions de quotients sont importantes, il est important à ce stade de dominer la projection canonique et, surtout, les subtilités du passage au quotient dans le cadre d'un morphisme. La théorie des représentations est naturellement reliée à bon nombre de leçons. En dehors des leçons directement concernées, les représentations peuvent figurer naturellement dans les leçons 101, 102, 103, 104, 105, 106, 150, 151 et 154.

Certains développements trouvent naturellement leur place dans des leçons différentes. Toutefois, le point de vue n'est en général pas le même et les éléments de démonstration à mettre en avant, voire la motivation du résultat, changent suivant l'intitulé. Il est important d'avoir bien conscience de cet aspect et de savoir justifier la pertinence de ces développements dans le cadre de la leçon traitée.

Les remarques qui suivent sont spécifiques à chaque leçon et permettent aux candidats de mieux saisir les attentes du jury sur chacun de ces sujets. On y distingue clairement ce qui constitue le cœur du sujet d'éléments plus sophistiqués et ambitieux, qui dépassent cette base.

101 : Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

Dans cette leçon, au-delà de la présentation du matériel théorique indispensable, le choix, l'organisation et la pertinence des illustrations sont des éléments forts de l'appréciation. Les deux facettes de l'action d'un groupe G sur un ensemble X doivent être maîtrisées : l'application de $G \times X$ vers X et le morphisme de G vers $\mathfrak{S}(X)$. La relation entre orbite et stabilisateur qui découle des liens entre ces points de vue est incontournable ainsi que des exemples de son utilisation. Il faut savoir utiliser des actions bien choisies pour obtenir des informations soit sur un ensemble X donné, soit sur un groupe G donné et faire apparaître des sous-groupes intéressants de G comme stabilisateurs. Par ailleurs, la présentation doit illustrer comment l'étude de certaines actions revient à classifier certains objets, soit en trouvant un représentant simple de chaque orbite, soit en dégageant des invariants caractérisant les orbites. Les actions de groupes interviennent aussi efficacement dans des problèmes de dénombrements, notamment via la formule de Burnside.

Les exemples peuvent être internes à la théorie des groupes (action naturelle de $\mathfrak{S}_n$ sur $\{1, ..., n\}$, action par translation ou par conjugaison, etc). Mais il est souhaitable d'emprunter aussi à d'autres domaines (action sur des anneaux, des espaces de matrices ou des espaces de polynômes, représentations linéaires, etc). La géométrie fournit aussi de nombreux exemples pertinents (groupes d'isométries d'un solide ou d'un polygone régulier).

Pour aller plus loin, on peut aborder l'action de $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{K})$ sur la droite projective menant au birapport ou celle de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ sur le demi-plan de Poincaré ou les preuves par actions de groupes des théorèmes de Sylow ou encore d'autres actions donnant lieu à des isomorphismes exceptionnels. Il est aussi possible de s'intéresser aux aspects topologiques ou différentiels liés à certaines actions.

102 : Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.

Cette leçon ne peut faire l'impasse sur les aspects élémentaires du sujet (définitions, exponentielle complexe, trigonométrie, etc.), mais elle ne doit pas s'y cantonner. Elle doit aborder l'aspect « groupe » de S^1 en considérant son lien avec $(\mathbf{R}, +)$ et en examinant ses sous-groupes (en particulier finis). Il faut aussi envisager des applications en géométrie plane. Plus généralement, la leçon invite à expliquer où et comment les groupes des nombres complexes de module 1 et des racines de l'unité apparaissent dans divers domaines des mathématiques : polynômes cyclotomiques, représentations de groupes, spectres de matrices remarquables, etc. On peut également s'intéresser aux sous-groupes compacts de $\mathbf{C}^*$

Pour aller plus loin, on peut s'intéresser aux nombres de module 1 et aux racines de l'unité dans $\mathbf{Q}[i]$, ou à la dualité des groupes abéliens finis (notamment la preuve du théorème de structure par prolongement de caractère) ou encore aux transformées de Fourier discrètes et rapides.

Des aspects analytiques du sujet peuvent être évoqués (théorème de relèvement, logarithme complexe, analyse de Fourier sur $\mathbf{R}^n$) mais ne doivent occuper ni le coeur de l'exposé, ni l'essentiel d'un développement.

103 : Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

Dans cette leçon, le jury souhaite que les candidats mettent tout d'abord l'accent sur la conjugaison dans un groupe. Ensuite, ils doivent expliciter la structure de groupe obtenue sur le quotient d'un groupe par un sous-groupe distingué.

La notion de conjugaison doit être illustrée dans des situations variées : groupes de petit cardinal, groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$, groupe linéaire d'un espace vectoriel, groupe affine d'un espace affine, groupe orthogonal, etc. Il est bon de montrer que la conjugaison aide à résoudre certains problèmes (par exemple, en transformant un élément en un autre plus simple à manipuler ou en considérant l'action par conjugaison). L'étude des classes de conjugaison de divers groupes peut être menée. Dans le cadre d'une action d'un groupe, il faut savoir que les stabilisateurs d'éléments d'une même orbite sont conjugués. On peut aussi illustrer et utiliser le principe du « transport par conjugaison » voulant que hgh^{-1} ait la même « nature géométrique » que g et que ses caractéristiques soient les images par h des caractéristiques de g (conjugaison d'une transvection, d'une translation, d'une réflexion, etc.).

Concernant la notion de sous-groupe distingué, il faut indiquer en quoi c'est précisément le concept qui permet de munir le quotient d'une structure de groupe héritée. Cette notion permet aussi de donner une caractérisation interne des produits directs. Le lien entre sous-groupe distingué et noyau de morphisme ϕ est incontournable ainsi que l'isomorphisme $G/\mathrm{Ker}\phi \cong \mathrm{Im}\phi$. Des exemples bien choisis mettent en évidence comment certains problèmes portant sur l'un des deux groupes G ou G/H peuvent être résolus en utilisant l'autre (par exemple, le lien entre les sous-groupes de l'un et de l'autre). L'examen de la simplicité de certains groupes peut être proposé.

Il est important de s'attarder sur l'utilité des notions présentées. Les applications en arithmétique sont nombreuses, mais il est pertinent de présenter aussi des applications en géométrie ou en algèbre linéaire. On peut ainsi expliquer comment l'étude des classes de conjugaison permet de démontrer la simplicité de certains groupes comme SO_n, étudier le groupe des homothéties-translations distingué dans le groupe affine, établir que les groupes orthogonaux de formes quadratiques congruentes sont conjugués ou encore qu'un sous groupe compact de $\mathrm{GL}(n)$ est conjugué à un sous groupe de $\mathrm{O}(n)$. En algèbre linéaire, des propriétés topologiques de la classe de conjugaison d'un endomorphisme permettent d'établir son caractère diagonalisable ou nilpotent. Enfin, on peut interpréter le discriminant d'une forme quadratique non-dégénérée comme élément du quotient $\mathbf{K}^\times/(\mathbf{K}^\times)^2$.

S'ils le désirent, les candidats peuvent poursuivre en illustrant ces notions en théorie des représentations des groupes finis (classes de conjugaison et nombres de représentations irréductibles, treillis des sous-groupes distingués lu dans la table de caractères, liens entre représentations de G et de G/H, etc.). La notion de produit semi-direct et les théorèmes de Sylow débordent du programme. Il est possible de les évoquer, mais en veillant à les illustrer par des exemples et des applications.

104 : Groupes abéliens et non abéliens finis. Exemples et applications.

La richesse de cette leçon ne doit pas nuire à sa présentation. Le candidat devra sans doute faire des choix qu'il doit être en mesure de justifier.

La notion d'ordre (d'un groupe, d'un élément et d'un sous-groupe) est très importante dans cette leçon ; le théorème de Lagrange est incontournable. Les groupes $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et $\mathfrak{S}_n$ sont des exemples très pertinents. Pour ces groupes, il est indispensable de savoir proposer un générateur ou une famille de générateurs. Dans $\mathfrak{S}_n$, il faut savoir calculer un produit de deux permutations et savoir décomposer une permutation en produit de cycles à supports disjoints. Le théorème de structure des groupes abéliens finis doit figurer dans cette leçon. Sa démonstration est techniquement exigeante, mais il faut que l'énoncé soit bien compris, en particulier le sens précis de la clause d'unicité, et être capable de l'appliquer dans des cas particuliers. Il est important de connaître les groupes d'ordre premier ainsi que les groupes d'ordre inférieur à 7.

Les exemples doivent figurer en bonne place dans cette leçon. L'étude des groupes d'isométries laissant fixe un polygone (ou un polyèdre) régulier pourrait être exploitée sous cet intitulé. Afin d'illustrer leur présentation, les candidats peuvent aussi s'intéresser à des groupes d'automorphismes ou à des représentations de groupes, ou étudier les groupes $\mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}_4, \mathfrak{A}_5$ et relier sur ces exemples géométrie et algèbre.

Pour aller plus loin, les candidats peuvent s'attarder sur la dualité dans les groupes abéliens finis. Comme application, la cyclicité du groupe multiplicatif d'un corps fini est tout à fait adaptée. Des exemples de caractères, additifs, ou multiplicatifs dans le cadre des corps finis, sont les bienvenus. Il est aussi possible de s'intéresser aux sommes de GAUSS. S'ils le désirent, les candidats peuvent ensuite introduire la transformée de FOURIER discrète qui pourra être vue comme son analogue analytique, avec ses formules d'inversion, sa formule de PLANCHEREL. Ainsi, la leçon peut mener à introduire la transformée de FOURIER rapide sur un groupe abélien cyclique dont l'ordre est une puissance de 2 ainsi que des applications à la multiplication d'entiers, de polynômes et éventuellement au décodage de codes via la transformée de HADAMARD.

105 : Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

Parmi les attendus, il faut savoir relier la leçon avec les notions d'orbites et d'actions de groupes. Il faut aussi savoir décomposer une permutation en cycles à supports disjoints, tant sur le plan théorique (preuve du théorème de décomposition), que pratique (sur un exemple). Il est important de savoir déterminer les classes de conjugaisons du groupe symétrique par la décomposition en cycles, d'être capable de donner des systèmes de générateurs. L'existence du morphisme signature est un résultat non trivial mais ne peut pas constituer, à elle seule, l'objet d'un développement. Il est bon d'avoir en tête que tout groupe fini se plonge dans un groupe symétrique et de savoir calculer la signature des permutations ainsi obtenues dans des cas concrets. Les applications sont nombreuses, il est très naturel de parler du déterminant, des polynômes symétriques ou des fonctions symétriques des racines d'un polynôme.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en s'intéressant par exemple aux automorphismes du groupe symétrique, aux notions de centre et de simplicité, au cardinal des classes de conjugaison, à des problèmes de dénombrement, aux représentations des groupes des permutations ou encore aux permutations aléatoires.

106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

Cette leçon ne doit pas se résumer à un catalogue de résultats épars sur $\mathrm{GL}(E)$. Il est important de savoir faire correspondre les sous-groupes du groupe linéaire avec les stabilisateurs de certaines actions naturelles (sur des formes quadratiques, sur des drapeaux, sur une décomposition en somme directe, etc.). On doit présenter des systèmes de générateurs de $\mathrm{GL}(E)$ et étudier la topologie de ce groupe en expliquant l'importance du choix du corps de base. Les liens avec le pivot de GAUSS sont à détailler. Il faut aussi savoir réaliser $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathrm{GL}(n, \mathbf{K})$ et faire le lien entre signature et déterminant. S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en remarquant que la théorie des représentations permet d'illustrer l'importance de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ et de son sous-groupe unitaire. Ils peuvent également étudier les sous-groupes compacts maximaux et les sous-groupes fermés de $\mathrm{GL}(n)$.

107 : Représentations et caractères d'un groupe fini sur un C-espace vectoriel. Exemples.

Il s'agit d'une leçon où théorie et exemples doivent apparaître. D'une part, il est indispensable de savoir dresser une table de caractères pour des petits groupes, et d'autre part, il faut savoir tirer des informations sur le groupe à partir de sa table de caractères, et éventuellement être capable de trouver la table de caractères de certains sous-groupes. Les représentations peuvent provenir d'actions de groupes sur des ensembles finis, de groupes d'isométries, d'isomorphismes exceptionnels entre groupes de petit cardinal. Inversement, on peut chercher à interpréter des représentations de façon géométrique, mais il faut avoir conscience qu'une table de caractères provient généralement de représentations complexes *a priori* non réelles. La présentation du lemme de SCHUR est importante et ses applications doivent être parfaitement maîtrisées.

S'ils le désirent, les candidats peuvent évoquer la transformée de FOURIER en présentant par exemple les formules d'inversion, de PLANCHEREL et de convolution.

108 : Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

Il est indispensable de donner des parties génératrices pour tous les exemples proposés. La description ensembliste du groupe engendré par une partie doit être connue et les groupes monogènes et cycliques doivent être évoqués. C'est une leçon qui doit être illustrée par des exemples très variés. Les groupes $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ fournissent des exemples naturels tout comme les groupes de permutations, les groupes linéaires ou leurs sous-groupes (par exemple $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$, $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ ou $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$). Ainsi, on peut s'attarder sur l'étude du groupe des permutations avec différents types de parties génératrices en discutant de leur intérêt (ordre, simplicité de $\mathcal{A}_5$ par exemple). On peut présenter le groupe $\mathrm{GL}(E)$ généré par des transvections et des dilatations en lien avec le pivot de GAUSS, le calcul de l'inverse ou du rang (par action sur $M_{n,p}(\mathbf{K})$), le groupe des isométries d'un triangle équilatéral qui réalise S_3 par identifications des générateurs. Éventuellement, il est possible de discuter des conditions nécessaires et suffisantes pour que $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times$ soit cyclique ou la détermination de générateurs du groupe diédral.

On n'hésitera pas à illustrer comment la connaissance de parties génératrices s'avère très utile dans l'analyse des morphismes de groupes ou pour montrer la connexité par arcs de certains sous-groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ par exemple.

S'il le souhaite, le candidat peut s'intéresser à la présentation de certains groupes par générateurs et relations. Pour aller plus loin, il est également possible de parler du logarithme discret et de ses applications à la cryptographie (algorithme de DIFFIE-HELLMAN, cryptosystème de EL GAMAL).

120 : Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

Dans cette leçon, après avoir rapidement construit $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, il faut en décrire les éléments inversibles, les diviseurs de zéro et les idéaux. Ensuite, le cas où l'entier n est un nombre premier doit être étudié. La fonction indicatrice d'EULER ainsi que le théorème chinois et sa réciproque sont incontournables.

Les applications sont très nombreuses. Les candidats peuvent, par exemple, choisir de s'intéresser à la résolution d'équations diopantiennes (par réduction modulo n bien choisi) ou bien au cryptosystème RSA.

S'ils le désirent, les candidats peuvent poursuivre en donnant une généralisation du théorème chinois lorsque deux éléments ne sont pas premiers entre eux, ceci en faisant apparaître le PGCD et le PPCM de ces éléments.

Enfin, les candidats peuvent aller plus loin en s'intéressant au calcul effectif des racines carrées dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, au logarithme discret, ou à la transformée de FOURIER rapide.

121 : Nombres premiers. Applications.

Le sujet de cette leçon, souvent appréciée des candidats, est très vaste. Elle doit donc être abordée en faisant des choix qui devront être clairement motivés. La répartition des nombres premiers doit être évoquée : certains résultats sont accessibles dans le cadre du programme du concours, d'autres peuvent être admis et cités pour leur importance culturelle. On peut définir certaines fonctions importantes en arithmétique, les relier aux nombres premiers et illustrer leurs utilisations. Il est particulièrement souhaitable de s'intéresser aussi aux aspects algorithmiques du sujet (tests de primalité). En plus d'une étude purement interne à l'arithmétique des entiers, il est important d'exhiber des applications dans différents domaines : théorie des groupes, arithmétique des polynômes, cryptographie, etc. La réduction modulo p n'est pas hors-sujet et constitue un outil puissant pour résoudre des problèmes arithmétiques simples.

122 : Anneaux principaux. Applications.

Comme l'indique son intitulé, cette leçon ne doit pas se cantonner aux aspects théoriques. L'arithmétique des anneaux principaux doit être décrite et les démonstrations doivent être maîtrisées (lemme d'EUCLIDE, lemme de GAUSS, décomposition en irréductibles, PGCD et PPCM, etc.). Les anneaux euclidiens représentent une classe importante d'anneaux principaux et l'algorithme d'EUCLIDE a toute sa place dans cette leçon pour effectuer des calculs. Les applications en algèbre linéaire doivent être mentionnées (par exemple, le lemme des noyaux ou la notion de polynôme minimal pour un endomorphisme, pour un endomorphisme relativement à un vecteur ou pour un nombre algébrique). Si les anneaux classiques $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{K}[X]$ doivent impérativement figurer, il est possible d'en évoquer d'autres (décimaux, entiers de GAUSS $\mathbf{Z}[i]$ ou d'EISENSTEIN $\mathbf{Z}[e^{2i\pi/3}]$) accompagnés d'une description de leurs inversibles, de leurs irréductibles et éventuellement d'applications à des problèmes arithmétiques (équations diophantiennes).

S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en s'intéressant à l'étude des réseaux, à des exemples d'anneaux non principaux, mais aussi à des exemples d'équations diophantiennes résolues à l'aide d'anneaux principaux. À ce sujet, il sera fondamental de savoir déterminer les unités d'un anneau, et leur rôle au moment de la décomposition en facteurs premiers. De même, le calcul effectif des facteurs invariants de matrices à coefficients dans un anneau principal peut être présenté.

123 : Corps finis. Applications.

Une construction des corps finis doit être connue et une bonne maîtrise des calculs dans les corps finis est indispensable. Les injections des divers $\mathbf{F}_q$ doivent être connues. Les applications des corps finis (y compris pour $\mathbf{F}_q$ avec q non premier !) ne doivent pas être oubliées. Par exemple, l'étude de polynômes à coefficients entiers et de leur irréductibilité peut figurer dans cette leçon. La structure du groupe multiplicatif doit aussi être connue. L'étude des carrés dans un corps fini et la résolution d'équations de degré 2 sont envisageables.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en détaillant des codes correcteurs ou en étudiant l'irréductiblilité des polynômes à coefficients dans un corps fini, ou encore en évoquant les formes quadratiques, les groupes de CHEVALLEY.

125 : Extensions de corps. Exemples et applications.

Le calcul des degrés des extensions, le théorème de la base téléscopique et ses applications à l'irréductibilité de certains polynômes, ainsi que les corps finis, sont incontournables. De même il faut savoir calculer le polynôme minimal d'un élément algébrique dans des cas simples, notamment pour quelques racines de l'unité. La leçon peut être illustrée par des exemples d'extensions quadratiques et leurs applications en arithmétique, ainsi que par des extensions cyclotomiques.

S'ils le désirent, les candidats peuvent montrer que l'ensemble des nombres algébriques forme un corps algébriquement clos et expliquer comment l'utilisation du résultant permet de calculer des polynômes annulateurs de sommes et de produits de nombres algébriques. Pour aller plus loin, les candidats peuvent parler des nombres constructibles à la règle et au compas, et éventuellement s'aventurer en théorie de GALOIS.

126 : Exemples d'équations en arithmétique.

Dans cette leçon, il est indispensable de s'intéresser à des équations sur $\mathbf{Z}$ mais aussi des équations dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et dans les corps finis. On doit présenter les notions de base servant à aborder les équations de type $ax + by = d$ (identité de BEZOUT, lemme de GAUSS). On doit présenter des exemples d'utilisation effective du lemme chinois.

Ensuite, la méthode de descente de FERMAT et l'utilisation de la réduction modulo un nombre premier p méritent d'être mis en œuvre. La leçon peut aussi dériver vers la notion de factorialité, illustrée par des équations de type MORDELL, PELL-FERMAT, et même FERMAT (pour $n = 2$, ou pour les nombres premiers de Sophie GERMAIN). La résolution des systèmes linéaires sur $\mathbf{Z}$ peut être abordée. Il est de plus naturel de s'intéresser à la résolution des systèmes de congruences, à la recherche de racines carrées dans les corps finis. Les candidats peuvent plus généralement aborder la recherche des racines des polynômes dans les corps finis.

S'il le désirent, les candidats peuvent étudier les coniques sur $\mathbf{Q}$ ou les corps finis.

141 : Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

La présentation du bagage théorique permettant de définir corps de rupture, corps de décomposition, ainsi que des illustrations dans différents corps (réel, rationnel, corps finis) sont inévitables. Les corps finis peuvent être illustrés par des exemples de polynômes irréductibles de degré 2, 3, 4 sur $\mathbf{F}_2$ ou $\mathbf{F}_3$. Il est nécessaire de présenter des critères d'irréductibilité de polynômes et des polynômes minimaux de quelques nombres algébriques.

Il est bon de savoir montrer que l'ensemble des nombres algébriques sur le corps $\mathbf{Q}$ des rationnels est un corps algébriquement clos. Le théorème de la base téléscopique, ainsi que les utilisations arithmétiques (utilisation de la divisibilité) que l'on peut en faire dans l'étude de l'irréductibilité des polynômes, est incontournable.

142 : PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.

Le champ d'étude de cette leçon ne peut se limiter au cas de $\mathbf{Z}$; il s'agit de définir et manipuler les notions de PGCD et PPCM dans un anneau factoriel et comme générateurs de sommes/intersections d'idéaux dans un anneau principal. Le candidat doit prendre soin de différencier le cadre théorique des anneaux factoriels ou principaux dans lequel sont définis les objets et dans lequel s'appliquent les énoncés des théorèmes proposés et le cadre euclidien fournissant les algorithmes. Bien sûr, la leçon peut opportunément s'illustrer d'exemples élémentaires d'anneaux euclidiens, comme $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{K}[X]$.

Une part substantielle de la leçon doit être consacrée à la présentation d'algorithmes : algorithme d'EUCLIDE, algorithme binaire, algorithme d'EUCLIDE étendu. Dans le cas des polynômes, il faut étudier l'évolution de la suite des degrés et des restes. Il est important de savoir évaluer le nombre d'étapes de ces algorithmes dans les pires cas et on peut faire le lien avec les suites de FIBONACCI.

Des applications élémentaires sont particulièrement bienvenues : calcul de relations de BEZOUT, résolutions d'équations diophantiennes linéaires, inversion modulo un entier ou un polynôme, calculs d'inverses dans les corps de ruptures, les corps finis. On peut aussi évoquer le théorème chinois effectif, la résolution d'un système de congruences et faire le lien avec l'interpolation de LAGRANGE.

Pour aller plus loin, on peut évoquer le rôle de l'algorithme d'EUCLIDE étendu dans de nombreux algorithmes classiques en arithmétique (factorisation d'entiers, de polynômes, etc). Décrire l'approche matricielle de l'algorithme d'EUCLIDE et l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ sur $\mathbf{Z}^2$ est tout à fait pertinent. On peut aussi établir l'existence d'un supplémentaire d'une droite dans $\mathbf{Z}^2$, ou d'un hyperplan de $\mathbf{Z}^n$, la possibilité de compléter un vecteur de $\mathbf{Z}^n$ en une base.

La leçon peut amener à étudier les matrices à coefficients dans un anneau principal ou euclidien, et, de manière plus avancée, la forme normale d'HERMITE et son application à la résolution d'un système d'équations diophantiennes linéaires. De même, aborder la forme normale de SMITH, et son application au théorème de la base adaptée, permet de faire le lien avec la réduction des endomorphismes *via* le théorème des invariants de similitude.

La leçon invite aussi, pour des candidats familiers de ces notions, à décrire le calcul de PGCD dans

$\mathbf{Z}[X]$ et $\mathbf{K}[X,Y]$, avec des applications à l'élimination de variables. On peut rappeler les relations entre PGCD et résultant et montrer comment obtenir le PGCD en échelonnant la matrice de SYLVESTER. Sur l'approximation diophantienne, on peut enfin envisager le développement d'un rationnel en fraction continue et l'obtention d'une approximation de PADÉ-HERMITE à l'aide de l'algorithme d'EUCLIDE, la recherche d'une relation de récurrence linéaire dans une suite ou le décodage des codes BCH.

144 : Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications

Dans cette leçon, il est indispensable de bien définir l'ordre de multiplicité d'une racine (définition algébrique et analytique, quand c'est possible). Les fonctions symétriques élémentaires et les relations entre cœfficients et racines doivent être maîtrisées et pouvoir être mises en œuvre. Des méthodes, même élémentaires, de localisation des racines ont toute leur place et peuvent déboucher sur des résultats de topologie à propos de la continuité des racines.

Il peut être pertinent d'introduire la notion de polynôme scindé et de citer le théorème de D'ALEMBERT-GAUSS. Il est apprécié de faire apparaître le lien entre la recherche des racines d'un polynôme et la réduction des matrices. Les candidats peuvent également s'intéresser aux racines des polynômes orthogonaux, ou aux règles des signes de DESCARTES et de STURM. L'étude des propriétés des nombres algébriques peuvent trouver leur place dans cette leçon. La théorie des corps et le cas particulier des corps finis peuvent aussi être évoqués de façon pertinente.

S'ils le désirent, les candidats peuvent s'intéresser à des problèmes de localisation des valeurs propres, comme les disques de GERSHGORIN.

Il ne s'agit par contre en aucun cas d'adapter le plan de la leçon 141 : l'irréductibilité des polynômes peut être évoquée mais ne doit pas être l'élément central de la leçon.

150 : Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

Le choix des exemples doit être fait avec soin, en évitant de présenter des actions dont on ne maîtrise pas les bases.

Dans un premier temps, il faut présenter différentes actions (translation à gauche, congruence, similitude, équivalence, ...) et quelques orbites. Dans chaque cas on pourra dégager d'une part des invariants simples (matrices échelonnées réduites, rang...) et d'autre part des algorithmes, comme le pivot de GAUSS. On peut détailler le cas particulier de l'action de $O_n(\mathbf{R})$ sur $S_n(\mathbf{R})$.

Les candidats peuvent s'intéresser au fait que les polynômes caractéristiques et minimaux ne suffisent pas à caractériser les classes de similitudes. Dans le cas de l'action par congruence, le théorème de SYLVESTER et son interprétation en termes de changements de bases méritent de figurer dans la leçon. Il est possible de limiter l'action aux matrices de produits scalaires et de caractériser les éléments des stabilisateurs. Si l'on veut aborder un aspect plus théorique, il est possible de faire apparaître à travers différentes actions quelques décompositions célèbres ; on peut décrire les orbites lorsque la topologie s'y prête.

S'ils le désirent, les candidats peuvent travailler sur des corps finis et utiliser le dénombrement dans ce contexte.

151 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

Dans cette leçon, il est indispensable de présenter les résultats fondateurs de la théorie des espaces vectoriels de dimension finie en ayant une idée de leurs preuves. Ces théorèmes semblent simples car ils ont été très souvent pratiqués, mais leur preuve demande un soin particulier. Il est important de savoir justifier pourquoi un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est aussi de dimension finie.

On peut montrer, sur des exemples, comment la dimension finie intervient dans la démonstration de certains résultats (récurrence sur la dimension, égalité de sous-espaces par inclusion et égalité des dimensions, isomorphisme par injectivité et dimension, etc.). À cette occasion, on pourra signaler des résultats qui ne subsistent pas en dimension infinie. Le pivot de Gauss ainsi que les diverses notions et caractérisations du rang trouvent leur place dans cette leçon. Les applications sont nombreuses : existence de polynômes annulateurs, dimension de l'espace des formes n-linéaires alternées en dimension n, isomorphisme avec le dual dans le cadre euclidien et théorème de Riesz, espaces de solutions d'équations différentielles ordinaires, caractérisation des endomorphismes diagonalisables, décomposition d'isométries en produits de réflexions, dimensions des représentations irréductibles d'un groupe fini, théorie des corps finis, etc.

Les caractérisations du rang peuvent aussi être utilisées pour démontrer l'invariance du rang par extension de corps, ou pour établir des propriétés topologiques (sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$). S'ils le désirent, les candidats peuvent déterminer des degrés d'extensions dans la théorie des corps ou s'intéresser aux nombres algébriques. Il est également possible d'explorer des applications en analyse comme les extrémas liés. Dans un autre registre, il est pertinent d'évoquer la méthode des moindres carrés dans cette leçon, par exemple en faisant ressortir la condition de rang maximal pour garantir l'unicité de la solution et s'orienter vers les techniques de décomposition en valeurs singulières pour le cas général. On peut alors naturellement analyser l'approximation d'une matrice par une suite de matrices de faible rang.

152 : Déterminant. Exemples et applications.

Dans cette leçon, il faut commencer par définir correctement le déterminant et savoir démontrer ses propriétés fondamentales (en particulier le fait que l'espace des formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n est de dimension 1). La distinction entre le déterminant d'une famille de vecteurs dans une base donnée et le déterminant d'un endomorphisme doit être comprise. L'interprétation en termes de volume est essentielle. Le calcul explicite est important, mais le jury ne peut se contenter d'un déterminant de Vandermonde ou d'un déterminant circulant. Les opérations élémentaires permettant de calculer des déterminants doivent être présentées et illustrées. Le polynôme caractéristique est incontournable (on prendra garde que $A - XI_n$ est à coefficients dans $\mathbf{K}[X]$ qui n'est pas un corps). Parmi les autres applications possibles, on peut penser aux déterminants de Gram (permettant des calculs de distances), au déterminant jacobien (utile en calcul intégral et en probabilités), à l'utilisation du déterminant en géométrie (coordonnées barycentriques, colinéarité, etc.) ou encore à son rôle dans l'étude des formes quadratiques. Il est bienvenu d'illustrer la continuité du déterminant par une application. On pourra aussi s'intéresser à sa différentielle.

Pour aller plus loin, les candidats peuvent s'intéresser aux calculs de déterminants sur $\mathbf{Z}$. Le résultant et les applications simples à l'intersection ensembliste de deux courbes algébriques planes peuvent aussi trouver leur place dans cette leçon pour des candidats ayant une pratique de ces notions.

153 : Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

Cette leçon ne doit pas être un catalogue de résultats autour de la réduction qui est ici un moyen pour démontrer des théorèmes ; les polynômes d'endomorphismes doivent y occuper une place importante. Il faut consacrer une courte partie de la leçon à l'algèbre $\mathbf{K}[u]$ et aux liens entre réduction de l'endomorphisme u et structure de l'algèbre $\mathbf{K}[u]$. Il faut connaître la dimension de $\mathbf{K}[u]$ sans hésitation. Il est ensuite possible de s'intéresser aux propriétés globales de cette algèbre (inversibles, condition nécessaire et suffisante assurant que ce soit un corps...). De même il est important de mettre en évidence les liens entre les idempotents et la décomposition en somme de sous-espaces caractéristiques.

Le lemme des noyaux, les polynômes caractéristiques et minimaux doivent figurer dans la leçon. Il faut bien préciser que, dans la décomposition de Dunford, les composantes sont des polynômes en l'endomorphisme, et en connaître les conséquences théoriques et pratiques. L'aspect *applications* est trop souvent négligé. Il est possible, par exemple, de mener l'analyse spectrale de matrices stochastiques. On attend d'un candidat qu'il soit en mesure, pour une matrice simple de justifier la diagonalisabilité et de déterminer un polynôme annulateur (voire minimal). Il est bien sûr important de ne pas faire de confusion entre diverses notions de multiplicité pour une valeur propre λ donnée (algébrique ou géométrique). Enfin, calculer A^k ne nécessite pas, en général, de réduire A (la donnée d'un polynôme annulateur de A suffit souvent). Il est possible d'envisager des applications au calcul d'exponentielles de matrices.

S'il le souhaite, le candidat pourra étudier des équations matricielles et de calcul fonctionnel, avec par exemple l'étude de l'extraction de racines ou du logarithme.

154 : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Dans cette leçon, il faut présenter des propriétés de l'ensemble des sous-espaces stables par un endomorphisme. Des études détaillées sont les bienvenues, par exemple dans le cas d'une matrice diagonalisable ou dans le cas d'une matrice nilpotente d'indice maximum.

L'étude des endomorphismes cycliques et des endomorphismes semi-simples trouvent tout à fait leur place dans cette leçon. Dans le cas des corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, on pourra, si on le souhaite, caractériser ces derniers par la fermeture de leur orbite.

La réduction des endomorphismes normaux et l'exemple de résolutions d'équations matricielles peuvent être présentés en applications.

La décomposition de Frobenius constitue également une application intéressante de cette leçon. Il ne faut pas oublier d'examiner le cas des sous-espaces stables par des familles d'endomorphismes. Ceci peut déboucher par exemple sur des endomorphismes commutants entre eux ou sur la théorie des représentations.

155 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Dans cette leçon, on attend des exemples naturels d'endomorphismes diagonalisables et des critères de diagonalisabilité. On doit notamment savoir expliquer pourquoi l'application induite par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace stable est encore diagonalisable. Il ne faut pas oublier de parler du cas des endomorphismes symétriques. On peut étudier certaines propriétés topologiques en prenant le soin de donner des précisions sur le corps $\mathbf{K}$ et la topologie choisie pour $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Les candidats doivent disposer de méthodes efficaces de calcul de l'exponentielle d'un endomorphisme diagonalisable. On peut dénombrer les endomorphismes diagonalisables dans les corps finis, ou possédant des propriétés données, liées à la diagonalisation.

S'ils le désirent, les candidats peuvent s'intéresser aux liens qui peuvent aussi être fait avec la théorie des représentations et la transformée de Fourier rapide.

156 : Exponentielle de matrices. Applications.

Bien que ce ne soit pas une leçon d'analyse, il faut toutefois pouvoir justifier clairement la convergence de la série exponentielle.

Les questions de surjectivité ou d'injectivité doivent être abordées. Par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle l'exponentielle d'une matrice à coefficients réels ? La matrice définie par blocs $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ est-elle l'exponentielle d'une matrice à coefficients réels ?

La décomposition de Dunford multiplicative (décomposition de Jordan) de $\exp(A)$ trouve toute son utilité dans cette leçon. L'exponentielle fait bon ménage avec la décomposition polaire dans bon nombre de problèmes sur les sous-groupes du groupe linéaire. L'étude du logarithme (quand il est défini) peut être menée dans cette leçon.

Il est bon de connaître l'image par exponentielle de certains sous-ensembles de matrices (ensemble des matrices symétriques, hermitiennes, ou antisymétriques).

Les applications aux équations différentielles méritent d'être présentées sans toutefois constituer l'essentiel de la leçon. On pourra par exemple faire le lien entre spectre et comportement asymptotique, mais le jury déconseille aux candidats de proposer ce thème dans un développement de cette leçon, sauf à avoir bien compris comment les apports algébriques permettent ici de simplifier les conclusions analytiques.

S'ils le désirent, les candidats peuvent s'aventurer vers les sous-groupes à un paramètre du groupe linéaire (on peut alors voir si ces sous-groupes constituent des sous-variétés fermées de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$) ou vers les algèbres de Lie.

157 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Il est indispensable de connaître les polynômes caractéristiques et minimaux d'un endomorphisme nilpotent et de savoir justifier son caractère trigonalisable. Il est bon de savoir expliquer pourquoi l'application induite par un endomorphisme trigonalisable (respectivement nilpotent) sur un sous-espace stable est encore trigonalisable (respectivement nilpotent). L'utilisation des noyaux itérés est fondamentale dans cette leçon, par exemple pour déterminer si deux matrices nilpotentes sont semblables. Il est intéressant de présenter des conditions suffisantes de trigonalisation simultanée ; l'étude des endomorphismes nilpotents et des endomorphismes cycliques a toute sa place dans cette leçon. L'étude des nilpotents en dimension 2 débouche naturellement sur un problème de quadriques et l'étude sur un corps fini donne lieu à de jolis problèmes de dénombrement.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aussi présenter la décomposition de Jordan et la décomposition de Frobenius, ou des caractérisations topologiques des endomorphismes nilpotents, ou encore des propriétés topologiques de l'ensemble des endomorphismes nilpotents.

158 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

Le théorème spectral est indispensable dans cette leçon sans toutefois constituer un développement consistant. Une place importante mérite d'être faite au cas particulier des matrices symétriques positives et définies positives ; les candidats doivent connaître leurs propriétés fondamentales, leur rôle, et la structure de leur ensemble. La notion de signature pourra être présentée en montrant comment elle détermine la classe de congruence d'une matrice symétrique réelle. L'action du groupe linéaire et du groupe orthogonal sur l'espace des matrices symétriques peut donner un cadre naturel à cette leçon. Le lien avec les formes quadratiques et les formes hermitiennes est incontournable. L'orthogonalisation simultanée est un résultat important de cette leçon. Il faut en connaître les applications géométriques aux quadriques.

Les candidats familiers avec ces notions pourront illustrer la leçon en évoquant le cas des matrices de covariance de vecteurs aléatoires et discuter les conditions en assurant le caractère inversible.

Une discussion de la décomposition de Cholesky, qui a de nombreuses applications pour le calcul scientifique (en lien avec la résolution de systèmes linéaires ou de problèmes de moindres carrés) ou en probabilités (construction d'un vecteur gaussien de matrice de covariance donnée à partir d'un vecteur gaussien de matrice de covariance identité), peut mériter sa place dans cette leçon. On pourra également évoquer la décomposition en valeurs singulières d'une matrice (particulièrement importante pour le traitement massif de données).

159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

Il est important de bien placer la thématique de la dualité dans cette leçon ; celle-ci permet de mettre en évidence des correspondances entre un morphisme et son morphisme transposé, entre un sous-espace et son orthogonal (canonique), entre les noyaux et les images ou entre les sommes et les intersections. Bon nombre de résultats d'algèbre linéaire se voient dédoublés par cette correspondance. Le lien entre base duale et fonctions de coordonnées doit être parfaitement connu. Le passage d'une base à sa base duale ou antéduale, ainsi que les formules de changement de base, doivent être maîtrisés. On pourra s'intéresser aux cas spécifiques où il existe un isomorphisme naturel entre l'espace et son dual (cas euclidien, cas des matrices).

Savoir calculer la dimension d'une intersection d'hyperplans via la dualité est important dans cette leçon. L'utilisation des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes permet facilement d'obtenir les équations d'un sous-espace vectoriel ou d'exhiber une base d'une intersection d'hyperplans.

Cette leçon peut être traitée sous différents aspects : géométrique, algébrique, topologique ou analytique. Il faut que les développements proposés soient en lien direct avec la leçon. Enfin rappeler que la différentielle d'une fonction à valeurs réelles est une forme linéaire semble incontournable.

Il est possible d'illustrer la leçon avec un point de vue probabiliste, en rappelant que la loi d'un vecteur aléatoire X est déterminée par les lois unidimensionnelles de $X \cdot u$ pour tout vecteur u.

160 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

Dans cette leçon, le caractère euclidien de l'espace est essentiel pour que l'endomorphisme soit remarquable. Le théorème spectral pour les auto-adjoints et la réduction des endomorphismes orthogonaux sont des résultats incontournables. Le jury met les candidats en garde sur le fait que le lemme des noyaux ou la décomposition de Dunford ne sont pas des développements adaptés à cette leçon. En revanche, l'utilisation du fait que l'orthogonal d'un sous-espace stable par un endomorphisme est stable par l'adjoint doit être mis en valeur. De même la réduction d'endomorphismes normaux peut être évoquée.

L'étude des projections orthogonales (en lien ave le calcul de distances), des rotations, des réflexions, des renversements, etc. fournit des exemples dignes d'intérêt. Une illustration pertinente peut s'appuyer sur la description de problèmes de moindres carrés en faisant ressortir le rôle de l'hypothèse de rang plein de A sur le caractère inversible de $A^\intercal A$.

161 : Distances et isométries d'un espace affine euclidien.

Cette leçon ne doit pas se restreindre aux seuls cas des dimensions 2 et 3, même s'il est naturel que ceux-ci y occupent une place importante. La classification des isométries en dimension 2 et 3 est exigible. En dimension 3, il faut savoir classifier les rotations et connaître les liens avec la réduction. On peut aussi penser aux isométries laissant stables certains objets en dimension 2 et 3. Il faut savoir prouver qu'une isométrie est affine, pouvoir donner des générateurs du groupe des isométries affines et savoir composer des isométries affines.

Les candidats peuvent en outre parler de la définition de la distance, de la distance à un sous-espace vectoriel et de déterminant de Gram. Les groupes de similitude peuvent également être abordés.

S'ils le désirent, les candidats peuvent évoquer l'interprétation de l'écart-type comme une distance, et présenter la matrice de covariance comme un exemple pertinent de matrice de Gram. Ainsi, les déterminants de Gram permettent de calculer l'erreur commise dans le cadre de prédictions affines.

162 : Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

Dans cette leçon, les techniques liées au simple pivot de Gauss constituent l'essentiel des attendus. Il est impératif de faire le lien avec la notion de système échelonné (dont on donnera une définition précise et correcte) et de situer l'ensemble dans le contexte de l'algèbre linéaire, sans oublier la dualité. Un point de vue opératoire doit accompagner l'étude théorique et l'intérêt algorithmique des méthodes présentées doit être expliqué, éventuellement en l'illustrant par des exemples simples (où une résolution explicite est parfois accessible).

Parmi les conséquence théoriques, les candidats peuvent notamment donner des systèmes de générateurs de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$. Ils est aussi pertinent de présenter les relations de dépendance linéaire sur les colonnes d'une matrice échelonnée qui permettent de décrire simplement les orbites de l'action à gauche de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{K})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ donnée par $(P, A) \mapsto PA$.

S'ils le désirent, les candidats peuvent exploiter les propriétés des systèmes d'équations linéaires pour définir la dimension des espaces vectoriels et obtenir une description de l'intersection de deux sous-espaces vectoriels donnés par des systèmes générateurs, ou d'une somme de deux sous-espaces vectoriels donnés par des équations.

De même, des discussions sur la résolution de systèmes sur $\mathbf{Z}$ et la forme normale de Hermite peuvent trouver leur place dans cette leçon. Enfin, il est possible de présenter les décompostions LU et de Choleski, en évaluant le coût de ces méthodes ou encore d'étudier la résolution de l'équation normale associée aux problèmes des moindres carrés et la détermination de la solution de norme minimale par la méthode de décomposition en valeurs singulières.

170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

L'intitulé implique implicitement que le candidat ne doit pas se contenter de travailler sur $\mathbf{R}$. Le candidat pourra parler de la classification des formes quadratiques sur le corps des complexes et sur les corps finis. L'algorithme de Gauss doit être énoncé et pouvoir être mis en œuvre sur une forme quadratique simple.

Les notions d'isotropie et de cône isotrope sont un aspect important de cette leçon. On pourra rattacher cette notion à la géométrie différentielle.

171 : Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

Dans cette leçon, la loi d'inertie de Sylvester doit être présentée ainsi que l'orthogonalisation simultanée. L'algorithme de Gauss doit être énoncé et pouvoir être expliqué sur une forme quadratique de $\mathbf{R}^3$; le lien avec la signature doit être clairement énoncé et la signification géométrique des deux entiers r et s composant la signature d'une forme quadratique réelle doit être expliqué. La différentielle seconde d'une fonction de plusieurs variables est une forme quadratique importante qui mérite d'être présentée dans cette leçon.

La définition et les propriétés classiques des coniques d'un plan affine euclidien doivent être connues. On peut présenter les liens entre la classification des formes quadratiques et celles des coniques ; de même il est intéressant d'évoquer le lien entre le discriminant de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ et la signature de la forme quadratique $ax^2 + bxy + cy^2$.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aussi aller vers la théorie des représentations et présenter l'indicatrice de Schur-Frobenius qui indique si une représentation donnée peut être réalisée sur le corps des réels.

181 : Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

Dans cette leçon, la notion de coordonnées barycentriques est incontournable ; des illustrations dans le triangle (coordonnées barycentriques de certains points remarquables) sont envisageables. Les candidats doivent savoir reconnaître des lignes de niveau et des lieux de points en utilisant des coordonnées barycentriques. Il est important de parler d'enveloppe convexe et de savoir dessiner l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points dans le plan ; le théorème de Gauss-Lucas – même s'il ne constitue pas un développement substantiel – trouve parfaitement sa place dans cette leçon. Il semble approprié d'évoquer les points extrémaux, ainsi que des applications qui en résultent. Par ailleurs, il est important d'avoir compris le lien entre fonctions convexes et ensembles convexes.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en présentant le lemme de Farkas, le théorème de séparation de Hahn-Banach, les théorèmes de Helly et de Caratheodory. Il ne faut pas hésiter à donner des exemples concrets de parties convexes, par exemple dans l'espace vectoriel des formes bilinéaires symétriques, ce qui permet d'évoquer le théorème de Maschke.

190 : Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

Il est nécessaire de dégager clairement différentes méthodes de dénombrement et de les illustrer d'exemples significatifs. De nombreux domaines de mathématiques sont concernés par des problèmes de dénombrement, cet aspect varié du thème de la leçon doit être mis en avant. L'utilisation de séries génératrices est un outil puissant pour le calcul de certains cardinaux. De plus, il est naturel de calculer des cardinaux classiques et certaines probabilités. Il est important de connaître l'interprétation ensembliste de la somme des coefficients binomiaux et ne pas se contenter d'une justification par le binôme de Newton. L'introduction des corps finis (même en se limitant aux cardinaux premiers) permet de créer un lien avec l'algèbre linéaire. Les actions de groupes peuvent également conduire à des résultats remarquables.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aussi présenter des applications de la formule d'inversion de Möbius ou de la formule de Burnside. Des candidats ayant un bagage probabiliste pourront explorer le champ des permutations aléatoires, en présentant des algorithmes pour générer la loi uniforme sur le groupe symétrique S_n et analyser certaines propriétés de cette loi uniforme (points fixes, cycles, limite $n \to +\infty$...).

191 : Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie

Cette leçon ne peut se réduire à une concaténation des contenus des énoncés « Applications des nombres complexes à la géométrie » et « Utilisation des groupes en géométrie » utilisés lors de sessions antérieures. Le jury souhaite avec cet intitulé proposer une ouverture large autour du thème de la géométrie. Les candidats sont libres de présenter des résultats et des exemples très variés, issus de problématiques géométriques, certains ayant d'ailleurs vocation naturelle à être réinvestis avec profit pour d'autres leçons. L'objectif n'est pas de couvrir le plus d'aspects possible, mais plutôt d'en mettre certains en avant tout en motivant les choix personnels des candidats. À partir du moment où ils sont de nature géométrique, tous les éléments du programme peuvent être pertinents. En contrepartie de cette liberté laissée aux candidats, la difficulté consiste à parvenir à structurer la présentation des objets et des notions choisies. Ainsi, plusieurs approches sont également valables pour organiser cette leçon, par exemple :

- en regroupant les outils par « famille » : outils matriciels (repérage des points par des matrices colonnes, des transformations par des matrices, rang, réduction, etc.), outils polynomiaux (formes quadratiques, déterminant, résultant, etc.), outils structurels (groupes, corps) ;
- ou par niveau d'abstraction/de généralité (nombres réels, complexes, matrices, groupes...) ;
- ou par type d'objectifs (identifier des objets géométriques, les mesurer, les classifier, démontrer des résultats en utilisant des transformations géométriques...)

Il est aussi possible de se focaliser sur un seul type d'outils (par exemple algèbre linéaire, géométrie affine ou groupes) en détaillant plusieurs applications en géométrie ou sur une question géométrique fouillée à l'aide de diverses techniques (par exemple sur des problèmes impliquant des figures géométriques comme les cercles et triangles, les polygones et polyèdres réguliers, etc.). Des situations « élémentaires », dans le plan, permettent certainement de mettre en valeur des connaissances et un recul mathématique. Il faut bien éviter l'écueil d'un catalogue fastidieux ou celui qui consisterait à recycler directement le contenu d'une autre leçon avec un vague habillage géométrique. Il est attendu que le candidat puisse expliquer clairement chaque problème géométrique considéré, sa motivation et l'intérêt des outils utilisés pour le résoudre.

Parmi les nombreux éléments qui peuvent être discutés, on peut indiquer :

- les notions de distance, aire, volume. Notamment les propriétés de la matrice de GRAM, le lien entre déterminant et aire d'un parallélogramme ou volume d'un parallélépipède, la construction du produit vectoriel et du produit mixte,... peuvent être exploités avec pertinence dans cette leçon. On peut ainsi être amené à étudier l'aire balayée par un arc paramétré du plan, la position d'un point par rapport à un cercle circonscrit à un triangle, etc. Le déterminant de CAYLEY-MENGER permet de mettre en évidence des conditions pour que $n+1$ points de $\mathbf{R}^n$ forment une base affine, ou que $n+2$ points de $\mathbf{R}^n$ soient cocycliques.
- l'apport de l'algèbre linéaire à la géométrie. On peut ainsi exploiter le calcul matriciel et les techniques de réduction pour mettre en évidence des informations de nature géométrique (avec les exemples fondamentaux des homothéties, projections, symétries, affinités, rotations, la classification des isométries vectorielles, etc.). On peut être alors amené à présenter le théorème de CARTAN-DIEUDONNÉ sur la décomposition d'isométries euclidiennes en produit de réflexions ou encore évoquer une (ou des) interprétation(s) géométrique(s) de la décomposition en valeurs singulières. Dans cette même veine, la leçon peut être orientée vers la géométrie affine, en s'adossant à la théorie des espaces vectoriels pour définir certains objets (espaces et sous-espaces affines, applications affines, repères affines, etc), ce qui permet, par exemple, d'établir ainsi certains résultats classiques, comme les théorèmes de THALÈS, PAPPUS, DESARGUES,...
- l'analyse des formes quadratiques permet d'aborder des problèmes géométriques : étude des coniques, quadriques, classification des quadriques de $\mathbf{R}^n$, interprétation géométrique de la signature, application des méthodes de réduction, etc.
- la théorie des groupes est un champ naturel pour cette leçon (mais qui n'est cependant pas indispensable) : groupes de transformations (isométries, déplacements, similitudes, translations), composition de transformations, mise en évidence d'invariants fondamentaux (angle, birapport, excentricité d'une conique). Il est possible de se focaliser sur des groupes de transformations préservant une certaine structure géométrique et en distinguant parmi eux les groupes finis (groupes d'isométries classiques), les groupes discrets infinis (avec des translations, groupes de pavages) et, pour aller plus loin, les groupes continus (groupes de LIE).
- les techniques de convexité constituent aussi un champ fructueux : le théorème de séparation par un hyperplan dans $\mathbf{R}^n$ de HAHN-BANACH et, en corollaire, le théorème de HELLY permettent par exemple d'établir des propriétés intéressantes sur les cordes de convexes compacts.
- certains candidats peuvent trouver intérêt à aborder les questions d'intersection de courbes polynomiales, qui permettent notamment de mettre en œuvre le théorème de BEZOUT et des méthodes exploitant la notion de résultant.
- un grand nombre de problèmes de géométrie peuvent être traités en exploitant le formalisme des nombres complexes. Il est tout à fait approprié d'évoquer l'étude des inversions et, en particulier la possibilité de ramener un cercle à une droite et inversement ; la formule de PTOLÉMÉE illustre bien l'utilisation de cet outil. On peut parler des suites définies par récurrence par une homographie et leur lien avec la réduction dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ et aborder la construction de la sphère de RIEMANN.
- les problématiques de la construction à la règle et au compas constituent un autre axe pertinent pour cette leçon, avec le théorème de WANTZEL, et peuvent conduire à s'intéresser à des extensions de corps.

Comme dans le cas des autres leçons, il est tout à fait bienvenu de chercher à illustrer cette leçon par des exemples issus de l'analyse, des probabilités, de la statistique (par exemple en évoquant l'interprétation géométrique de l'analyse en composantes principales), du calcul formel (par exemple avec les applications du résultant) ou du calcul scientifique (par exemple en présentant des problématiques de géométrie computationnelle, comme le calcul d'enveloppe convexe, les algorithmes de triangulation DELAUNAY, les diagrammes de VORONOI...). Les thèmes en lien avec la géométrie projective ou la géométrie algébrique peuvent permettre à certains candidats de présenter des résultats très avancés. Cette leçon nécessite une préparation très personnelle et réfléchie de la part des candidats. Les exemples et les résultats qui y sont présentés ont vocation à inciter les candidats à enrichir les autres leçons de cette épreuve d'exemples issus de la géométrie.

B.3 L'épreuve orale d'analyse et probabilités

La plupart des commentaires sur les leçons d'Analyse et Probabilités sont structurés en deux parties : la première présente ce que le jury considère comme le socle de la leçon ; la seconde partie propose des suggestions pour sortir de ce socle de base, éventuellement en allant au-delà des contours stricts du programme. Il ne s'agit que de suggestions. En particulier, s'aventurer sur des notions qui ne sont pas explicitement au programme du concours est un choix qui doit être réfléchi et qui réclame, bien entendu, de maîtriser ces notions (et, cela va de soi, celles qui sont en amont). Le jury rappelle que ces excursions au delà du programme ne sont que des options ouvertes et qu'elles ne sont pas nécessaires pour briguer d'*excellentes* notes. Il vaut bien mieux présenter deux développements classiques, pertinents (et notamment en rapport très clair avec la leçon) et maîtrisés tant sur le fond que la présentation (en respectant bien les 15 minutes allouées à cette partie de l'épreuve) plutôt que de s'aventurer sur des terrains où l'on risque de manquer d'adresse et de recul.

Indépendamment du positionnement du niveau, déjà évoqué, le candidat doit sélectionner des développements pertinents relativement au thème de la leçon. Le jury peut avoir un jugement sévère lorsque l'intersection avec le titre du sujet est anecdotique. Certains développements font l'objet de réutilisations abusives, qui peuvent être sans commune mesure avec leur importance mathématique, et surtout qui se révèlent parfois hors de propos (on peut citer par exemple « ellipsoïde de JOHN », « polynômes de BERNSTEIN », « base hilbertienne de polynômes sur L^2 avec poids d'ordre exponentiel », « PROCESSUS DE GALTON-WATSON »,...) et conduisent à des hors-sujets pénalisants. Si certains thèmes peuvent naturellement être évoqués dans plusieurs leçons, il faut bien prendre garde au point de vue que l'intitulé appelle. La pertinence des développements proposés dans le cadre de la leçon, qu'il ne faut pas hésiter à défendre dans la toute première phase de l'épreuve, fait partie des éléments de notation. Les candidats doivent éviter de se lancer dans des développements difficiles pour lesquels ils ne sont manifestement pas suffisament armés (« la densité des fonctions continues nulle part dérivables », « théorème de RIESZ-FISCHER »...), une approche de l'épreuve qui ne peut être que contre-productive.

201 : Espaces de fonctions. Exemples et applications.

Le candidat doit choisir soigneusement le niveau auquel il souhaite se placer et bien délimiter le champ qu'il se propose d'explorer. Le jury attend que les candidats aient réfléchi à leur choix et les illustrent avec des applications et exemples, ce qui parfois peut manquer dans la présentation.

Les candidats peuvent se concentrer dans un premier temps sur les espaces normés composés de fonctions continues sur $\mathbf{R}$ ou une partie compacte de $\mathbf{R}$ et les propriétés de l'espace selon la norme dont il est muni. La norme $\|\cdot\|_\infty$ est naturellement associée à la convergence uniforme dont il faut avoir assimilé les bases (en particulier, le jury attend une maîtrise du fait qu'une limite uniforme de fonctions continues est continue). On peut aussi envisager les variantes faisant intervenir une ou plusieurs dérivées.

Les espaces de HILBERT de fonctions comme l'espace des fonctions L^2 constituent ensuite une ouverture déjà significative. Pour aller plus loin, d'autres espaces de BANACH usuels tels que les espaces L^p ont tout à fait leur place dans cette leçon, ainsi que les espaces de SOBOLEV, certains espaces de fonctions holomorphes (HARDY, BERGMAN), ou dans une autre direction, la structure de l'espace de SCHWARTZ $\mathscr{S}(\mathbf{R})$ ou de l'espace des fonctions C^∞ à support compact sur $\mathbf{R}$ peuvent offrir des ouvertures de très bon niveau.

Il est tout à fait bienvenu de discuter les relations entre ces espaces, notamment de densité et de présenter des applications de ces propriétés.

203 : Utilisation de la notion de compacité.

Cette leçon ne porte pas sur la compacité en général mais sur son *utilisation*. Il semble important de parler des théorèmes de HEINE et de ROLLE dont la démonstration doit être connue. Le candidat doit savoir que les boules fermées d'un espace vectoriel normé sont compactes si et seulement si l'espace est de dimension finie (théorème de compacité de RIESZ). Il est également souhaitable de faire figurer un énoncé du théorème d'ASCOLI dont la preuve doit être connue. Des exemples significatifs d'utilisation de la compacité comme le théorème de STONE-WEIERSTRASS, des théorèmes de point fixe, voire l'étude qualitative d'équations différentielles, sont tout à fait pertinents. Le rôle de la compacité pour des problèmes d'existence d'extrema mériterait d'être davantage étudié. S'il est important que les candidats aient une vision générale de la compacité, il est tout à fait envisageable qu'une leçon ne présente des applications que dans le cadre des espaces métriques.

Pour aller plus loin, les familles normales de fonctions holomorphes fournissent des exemples fondamentaux d'utilisation de la compacité. La caractérisation de la compacité dans les espaces L^p peut aussi tout à fait illustrer cette leçon. Les opérateurs auto-adjoints compacts sur un espace de HILBERT relèvent également de cette leçon, et il est possible de développer l'analyse de leurs propriétés spectrales, éventuellement en exploitant un exemple particulier.

204 : Connexité. Exemples et applications.

L'objectif de cette leçon est de dégager clairement l'intérêt de la notion de connexité en analyse. Deux aspects sont notamment à mettre en valeur dans cette leçon : le fait que la connexité est préservée par image continue avec les théorèmes du type « valeurs intermédiaires » qui en résultent et le rôle clef de la connexité dans le passage du local au global, par exemple en calcul différentiel, voire pour les fonctions holomorphes. Il est important de présenter des résultats naturels dont la démonstration utilise la connexité. La stabilité par image continue, la structure des ouverts de $\mathbf{R}$, l'identification des connexes de $\mathbf{R}$ sont des résultats incontournables.

La caractérisation des fonctions constantes parmi les fonctions différentiables sur un ouvert connexe trouve tout à fait sa place dans cette leçon, incluant éventuellement la version « distributions » de ce résultat.

La connexité par arcs permet, lorsqu'elle se produit, de conclure immédiatement à la connexité. Toutefois, il est important de bien distinguer connexité et connexité par arcs en général (avec des exemples compris par le candidat), et il est pertinent de présenter des situations où ces deux notions coïncident. La notion de composante connexe doit également trouver sa place dans cette leçon (pouvant être illustrée par des exemples matriciels). L'illustration géométrique de la connexité est un point apprécié par le jury.

Des exemples issus d'autres champs (algèbre linéaire notamment) sont valorisés. Pour aller plus loin, le principe des zéros isolés, son lien avec le prolongement analytique, ainsi que des illustrations avec des fonctions spéciales telles que ζ, θ, Γ, ou encore le principe du maximum, fournissent des thèmes très riches pour cette leçon.

Dans une autre direction, on peut s'intéresser aux solutions d'une équation différentielle non linéaire avec le passage d'un théorème d'existence et d'unicité local à un théorème d'existence et d'unicité de solutions maximales.

Enfin, le choix des développements doit être pertinent, même s'il fait aussi appel à des thèmes différents ; on peut ainsi suggérer le théorème de RUNGE pour les candidats qui le souhaitent. Pour aller plus loin, on peut éventuellement évoquer certaines parties totalement discontinues remarquables telles que l'ensemble triadique CANTOR et ses applications.

205 : Espaces complets. Exemples et applications.

L'un des intérêts essentiels de la complétude est de fournir des théorèmes d'existence : que ce soit tout simplement dans **R** ou **C** mais aussi dans certains espaces de dimension infinie (par exemple dans certains espaces de fonctions). Il est important de présenter des exemples d'espaces usuels, dont on sait justifier la complétude. Un candidat à l'agrégation doit manifester une bonne maîtrise de la convergence uniforme. On peut évoquer dans cette leçon des théorèmes classiques tels que le théorème du point fixe des applications contractantes et le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ.

Les espaces L^p sont des exemples pertinents qui ne sont pas sans danger pour des candidats aux connaissances fragiles (les $\ell^p(\mathbf{N})$, peut-être plus accessibles, fournissent déjà de beaux exemples).

On ne s'aventurera pas à parler du théorème de BAIRE sans applications pertinentes et maîtrisées (elles sont nombreuses). Un développement autour des fonctions continues nulle part dérivables est très souvent proposé, mais extrêmement rares sont les candidats qui arrivent avec succès jusqu'au bout. Le jury attire l'attention sur le fait qu'il existe des preuves constructives de ce résultat qui n'utilisent pas le théorème de BAIRE.

La construction de l'espace $H_0^1(]0,1[)$ pourra être abordée par les candidats qui le souhaitent avec des applications illustrant l'intérêt de cet espace.

207 : Prolongement de fonctions. Exemples et applications.

Cette leçon de synthèse offre de très nombreuses orientations possibles et le choix du niveau auquel se place le candidat doit être bien clair.

Il ne faut pas hésiter à commencer par des exemples très simples tels que le prolongement en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ avec des exemples d'utilisations, mais il faut aller plus loin que le simple prolongement par continuité. Trop de candidats ne connaissent pas bien les résultats élémentaires autour du prolongement par continuité en un point d'une fonction d'une variable réelle, ou les résultats autour du prolongement C^1 (lorsque la dérivée a une limite par exemple).

Pour aller plus loin, le prolongement analytique relève bien sûr de cette leçon, et des exemples sur des fonctions classiques (ζ, Γ,...) seront appréciés. On peut également parler de l'extension à L^2, voire à l'espace des distributions tempérées, de la transformation de FOURIER. Le théorème de HAHN-BANACH, dans le cas séparable voire simplement en dimension finie, peut être un exemple de résultat très pertinent. La résolution d'un problème de DIRICHLET, correctement formulé, associé à une équation aux dérivées partielles classique, vu comme prolongement de la donnée au bord, peut être envisagée.

208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

Le jury rappelle qu'une telle leçon doit contenir beaucoup d'illustrations et d'exemples, notamment avec quelques calculs élémentaires de normes subordonnées (notion qui met en difficulté un trop grand nombre de candidats). Le lien avec la convergence des suites du type $X_{n+1} = AX_n$ doit être connu (et éventuellement illustré, sans que cela puisse être mis au cœur de la leçon, de considérations d'analyse numérique matricielle). Lors du choix de ces exemples, le candidat veillera à ne pas mentionner des exemples pour lesquels il n'a aucune idée de leur pertinence et à ne pas se lancer dans des développements trop sophistiqués.

Il faut savoir énoncer et justifier le théorème de RIESZ sur la compacité de la boule unité fermée d'un espace vectoriel normé. Le théorème d'équivalence des normes en dimension finie, ou le caractère fermé de tout sous-espace de dimension finie d'un espace normé, sont des résultats fondamentaux à propos desquels les candidats doivent se garder des cercles vicieux. Des exemples d'espaces vectoriels normés de dimension infinie ont leur place dans cette leçon et il faut connaître quelques exemples de normes usuelles non équivalentes, notamment sur des espaces de suites ou des espaces de fonctions et également d'applications linéaires qui ne sont pas continues. On peut aussi illustrer le théorème de RIESZ sur des exemples simples dans le cas des espaces classiques de dimension infinie.

Les espaces de HILBERT ont également leur place dans cette leçon, mais le jury met en garde contre l'écueil de trop s'éloigner du cœur du sujet.

209 : Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples et applications.

Ce intitulé permet de mettre en lumière des points de vue de natures différentes, avec des points d'accès de niveaux aussi variés. Bien entendu l'approximation polynomiale ou par polynômes trigonométriques reste un des thèmes centraux de cette leçon et un certain nombre de classiques trouveront à s'exprimer, comme par exemple l'approximation par les polynômes de BERNSTEIN, éventuellement agrémentée d'une estimation de la vitesse de convergence (en termes de module de continuité).

Il n'est pas absurde de voir la formule de TAYLOR comme une approximation locale d'une fonction par des polynômes mais on veillera à ne pas trop s'attarder sur ce point. Les polynômes d'interpolation de LAGRANGE peuvent être mentionnés à condition de maîtriser la différence fondamentale entre interpolation et approximation.

L'approximation d'une fonction par des fonctions de classe C^∞ par convolution est une technique qui s'intègre parfaitement dans ce nouvel intitulé et qui doit être illustrée d'applications (approximation de fonctions indicatrices, obtention, par densité, d'inégalités ou de résultats asymptotiques, résolution de l'équation de la chaleur,...)

Dans la même veine, pour aller plus loin, le théorème de FEJÉR (versions L^1, L^p ou $C(\mathbf{T})$) offre la possibilité d'un joli développement, surtout s'il est agrémenté d'applications (polynômes trigonométriques lacunaires, injectivité de la transformée de FOURIER sur L^1,...). La convolution avec d'autres noyaux (DIRICHLET, JACKSON) est aussi une source de résultats intéressants.

213 : Espaces de HILBERT. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

Il est important de faire la différence entre base algébrique et base hilbertienne, notions qui mettent en difficulté nombre de candidats, même si de réels efforts ont pu être constatés lors des dernières sessions. La formule de la projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie d'un espace de HILBERT doit absolument être connue de même que l'interprétation géométrique de la méthode de GRAM-SCHMIDT. La leçon doit être illustrée par des exemples de bases hilbertiennes (polynômes orthogonaux, séries de FOURIER, entre autres).

Les candidats doivent s'intéresser au sens des formules

$$x = \sum_{n \geqslant 0} (x|e_n)e_n \quad \text{et} \quad ||x||^2 = \sum_{n \geqslant 0} |(x|e_n)|^2$$

en précisant les hypothèses sur la famille $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et en justifiant la convergence. La notation $\sum_{n\in\mathbf{Z}}$ doit être manipulée avec précaution : beaucoup de candidats l'introduisent mais sans en maîtriser les subtilités.

Si le théorème de projection sur les convexes fermés (ou sur un sous-espace vectoriel fermé) d'un espace de HILBERT H est régulièrement mentionné, ses conséquences les plus directes (théorème de projection de RIESZ, orthogonal de l'orthogonal et densité d'un sous-espace via la nullité de son orthogonal,...) le sont malheureusement nettement moins.

La notion d'adjoint d'un opérateur continu peut alors être introduite et, pour aller plus loin, le théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints compacts peut alors être abordé.

Pour aller plus loin dans une autre direction, le programme permet d'aborder la résolution et l'approximation de problèmes aux limites en dimension 1 par des arguments exploitant la formulation variationnelle de ces équations. La construction de l'espace de HILBERT–SOBOLEV $H_0^1(]0,1[)$ pourra donc éventuellement être abordée, ainsi que le théorème de LAX-MILGRAM avec des applications pertinentes. Plus généralement, l'optimisation de fonctionnelles convexes sur les espaces de HILBERT peut être explorée.

214 : Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

Il s'agit d'une leçon qui exige une bonne maîtrise du calcul différentiel. Même si le candidat ne propose pas ces thèmes en développement, on est en droit d'attendre de lui des idées de démonstration des deux théorèmes fondamentaux qui donnent son intitulé à la leçon. Il est indispensable de savoir mettre en pratique le théorème des fonctions implicites au moins dans le cas de deux variables réelles. On attend des applications en géométrie différentielle notamment dans la formalisation de la méthode des multiplicateurs de Lagrange. En ce qui concerne la preuve du théorème des extrema liés, la présentation de la preuve par raisonnement « sous-matriciel » est souvent obscure ; on privilégiera si possible une présentation géométrique s'appuyant sur l'espace tangent. Plusieurs inégalités classiques de l'analyse peuvent se démontrer avec ce point de vue : arithmético-géométrique, Hölder, Carleman, Hadamard,...

Pour aller plus loin, l'introduction des sous-variétés est naturelle dans cette leçon. Il s'agit aussi d'agrémenter cette leçon d'exemples et d'applications en géométrie, sur les courbes et les surfaces.

215 : Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

Cette leçon requiert une bonne maîtrise de la notion de différentielle première et de son lien avec les dérivées partielles, mais aussi de ce qui les distingue. Beaucoup de candidats sont mis en difficulté sur les concepts de base du calcul différentiel et ces notions sont à consolider, au-delà de cette leçon en particulier. On doit savoir trouver la différentielle d'applications classiques, comme, par exemple, $M \in GL_n(\mathbf{R}) \mapsto M^{-1}$, $M \mapsto M^2$ ou encore $M \mapsto \det(M)$ en revenant à la définition. Il est important de bien comprendre le développement sous-jacent de $f(x+h)$. La notation o est souvent source de confusions ; trop de candidats l'utilisent sans en maîtriser la signification. On doit pouvoir mettre en pratique le théorème de différentiation composée pour calculer des dérivées partielles de fonctions composées dans des situations simples (par exemple le laplacien en coordonnées polaires). La différentiation à l'ordre 2 est attendue, en lien avec la hessienne, notamment pour les applications classiques quant à l'existence d'extrema locaux. On peut aussi faire figurer dans cette leçon la différentielle d'applications issues de l'algèbre linéaire (ou multilinéaire). La méthode du gradient pour la minimisation de la fonctionnelle $\frac{1}{2}(Ax|x)-(b|x)$, où A est une matrice symétrique définie positive, conduit à des calculs de différentielles qui doivent être acquis par tout candidat.

Pour aller plus loin, l'exponentielle matricielle est une ouverture pertinente. D'autres thèmes issus de la leçon 214 trouvent aussi leur place ici.

219 : Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

Comme souvent en analyse, il est tout à fait opportun d'illustrer dans cette leçon un exemple ou un raisonnement à l'aide d'un dessin. Il faut savoir faire la distinction entre propriétés locales (caractérisation d'un extremum local) et globales (existence par compacité, par exemple). Dans le cas important des fonctions convexes, un minimum local est également global. Les applications de la minimisation des fonctions convexes, qui peuvent être introduites par des problématiques motivées par les options de modélisation, sont nombreuses et sont tout à fait à propos pour illustrer cette leçon.

L'étude des algorithmes de recherche d'extremum y a toute sa place : méthode du gradient et analyse de sa convergence, méthode à pas optimal,... Le cas particulier des fonctionnelles sur $\mathbf{R}^n$ de la forme $\frac{1}{2}(Ax|x)-(b|x)$, où A est une matrice symétrique définie positive, ne devrait pas poser de difficultés (la coercivité de la fonctionnelle pose problème à de nombreux candidats). Les problèmes de minimisation sous contrainte amènent à faire le lien avec les extrema liés et la notion de multiplicateur de Lagrange. Sur ce point, certains candidats ne font malheureusement pas la différence entre recherche d'extremum sur un ouvert ou sur un fermé. Une preuve géométrique des extrema liés sera fortement valorisée par rapport à une preuve algébrique, formelle et souvent mal maîtrisée. On peut ensuite mettre en œuvre ce théorème en justifiant une inégalité classique : arithmético-géométrique, Hölder, Carleman, etc... Enfin, la question de la résolution de l'équation d'Euler-Lagrange peut donner l'opportunité de mentionner la méthode de Newton.

Les candidats pourraient aussi être amenés à évoquer les problèmes de type moindres carrés (avec une discussion qui peut comprendre motivation, formalisation, rôle de la condition de rang maximal, jusqu'aux principes de la décomposition en valeurs singulières), ou, dans un autre registre, le principe du maximum avec des applications.

220 : Équations différentielles ordinaires. Exemples de résolution et d'études de solutions en dimension 1 et 2.

La résolution explicite de certaines équations différentielles standard telles que $y' = y^2$ ou $y''+ay'+by = \cos(\omega t)$ pose des difficultés à de trop nombreux candidats ; il est important de disposer de méthodes de résolution efficaces. Mais le jury souhaite que les candidats soient conscients que la résolution exacte de telles équations est rare et qu'ils soient donc capables de mener une étude qualitative des solutions sur des exemples et éventuellement d'envisager des stratégies d'approximation numérique des solutions.

Le jury note un effort sur la maîtrise du théorème de Cauchy-Lipschitz ; sa démonstration dans le cadre le plus général est délicate : elle est souvent mal maîtrisée. Une preuve dans le cas globalement lipschitzien constitue déjà un développement appréciable. Le jury attire l'attention sur les notions de solution maximale et de solution globale qui sont souvent confuses. Bien qu'ils ne soient pas souvent mentionnés, le lemme de Grönwall a toute sa place dans cette leçon ainsi que le théorème de sortie de tout compact.

L'utilisation du théorème de Cauchy-Lipschitz doit pouvoir être mise en œuvre sur des exemples concrets. Il est souhaitable de produire des exemples d'équations non-linéaires qui pour certaines permettent une résolution exacte et pour d'autres donnent lieu à une étude qualitative (dont on rappelle qu'elle doit être préparée et soignée). Pour les équations autonomes, la notion de point d'équilibre permet des illustrations pertinentes comme par exemple les petites oscillations du pendule. Trop peu de candidats pensent à tracer et discuter des portraits de phase alors que l'intitulé de la leçon y invite clairement.

Le nouvel intitulé est aussi une invitation plus franche à évoquer les problématiques de l'approximation numérique en présentant le point de vue du schéma d'Euler et de sa convergence notamment, voire, pour les candidats qui le souhaitent, d'autres schémas qui seraient mieux adaptés à l'exemple présenté. On peut aller jusqu'à aborder la notion de problèmes raides et la conception de schémas implicites pour autant que le candidat ait une maîtrise convenable de ces questions.

221 : Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Le jury attend d'un candidat qu'il sache déterminer rigoureusement la dimension de l'espace vectoriel des solutions. Le cas des systèmes à coefficients constants fait appel à la réduction des matrices qui doit être connue et pratiquée. Le jury attend qu'un candidat puisse mettre en œuvre la méthode de variation des constantes pour résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2 simple (à coefficients constants par exemple) avec second membre ; un trop grand nombre de candidats se trouve déstabilisés par ces questions.

L'utilisation des exponentielles de matrices a toute sa place ici et doit être maîtrisée. Les problématiques de stabilité des solutions et le lien avec l'analyse spectrale devraient être davantage exploités dans cette leçon.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire constitue un exemple de développement pertinent pour cette leçon. Les résultats autour du comportement des solutions, ou de leurs zéros, de certaines équations linéaires d'ordre 2 (Sturm, Hill-Mathieu,...) sont aussi d'autres possibilités.

Pour aller plus loin, la résolution au sens des distributions d'équations du type $T' + aT = S$ via la méthode de variation de la constante, ou des situations plus ambitieuses, trouvera sa place dans cette leçon.

222 : Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires.

Cette leçon peut être abordée en faisant appel à des techniques variées et de nombreux développements pertinents peuvent être construits en exploitant judicieusement les éléments les plus classiques du programme. Le candidat ne doit pas hésiter à donner des exemples très simples (par exemple les équations de transport).

Les techniques d'équations différentielles s'expriment par exemple pour traiter $\lambda u - u'' = f$ sur $[0, 1]$ avec des conditions de DIRICHLET en $x = 0$, $x = 1$ ou pour analyser l'équation de transport par la méthode des caractéristiques.

Les séries de FOURIER trouvent dans cette leçon une mise en pratique toute désignée pour résoudre l'équation de la chaleur dans différents contextes, l'équation des ondes ou de SCHRÖDINGER dans le cadre des fonctions périodiques. Des raisonnements exploitant la transformée de FOURIER peuvent également être présentés.

Le point de vue de l'approximation numérique donne lieu à des développements originaux, notamment autour de la matrice du Laplacien et de l'analyse de convergence de la méthode des différences finies.

Pour aller plus loin, la notion de solution faible d'équations aux dérivées partielles linéaires peut également être présentée, avec des applications à la résolution des équations de LAPLACE, de la chaleur, des ondes, ou de l'équation de transport. Des développements sophistiqués se placeront sur le terrain de l'analyse hilbertienne avec par exemple l'application du théorème de LAX–MILGRAM voire la décomposition spectrale des opérateurs compacts dans un espace fonctionnel approprié.

223 : Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications

Cette leçon permet souvent aux candidats de s'exprimer. Il ne faut pas négliger les suites de nombres complexes mais les suites vectorielles (dans $\mathbf{R}^n$) ne sont pas dans le sujet. Le jury attire l'attention sur le fait que cette leçon n'est pas uniquement à consacrer à des suites convergentes, mais tout comportement asymptotique peut être présenté. Le théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS doit être cité et le candidat doit être capable d'en donner une démonstration. On attend des candidats qu'ils parlent des limites inférieure et supérieure d'une suite réelle bornée, et qu'ils en maîtrisent le concept. Les procédés de sommation peuvent être éventuellement évoqués mais le théorème de CESÀRO doit être mentionné et sa preuve maîtrisée par tout candidat à l'agrégation. Les résultats autour des sous-groupes additifs de $\mathbf{R}$ permettent d'exhiber des suites denses remarquables et l'ensemble constitue un joli thème. Des thèmes des leçons 225, 226 et 264 peuvent également se retrouver dans cette leçon.

Pour aller plus loin, un développement autour de l'équirépartition est tout à fait envisageable. La méthode de NEWTON peut aussi illustrer la notion de vitesse de convergence.

226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

Le concept de point fixe d'une fonction est évidemment au coeur de cette leçon et l'énoncé d'au moins un théorème de point fixe, qu'il faut savoir mettre en œuvre sur des exemples simples, est évidemment pertinent. Le jury est parfois surpris que des candidats évoquent un théorème de point fixe dans les espaces de BANACH... sans être capables de définir ce qu'est un espace de BANACH ou d'en donner un exemple !

Au niveau élémentaire, les questions de monotonie, les notions de points attractifs ou répulsifs peuvent structurer l'exposition et l'aspect graphique n'est pas à négliger. Le jury attend quelques exemples illustrant la variété des situations et la suite récurrente $u_{n+1} = \sin(u_n)$ n'est que l'un d'entre eux : il doit certes être maîtrisé mais ne peut être le seul exemple. L'aspect vectoriel, pourtant présent dans l'intitulé, est trop souvent négligé. Le comportement des suites vectorielles définies par une relation linéaire $X_{n+1} = AX_n$ fournit pourtant un matériel d'étude conséquent.

L'étude des suites numériques linéaires récurrentes d'ordre p est souvent mal connue, notamment le lien avec l'aspect vectoriel.

La formulation de l'intitulé de cette leçon invite résolument à évoquer les problématiques de convergence d'algorithmes (notamment savoir estimer la vitesse) d'approximation de solutions de problèmes linéaires et non linéaires : dichotomie, méthode de Newton (avec sa généralisation au moins dans $\mathbf{R}^2$), algorithme du gradient, méthode de la puissance, méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires, schéma d'Euler,...

228 : Continuité, dérivabilité, dérivation faible des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

Cette leçon permet des exposés de niveaux, et de forme, très variés. Les théorèmes de base doivent être maîtrisés et illustrés par des exemples intéressants, par exemple le théorème des valeurs intermédiaires pour la dérivée, le théorème de Rolle... Le jury s'attend évidemment à ce que les candidats connaissent et puissent calculer la dérivée des fonctions usuelles. Les candidats doivent disposer d'un exemple de fonction dérivable de la variable réelle qui ne soit pas continûment dérivable. La stabilité par passage à la limite des notions de continuité et de dérivabilité doit être comprise par les candidats. Pour aller plus loin, les propriétés de régularité des fonctions monotones et des fonctions convexes peuvent être mentionnées. La dérivabilité presque partout des fonctions lipschitziennes peut aussi relever aussi de cette leçon. On peut enfin s'intéresser à des exemples de fonctions continues nulle part dérivables.

Le nouvel intitulé doit conduire à analyser la généralisation de la notion de dérivée d'une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ à l'aide du principe de calcul « par dualité/transposition » de la théorie des distributions. Plus qu'une analyse fonctionnelle poussée, le jury attend une certaine familiarité avec le *calcul de dérivées faibles*, dans ce cadre particulier de *fonctions* de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, qu'on n'hésitera pas à motiver par des applications (en physique, en théorie du signal,...). On peut étudier les liens entre dérivée classique et dérivée faible, calculer la dérivée faible de fonctions discontinues (formule des sauts, par exemple pour des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbf{R}\backslash\{0\}$ et C^∞ par morceaux sur $\mathbf{R}$ comme la fonction de Heaviside, la valeur absolue) ou de fonctions du type $x \mapsto \int_a^x f(y)\mathrm{d}y$, f étant intégrable. On peut aussi relier la dérivée faible et la limite du taux d'accroissement au sens des distributions et établir le lien entre fonction croissante et dérivée faible positive. Il est également possible de parler du peigne de Dirac. Pour aller encore plus loin, des exemples de convergence au sens des distributions peuvent tout à fait illustrer cette leçon.

229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

L'énoncé et la connaissance de la preuve de l'existence de limites à gauche et à droite pour les fonctions monotones sont attendues. Ainsi on doit parler des propriétés de continuité et de dérivabilité à gauche et à droite des fonctions convexes de la variable réelle. Il est souhaitable d'illustrer la présentation de la convexité par des dessins clairs. On notera que la monotonie concerne les fonctions réelles d'une seule variable réelle, mais que la convexité concerne également les fonctions définies sur une partie convexe de $\mathbf{R}^n$, qui fournissent de beaux exemples d'utilisation. L'étude de la fonctionnelle quadratique ou la minimisation de $||Ax-b||^2$ illustrent agréablement cette leçon.

Pour aller plus loin, la dérivabilité presque partout des fonctions monotones est un résultat remarquable (dont la preuve peut être éventuellement admise). L'espace vectoriel engendré par les fonctions monotones (les fonctions à variation bornée) relève de cette leçon. Enfin, la dérivation au sens des distributions fournit les caractérisations les plus générales de la monotonie et de la convexité ; les candidats peuvent s'aventurer utilement dans cette direction.

230 : Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

De nombreux candidats commencent leur plan par une longue exposition des conditions classiques assurant la convergence ou la divergence des séries numériques. Sans être hors sujet, cette exposition ne doit pas former l'essentiel de la matière de la leçon. Un thème important de la leçon est en effet le comportement asymptotique des restes et sommes partielles (équivalents, développements asymptotiques — par exemple pour certaines suites récurrentes — cas des séries de RIEMANN, comparaison séries et intégrales, ...). Trop de présentations manquent d'exemples.

On peut aussi s'intéresser à certaines sommes particulières, que ce soit pour exhiber des nombres irrationnels (voire transcendants), ou mettre en valeur des techniques de calculs non triviales (par exemple en faisant appel aux séries de FOURIER ou aux séries entières). L'utilisation des calculs de séries numériques en théorie des probabilités peut fournir des exemples pertinents illustrant cette leçon.

Enfin, si le jury apprécie que le théorème des séries alternées (avec sa version sur le contrôle du reste) soit maîtrisé, il rappelle aussi que ses généralisations possibles utilisant la transformation d'ABEL trouvent toute leur place dans cette leçon.

233 : Analyse numérique matricielle. Résolution approchée de systèmes linéaires, recherche d'éléments propres, exemples.

Cette leçon de synthèse doit mettre en lumière l'exploitation de techniques d'analyse pour aborder la résolution approchée de systèmes linéaires et de leurs propriétés spectrales, la recherche de vecteurs propres et de valeurs propres, et approfondir la compréhension des algorithmes.

Les notions de norme matricielle, de rayon spectral et de conditionnement sont évidemment centrales dans cette leçon. Néanmoins, un trop grand nombre de candidats maîtrise insuffisamment ces notions et se trouve mis en difficulté. Le jury attend donc un exposé clair et mieux dominé de ces notions, qui doit être agrémenté d'exemples et d'études de la convergence de méthodes itératives. Le lien avec la convergence des suites du type $X_{n+1} = AX_n$ doit être connu et illustré. Le conditionnement d'une matrice symétrique définie positive doit être connu et un lien avec $\sup_{||x||=1} x^\top Ax$ doit être fait. Le résultat général de convergence, relié au théorème du point fixe de BANACH, doit être enrichi de considérations sur la vitesse de convergence.

Le jury invite les candidats à étudier diverses méthodes issues de contextes variés : résolution de systèmes linéaires, optimisation de fonctionnelles quadratiques (du type $\frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$), recherche de valeurs propres,... Parmi les points intéressants à développer, on peut citer les méthodes de type JACOBI pour la résolution de systèmes linéaires, les méthodes de gradient dans le cadre quadratique, les méthodes de la puissance, puissance inverse et QR pour la recherche d'éléments propres. Les candidats pourront illustrer leur propos sur des matrices issues de problèmes de moindres carrés ou de schémas numériques pour les équations différentielles ou aux dérivées partielles linéaires.

234 : Fonctions et espaces de fonctions LEBESGUE-intégrables.

Cette leçon porte sur les fonctions intégrables au sens de la théorie générale de l'intégration de LEBESGUE ainsi que les suites et les espaces de telles fonctions. Elle ne se restreint donc pas au seul cas des fonctions intégrables pour la mesure de LEBESGUE mais peut concerner d'autres mesures telles que la mesure de comptage, les mesures absolument continues par rapport à la mesure de LEBESGUE, etc., ou encore les mesures de probabilités, qui entrent tout à fait dans le cadre de la leçon.

Le candidat est invité à étudier le comportement de suites de fonctions LEBESGUE-intégrables. Il est souhaitable que soient mentionnés l'approximation par des fonctions étagées ainsi que les principaux théorèmes de convergence sous l'intégrale de cette théorie (le lemme de FATOU, le théorème de la convergence monotone et le théorème de convergence dominée) en les illustrant par des exemples et des contre-exemples judicieux. Il faut avoir compris que l'intégrale d'une fonction continue contre la mesure de LEBESGUE coïncide avec la notion usuelle d'intégrale dite de RIEMANN, et connaître l'interprétation d'une série absolument convergente comme une intégrale. Cette leçon nécessite de maîtriser la notion de fonction mesurable et la notion de « presque partout » (et les opérations sur les ensembles négligeables qui sont associées) ainsi que la définition des espaces L^1, L^2. Toutefois, une connaissance des questions fines de la théorie de la mesure n'est pas exigée.

Une partie de cette leçon peut éventuellement être consacrée aux espaces L^p, mais il n'est pas requis d'en faire le cœur de la présentation. Évoquer la convolution entre fonctions L^1, et éventuellement entre fonctions de L^1 et de L^p ainsi que les propriétés de régularisation et de densité qui en résultent, font partie des attendus (on prendra garde toutefois d'éviter les raisonnements circulaires entre continuité des translations et approximation par convolution). Un développement original, mais techniquement exigeant, peut consister à étudier les conditions assurant la compacité de suites bornées dans L^p. Enfin, le cas particulier de l'espace hilbertien L^2 mérite attention mais il faut alors se concentrer sur les spécificités d'un espace de fonctions L^2 et éviter de faire un catalogue de propriétés vraies pour n'importe quel espace de HILBERT.

235 : Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.

Cette leçon s'intéresse aux problèmes d'interversion limite-limite, limite-intégrale et intégrale-intégrale. Il ne s'agit pas de refaire un cours d'intégration. On pourra toutefois mettre en évidence le rôle important joué par des théorèmes cruciaux de ce cours. À un niveau élémentaire, on peut insister sur le rôle de la convergence uniforme (et donc, dans le cas de séries de fonctions bornées, de la convergence normale.)

Les théorèmes de convergence monotone, de convergence dominée et les théorèmes d'interversion de FUBINI-TONELLI et FUBINI sont des attendus de cette leçon. On choisira des exemples pertinents pour illustrer l'intérêt de chacun de ces résultats, mais on pourra aussi exhiber des contre-exemples montrant que des hypothèses trop faibles ne permettent pas en général d'effectuer l'interversion voulue. Le jury note que ces différents points posent problème à de nombreux candidats, qui sont mis en difficulté sur des exemples assez simples. Ils sont donc invités à consolider ces notions avant de s'aventurer plus loin.

Pour les candidats qui le souhaitent, on pourra parler de la transformée de FOURIER et/ou de la transformée de LAPLACE avec des exemples et des applications.

236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

Cette leçon doit être très riche en exemples, que ce soit l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ ou bien d'autres encore. Il est tout à fait pertinent de commencer par les différentes techniques élémentaires (intégration par parties, changement de variables, décomposition en éléments simples, intégrale à paramètres,...). Trop de candidats manquent d'aisance avec le calcul d'intégrales multiples. Le calcul de l'intégrale d'une gaussienne sur $\mathbf{R}^n$ ou le calcul du volume de la boule unité de $\mathbf{R}^n$ ne devraient pas poser de problèmes insurmontables. Le programme du concours indique que la formule d'intégration par parties multi-dimensionnelle qui relie intégrale de volume et intégrale de surface est admise ; il ne faut pas hésiter à l'exploiter et à l'illustrer par des exemples. On peut également présenter des utilisations du théorème des résidus.

On peut aussi penser à l'utilisation du théorème d'inversion de FOURIER ou du théorème de PLANCHEREL. Certains éléments de la leçon précédente, comme par exemple l'utilisation des théorèmes de convergence monotone, de convergence dominée et/ou de FUBINI, sont aussi des outils permettant le calcul de certaines intégrales.

Enfin, il est tout à fait pertinent d'évoquer les méthodes de calcul approché d'intégrales (méthodes des rectangles, méthode de Monte-Carlo, etc.), une piste qui mériterait d'être davantage explorée.

239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Les candidats incluent les théorèmes de régularité (version segment — a minima — mais aussi version « convergence dominée ») ce qui est pertinent mais la leçon ne doit pas se réduire seulement à cela. Cette leçon doit être riche en exemples, ce qui parfois n'est pas suffisamment le cas. Elle peut être encore enrichie par des études et méthodes de comportements asymptotiques. Les propriétés de la fonction Γ d'EULER fournissent un développement standard, mais non sans risque (on pourra y inclure le comportement asymptotique, voire son prolongement analytique) ; certains candidats sont trop ambitieux pour le temps dont ils disposent. Le jury invite donc à bien préciser ce que le candidat souhaite montrer pendant son développement. Les différentes transformations classiques (FOURIER, LAPLACE,...) relèvent aussi naturellement de cette leçon. On peut en donner des applications pour obtenir la valeur d'intégrales classiques (celle de l'intégrale de DIRICHLET par exemple). Le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale est trop peu souvent cité.

Pour aller encore plus loin, on peut par exemple développer les propriétés des transformations mentionnées (notamment la transformée de FOURIER, par exemple en s'attardant sur le lien entre régularité de la fonction et décroissance de sa transformée de FOURIER), ainsi que de la convolution.

241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

Les résultats généraux sur les différents types de convergence doivent être présentés et maîtrisés. Le jury attend du candidat qu'il évoque les séries de fonctions particulières classiques : séries entières, séries génératrices, séries de FOURIER, avec des exemples et des applications. On pourra également s'intéresser à la fonction zêta de RIEMANN, ou plus généralement aux séries de DIRICHLET.

Par ailleurs, la leçon n'exclut pas du tout de s'intéresser au comportement des suites et séries de fonctions dans les espaces de type L^p (notamment pour $p = 1$), ou encore aux séries de variables aléatoires indépendantes.

Pour aller plus loin, on pourra présenter comment identifier la limite au sens des distributions d'une famille qui régularise la masse de DIRAC ou encore aborder des exemples de construction de parties finies de HADAMARD.

243 : Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

Les propriétés élémentaires des séries entières font partie des attendus. Trop de candidats hésitent sur les différentes notions de convergence, les notions de disque de convergence et des domaines où il y a convergence normale ; un effort de préparation doit être fait sur ces notions afin de lever toute imprécision.

Les candidats évoquent souvent des critères (CAUCHY, D'ALEMBERT) permettant d'estimer le rayon de convergence mais oublient souvent la formule de CAUCHY-HADAMARD ou toute technique utilisant une majoration ou un équivalent. Des faiblesses importantes ont été observées quant à ces techniques. Le jury attend bien sûr que le candidat puisse donner des arguments justifiant qu'une série entière en 0 dont le rayon de convergence est R est développable en série entière en un point z_0 intérieur au disque de convergence et de minorer le rayon de convergence de cette série. Sans tomber dans un catalogue excessif, on peut indiquer les formules de développement de fonctions usuelles importantes (exp, log, $1/(1 - z)$, sin,...). S'agissant d'exemples fondamentaux et classiques, le jury attend que le candidat puisse les donner sans consulter ses notes. En ce qui concerne la fonction exponentielle, le candidat doit avoir réfléchi au point de vue adopté sur sa définition et donc sur l'articulation entre l'obtention du développement en série entière et les propriétés de la fonction. À ce propos, les résultats sur l'existence du développement en série entière pour les fonctions dont on contrôle toutes les dérivées successives sur un voisinage de 0 sont souvent méconnus. Le comportement de la série entière dans le disque de convergence en relation avec les différents modes de convergence (convergence absolue, convergence uniforme, convergence normale) doit être maîtrisé.

La présentation des fonctions génératrices d'une variable aléatoire discrète peut tout à fait illustrer cette leçon. Le théorème d'ABEL (radial ou sectoriel) trouve toute sa place mais doit être agrémenté d'exercices pertinents. Réciproquement, les théorèmes taubériens offrent aussi de jolis développements.

On peut aller plus loin en abordant quelques propriétés importantes liées à l'analyticité de la somme d'une série entière ou encore la résolution de certaines équations différentielles ordinaires par la méthode du développement en série entière.

245 : Fonctions d'une variable complexe. Exemples et applications.

Cette formulation offre des points d'entrée variés à cette leçon. Ainsi, il est possible, dans un premier temps et si le candidat le souhaite, de parler de polynômes de la variable complexe, de fractions rationnelles, de séries entières, sans immédiatement exposer la théorie des fonctions holomorphes. Le jury attend des exemples illustrant ces notions et montrant la maîtrise des candidats sur ces points.

Concernant les questions d'holomorphie, outre la définition, la signification géométrique des équations de Cauchy-Riemann, la formule de Cauchy et les résultats concernant l'analyticité, le principe des zéros isolés, ou encore le principe du maximum, sont des attendus de cette leçon. Le lemme de Schwarz est un joli résultat permettant de faire un développement élémentaire s'il est agrémenté d'applications pertinentes, comme par exemple déterminer les automorphismes du disque unité. La notation $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ a un sens précis, qu'il faut savoir expliquer. La leçon invite également à présenter le théorème d'holomorphie sous le signe intégral et des exemples de fonctions célèbres (par exemple la fonction Gamma, la fonction zêta,...).

Même si cela ne constitue pas le cœur de la leçon, la définition d'une fonction méromorphe (l'ensemble des pôles doit être une partie fermée discrète) peut être présentée à condition que cette notion soit maîtrisée et accompagnée d'exemples. Le jury attire l'attention sur le fait que le prolongement de la fonction Gamma en fonction méromorphe est très souvent proposé mais insuffisamment maîtrisé. Proposer un développement moins ambitieux mais maîtrisé est une stratégie plus payante, qui ouvre la discussion avec le jury de manière plus positive.

Pour les candidats qui le souhaitent, cette leçon offre des possibilités d'ouverture en lien avec la topologie du plan. La preuve du théorème de l'application conforme de Riemann est par exemple un développement de très bon niveau qui ne doit pas être abordé sans une bonne maîtrise des questions en jeu.

246 : Séries de Fourier. Exemples et applications.

Les différents résultats autour de la convergence (L^2, Fejér, Dirichlet,...) doivent être connus. On prendra garde au sens de la notation $\sum_{n\in\mathbf{Z}}$ (qu'il est plus prudent d'éviter car elle est souvent inadaptée). Il faut avoir les idées claires sur la notion de fonctions de classe C^1 par morceaux (elles ne sont pas forcément continues). Le théorème d'isométrie bijective entre espaces L^2 et ℓ^2 doit apparaître. Dans le cas d'une fonction continue et C^1 par morceaux on peut conclure sur la convergence normale de la série Fourier sans utiliser le théorème de Dirichlet. Il est classique d'obtenir des sommes de séries remarquables comme conséquence de ces théorèmes.

On peut aussi s'intéresser à la formule de Poisson et à ses conséquences. L'existence d'exemples de séries de Fourier divergentes, associées à des fonctions continues (qu'ils soient explicites ou obtenus par des techniques d'analyse fonctionnelle) peuvent aussi compléter le contenu.

Il est souhaitable que cette leçon ne se réduise pas à un cours abstrait sur les coefficients de Fourier. La résolution d'équations aux dérivées partielles (par exemple l'équation de la chaleur ou l'équation des ondes avec une estimation de la vitesse de convergence) peut illustrer de manière pertinente cette leçon, mais on peut penser à bien d'autres applications (inégalité isopérimétrique, comportements remarquables des fonctions à spectre lacunaire,...).

250 : Transformation de Fourier. Applications.

Cette leçon offre de multiples facettes. Les candidats peuvent adopter différents points de vue : L^1, L^2 et/ou distributions. L'aspect « séries de Fourier » n'est toutefois pas dans l'esprit de cette leçon ; il ne s'agit pas de faire de l'analyse de FOURIER sur n'importe quel groupe localement compact mais sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{R}^d$.

La leçon nécessite une bonne maîtrise de questions de base telles que la définition du produit de convolution de deux fonctions de L^1. On ne doit pas se limiter à une analyse algébrique de la transformation de FOURIER. C'est bien une leçon d'analyse, qui nécessite une étude soigneuse des hypothèses, des définitions et de la nature des objets manipulés. Le lien entre la régularité de la fonction et la décroissance de sa transformée de FOURIER doit être fait, même sous des hypothèses qui ne sont pas minimales. Les candidats doivent savoir démontrer le lemme de RIEMANN-LEBESGUE pour une fonction intégrable.

La formule d'inversion de FOURIER pour une fonction L^1 dont la transformée de FOURIER est aussi L^1 est attendue ainsi que l'extension de la transformée de FOURIER à l'espace L^2 par FOURIER-PLANCHEREL. Des exemples explicites de calculs de transformations de FOURIER classiques comme la gaussienne ou $(1+x^2)^{-1}$ paraissent nécessaires.

Pour aller plus loin, la transformation de FOURIER des distributions tempérées ainsi que la convolution dans le cadre des distributions tempérées peuvent être abordées. Les attentes du jury sur ces questions restent modestes, au niveau de ce qu'un cours de première année de master sur le sujet peut contenir. Le fait que la transformée de FOURIER envoie $\mathscr{S}(\mathbf{R}^d)$ dans lui même avec de bonnes estimations des semi-normes doit alors être compris et la formule d'inversion de FOURIER maîtrisée dans ce cadre. Des exemples de calcul de transformée de FOURIER peuvent être donnés dans des contextes liés à la théorie des distributions comme par exemple la transformée de FOURIER de la valeur principale de $\frac{1}{x}$. Dans un autre registre, il est aussi possible d'orienter la leçon vers l'étude de propriétés des fonctions caractéristiques de variables aléatoires.

La résolution de certaines équations aux dérivées partielles telles que, par exemple, l'équation de la chaleur sur $\mathbf{R}$, peut être abordée, avec une discussion sur les propriétés qualitatives des solutions.

253 : Utilisation de la notion de convexité en analyse.

Il s'agit d'une leçon de synthèse, très riche, qui mérite une préparation soigneuse. Même si localement (notamment lors de la phase de présentation orale) des rappels sur la convexité peuvent être énoncés, ceci n'est pas nécessairement attendu dans le plan. Il s'agit d'aborder différents champs des mathématiques où la convexité intervient. On pensera bien sûr, sans que ce soit exhaustif, aux problèmes d'optimisation (par exemple de la fonctionnelle quadratique), au théorème de projection sur un convexe fermé, au rôle joué par la convexité dans les espaces vectoriels normés (convexité de la norme, jauge d'un convexe,...). Les fonctions convexes élémentaires permettent aussi d'obtenir des inégalités célèbres. On retrouve aussi ce type d'argument pour justifier des inégalités de type BRUNN-MINKOWSKI ou HADAMARD. Par ailleurs, l'inégalité de JENSEN a aussi des applications en intégration et en probabilités.

Pour aller plus loin, on peut mettre en évidence le rôle joué par la convexité dans le théorème de séparation de HAHN-BANACH. On peut aussi parler des propriétés d'uniforme convexité dans certains espaces, les espaces L^p pour $p > 1$, par exemple, et de leurs conséquences.

261 : Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.

Cette leçon est l'occasion de présenter clairement la notion de loi d'une variable aléatoire et de l'illustrer par de nombreux exemples et calculs. On distinguera bien la probabilité $\mathbf{P}$ sur Ω de la probabilité μ_X définie sur l'ensemble des valeurs de X par $\mu_X(A) = \mathbf{P}(X \in A) = \mathbf{P}(X^{-1}(A))$. Le théorème de transfert qui calcule $\mathbf{E}[f(X)]$ peut alors être donné comme une extension fonctionnelle de cette définition ensembliste. Inversement, on peut s'intéresser à des classes $\mathcal{C}$ de fonctions telles que la connaissance de $\mathbf{E}[f(X)]$ pour $f \in \mathcal{C}$ détermine la loi de X. Ceci mène aux outils usuels de caractérisation de la loi (fonction de répartition, fonction caractéristique, densité éventuelle, mais aussi la fonction génératrice pour des variables entières ou la transformée de LAPLACE de variables positives, ou encore les moments lorsque cela est pertinent). Les principales propriétés des fonctions de répartition des variables réelles doivent être connues. Il est important de savoir qu'il y a une bijection entre les lois sur $\mathbf{R}$ et les fonctions croissantes continues à droite tendant vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$. Il faut savoir interpréter les sauts d'une fonction de répartition, et, lorsque la fonction de répartition est C^1, savoir que la variable admet alors une densité qui est la dérivée de la fonction de répartition. Le jury s'attend à ce que le candidat puisse tracer la fonction de répartition de lois simples. Les principales propriétés des fonctions caractéristiques doivent être également connues : continuité, limite à l'infini, régularité plus forte en fonction de l'existence de moments. Des résultats analogues (et plus élémentaires) portant sur les fonctions génératrices de variables entières ou les transformées de Laplace de variables positives ont également toute leur place ici. La caractérisation de l'indépendance de n variables en termes de produit de lois entre dans le cadre de cette leçon. Les variables aléatoires à valeurs vectorielles (en restant dans le cadre de la dimension finie) font aussi partie de la leçon et on évoquera la loi conjointe et les lois marginales. La notion d'indépendance pourra alors être décrite. Cette leçon devra être illustrée par de nombreux exemples de calculs de lois : présentation de lois usuelles en lien avec ce qu'elles modélisent, calculs de fonctions caractéristiques ou de densités selon pertinence, loi de $\phi(X)$ à partir de la loi de X, loi de $\max(X_1, \ldots, X_n)$, $\min(X_1, \ldots, X_n)$, $X_1 + \ldots + X_n$, etc.

262 : Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.

Les théorèmes limite sont au cœur de cette leçon. La maîtrise des différentes définitions des modes de convergence est attendue mais doit être completée par leur mise en pratique dans les différents théorèmes limites. Les différences entre ces théorèmes doivent être abordées avec des exemples et contre-exemples.

Les implications entre les divers modes de convergence, ainsi que les réciproques partielles doivent être connues. Des contre-exemples aux réciproques sont attendus par le jury. Les théorèmes de convergence (lois des grands nombres et théorème central limite) doivent être énoncés et il faut au moins en connaître l'architecture des preuves.

Pour aller plus loin, les candidats pourront s'intéresser au comportement asymptotique de marches aléatoires (en utilisant par exemple le lemme de Borel-Cantelli, les fonctions génératrices,...). Enfin, les résultats autour des séries de variables aléatoires indépendantes comme le théorème de Kolmogorov peuvent tout à fait se placer dans cette leçon.

On peut aussi s'intéresser aux temps de retour pour une marche aléatoire simple. Pour aller plus loin, et pour les candidats maîtrisant ces notions, on peut suggérer aussi l'étude asymptotique de(s) chaînes de Markov, ou encore d'aborder les lois infiniment divisibles, les lois stables, les processus de renouvellement (qui donnent de beaux théorèmes de convergence).

264 : Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Le jury attend des candidats qu'ils rappellent la définition d'une variable aléatoire discrète et que des lois usuelles soient présentées, en lien avec des exemples classiques de modélisation. Le lien entre variables aléatoires de Bernoulli, binomiale et de Poisson doit être discuté. Il peut être d'ailleurs intéressant de mettre en avant le rôle central joué par les variables aléatoires de Bernoulli.

Les techniques spécifiques aux variables discrètes, notamment à valeurs entières, devront être mises en évidence, comme par exemple la caractérisation de la convergence en loi, la notion de fonction génératrice.

Pour aller plus loin, le processus de Galton-Watson peut se traiter intégralement à l'aide des fonctions génératrices et cette voie a été choisie par plusieurs candidats : cela donne un développement de très bon niveau pour ceux qui savent justifier les étapes délicates.

Pour aller beaucoup plus loin, les candidats pourront étudier les marches aléatoires, les chaînes de Markov à espaces d'états finis ou dénombrables, les sommes ou séries de variables aléatoires indépendantes.

265 : Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.

Cette leçon de synthèse doit permettre d'explorer de nombreux pans du programme. Les candidats peuvent proposer avec bonheur des contenus et points de vue variés. Évidemment, la leçon ne doit pas se cantonner au seul champ des fonctions usuelles (logarithme, exponentielle, trigonométriques, hyperboliques et réciproques). Le jury attend surtout d'un agrégé qu'il soit en mesure de présenter rapidement les définitions et les propriétés fondamentales de ces fonctions, qu'il sache les tracer sans difficultés, qu'il puisse mener l'étude aux bornes de leur domaine, ainsi que discuter leurs prolongements éventuels, leurs développements de TAYLOR ou en série entière, leurs applications au calcul intégral, les équations fonctionnelles associées ou formules particulières, etc. Le jury n'attend pas un catalogue mais plutôt un choix pertinent et réfléchi, avec des applications en probabilité, convexité, études de courbes, ou autour des développements asymptotiques. Les déterminations du logarithme complexe peuvent tout à fait mériter une discussion approfondie dans cette leçon et donner lieu à des développements de bon niveau, pouvant aller jusqu'à leur interprétation géométrique.

Le domaine des fonctions spéciales est très vaste. Il faut absolument éviter l'écueil d'une taxonomie fastidieuse et dépourvue de motivation ; il vaut bien mieux se concentrer sur des exemples restreints, mais fouillés, par exemple une étude approfondie (d'une) des fonctions Γ, ζ ou θ, leurs propriétés fonctionnelles, leurs prolongements, leur étude asymptotique aux bornes et les domaines d'application de ces fonctions.

Il y a donc bien des manières, très différentes, de construire valablement cette leçon. Par exemple, on peut bâtir un exposé organisé selon des problématiques et des techniques mathématiques : suites et séries de fonctions, fonctions holomorphes et méromorphes, problèmes de prolongement, développements asymptotiques, calculs d'intégrales et intégrales à paramètres, transformées de FOURIER ou de LAPLACE, etc. Mais on pourrait tout aussi bien suivre un fil conducteur motivé par un domaine d'application :

— en arithmétique pour évoquer, par exemple, la fonction ζ et la distribution des nombres premiers,
— en probabilités où la loi normale et la fonction erreur sont évidemment incontournables mais on peut aussi évoquer les lois Gamma et Bêta, les fonctions de BESSEL et leurs liens avec la densité du χ^2 non centrée et celle de la distribution de VON MISES-FISHER ou plus simplement comme la loi du produit de variables aléatoires normales et indépendantes, la loi ζ et ses liens avec la théorie des nombres,...
— en analyse des équations aux dérivées partielles où les fonctions spéciales interviennent notamment pour étudier le problème de DIRICHLET pour le Laplacien ou l'équation des ondes,
— il est aussi possible d'évoquer les polynômes orthogonaux, leurs propriétés et leurs diverses applications, en physique (oscillateur harmonique et polynômes de HERMITE), en probabilités (polynômes de HERMITE pour les lois normales, de LAGUERRE pour les lois Gamma, de JACOBI pour les lois Bêta...), pour l'étude d'équations aux dérivées partielles ou pour l'analyse de méthodes numériques,
— en théorie des représentations de groupes avec les fonctions de BESSEL,
— en algèbre en abordant les fonctions elliptiques et la fonction $\wp$ de WEIERSTRASS.

Là encore, le jury renouvelle sa mise en garde d'éviter de faire un catalogue qui s'avérerait stérile, il s'agit bien plutôt de se tenir à détailler l'un ou l'autre de ces points de vue. Cette leçon doit être l'occasion de montrer un véritable investissement personnel, adossé aux goûts du candidat.

266 : Illustration de la notion d'indépendance en probabilités.

L'indépendance est centrale en probabilités et démarque cette théorie de celle de l'intégration. La motivation de cette leçon est de présenter cette notion de façon cohérente et de l'illustrer par des énoncés fondamentaux et des modèles importants.

À partir de la notion élémentaire de probabilité conditionnelle, on pourra introduire l'indépendance de deux événements, l'indépendance mutuelle d'une suite d'événements, voire celle d'une suite de tribus, puis l'indépendance de familles de variables aléatoires. Ces notions doivent être illustrées par des exemples et des énoncés simples (indépendance deux à deux et indépendance mutuelle, indépendance et opérations ensemblistes, etc). Il est important de pouvoir présenter un espace de probabilité sur lequel sont définies n variables aléatoires indépendantes, au moins à un niveau élémentaire pour des variables discrètes ou à densité. De façon plus sophistiquée, on peut envisager de donner une construction d'un espace de probabilité sur lequel est définie une suite de variables aléatoires réelles indépendantes ayant des lois prescrites.

Au delà des définitions, il est nécessaire de décliner quelques propriétés simples de l'indépendance, notamment celles en lien avec l'espérance et, plus spécifiquement, les notions de variance et de covariance, ce qui peut s'illustrer par exemple par l'obtention de lois faibles des grands nombres. Une autre illustration possible consiste en la représentation des variables usuelles (binomiales, géométriques, hypergéométriques ...) à l'aide d'expériences indépendantes élémentaires. Grâce aux divers critères utilisant les fonctions ou transformées caractérisant les lois (densité, fonction génératrice, fonction de répartition à n variables, fonction caractéristique, etc) il est possible de présenter les propriétés d'indépendance remarquables dont jouissent les lois usuelles (lois de Poisson, lois normales, lois exponentielles, lois de Cauchy ou, pour aller plus loin, par exemple, la traduction de l'indépendance des vecteurs gaussiens en termes d'algèbre bilinéaire).

Les réciproques du lemme de Borel-Cantelli et la loi du 0-1 de Kolmogorov, plus sophistiquée, tiennent une place de choix dans cette leçon ; elles permettent notamment d'obtenir des convergences presque sûres. De manière générale, il est important d'illustrer cette leçon par des exemples tels que l'étude des records ou les propriétés du minimum de variables exponentielles indépendantes ou bien les statistiques d'ordre, ou encore le principe du « singe tapant à la machine », etc. Enfin, la promenade aléatoire simple symétrique sur $\mathbf{Z}$ est une riche source d'exemples.

267 : Exemples d'utilisations de courbes en dimension 2 ou supérieure.

Cette leçon de synthèse doit permettre de montrer la variété d'utilisation des courbes dans le plan (ou, dans une perspective plus ambitieuse, de courbes tracées sur un objet géométrique plus élaboré), que celles-ci soient définies sous une forme paramétrique ou une sous forme implicite. Plutôt qu'une théorie générale ou un catalogue de formules relatives à divers systèmes de coordonnées qui seraient donnés sans motivation, le jury attend plutôt une illustration des applications des courbes planes en topologie, en calcul différentiel, en géométrie ou en analyse complexe à partir d'exemples et de résultats pertinents. Il s'agit d'un sujet suffisamment riche qui permet d'aborder des points de géométrie intéressants tout en restant à un niveau mathématique raisonnable. Cette leçon doit présenter différents aspects de l'utilisation des courbes : on ne pourra se contenter d'un seul. La liste qui suit, qui n'est pas exhaustive, présente plusieurs pistes.

Les propriétés métriques des courbes planes (longueur d'arc, voire courbure) font naturellement partie de cette leçon. Un axe de cette leçon pourrait concerner l'obtention du tracé des courbes et l'étude de mouvements ponctuels dans le plan, qu'ils soient donnés sous forme de lieux (coniques, cycloïdes diverses, etc) ou de solutions d'équations différentielles (par exemple inspirés de problème de mécanique du point, comme le mouvement à deux corps et les lois de Kepler). On peut également penser à l'utilisation d'intégrales premières en vue de l'analyse des solutions de systèmes d'équations différentielles ordinaires (périodicité du mouvement d'un pendule pesant, de solutions du système de Lotka–Volterra, méthode des caractéristiques pour la résolution d'équations de transport, etc.). Il est important que les exemples de tracés de courbes soient motivés.

L'application des courbes planes à la topologie est un point qui peut illustrer naturellement cette leçon : le concept de connexité par arcs, le théorème du relèvement ainsi que la notion d'indice d'un lacet par rapport à un point en lien avec le théorème intégral de Cauchy en analyse complexe... sont des sujets d'investigation pertinents pour cette leçon. Pour aller plus loin, cette leçon peut être l'occasion de s'attarder sur ces techniques d'analyse complexe ainsi que sur les divers résultats qui y sont liés comme par exemple, la formule des résidus, l'existence d'une primitive complexe, voire la méthode du col pour l'obtention de développements asymptotiques, l'étude de certaines transformations conformes (comme la transformation de JOUKOVSKI) et leurs applications... Pour les candidats qui le souhaitent, il est enfin possible de développer quelques aspects de géométrie des surfaces en parlant par exemple de vecteurs tangents, de géodésiques sur la sphère ou encore d'extrema liés.

B.4 Épreuves orales Option D

B.4.1 L'épreuve de leçon de mathématiques de l'option D

Dans cette épreuve, le candidat tire au sort un couple de sujets au sein d'une sélection d'une quarantaine de leçons d'algèbre-géométrie et d'analyse-probabilités extraite de la liste générale des autres options du concours. La sélection qui sera utilisée en 2021 est publiée en annexe du présent document. *Il n'y a pas nécessairement un sujet d'algèbre et un sujet d'analyse* : les couples de leçons proposés au tirage au sort peuvent comprendre deux sujets d'algèbre ou deux sujets d'analyse, par exemple : *Variables aléatoires discrètes* et *Fonctions monotones*. Le jury met donc les candidats en garde contre toute tentation de faire l'impasse sur une partie du programme. Les candidats de cette option préfèrent souvent, lorsque ce choix leur est donné, les sujets relevant de l'algèbre. Toutefois les modalités de formation des couplages de leçons rendent hasardeuse toute stratégie de préparation qui négligerait les connaissances en analyse et probabilités.

Le jury interroge les candidats dans le même esprit que dans les autres options ; la grille de notation et les critères d'évaluation sont strictement identiques. Les remarques détaillées concernant cette épreuve ne sont pas différentes des remarques concernant les épreuves de leçon des autres options et le lecteur est invité à se reporter aux sections précédentes de ce rapport.

B.4.2 L'épreuve orale de leçon d'informatique fondamentale de l'option D

De manière générale, le jury constate que les candidats sont souvent bien préparés à cette épreuve où ils proposent des plans de qualité et des développements intéressants. Le jury recommande de veiller à ce que les développements soient bien en adéquation avec le thème de la leçon et n'en constituent pas qu'une illustration anecdotique. Les préparations peuvent aussi suggérer des approches plus variées et inciter à une plus grande diversité des développements proposés.

Le jury attire l'attention sur le fait que le choix de cette option ne peut raisonnablement se faire par défaut, mais réclame une bonne identification des connaissances attendues. L'épreuve de la leçon est une épreuve difficile, qui couvre des domaines variés du champ de la science informatique. Elle ne peut être réussie que si elle est préparée sérieusement et sur une période suffisamment longue, adossée à une formation initiale avancée en informatique.

Organisation de la leçon. Le jury rappelle qu'il s'agit bien d'une épreuve d'informatique, et non pas d'outils mathématiques pour l'informatique. Il appartient au candidat de montrer la pertinence des outils mathématiques qu'il développe vis-à-vis des objectifs du thème informatique développé dans la leçon. Les titres de nombreuses leçons mentionnent explicitement exemples ou/et applications, ce qui doit être pris en compte dans la leçon. En particulier, le candidat doit argumenter sur l'utilisation en informatique des notions introduites et proposer des exemples pertinents de leur application concrète ; le jury accorde une grande importance à ces illustrations. Quand des algorithmes ou des structures de données sont présentées, la question de la complexité est centrale. Le jury invite les candidats à mettre en perspective les approches développées afin d'argumenter sur leurs bénéfices.

Enfin, il faut rappeler que lors de la présentation de son plan, le candidat doit proposer au moins deux développements : le jury est attentif d'une part à ce que les deux développements entrent strictement dans le cadre de la leçon, et que d'autre part ils ne se réduisent pas à des exemples triviaux. Tout hors sujet est sévèrement pénalisé.

Interaction avec le jury. Une large partie de l'épreuve est consacrée à l'interaction avec le jury. Ici, il s'agit plutôt d'explorer de manière plus approfondie les notions qui ont été présentées, les domaines connexes, et surtout les exemples d'application de ces notions.

L'interaction est conduite sous la forme d'un dialogue avec le candidat. Le jury respecte le niveau choisi par le candidat : les questions s'ajustent à ce niveau. De même, toute digression du candidat sur un domaine connexe à celui de la leçon condut le jury à tester les connaissances du candidat sur ce domaine : les connaissances solides sont récompensées, mais un manque de maîtrise sur des notions mises en avant par le candidat lui-même est pénalisé. Ce long temps d'interaction doit être considéré comme une occasion privilégiée pour le candidat de montrer ses connaissances. Il est indispensable que les candidats s'entraînent à ce type d'exercice avec leurs préparateurs.

B.4.3 Commentaires sur les leçons d'informatique

Les leçons proposées en 2021 sont identiques à celles préves pour 2020.

901 Structures de données. Exemples et applications.

Le mot algorithme ne figure pas dans l'intitulé de cette leçon, même si l'utilisation des structures de données est évidemment fortement liée à des questions algorithmiques. La leçon doit donc être orientée plutôt sur la question du choix d'une structure de données. Le jury attend du candidat qu'il présente différents types abstraits de structures de données en donnant quelques exemples de leur usage avant de s'intéresser au choix de la structure concrète. Le candidat ne peut se limiter à des structures linéaires simples comme des tableaux ou des listes, mais doit présenter également quelques structures plus complexes, reposant par exemple sur des implantations à l'aide d'arbres. Les notions de complexité des opérations usuelles sur la structure de données sont bien sûr essentielles dans cette leçon.

903 Exemples d'algorithmes de tri. Correction et complexité.

Sur un thème aussi classique, le jury attend des candidats la plus grande précision et la plus grande rigueur.

Ainsi, sur l'exemple du tri rapide, il est attendu du candidat qu'il sache décrire avec soin l'algorithme de partition et en prouver la correction en exhibant un invariant adapté. L'évaluation des complexités dans le cas le pire et en moyenne devra être menée avec rigueur : si on utilise le langage des probabilités, il importe que le candidat sache sur quel espace probabilisé il travaille.

On attend également du candidat qu'il évoque la question du tri en place, des tris stables, des tris externes ainsi que la représentation en machine des collections triées.

907 Algorithmique du texte. Exemples et applications.

Cette leçon devrait permettre au candidat de présenter une grande variété d'algorithmes et de paradigmes de programmation, et ne devrait pas se limiter au seul problème de la recherche d'un motif dans un texte, surtout si le candidat ne sait présenter que la méthode naïve.

De même, des structures de données plus riches que les tableaux de caractères peuvent montrer leur utilité dans certains algorithmes, qu'il s'agisse d'automates ou d'arbres par exemple.

Cependant, cette leçon ne doit pas être confondue avec la 909, « *Langages rationnels et Automates finis. Exemples et applications.* ». La compression de texte peut faire partie de cette leçon si les algorithmes présentés contiennent effectivement des opérations comme les comparaisons de chaînes : la compression LZW, par exemple, est plus pertinente dans cette leçon que la compression de HUFFMAN.

909 Langages rationnels et automates finis. Exemples et applications.

Pour cette leçon très classique, il importe de ne pas oublier de donner exemples et applications, ainsi que le demande l'intitulé.

Une approche algorithmique doit être privilégiée dans la présentation des résultats classiques (déterminisation, théorème de Kleene, etc.) qui pourra utilement être illustrée par des exemples. Le jury est naturellement amené à poser des questions telles que : « connaissez-vous un algorithme pour décider de l'égalité des langages reconnus par deux automates ? quelle est sa complexité ? »

Des applications dans le domaine de l'analyse lexicale et de la compilation entrent naturellement dans le cadre de cette leçon.

912 Fonctions récursives primitives et non primitives. Exemples.

Il s'agit de présenter un modèle de calcul : les fonctions récursives. S'il est bien sûr important de faire le lien avec d'autres modèles de calcul, par exemple les machines de Turing, la leçon doit traiter des spécificités de l'approche. Le candidat doit motiver l'intérêt de ces classes de fonctions sur les entiers et pourra aborder la hiérarchie des fonctions récursives primitives. Enfin, la variété des exemples proposés sera appréciée.

913 Machines de Turing. Applications.

Il s'agit de présenter un modèle de calcul. Le candidat doit expliquer l'intérêt de disposer d'un modèle formel de calcul et discuter le choix des machines de Turing. La leçon ne peut se réduire à la leçon 914 ou à la leçon 915, même si, bien sûr, la complexité et l'indécidabilité sont des exemples d'applications. Plusieurs développements peuvent être communs avec une des leçons 914, 915, mais il est apprécié qu'un développement spécifique soit proposé.

914 Décidabilité et indécidabilité. Exemples.

Le programme de l'option offre de très nombreuses possibilités d'exemples. Si les exemples classiques de problèmes sur les machines de Turing figurent naturellement dans la leçon, le jury apprécie des exemples issus d'autres parties du programme : théorie des langages, logique,...

Le jury porte une attention particulière à une formalisation propre des réductions, qui sont parfois très approximatives.

915 Classes de complexité. Exemples.

Le jury attend que le candidat aborde à la fois la complexité en temps et en espace. Il faut naturellement exhiber des exemples de problèmes appartenant aux classes de complexité introduites, et montrer les relations d'inclusion existantes entre ces classes, en abordant le caractère strict ou non de ces inclusions. Le jury s'attend à ce que les notions de réduction polynomiale, de problème complet pour une classe, de robustesse d'une classe vis à vis des modèles de calcul soient abordées.

Se focaliser sur la décidabilité dans cette leçon serait hors sujet.

916 Formules du calcul propositionnel : représentation, formes normales, satisfiabilité. Applications.

Le jury attend des candidats qu'ils abordent les questions de la complexité de la satisfiabilité. Pour autant, les applications ne sauraient se réduire à la réduction de problèmes NP-complets à SAT. Une partie significative du plan doit être consacrée à la représentation des formules et à leurs formes normales.

918 Systèmes formels de preuve en logique du premier ordre. Exemples.

Le jury attend du candidat qu'il présente au moins la déduction naturelle ou un calcul de séquents et qu'il soit capable de développer des preuves dans ce système sur des exemples classiques simples. La présentation des liens entre syntaxe et sémantique, en développant en particulier les questions de correction et complétude, et de l'apport des systèmes de preuves pour l'automatisation des preuves est également attendue.

Le jury apprécie naturellement si des candidats présentent des notions plus élaborées comme la stratégie d'élimination des coupures mais est bien conscient que la maîtrise de leurs subtilités va au-delà du programme.

921 Algorithmes de recherche et structures de données associées.

Le sujet de la leçon concerne essentiellement les algorithmes de recherche pour trouver un élément dans un ensemble : l'intérêt des structures de données proposées et de leur utilisation doivent être argumentés dans ce contexte.

Par exemple, la recherche d'une clé dans un dictionnaire donne ainsi l'occasion de définir la structure de données abstraite « dictionnaire », et d'en proposer plusieurs implantations concrètes. De la même façon, on peut évoquer la recherche d'un mot dans un lexique : les arbres préfixes (ou digital tries) peuvent alors être présentés. Mais on peut aussi s'intéresser à des domaines plus variés, comme la recherche d'un point dans un nuage (et les quad-trees), et bien d'autres encore.

923 Analyses lexicale et syntaxique. Applications.

Cette leçon ne doit pas être confondue avec la 909, qui s'intéresse aux seuls langages rationnels, ni avec la 907, sur l'algorithmique du texte.

Si les notions d'automates finis et de langages rationnels et de grammaires algébriques sont au cœur de cette leçon, l'accent doit être mis sur leur utilisation comme outils pour les analyses lexicale et syntaxique. Il s'agit donc d'insister sur la différence entre langages rationnels et algébriques, sans perdre de vue l'aspect applicatif : on pensera bien sûr à la compilation. Le programme permet également des développements pour cette leçon avec une ouverture sur des aspects élémentaires d'analyse sémantique.

924 Théories et modèles en logique du premier ordre. Exemples.

Le jury s'attend à ce que la leçon soit abordée dans l'esprit de l'option informatique, en insistant plus sur la décidabilité/indécidabilité des théories du premier ordre que sur la théorie des modèles.

Il est attendu que le candidat donne au moins un exemple de théorie décidable (resp. complète) et un exemple de théorie indécidable.

Le jury apprécie naturellement si des candidats connaissent l'existence du premier théorème d'incomplétude mais est bien conscient que la démonstration va au-delà du programme. De même, même si la théorie des modèles finis n'est pas au programme, une réflexion sur la restriction aux modèles finis est valorisée.

925 Graphes : représentations et algorithmes.

Cette leçon offre une grande liberté de choix au candidat, qui peut choisir de présenter des algorithmes sur des problèmes variés : connexité, diamètre, arbre couvrant, flot maximal, plus court chemin, cycle eulérien, etc. mais aussi des problèmes plus difficiles, comme la couverture de sommets ou la recherche d'un cycle hamiltonien, pour lesquels il pourra proposer des algorithmes d'approximation ou des heuristiques usuelles. Une preuve de correction des algorithmes proposés est évidemment appréciée. Il est attendu que diverses représentations des graphes soient présentées et comparées, en particulier en termes de complexité.

926 Analyse des algorithmes : complexité. Exemples.

Il s'agit ici d'une leçon d'exemples. Le candidat doit prendre soin de proposer l'analyse d'algorithmes portant sur des domaines variés, avec des méthodes d'analyse également variées : approche combinatoire ou probabiliste, analyse en moyenne ou dans le pire cas.

Si la complexité en temps est centrale dans la leçon, la complexité en espace ne doit pas être négligée. La notion de complexité amortie a également toute sa place dans cette leçon, sur un exemple bien choisi, comme *union find* (ce n'est qu'un exemple).

927 Exemples de preuve d'algorithme : correction, terminaison.

Le jury attend du candidat qu'il traite des exemples d'algorithmes récursifs et des exemples d'algorithmes itératifs.

En particulier, le candidat doit présenter des exemples mettant en évidence l'intérêt de la notion d'invariant pour la correction partielle et celle de variant pour la terminaison des segments itératifs.

Une formalisation comme la logique de HOARE peut utilement être introduite dans cette leçon, à condition toutefois que le candidat en maîtrise le langage. Des exemples non triviaux de correction d'algorithmes doivent être proposés. Un exemple de raisonnement type pour prouver la correction des algorithmes gloutons peut éventuellement faire l'objet d'un développement.

928 Problèmes NP-complets : exemples et réductions.

L'objectif ne doit pas être de dresser un catalogue le plus exhaustif possible ; en revanche, pour chaque exemple, il est attendu que le candidat puisse au moins expliquer clairement le problème considéré, et indiquer de quel autre problème une réduction permet de prouver sa NP-complétude.

Les exemples de réduction polynomiale seront autant que possible choisis dans des domaines variés : graphes, arithmétique, logique, etc. Si les dessins sont les bienvenus lors du développement, le jury attend une définition claire et concise de la fonction associant, à toute instance du premier problème, une instance du second ainsi que la preuve rigoureuse que cette fonction permet la réduction choisie et que les candidats sachent préciser comment sont représentées les données.

Il peut être bienvenu de présenter un exemple de problème NP-complet dans sa généralité qui devient P si on contraint davantage les hypothèses, ou encore un algorithme P approximant un problème NP-complet.

929 Lambda-calcul pur comme modèle de calcul. Exemples.

Il s'agit de présenter un modèle de calcul : le lambda-calcul pur. Il est important de faire le lien avec au moins un autre modèle de calcul, par exemple les machines de TURING ou les fonctions récursives. Néanmoins, la leçon doit traiter des spécificités du lambda-calcul. Ainsi le candidat doit motiver l'intérêt du lambda-calcul pur sur les entiers et aborder la façon dont il permet de définir et d'utiliser des types de données (booléens, couples, listes, arbres).

930 Sémantique des langages de programmation. Exemples.

L'objectif est de formaliser ce qu'est un programme : introduction des sémantiques opérationnelle et dénotationnelle, dans le but de pouvoir faire des preuves de programmes, des preuves d'équivalence, des preuves de correction de traduction.

Ces notions sont typiquement introduites sur un langage de programmation (impératif) jouet. On peut tout à fait se limiter à un langage qui ne nécessite pas l'introduction des CPOs et des théorèmes de point fixe généraux. En revanche, on s'attend ici à ce que les liens entre sémantique opérationnelle et dénotationnelle soient étudiés (toujours dans le cas d'un langage jouet). Il est aussi important que la leçon présente des exemples d'utilisation des notions introduites, comme des preuves d'équivalence de programmes ou des preuves de correction de programmes.

931 Schémas algorithmiques. Exemples et applications.

Cette leçon permet au candidat de présenter différents schémas algorithmiques, en particulier « diviser pour régner », programmation dynamique et approche gloutonne. Le candidat pourra choisir de se concentrer plus particulièrement sur un ou deux de ces paradigmes. Le jury attend du candidat qu'il illustre sa leçon par des exemples variés, touchant des domaines différents et qu'il puisse discuter les intérêts et limites respectifs des méthodes. Le jury ne manque pas d'interroger plus particulièrement le candidat sur la question de la correction des algorithmes proposés et sur la question de leur complexité, en temps comme en espace.

932 Fondements des bases de données relationnelles.

Le cœur de cette leçon concerne les fondements théoriques des bases de données relationnelles : présentation du modèle relationnel, approches logique et algébrique des langages de requêtes, liens entre ces deux approches.

Le candidat peut ensuite orienter la leçon et proposer des développements dans des directions diverses : complexité de l'évaluation des requêtes, expressivité des langages de requête, requêtes récursives, contraintes d'intégrité, aspects concernant la conception et l'implémentation, optimisation de requêtes...

Annexe C

Recommandations pour les épreuves orales de modélisation

C.1 Déroulement des épreuves de Modélisation

Lors de l'inscription au concours, quatre options sont proposées :

A. Probabilités et Statistiques,
B. Calcul scientifique,
C. Algèbre et Calcul formel,
D. Informatique.

L'épreuve de modélisation comporte une période de préparation de quatre heures et une interrogation dont la durée est d'une heure, modalités qui s'appliqueront encore pour la session 2021.

Le jury rappelle que, même s'il s'agit d'une épreuve plus appliquée ou moins académique que les deux autres épreuves orales, cela ne dispense en aucun cas les candidats de faire preuve de la rigueur mathématique requise : quand on utilise un théorème, il faut impérativement être capable d'en restituer un jeu d'hypothèses. Par jeu d'hypothèses correct, on entend que le théorème soit vrai et qu'il s'applique effectivement au contexte considéré. Le jury n'attend pas nécessairement un énoncé avec les hypothèses les plus générales possibles.

L'épreuve de modélisation permet aux candidats de mettre en avant diverses qualités : les connaissances mathématiques / informatiques (pour l'option D), la réflexion et la mise en perspective des connaissances, l'aptitude à les appliquer à des problèmes concrets de modélisation, la pertinence des illustrations informatiques, les qualités pédagogiques de mise en forme d'un exposé construit et cohérent, la capacité à faire preuve d'initiative pour s'exprimer et manifester des qualités pédagogiques et de synthèse. La capacité des candidats à répondre aux questions fait partie intégrante de l'évaluation de cette épreuve. Comme pour l'ensemble des oraux, le caractère vivant de l'exposé est un atout.

Le texte fourni est la base pour construire et exposer un traitement mathématique / informatique (pour l'option D) d'un problème « concret » en s'appuyant sur les éléments, généralement partiels, disséminés dans le texte. La présentation doit s'appuyer sur un dosage cohérent et harmonieux entre introduction motivée de modèles, preuves mathématiques, illustrations informatiques, critiques éventuelles du texte, réponses aux questions, mise en lumière des connaissances. Les candidats doivent utiliser leurs connaissances mathématiques et informatiques pour justifier les points de leur choix parmi ceux évoqués dans le texte, proposer un retour sur le modèle ainsi qu'une conclusion.

C.1.1 Texte

L'épreuve de modélisation repose sur l'exploitation d'un texte d'environ 5 à 6 pages que les candidats choisissent parmi les deux qui leur sont proposés lors du tirage. *Pour la session 2021, l'épreuve de modélisation de l'option D ne comprendra plus d'« exercice de programmation » ;* voir pour plus de détails la section consacrée à l'option D.

En 2021, ces textes seront surmontés, pour les options A, B, C des bandeaux :

> *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte, dont il dispose d'une copie pendant l'interrogation, sans toutefois être censé le connaître. La présentation, bien que totalement libre, doit être organisée et le jury recommande qu'un plan soit annoncé en préliminaire. L'exposé doit être construit en évitant la paraphrase et doit mettre en lumière vos connaissances, à partir des éléments du texte. Il doit contenir des illustrations informatiques réalisées sur ordinateur, ou, à défaut, des propositions de telles illustrations. Des pistes de réflexion, indicatives et largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte.*

Pour l'option D, le bandeau sera :

> *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte, dont il dispose d'une copie pendant l'interrogation, sans toutefois être censé le connaître. La présentation, bien que totalement libre, doit être organisée et le jury recommande qu'un plan soit annoncé en préliminaire. L'exposé doit être construit en évitant la paraphrase et mettant en lumière vos connaissances, à partir des éléments du texte. Il doit contenir des illustrations informatiques réalisées sur ordinateur, comportant une part significative de programmation dans un ou plusieurs des langages C, CAML, Java ou Python. Des pistes de réflexion, indicatives et largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte.*

Les textes se termineront par les recommandations suivantes pour les options A, B, C, D :

> *Les pistes de réflexion suivantes ne sont qu'indicatives et il n'est pas obligatoire de les suivre. Vous pouvez choisir d'étudier, ou non, certains des points proposés, de façon plus ou moins approfondie, mais aussi toute autre question à votre initiative. Vos investigations comporteront une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats. À défaut, si vos illustrations informatiques n'ont pas abouti, il est conseillé d'expliquer ce que vous auriez souhaité mettre en œuvre.*

Les textes sont souvent motivés par des problèmes concrets. Ils peuvent présenter des arguments rapides, voire heuristiques, qui sont dans ce cas signalés comme tels, mais ils ne contiennent pas d'assertion délibérément trompeuse, et se concluent par une liste de suggestions.

Même si la plupart des textes s'appuient sur des problématiques issues de sciences autres que les mathématiques, aucune connaissance dans ces domaines n'est exigée par le jury. Discuter la modélisation proposée par un texte consiste donc avant tout à dégager les comportements qualitatifs du modèle, la manière dont il dépend d'éventuels paramètres et s'il semble apte à rendre compte des phénomènes qu'il est censé représenter. Toutefois, le jury s'attend à ce que les candidats ne se contentent pas d'un exposé intégralement qualitatif et démontrent certains résultats évoqués dans le texte ; il apprécie particulièrement, sans toutefois l'exiger, qu'un candidat montre sa compréhension du modèle en exhibant par exemple les conséquences d'une variation de paramètres ou de données, notamment dans l'illustration informatique. *A contrario*, des interprétations qualitatives du comportement des modèles sont trop souvent absentes des exposés. Pourtant, montrer que l'on comprend un modèle ne se réduit pas à prouver un théorème, et nécessite d'exposer des expérimentations informatiques à fin d'illustration.

Chaque année, des textes sont rendus publics et sont disponibles sur le site de l'agrégation de mathématiques http://agreg.org. Ces textes sont représentatifs de l'épreuve et permettent aux candidats de se familiariser avec le format des textes, de se faire une idée des attentes du jury, de réfléchir à des illustrations numériques pertinentes dans le cadre du texte, ou, pour l'option D, d'évaluer les exigences de programmation de l'épreuve. La conception et la sélection des textes proposés rend très hasardeuse toute stratégie d'impasse sur une partie du programme (général ou spécifique aux options).

C.1.2 Préparation

Durant les quatre heures de préparation, les candidats ont accès à la bibliothèque et disposent d'un ordinateur dont la configuration est décrite sur le site de l'agrégation de mathématiques, à l'adresse http://agreg.org. Les candidats retrouveront le même environnement sur l'ordinateur de la salle d'interrogation. Il n'est évidemment pas réaliste de découvrir les logiciels à disposition des candidats le jour de l'épreuve : la configuration informatique utilisée pour le concours et sa documentation sont accessibles et téléchargeables sur le site http://clefagreg.dnsalias.org/ et permettent de se familiariser avec l'environnement offert lors de l'épreuve.

Il est instamment demandé aux candidats de ne pas écrire sur les textes imprimés qui leur sont distribués car ils sont destinés à être utilisés à nouveau pendant la session.

Il est recommandé aux candidats de consacrer une partie de leur temps de préparation à s'interroger sur le discours qu'ils tiendront, la stratégie d'exploitation du tableau et d'utilisation de l'outil informatique et le temps qu'ils vont consacrer à chacune des parties de leur plan, ce qui leur permettra de mettre au mieux en valeur leurs connaissances et leur compréhension du texte ou d'une partie de celui-ci. Proposer un exposé structuré et cohérent ne peut s'improviser au moment de l'oral et doit faire l'objet d'une réflexion préalable durant la préparation. Il est conseillé aux candidats de consacrer quelques minutes à la fin de leur préparation à une prise de recul sur leur plan. Le plan est un élément important pour le jury, qui pourra, en s'y référant, aider les candidats dans leur gestion du temps de l'exposé, notamment en leur rappelant, si ce n'est fait avant les dernières minutes, que l'illustration informatique doit être présentée au cours de la présentation et non pendant le temps d'échange.

C.1.3 Oral

Au début de l'interrogation, le jury rappelle les modalités de l'épreuve, puis invite les candidats à vérifier que les fichiers qu'ils ont créés lors de la préparation ont bien été transférés sur la machine servant pour l'épreuve (dont l'environnement est identique à celui de la salle de préparation). L'épreuve est scindée en deux temps : un exposé de 35 minutes suivi de 25 minutes d'échanges avec le jury. Les candidats ont la recommandation de commencer par donner la structure de leur présentation sous forme d'un plan et le déroulement de l'exposé doit être en cohérence avec cette structure. Grâce à ce plan, le jury pourra ainsi avoir une vision globale de l'exposé et aider, si besoin, les candidats à gérer leur temps. Comme les candidats se le voient rappeler en début d'épreuve, l'exposé doit être accessible à un public qui découvre les problématiques du texte et doit permettre d'en faire comprendre les enjeux à un public qui ne le connaîtrait pas. Le jury, tout en étant conscient des difficultés du concours, attend un minimum d'aisance au tableau, la manifestation d'une certaine volonté de capter l'attention de l'auditoire et un discours clair et précis.

L'exercice de l'exposé en temps limité n'est pas simple et nécessite un certain entraînement. Il est malheureusement fréquent de voir des exposés un peu trop lents pendant les 20 à 25 premières minutes qui accélèrent brutalement dans les 10 dernières minutes et que les candidats peinent à conclure dans le temps imparti. Par ailleurs, si le jury sanctionne un exposé significativement trop bref, la démarche consistant à « jouer la montre » est encore plus sévèrement pénalisée.

Durant l'exposé, les candidats disposent de leurs notes, d'un tableau et d'un ordinateur. Ils peuvent alterner, quand bon leur semble, entre un exposé oral, quelques éléments rédigés au tableau de façon propre et lisible et la présentation de ce qui a été préparé à l'aide de l'outil informatique. Les candidats doivent gérer correctement le tableau et demander, si besoin, au jury les parties qu'ils peuvent effacer, le jury pouvant souhaiter conserver certains passages et y revenir lors des échanges avec les candidats. Le jury n'est pas censé connaître le texte présenté par le candidat, mais chaque membre dispose néanmoins d'un exemplaire papier, afin que les candidats puissent y faire référence pour éviter de recopier les notations, les énoncés complets ou certaines formules. Même si les programmes ne fonctionnent pas comme ils l'auraient souhaité ou si les simulations numériques n'ont pas abouti, les candidats sont invités à expliquer ce qu'ils voulaient mettre en œuvre, illustrer ou programmer. Si, lors de la phase d'exposé, les candidats n'ont pas du tout utilisé l'ordinateur dix minutes avant la fin du temps qui leur est imparti, le jury les alertera.

Il n'y a pas de « format type » pour cette épreuve. Sur un même texte, des prestations très différentes, tant dans leur forme que dans leur contenu, peuvent conduire également à des notes élevées. Comme dans tout oral, la construction de l'exposé doit être une préoccupation importante des candidats. Une réflexion s'impose afin de produire un tout cohérent et intelligible par un public qui, dans l'esprit de l'épreuve, découvre le texte à travers l'exposé des candidats. Une brève introduction à la problématique avant de s'engager dans une longue digression (succession de définitions, théorèmes,...) sans lien avec le problème de départ ne peut conduire à une prestation jugée comme satisfaisante et sera sanctionné par le jury.

De même, un exposé se réduisant à la présentation de la problématique du texte et à des illustrations informatiques, ou à l'énumération linéaire des pistes de réflexion proposées par le texte, sans contribution des candidats, ne peut conduire au mieux qu'à un résultat médiocre. Un texte traité de façon partielle mais substantielle et en profondeur peut au contraire donner une note élevée. Plutôt qu'un survol superficiel de l'intégralité du texte sans apport mathématique / informatique ou critique scientifique, les candidats doivent préférer une discussion fouillée d'une portion du texte, bâtie sur des arguments mathématiques / informatiques solides, des simulations pertinentes accompagnées de commentaires de bon aloi. Néanmoins, dans l'ensemble, les candidats semblent avoir perçu la nécessité d'utiliser, au mieux, le temps qui leur est dédié. Le jury apprécie de voir de plus en plus de candidats qui se sont approprié le texte et en donnent une présentation pertinente et autre qu'une paraphrase linéaire.

Pour enrichir leur propos, les candidats sont invités à mobiliser leurs connaissances sur des aspects variés du programme, en étayant les arguments seulement esquissés dans le texte par des énoncés précis. Il est totalement illusoire de chercher à impressionner le jury par une logorrhée de mots savants : les textes proposés peuvent être discutés en exploitant un bagage technique qui n'utilise pas les éléments les plus sophistiqués du programme. En particulier, le jury ne manque pas de s'attarder sur toute notion amenée par les candidats durant leur présentation et il est toujours dommageable de s'aventurer sur des terrains méconnus. Bien plus qu'une démonstration de virtuosité technique, le jury attend que les candidats montrent leur maîtrise d'énoncés relativement simples « en situation » : c'est là que réside une des difficultés principales de l'épreuve. Nombre de candidats peinent à formaliser précisément des notions de base du programme ou à mettre en œuvre certaines de leurs connaissances. De plus, même si le jury ne se formalise pas de petites erreurs de calcul lors des questions, il apprécie particulièrement que, lors de l'exposé, les résultats présentés soient justes.

A contrario, utiliser une portion excessive du temps de parole pour recycler un chapitre de cours ou un développement d'une leçon d'Analyse et Probabilités, d'Algèbre et Géométrie ou d'Informatique, en s'éloignant des enjeux du texte, est considéré comme un hors sujet et est sévèrement sanctionné. La paraphrase pure et simple d'amples portions du texte ne constitue en aucun cas un exposé satisfaisant. Les textes fournissent souvent des esquisses de démonstrations qui sont précisément destinées à être complétées et commentées et dont les candidats ne doivent pas se contenter. S'ils en font mention, le jury s'assurera que les candidats ont compris en profondeur et qu'ils maîtrisent la démonstration dans sa totalité.

Le jury n'est pas dupe lorsque des candidats font semblant de connaître une notion ou d'avoir compris un point du texte ou une démonstration. Il ne se laisse pas tromper non plus par les candidats qui font d'extraits du texte un argument d'autorité, tentative maladroite de masquer des insuffisances techniques. Un regard critique (« il faudrait prouver que... mais je n'ai pas réussi à le faire », « les hypothèses du théorème de XXX que je connais pour aborder des problèmes similaires ne sont pas satisfaites dans le cas présent » ...) est une attitude bien plus payante.

Les candidats sont libres de la gestion de leur exposé ; ils sont encouragés à réfléchir à l'organisation qu'ils vont adopter et qui peut constituer une réelle plus-value. Des formats très différents de prestation ont été valorisés : certains s'éloignant du découpage opéré par le texte et arrangeant les éléments autrement ; d'autres présentant un survol du problème, de la méthode et des résultats obtenus avant de détailler des aspects plus mathématiques ; d'autres au contraire suivant de près la progression du texte mais en y apportant les éclairages et les illustrations nécessaires. De bons exposés ont parfois choisi d'aller loin dans le texte pour en décrire la dynamique globale et l'aboutissement (quitte à ne pas traiter toutes les démonstrations) ; d'autres exposés, tout aussi bons, ont traité un passage plus limité du texte mais de manière détaillée et en fournissant tous les arguments pertinents. L'essentiel est d'*éviter la paraphrase sans plus-value mathématique*. En particulier, *de nombreuses affirmations des textes ne sont pas justifiées et le jury s'attend à ce que le candidat les identifie pendant sa préparation et fournisse les explications manquantes* (ou, à défaut, des pistes). A titre d'exemple, si une preuve très détaillée du texte omet délibérément un point important, le jury déplorera que cette preuve soit intégralement recopiée sans que le point en question ne soit même relevé. Au contraire, le jury valorisera les « lacunes » que le candidat aura repérées et comblées par lui-même. En début d'épreuve, le jury rappelle qu'il a le texte sous les yeux. Ainsi, la réécriture à l'identique et au tableau de longs passages du texte ne présente qu'un intérêt très limité si elle n'est pas accompagnée d'apports du candidat.

C.1.4 Echanges avec le jury

Durant 25 minutes, le jury revient sur certains propos des candidats qui méritent précision. Il peut demander un énoncé précis de théorèmes utilisés pour démontrer une assertion ou des éléments de démonstration d'un théorème énoncé par les candidats.

Les échanges peuvent également porter sur la modélisation, les illustrations informatiques ou la programmation pour l'option D.

C.2 Recommandations du jury, communes aux options A, B, C

Le jury tient à souligner les attentes partagées entre les trois options A (Probabilités et Statistiques), B (Calcul scientifique) et C (Algèbre et Calcul formel).

Le jury regrette de ne pas voir davantage de dessins (soignés) ou schémas explicatifs qui peuvent rendre l'argumentation plus claire et convaincante. La capacité à revenir sur le problème de départ et à conclure quant à l'efficacité de l'approche mathématique proposée pour y répondre est une qualité très appréciée. La rigueur et la clarté de l'organisation, la gestion du temps, la pertinence des choix opérés parmi les différentes questions soulevées par le texte sont des éléments de l'évaluation. Les qualités de synthèse sont aussi appelées à s'exprimer : il vaut mieux indiquer les étapes cruciales d'un raisonnement que de se lancer dans un long calcul fastidieux qu'on aura du mal à mener à bien et à mettre en valeur. Les candidats doivent être attentifs au fait que les arguments présents dans les textes, notamment au cours des démonstrations, peuvent être partiels. Il est très important que les affirmations des candidats soient étayées et que les preuves exposées soient entièrement reprises et *complètes*. L'évaluation repose pour une grande part sur la capacité des candidats à identifier les lacunes et ellipses volontaires des textes. Enfin, l'aspect pédagogique de l'exposé, même si le texte n'est restitué que partiellement mènera à une note bien plus élevée qu'un catalogue de type paraphrase.

Illustration informatique

Le jury rappelle son fort attachement à cet aspect de l'épreuve, dont les ambitions sont clairement délimitées. Il ne s'agit en aucun cas, et pour aucune des trois options, d'un exercice de programmation. L'objectif est d'être capable d'utiliser l'outil informatique pour illustrer, de façon pertinente, le contenu du texte. Il ne s'agit pas d'éblouir le jury par une virtuosité en programmation, au détriment d'un temps raisonnable accordé à la discussion et l'analyse du modèle.

La réalisation de cet objectif constitue une part incompressible de la note finale attribuée à l'épreuve. Une très bonne évaluation peut résulter d'une exploitation judicieuse de programmes simples, reposant largement sur les routines standards des logiciels fournis. La forme et la nature des illustrations proposées n'obéissent à aucun format préétabli. En revanche, elles doivent faire la preuve d'une véritable réflexion scientifique et être agrémentées de commentaires, sur les résultats et les méthodes. Une analyse sommaire de la complexité des algorithmes est attendue. Une analyse de l'ordre numérique des méthodes, notamment à l'aide de régressions linéaires, peut être demandée aux candidats. Les illustrations informatiques devraient plus souvent permettre de faire un retour sur la problématique du texte et il convient de commenter les résultats obtenus dans le cadre du modèle proposé par le texte. Des illustrations peuvent mettre en valeur les limites du modèle étudié et le jury apprécie particulièrement que les candidats aient un regard critique sur le texte et ne prennent pas celui-ci pour vérité absolue.

Si un bel effort est souvent produit par les candidats, un nombre très limité d'entre eux rechignent encore à toucher à l'outil informatique. Cette stratégie, dont on pourrait naïvement penser qu'elle permet de consacrer plus de temps à l'analyse du texte et à la préparation de l'exposé oral, est fortement sanctionnée.

Il est important de se rappeler qu'il s'agit d'une illustration. Les candidats peuvent choisir de présenter leur code, s'ils le souhaitent, mais ils doivent réfléchir à en extraire les points clés ; une présentation exhaustive et linéaire est préjudiciable à l'exposé, car elle risque d'empiéter sur le temps à consacrer à la restitution du texte. Cependant, le jury peut demander des précisions sur un point du code. Dans le cas d'une représentation graphique, il est important de préciser, au moins oralement, ce qui est représenté en abscisses et ordonnées.

Pour finir, le jury est tout à fait conscient de la difficulté de l'utilisation de l'outil informatique en temps limité et en situation de stress. Il reste bienveillant face aux candidats dont les illustrations informatiques n'ont pas abouti au résultat souhaité. Dans une telle situation les candidats sont encouragés à expliquer ce qu'ils ont fait et quel type de résultats ils espéraient obtenir. Le jury sait prendre en compte dans sa notation la démarche suivie lorsqu'elle est clairement argumentée et permettrait, avec des aménagements mineurs, de mettre en évidence des aspects intéressants du texte.

Liens avec les épreuves d'Analyse-Probabilités et Algèbre-Géométrie

Les candidats ne doivent pas hésiter à s'appuyer sur leurs connaissances spécifiques pour proposer des développements originaux dans les leçons d'Analyse et Probabilités ou d'Algèbre et Géométrie. Par exemple,

A. les candidats de l'option A peuvent nourrir leurs leçons de thèmes et d'exemples probabilistes (la fonction caractéristique d'une variable aléatoire est une transformée de FOURIER, le produit de convolution a un sens probabiliste, les espaces L^p d'une mesure de probabilité sont intéressants, l'étude de certaines séries aléatoires est possible, la fonction de répartition est une fonction monotone digne d'intérêt, le calcul intégral est en lien étroit avec les probabilités,...).

B. les candidats de l'option B peuvent centrer leur propos sur des problématiques motivées par les préoccupations du calcul scientifique (approximation de solutions d'équations linéaires ou non linéaires, d'équations différentielles, convergence d'algorithmes, analyse matricielle, calcul effectif d'exponentielle de matrice,...).

C. les candidats de l'option C peuvent s'appuyer sur leurs connaissances spécifiques en algèbre effective. En revanche, comme rappelé plus haut, l'exposé oral en modélisation ne doit pas donner lieu au recyclage d'un développement de leçon du fait que le texte parle d'un sujet similaire.

C.3 Option A : Probabilités et Statistiques

C.3.1 Commentaires généraux

Les textes proposés en option A peuvent indifféremment visiter des thématiques probabilistes ou statistiques, et peuvent même aborder les deux avec une pondération plus ou moins grande selon les textes. Les candidats doivent donc se préparer à l'ensemble du programme de l'option. L'exercice 2019 avait montré une amélioration globale de cette maîtrise et que la restitution des résultats classiques (loi forte des grands nombres, théorème central limite) et leurs applications posaient moins de problèmes que par le passé, notamment en statistiques (notion d'estimateur, de biais par exemple).

D'une manière générale, il semble que les rapports des années précédentes aient été bien lus et intégrés par les candidats : le jury ne peut que les en féliciter et encourager les futurs candidats à faire de même.

C.3.2 Recommandations spécifiques

Le jury signale ici quelques points d'attention en lien avec le programme. Des suggestions d'illustrations informatiques de ces notions figurent dans la section suivante.

- **La loi des grands nombres et le théorème central limite** sont des résultats essentiels qui, comme dit précédemment, semblent mieux maîtrisés (hypothèses et modes de convergence). L'articulation entre le théorème central limite et l'obtention d'intervalles de confiance asymptotique est plus souple que par le passé.
- **Convergences de suites de variables aléatoires.** Le jury rappelle qu'il en existe différents modes (presque-sûre, dans L^p, en probabilité, en loi). Leurs définitions, caractérisations et implications sont des questions fréquemment soulevées et qui posent toujours quelques problèmes. Il est ainsi difficile de faire écrire proprement qu'une suite de couples (X_n, Y_n) converge en loi, ou alors d'obtenir une preuve du fait que la convergence presque-sûre implique par exemple la convergence en probabilité. Si un objet aléatoire est construit comme une limite de variables aléatoires, on veillera à ce que l'existence de la limite soit justifiée.
- **Intervalles de confiance.** Cette notion est maintenant mieux maîtrisée, tout comme son lien avec le lemme de SLUTSKY. Toutefois, l'emploi de ce dernier ne doit pas devenir systématique : on peut obtenir des intervalles de confiance exacts dans certains contextes (lois gaussiennes de variance connue ou lois exponentielles par exemple). L'inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEFF peut aussi rapidement fournir un intervalle de confiance si la variance de l'estimateur est connue ou majorée. Le lien entre la variance des variables observées et la largeur des intervalles de confiance obtenus ne semble pas aller de soi pour de nombreux candidats. Enfin, comme les années passées, il arrive tout de même que les candidats proposent des intervalles de confiance qui dépendent du paramètre qu'ils veulent estimer.
- **Chaînes de MARKOV.** Les propriétés de Markov (faible et forte) font partie intégrante du programme de l'option et la compréhension globale et intuitive de ce qu'est une chaîne de MARKOV est assez répandue. En revanche, il est difficile d'obtenir des définitions correctes de concepts associés, bien qu'ils figurent explicitement dans le programme : , états récurrents, chaîne irréductible ou apériodicité. Les hypothèses permettant d'aboutir à l'existence ou l'unicité d'une mesure de probabilité invariante sont très aléatoires et les candidats ont tendance à partir de trop d'hypothèses pour ne pas prendre de risque ; les connaissances sur le sujet doivent être consolidées.
- **Espérance conditionnelle.** C'est l'une des notions les moins bien maîtrisées du programme. Le jury demande souvent d'en formuler la définition précise : le principe d'une projection dans L^2 est souvent évoqué mais le point crucial de la tribu sous-jacente est ignoré ou bien la propriété $\mathbf{E}(X\mathbf{1}_A) = \mathbf{E}(Y\mathbf{1}_A)$ est mentionnée sans que la mesurabilité de Y ou l'appartenance de A soit précisée. Il faut avoir compris qu'une variable X-mesurable est de la forme $f(X)$ et avoir

réfléchi au sens de l'expression $\mathbf{E}(Y|X = x)$: si X est à densité, elle ne correspond pas au conditionnement par un événement de probabilité nulle ! Les candidats gagneront à maîtriser quelques calculs classiques sur cette notion, par exemple celui de $\mathbf{E}(g(X,Y)|Y)$ lorsque X, Y sont indépendantes, ou encore le calcul de $\mathbf{E}(X|Y)$ si (X, Y) est un vecteur gaussien.
- **Modèle linéaire.** C'est un domaine qui semble difficile d'accès. Il faut comprendre qu'une droite de régression résulte de la minimisation d'une distance euclidienne. Sa caractérisation peut s'obtenir en termes de projection orthogonale ou par la minimisation d'une fonction de deux variables quand elle est simple.
- **Vecteurs gaussiens.** Des lacunes étonnantes ont été relevées sur les vecteurs gaussiens, surtout dans le cas d'une dimension $\geqslant 2$. La définition de la matrice de covariance d'un vecteur gaussien doit être connue ainsi que sa loi par une transformation affine $X \mapsto AX + b$. Le théorème de COCHRAN, problématique pour de nombreux candidats, s'en déduit immédiatement car des projections orthogonales Π_V, Π_W sur des espaces orthogonaux vérifient $\Pi_V \Pi_V^T = \Pi_V$ et $\Pi_V \Pi_W = 0$.
- **Processus de POISSON.** Ce point du programme n'est pas le plus volumineux, et pourtant c'est un des plus méconnus. Les propriétés de ce processus, l'allure de ses trajectoires, une idée de sa construction à partir de variables exponentielles sont autant de questions qui pourraient être moins difficiles avec un peu de préparation spécifique.
- **Tests statistiques.** Les notions relatives aux tests statistiques sont souvent mal connues ou insuffisamment maîtrisées. Le jury attend des candidats qu'ils sachent construire un test simple dans des situations pratiques, en identifiant hypothèse nulle et hypothèse alternative, ainsi qu'interpréter les résultats obtenus. Beaucoup de candidats n'ont pas une idée très claire sur la notion de quantile. La construction d'une région critique (ou de rejet) est alors très confuse et les inégalités parfois dans le mauvais sens. Les deux tests au programme (χ^2 et KOLMOGOROV-SMIRNOV) doivent être soigneusement étudiés et il est conseillé de s'exercer à les mettre en pratique sur des exemples simples.

C.3.3 Modélisation et mise en œuvre informatique

Les textes de l'option A analysent des phénomènes concrets à l'aide d'outils probabilistes. Il faut garder en tête que toute analyse mathématique d'une situation réelle passe par une étape de modélisation, qui va faire appel à un certain nombre d'hypothèses implicites. Par exemple, un modèle impliquant des chaînes de MARKOV ou des lois exponentielles ou géométriques présuppose une absence de vieillissement du système considéré ; supposer qu'une certaine variable aléatoire suit une loi gaussienne revient à supposer qu'elle résulte de l'accumulation de nombreux effets aléatoires de petite envergure. Le jury apprécie que les candidats explicitent la démarche menant au modèle du texte, plutôt que de lister une suite d'hypothèses mathématiques sans questionnement sur leur pertinence.

Tout choix de modélisation peut être commenté, mais une critique gratuite et systématique de toutes les hypothèses est rarement pertinente. Si une hypothèse semble restrictive, il sera judicieux d'expliquer en quoi elle simplifie les calculs. Si une généralisation est suggérée, il pourra être intéressant de signaler les complications techniques qu'elle entraînerait. Proposer de relaxer toutes les hypothèses simplificatrices d'un modèle n'a pas grand intérêt si le nouveau modèle obtenu est hors de portée de tout traitement mathématique.

Une fois le modèle décrit et des résultats mathématiques énoncés, il est important de réinterpréter la signification de ces derniers sur le phénomène étudié : la convergence probabiliste d'une suite de variables correspond à une stabilisation du système, dans un sens à préciser ; expliciter les propriétés d'une loi de probabilité permet de justifier les fréquences de certaines observations, etc.

Les possibilités d'utilisation de l'outil informatique pour une illustration pertinente de résultats probabilistes ou statistiques sont nombreuses. Voici quelques exemples parmi les plus importants.

- Les convergences en loi peuvent être facilement illustrées par des tracés d'histogrammes ou de fonctions de répartition empiriques. Les candidats peuvent également prendre l'initiative de les valider par des tests statistiques (χ^2 ou Kolmogorov-Smirnov) s'ils en ont le temps. On notera que la ressemblance entre l'histogramme d'un échantillon et la densité de sa loi, si elle est visuelle, n'est pas évidente sur le plan théorique.
- Une convergence presque-sûre peut se voir sur une trajectoire, de même que l'estimation d'un paramètre avec un estimateur fortement consistant. L'illustration peut être complétée par le tracé d'un intervalle de confiance.
- Les chaînes de Markov donnent lieu à d'intéressantes possibilités de simulation : simulation de trajectoires et analyse asymptotique. Dans des cas simples (marche aléatoire sur trois sites par exemple), on peut se voir demander comment programmer des itérations d'une chaîne à partir de variables aléatoires uniformes sur $[0, 1]$. La convergence presque-sûre de moyennes $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i)$, la vérification de convergence en loi (ou pas) vers une mesure stationnaire donnent lieu à des illustrations informatiques de choix.

S'il est parfaitement légitime d'utiliser les routines préprogrammées dans les logiciels disponibles, il pourra être pertinent d'avoir un peu réfléchi à leurs fonctionnements (calcul d'une fonction de répartition ou d'un quantile, simulation de lois usuelles, simulation de chaînes de Markov, calcul de mesures stationnaires).

Le jury rappelle que de nombreux textes sont assortis d'un jeu de données numériques sur lequel les candidats sont invités à mettre en œuvre des illustrations. Le jury se réjouit de l'augmentation du nombre de candidats traitant effectivement ces données. Cela constitue une réelle plus-value pour l'exposé. Ces textes sont accompagnés d'une notice expliquant comment ouvrir les fichiers de données avec les logiciels `Python, Scilab, Octave` et `R`, logiciels que le jury estime les mieux adaptés à l'option A.

C.4 Option B : Calcul scientifique

C.4.1 Commentaires généraux

Si les modalités et les attentes de cette épreuve semblent connues par une fraction croissante des candidats admissibles, une part d'entre eux ne maîtrisent pas suffisamment les rudiments du programme général intervenant dans les textes. Quelques notions sont centrales pour cette option et reviennent, sous une forme ou une autre, dans un grand nombre de textes. S'exercer à les manipuler et à énoncer les principaux résultats afférents permet d'aborder sereinement les textes proposés. Le jury attend des candidats de :

— connaître le théorème de Cauchy-Lipschitz et être en mesure de l'appliquer pour des systèmes différentiels simples en citant correctement toutes les hypothèses nécessaires à son utilisation.

— construire, analyser et mettre en œuvre la méthode d'Euler explicite.

— connaître les principes des méthodes directes de résolution de systèmes linéaires (pivot de Gauss, LU), la notion de conditionnement, la recherche d'éléments propres de matrices, analyser et mettre en œuvre la méthode de la puissance.

— analyser et mettre en œuvre la méthode de Newton (cas vectoriel).

— construire la matrice correspondant à la discrétisation par différences finies de $(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2})$ et connaître ses propriétés.

— être capable d'énoncer et appliquer le théorème des extrema liés (typiquement pour des problèmes de minimisation de fonctionnelles convexes sur $\mathbb{R}^N$ avec contraintes linéaires), analyser et mettre en œuvre un algorithme du gradient.

— maîtriser les outils d'analyse de Fourier.

— connaître les méthodes de quadratures classiques.

Le jury souligne que les textes exploitent ces notions dans leurs versions les plus élémentaires et ne requièrent aucun raffinement technique. Un énoncé précis des théorèmes utilisés est exigible.

C.4.2 Recommandations spécifiques

Le jury émet les recommandations plus spécifiques suivantes :

— **Quadratures numériques.** L'erreur commise par la méthode des rectangles doit être connue et une preuve élémentaire est exigible des candidats.

— **Analyse des équations différentielles ordinaires et calcul différentiel.** La dérivation de fonctions de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$, et notamment le calcul de la différentielle des applications linéaires, bilinéaires et des applications composées, ne devrait pas poser de difficulté au niveau de l'agrégation. Les formules de développements de Taylor contiennent généralement un terme de reste, dont l'analyse est un point souvent crucial. La lecture de la moindre équation différentielle ordinaire devrait déclencher des automatismes. Par exemple, un texte indiquant « la solution de l'équation différentielle [...] est définie pour tout temps et reste positive » doit amener à :

1. énoncer de façon précise le théorème de Cauchy-Lipschitz le plus adapté au problème (version linéaire si le problème est linéaire, version globale quand elle s'applique,...) et donner une définition claire de la notion de solution utilisée.
2. expliquer comment il s'applique dans le contexte présent (détailler explicitement la fonction $(t, X) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \mapsto f(t, X) \in \mathbb{R}^n$ qui permet de mettre le problème sous la forme $X'(t) = f(t, X(t))$, distinguer la variable vectorielle X et la fonction $X : t \mapsto X(t)$ sont malheureusement des obstacles majeurs pour certains candidats).
3. exploiter les critères classiques garantissant la positivité de la solution et sa globalité en temps. Le jury attend des candidats une bonne maîtrise de la notion de solution maximale.

— **Schémas numériques pour les équations différentielles.** Le jury considère la description des schémas d'Euler comme un élément central du programme de l'option B. Les candidats doivent être capables de présenter clairement les principes guidant l'écriture de ces schémas et l'analyse de leurs propriétés de convergence, ainsi que les avantages et inconvénients des méthodes explicites et implicites. Certains candidats peinent à formaliser correctement une définition de la convergence d'un schéma numérique et la confondent avec la notion de consistance du schéma. La confusion entre l'approximation X_n et l'évaluation $X(t_n)$ de la solution exacte au temps t_n, l'incapacité à relier le nombre de points de discrétisation et le pas Δt témoignent d'une compréhension déficiente du sujet. La mise en œuvre de ces méthodes peut être l'occasion de discuter des difficultés potentielles liées à la stabilité et aux contraintes portant sur le pas de temps.

— **Equations aux dérivées partielles.** Le jury précise que les textes qui évoquent des problèmes d'équations aux dérivées partielles peuvent être abordés avec des outils rudimentaires et ne nécessitent *a priori* aucune connaissance sur la théorie des distributions, bien que ces notions figurent au programme commun, ni ne réclament de dextérité particulière d'analyse fonctionnelle. Il est néanmoins important de savoir faire la différence entre un problème aux limites et un problème de Cauchy, et d'utiliser la discrétisation adaptée au type de problème considéré. Le jury s'attend à ce que les matrices associées à la discrétisation de $(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2})$ par différences finies pour des conditions aux limites classiques (Dirichlet, Neumann, périodiques) soient connues.

— **Algèbre linéaire.** Des lacunes profondes et inquiétantes sont relevées chez certains candidats. Au grand étonnement du jury, les candidats ne font pas toujours le lien entre matrices symétriques et formes quadratiques. Les raisonnements liés à la réduction des matrices peuvent être extrêmement laborieux et les méthodes pratiques de calcul (résolution de systèmes, calcul de puissance, inverse d'une matrice,...) méconnues. La notion de conditionnement est bien souvent trop imprécise et les liens entre rayon spectral et normes matricielles doivent être maîtrisés.

— **Optimisation.** Les théorèmes de base se rapportant aux extrema doivent être connus. On s'attend à ce que les candidats soient capables de préciser les hypothèses requises pour :

1. obtenir l'existence d'un extremum,
2. obtenir l'unicité,
3. caractériser l'extremum (sans contrainte ou avec contraintes d'égalité).

— **Analyse de Fourier.** Le jury s'étonne que de nombreux candidats aient du mal à préciser les hypothèses de régularité assurant la convergence de la série de Fourier. Le lien entre la régularité de la fonction et le comportement asymptotique de ses coefficients de Fourier doit être connu.

C.4.3 Modélisation et mise en œuvre informatique

Le jury de l'option B rappelle qu'une illustration réalisée avec les routines de base des logiciels fournis est tout à fait satisfaisante si elle est clairement présentée, motivée et discutée. Si `Scilab` ou `Python` sont certainement les langages les mieux adaptés, le jury relève que quelques candidats ont pu fournir des résultats très convaincants avec un logiciel comme `Octave`, `XCas` ou `Sage`. Le jury insiste sur le fait qu'il est important de commenter les résultats informatiques (courbes, solutions, erreurs...) obtenus et de les relier au problème de modélisation traité par le texte ou à des résultats mathématiques sous-jacents. Une présentation `libreoffice` ne pourra pas être considérée comme une illustration informatique.

C.5 Option C : Algèbre et Calcul formel

C.5.1 Commentaires généraux

La ligne directrice de l'option C est dans un premier temps la recherche de l'*effectivité*, puis de l'*efficacité* (souvent en temps, parfois en espace) du calcul algébrique. Cela va des aspects les plus élémentaires (algèbre linéaire, groupes, calcul avec les entiers, les polynômes, les entiers modulo) aux aspects plus avancés (élimination, géométrie effective, codes correcteurs d'erreur). Si l'option dispose d'un programme spécifique, les textes peuvent traiter de toute notion au programme, en particulier au programme d'algèbre. De fait, il est tout à fait possible qu'un texte parle de réduction d'endomorphismes ou de groupes, même si ces notions ne sont pas mentionnées dans le programme spécifique de l'option.

C.5.2 Recommandations spécifiques

Le programme de l'option est résolument orienté vers les problématiques du calcul algébrique effectif. Lorsqu'un énoncé du texte affirme l'existence d'un objet (scalaire, vecteur, matrice, élément d'un groupe, entier, polynôme, etc...), le jury apprécie que le candidat mène la réflexion suivante :
- peut-on calculer cet objet ?
- si oui, par quelle(s) méthodes ?
- ces méthodes sont-elles efficaces ? quel est leur coût ?

Si la démarche reste rare, le jury observe une progression du nombre de candidats se saisissant spontanément d'une question de complexité. Cette démarche est perçue très positivement par le jury. Pour prendre un exemple, quand le texte parle de cryptographie, comparer le coût des opérations de chiffrement et déchiffrement du système proposé avec le coût d'une attaque, même naïve, est une initiative intéressante et valorisée. Une telle étude est beaucoup plus à sa place qu'un exposé détaillé de RSA plaqué sur un texte qui n'en parle pas – la mention rapide de RSA dans un texte introduisant un système de chiffrement pour comparer des complexités restant bien sûr pertinente.

Sur les aspects mathématiques et la maîtrise des éléments du programme, les principales observations du jury sont les suivantes.
- **Résultant.** Le jury regrette de constater que cette notion est de plus en plus souvent boudée par les candidats. Rappelons que si le résultant ne fait plus partie du programme de mathématiques générales, il continue à figurer parmi les notions au programme de l'option.
  Si les candidats interrogés sur le résultant sont en général capables d'en donner une définition, ses propriétés élémentaires et surtout son utilisation pour éliminer des variables dans un système d'équations polynomiales semblent très floues pour un trop grand nombre d'entre eux. Beaucoup le voient comme un critère d'existence d'un facteur commun et ne pensent plus (surtout dans le cas des polynômes à une variable) au PGCD qui est un objet bien plus simple à appréhender.
- **Corps finis.** Sur cette notion, les connaissances des candidats sont très inégales. Tout d'abord, il n'est pas acceptable de n'avoir pas d'autres exemples de corps finis en tête que $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. La construction d'extensions de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ doit être connue ainsi que la manière dont les opérations de corps s'effectuent. Par ailleurs, il est important de savoir différencier les structures algébriques sous-jacentes : par exemple, savoir que $\mathbf{F}_{p^n}$ est isomorphe en tant que groupe (et même en tant que $\mathbf{F}_p$-espace-vectoriel) à $(\mathbf{F}_p)^n$ mais pas en tant que corps.
- **Codes correcteurs d'erreurs.** Depuis quelques années, le jury constate une sensible progression des connaissances des candidats sur le sujet. Les codes correcteurs sont une partie limitée du programme et très peu de connaissances sont exigibles (et exigées). Toutefois, il est nécessaire de s'y être confronté pour se familiariser avec les problématiques sous-jacentes. À savoir, typiquement qu'un bon code correcteur a une grande dimension et grande distance minimale (par rapport à sa longueur).

Si les définitions de base (codes, distance de HAMMING, distance minimale) sont souvent connues, les candidats peinent toujours à en donner une interprétation pratique. Par exemple, peu de candidats sont capables d'interpréter le ratio k/n pour un code de dimension k dans $(\mathbf{F}_q)^n$ comme un rendement ou un taux d'information. Certains candidats ne savent même pas expliquer comment utiliser concrètement un code donné. Enfin il faut être conscient que la méconnaissance des corps finis est souvent rédhibitoire pour ce sujet.

— **Algorithmes et complexité.** Il s'agit d'un point fondamental de l'option C que les candidats ne peuvent négliger. Il est malheureusement encore trop rare de voir des candidats prendre spontanément l'initiative d'analyser la complexité d'un algorithme pendant leur exposé. Le jury observe toutefois une progression des connaissances dans ce domaine même si les bases restent trop souvent fragiles :
  — beaucoup de candidats savent dire que la complexité du pivot de GAUSS est en $O(n^3)$ mais peinent à expliquer pourquoi.
  — de même, la plupart des candidats connaissent la notion d'exponentiation rapide et savent en donner la complexité, mais peu d'entre eux sont capables de la justifier.
  — si l'algorithme d'EUCLIDE est bien connu des candidats, la plupart d'entre eux ne savent obtenir des relations de BÉZOUT qu'en effectuant l'algorithme d'EUCLIDE classique puis en procédant à une laborieuse « remontée ». Rappelons que l'algorithme d'EUCLIDE *étendu* est explicitement au programme de l'option.
  — pour analyser une complexité en temps, il faut compter des opérations et il est donc nécessaire dans un premier temps de bien identifier l'anneau dont on compte les opérations. Pour donner un exemple simple, le produit de deux polynômes de degré n dans $\mathbf{K}[X]$ coûte une seule opération dans $\mathbf{K}[X]$, mais en coûte $O(n^2)$ dans $\mathbf{K}$.

C.5.3 Modélisation et mise en œuvre informatique

Quasiment tous les candidats sont maintenant en mesure d'utiliser l'outil informatique durant leur présentation. Il est important que les programmes et les calculs effectués avec l'outil informatique s'intègrent de façon pertinente dans l'exposé. L'aptitude à présenter, discuter et mettre en valeur les résultats d'exécution d'un programme puis à les relier à certains énoncés du texte est une démarche qui sera bien plus valorisée que la dextérité en programmation.

Le jury attire particulièrement l'attention sur les points suivants :

— les candidats sont libres de leur choix en ce qui concerne le logiciel parmi ceux présents dans la `ClefAgreg`. Cependant, le jury constate que les candidats ayant utilisé le logiciel `Python` ont rencontré de nombreuses difficultés pour manipuler informatiquement certaines notions (comme les corps finis et les groupes par exemple). Le jury invite les futurs candidats à réfléchir sur le choix du logiciel qu'ils utiliseront pour l'épreuve, certains étant plus adaptés que d'autres.

— le jury ne note pas les compétences en programmation mais bien la pertinence de l'illustration. Utiliser les routines fournies par le logiciel est tout à fait normal et encouragé par le jury, mais les candidats doivent être en mesure d'expliquer dans les grandes lignes ce que fait cette routine et comment elle le fait. Par exemple, les candidats faisant appel à une fonction calculant le PCGD de deux polynômes doivent pouvoir détailler le déroulement des algorithmes d'EUCLIDE et EUCLIDE étendu si le jury le leur demande.

— reprendre un extrait de code d'un livre est une démarche tout à fait acceptable à condition que les candidats comprennent exactement ce que fait ce code et que son utilisation fasse sens dans le cadre du texte.

— le jury est parfois surpris de voir des candidats développer de longs et fastidieux calculs au tableau alors que l'utilisation de l'outil informatique leur aurait permis de gagner en temps et en clarté.

— certains logiciels de calcul formel ne calculent pas le résultant de deux polynômes dans $\mathbf{K}[X, Y]$ si le corps $\mathbf{K}$ est composé de flottants. Des solutions existent pour contourner ce problème mais, pour les connaître, il est nécessaire de s'être déjà confronté à cette situation avant de passer l'oral.

C.6 Option D : Informatique

Commentaires généraux

Les prestations des candidats de l'option D sont souvent d'excellent niveau, fruit d'une remarquable préparation. Le jury interroge les candidats dans le même esprit que dans les autres options et les critères d'évaluation sont largement identiques.

Attentes du jury

Les textes présentent généralement une problématique concrète, informatique ou de la vie de tous les jours, avant d'en proposer une formalisation plus ou moins complète et une analyse informatique plus ou moins détaillée. Ils sont souvent de nature descriptive et volontairement allusifs.

Exposé des motivations. Beaucoup de candidats omettent la phase indispensable d'introduction et de motivation. C'est aux candidats d'introduire le sujet du texte et de motiver la présentation qui va suivre. Cette motivation doit souvent conduire à évoquer des situations concrètes dans lesquelles on a besoin d'outils informatiques spécifiques. Ces situations peuvent être proposées par le texte lui-même, mais elles peuvent également être tirées de l'expérience personnelle des candidats. Toute contribution personnelle à ce niveau est toujours très appréciée !

Présentation du texte. Il est attendu des candidats une restitution argumentée d'une partie cohérente du texte, ainsi qu'un effort de formalisation sur les parties descriptives et allusives du texte. Il est bon d'essayer de donner une ou des preuves complètes d'énoncés du texte, ou de compléter les arguments parfois lapidaires fournis par ce dernier. Les énoncés considérés comme vraiment trop difficiles pour être prouvés dans le cadre d'une préparation en temps limité en partant des connaissances du programme sont systématiquement pointés comme devant être admis. À l'inverse, les textes indiquent quand un énoncé est classique et que sa preuve n'intéresse pas le jury.

Il est attendu des candidats qu'ils soient fidèles à l'esprit du texte. Il ne s'agit pas de traiter l'intégralité des points du texte, mais que le traitement choisi soit cohérent : les candidats doivent par exemple pouvoir expliquer pourquoi ils ont choisi de développer certains points, et pas certains autres.

Enfin, il est attendu que l'exposé exploite judicieusement le tableau, sur un mode qui gagnerait à se rapprocher beaucoup plus du cours (structure, cohérence de ce qui est écrit au tableau indépendamment du discours) que de l'exposé de séminaire de recherche.

Le jury a souhaité faire évoluer le format des textes de l'option D pour le concours 2020, évolution qui sera donc mise en œuvre en 2021. L'objectif est de rapprocher le fonctionnement de l'option D de celles des autres options. En particulier les textes n'incluent dorénavant plus de rubrique spécifique « Exercice de programmation ». Comme dans les options A, B et C, se substitue à cet exercice une attente forte du jury sur l'utilisation de l'outil informatique pour illustrer le texte. Toutefois, pour l'option D, il est *spécifiquement attendu* que l'illustration contienne une part *significative* de programmation. Cela laisse le candidat beaucoup plus libre du choix du ou des points du texte qu'il souhaite illustrer. Pour permettre une transition progressive, les textes proposeront dans les suggestions de développement une possibilité d'un niveau correspondant à l'actuel exercice de programmation – cela permet aux candidats de se faire une idée des attentes minimales du jury sur le texte.

Questions du jury. En ce qui concerne la programmation, de manière plus ou moins approfondie, le jury attend des candidats qu'ils soient en mesure

— d'argumenter leurs choix s'ils ne l'ont pas fait au préalable, y compris le choix d'un style de programmation (par exemple avec un style de programmation orienté objet),
— de préciser les hypothèses implicites faites sur les données,
— d'indiquer les bibliothèques et les fonctions avancées utilisées et d'expliquer leur comportement (voire d'indiquer comment les candidats auraient pu faire sans) – et éventuellement, leur complexité en temps et en espace (cette dernière étant souvent mal comprise / connue). Cela est particulièrement vrai des nombreuses constructions avancées de `Python`, par exemple sur le mécanisme de gestion des tableaux/listes. La question du coût des opérations doit être une préoccupation que le candidat doit savoir prendre en compte.
— éventuellement, d'expliquer les messages d'erreurs observés à la compilation / l'interprétation / l'exécution.

Ensuite le jury revient sur la partie du texte présentée par les candidats. L'interrogation s'adapte toujours au niveau des candidats. Les questions du jury portent au moins autant sur la démarche globale de modélisation et la compréhension des différentes approches du texte que sur l'étude technique des diverses propositions. Il pose des questions destinées à affiner sa perception de la compréhension du texte par les candidats, à comprendre leur capacité à formaliser une question ou expliciter une preuve s'ils ne l'ont pas montrée d'eux-mêmes, ou encore à tester leur regard critique sur le texte. Enfin, il est fréquent que des questions d'informatique fondamentale soient posées en rapport avec le texte, pour percevoir la capacité à faire le lien entre connaissances théoriques et informatique souvent plus concrète ; les questions de calculabilité et complexité (tant analyse de complexité d'un algorithme que preuve, aidée par le jury, de NP-complétude d'un problème), sont en particulier naturelles et fréquentes.

Connaissances en informatique. Les connaissances en informatique fondamentale sont en général de haut niveau et les candidats manifestent une vraie capacité à les mobiliser. Ces connaissances semblent toutefois plus solides sur le versant calculabilité et complexité que sur le versant algorithmique où la compréhension des algorithmes (et plus largement la culture des candidats dans ce domaine) est parfois rudimentaire ; citons par exemple les questions d'arbres couvrants, voire parfois simplement de plus courts chemins...

Le jury apprécie également lorsque les candidats ont des notions sérieuses sur des sujets plus « concrets » que le programme – architecture, compilation, hiérarchie mémoire, aspects système plus généralement, etc. et savent motiver les problématiques des textes et éclairer les solutions proposées. Le jury rappelle son attachement à une vision de l'informatique « incarnée », qui sache faire le lien, chaque fois que faire se peut, entre les outils d'informatique fondamentale et leur impact concret.

Annexe D

La bibliothèque de l'agrégation

Le jury attire l'attention des candidats sur le fait que l'organisation du concours met à leur disposition une bibliothèque complète, bien ordonnée, avec des livres faciles à trouver. Cette bibliothèque fait l'objet d'achats réguliers qui permettent de proposer des ouvrages de référence modernes et adaptés.

ABELSON H. **SUSSMAN G. J.** **SUSSMAN J.**	Structure and interpretation of computer programs – **1 ex.** –	MIT Press
AEBISCHER B.	L2 Analyse fonctions de plusieurs variables et géométrie analytique – **1 ex.** –	Vuibert
AEBISCHER B.	L3 Géometrie – **1 ex.** –	Vuibert
AHUÉS M. **CHATELIN F.**	Exercices de valeurs propres de matrices – **2 ex.** –	Masson
ALBERT L. **Collectif**	Cours et exercices d'informatique – **1 ex.** –	Vuibert
ALDON G.	Mathématiques dynamiques – **2 ex.** –	Hachette
ALESSANDRI M.	Thèmes de géométrie – **2 ex.** –	Dunod
ALLAIRE G.	Analyse numérique et optimisation – **2 ex.** –	Editions de l'École polytechnique
ALLANO-CHEVALIER M. **OUDOT X.**	Analyse et géométrie différentielle – **1 ex.** –	Hachette

ALLOUCHE J. P. **SHALLIT J.**	Automatic sequences theory, applications, generalizations – **1 ex.** –	Cambridge
AMAR E. **MATHERON É.**	Analyse complexe – **2 ex.** –	Cassini
ANDLER M. **BLOCH J. D.** **MAILLARD B.**	Exercices corrigés de Mathématiques — Tome 1A - Topologie – **4 ex.** – — Tome 1B - Fonctions numériques – **6 ex.** – — Tome 2 - Suites et séries numériques – **7 ex.** – — Tome 3 - Analyse fonctionnelle – **6 ex.** – — Tome 5 - Algèbre générale, polynômes – **4 ex.** – — Tome 6 - Algèbre linéaire, première partie – **6 ex.** – — Tome 7 - Algèbre linéaire, deuxième partie – **7 ex.** –	Ellipses
ANDREWS G.	Number Theory – **1 ex.** –	Dover
APPLE A.W.	Modern compiler implementation — in C – **1 ex.** – — in Java – **1 ex.** – — in ML – **1 ex.** –	Cambrigde
ARIBAUD F. **VAUTHIER J.**	Mathématiques. Première année de DEUG – **1 ex.** –	ESKA
ARNAUDIÈS J-M. **BERTIN J.**	Groupes, Algèbres et Géométrie — Tome I – **9 ex.** – — Tome II – **5 ex.** –	Ellipses
ARNAUDIÈS J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus d'analyse – **1 ex.** –	Dunod
ARNAUDIÈS J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus d'algèbre bilinéaire et géométrie du cours de Mathématiques tome 4 – **5 ex.** –	Dunod
ARNAUDIÈS J-M. **FRAYSSE H.**	Cours de Mathématiques — 1. Algèbre – **9 ex.** – — 2. Analyse – **5 ex.** – — 3. Compléments d'analyse – **8 ex.** – — 4. Algèbre bilinéaire et géométrie – **5 ex.** –	Dunod

ARNAUDIÈS J.-M. **LELONG-FERRAND J.**	Cours de Mathématiques — Tome 1 pour M-M' : Algèbre – **4 ex.** – — Tome 1 pour A-A' : Algèbre – **4 ex.** – — Tome 2 : Analyse – **9 ex.** – — Tome 3 : Géométrie et cinématique – **5 ex.** – — Tome 4 : Equations différentielles, intégrales multiples – **4 ex.** –	DUNOD
ARNOLD V.	Chapitre supplémentaire de la théorie des équations différentielles ordinaires – **2 ex.** –	MIR
ARNOLD V.	Équations différentielles ordinaires – **3 ex.** –	MIR
ARNOLD V.	Lectures on partial differential equations – **1 ex.** –	SPRINGER
ARNOLD A. **GUESSARIAN I.**	Mathématiques pour l'informatique – **1 ex.** –	EDISCIENCES
ARTIN E.	Algèbre géométrique – **1 ex.** –	GAUTHIER-VILLARS
ARTIN E.	Algèbre géométrique – **4 ex.** –	GABAY
ARTIN M.	Algebra – **2 ex.** –	PRENTICE HALL
AUBIN J.P.	Analyse fonctionnelle appliquée — Tome 1 – **1 ex.** – — Tome 2 – **1 ex.** –	PUF
AUDIN M.	Géométrie de la licence à l'agrégation – **1 ex.** –	BELIN
AUTEBERT J. M.	Calculabilité et décidabilité – **1 ex.** –	MASSON
AUTEBERT J. M.	Théorie des langages et des automates – **1 ex.** –	MASSON
AVEZ A.	Calcul différentiel – **1 ex.** –	MASSON

AVEZ A.	La leçon d'analyse à l'oral de l'agrégation	MASSON
BAASE S. **VAN GELDER A.**	Computer algorithms Introduction to design & analysis – **1 ex.** –	ADDISON WESLEY
BADOUEL E. **BOUCHERON S.** **DICKY A., PETIT A.** **SANTHA M., WEIL P., ZEITOUN M.**	Problèmes d'informatique fondamentale – **1 ex.** –	SPRINGER
BAJARD J.C.	Exercices d'Algorithmique – **1 ex.** –	ITP
BAKHVALOV N.	Méthodes numériques – **2 ex.** –	MIR
BARANGER J.	Analyse numérique – **1 ex.** –	HERMANN
BARBE Ph. **LEDOUX M.**	Probabilité (De la licence à l'agrégation) – **1 ex.** –	BELIN
BARRET M. **BENIDIR M.**	Stabilité des filtres et des systèmes linéaires – **1 ex.** –	DUNOD
BASILI B. **PESKINE C.**	Algèbre – **1 ex.** –	DIDEROT, ÉDITEUR ARTS ET SCIENCES
BASS J.	Cours de Mathématiques — Tome 1 – **2 ex.** – — Tome 2 – **2 ex.** –	MASSON
BAUER F. L.	Decrypted secrets. Methods and maxims of cryptology – **1 ex.** –	SPRINGER
BECK V. **MALICK J.** **PEYRÉ G.**	Objectif Agregation – **3 ex.** –	HK
BELGHITI I. **MANSUY R.** **VIE J.J.**	Les clefs pour l'info – **1 ex.** –	CALVAGE & MOUNET
BENAÏM M. **EL KAROUI N.**	Promenade aléatoire – **1 ex.** –	LES ÉDITIONS DE L'X

BENDER C. **ORSZAG S.**	Advanced mathematical methods for scientists and engineers – **3 ex.** –	Mc Graw Hill
BENIDIR M. **BARRET M.**	Stabilité des filtres et des systèmes linéaires – **1 ex.** –	Dunod
BENOIST J. *et al*	Math L2, Cours complet avec 700 tests et exercices corrigés – **1 ex.** –	Pearson Education
BENOIST J. **SALINIER A.**	Exercices de calcul intégral – **2 ex.** –	Dunod
BENZONI-GAVAGE S.	Calcul différentiel et équations différentielles – **2 ex.** –	Dunod
BERCU B. **CHAFAÏ D.**	Modélisation stochastique et simulation – **1 ex.** –	Dunod
BERGER M.	Géométrie — Index – **3 ex.** – — 1. Action de groupes, espaces affines et projectifs – **3 ex.** – — 2. Espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères – **2 ex.** – — 3. Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes – **2 ex.** – — 4. Formes quadratiques, quadriques et coniques – **2 ex.** – — 5. La sphère pour elle-même, géométrie hyperbolique, l'espace des sphères – **2 ex.** –	Cédic/Nathan
BERGER M.	Géométrie tome 2 – **1 ex.** –	Nathan
BERGER M.	Géométrie vivante – **2 ex.** –	Cassini
BERGER M. **BERRY J-P.** **PANSU P.** **SAINT RAYMOND X.**	Problèmes de géométrie commentés et rédigés – **3 ex.** –	Cédic/Nathan
BERGER M. **GOSTIAUX B.**	Géométrie différentielle – **2 ex.** –	Armand Colin
BERHUY G.	Algèbre, le grand combat – **1 ex.** –	Calvage & Mounet

BERLINE N. **SABBAH C.**	Groupes finis, journées X-UPS 2000 – **1 ex.** –	Editions de l'X
BERTHELIN F.	Equations différentielles – **3 ex.** –	Cassini
BHATIA R.	Matrix Analysis – **1 ex.** –	Springer
BICKEL P.J. **DOKSUM K.A.**	Mathematical statistics – **1 ex.** –	Prentice Hall
BIGGS N. L.	Discrete mathematics – **1 ex.** –	Oxford Science Publications
BINET G.	Traitement du signal – **2 ex.** –	Ellipse
BILLINGSLEY P.	Probability and measure – **2 ex.** –	Wiley
BLANCHARD A.	Les corps non commutatifs – **5 ex.** –	PUF
BLOMME T. **GASSOT L.** **GUIGNARD Q.** **RANDÉ B.**	Les clefs pour l'oral – **1 ex.** –	Calvage& Mounet
BOAS R.	A primer of real functions – **1 ex.** –	Mathematical association of America
BOCCARA N.	Distributions – **2 ex.** –	Ellipses
BOISSONAT J.-D. **YVINEC M.**	Géométrie algébrique – **1 ex.** –	Ediscience
BON J.-L.	Fiabilité des systèmes – **1 ex.** –	Masson
BONNANS J.-F. **GILBERT J.C.** **LEMARÉCHAL C.** **SAGASTIZABAL C.** **PENNEQUIN D.**	Optimisation numérique – **2 ex.** –	Springer

BONY J.-M.	Cours d'analyse – **5 ex.** –	Editions de l'École polytechnique
BONY J.-M.	Méthodes mathématiques pour les sciences physiques – **3 ex.** –	Editions de l'École polytechnique
BORIES-LONGUET F.	Graphes et combinatoire	Ellipse
BOSTAN A. **CHYZAK F.** **GIUSTI M.** **LEBTRETON R.** **LECERF G.** **SALVY B.** **SCHOST E.**	Algorithmes efficaces en calcul formel – **2 ex.** –	Chyzak F. ed.
BOUALEM H. **BROUZET J.C.** **ELSNER B.** **KACZMAREK L.**	Mathématique L1 – **1 ex.** –	Pearson Education
BOURBAKI N.	Éléments de Mathématique — Topologie générale, chapitres V à X – **2 ex.** – — Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à VII – **2 ex.** – — Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à III – **1 ex.** – — Fascicule XIII Intégration, chapitres I à IV – **2 ex.** –	Hermann
BOURGADE P.	Annales des Olympiades internationales de mathématiques 1976-2005 – **1 ex.** –	Cassini
BOUVIER A. **RICHARD D.**	Groupes – **3 ex.** –	Hermann
BRÉMAUD P.	Introduction aux probabilités – **1 ex.** –	Springer
BRÉZIS H.	Analyse fonctionnelle, théorie et applications – **3 ex.** –	Masson
BRIANE M. **PAGÈS G.**	Théorie de l'intégration Cours et exercices, 3ème édition – **1 ex.** –	Vuibert

BROUSSE P.	Mécanique MP - PC.- Spéciales A. A'. B. B'. – **2 ex.** –	ARMAND COLIN
BRUCE J.W. **GIBLIN P.J.** **RIPPON P.J.**	Microcomputers and Mathematics – **1 ex.** –	CAMBRIDGE
CABANE R. **LEBOEUF C.**	Algèbre linéaire — 1. Espaces vectoriels , Polynômes – **4 ex.** – — 2. Matrices et réduction – **4 ex.** –	ELLIPSES
CABANNES H.	Cours de Mécanique générale – **2 ex.** –	DUNOD
CALAIS J.	Éléments de théorie des anneaux – **1 ex.** –	PUF
CALAIS J.	Éléments de théorie des groupes – **1 ex.** –	PUF
CALDERO P. **GERMONI J.**	Histoires hédonistes de groupes et de géométries – **7 ex.** –	CALVAGE ET MOUNET
CALVO B.	Cours d'analyse II – **1 ex.** –	ARMAND COLIN
CANDELPERGHER B.	Calcul intégral – **1 ex.** –	CASSINI
CANDELPERGHER B.	Théorie des probabilités – **2 ex.** –	CALVAGE ET MOUNET
CARREGA J.C.	Théorie des corps – **1 ex.** –	HERMANN
CARRIEU H.	Probabilités : exercices corrigés – **1 ex.** –	EDP SCIENCES
CARTAN H.	Calcul différentiel (1971) – **5 ex.** –	HERMANN
CARTAN H.	Cours de calcul différentiel (1977) – **1 ex.** –	HERMANN
CARTAN H.	Formes différentielles – **4 ex.** –	HERMANN

CARTAN H.	Théorie élémentaire des fonctions analytiques – **6 ex.** –	HERMANN
CARTON O.	Langages formels, calculabilité et complexité – **3 ex.** –	VUIBERT
CASAMAYOU A. et al.	Calcul mathématique avec SAGE – **1 ex.** –	COPYRIGHTED MATERIAL
CASAMAYOU A. **CHAUVIN P.** **CONNAN G.**	Programmation en Python pour les mathématiques – **2 ex.** –	DUNOD
CASTI J.L.	Realty Rules : Picturing the world in mathematics I – **1 ex.** –	WILEY INTERSCIENCE
CASTI J.L.	Realty Rules : Picturing the world in mathematics II – **1 ex.** –	WILEY INTERSCIENCE
CASTLEMAN K.R.	Digital image processing – **1 ex.** –	PRENTICE HALL
CHABANOL M.-L. **RUCH J.-J.**	Probabilités et statistiques pour l'épreuve de modélisation à l'agrégation de mathématiques – **2 ex.** –	ELLIPSE
CHABAT B.	Introduction à l'analyse complexe – **1 ex.** –	MIR
CHAMBERT-LOIR A.	Algèbre corporelle – **1 ex.** –	EDITIONS DE L'X
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation — Analyse 2 – **1 ex.** – — Analyse 3 – **2 ex.** –	MASSON
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.** **MAILLOT V.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Analyse 1 (seconde édition revue et corrigée) – **3 ex.** –	MASSON
CHARLES J. **MBEKHTA M.** **QUEFFÉLEC H.**	Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs – **5 ex.** –	DUNOD
CHARLES J. **MBEKHTA M.** **QUEFFÉLEC H.**	Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs – **4 ex.** –	ELLIPSES

CHARPENTIER E. **NIKOLSKI N.**	Leçons de mathématiques d'aujourd'hui — Vol 1 – **1 ex.** – — Vol 2 – **1 ex.** – — Vol 3 – **2 ex.** – — Vol 4 – **1 ex.** –	Ellipses
CHILDS L.	A concrete introduction to Higher Algebra – **2 ex.** –	Springer Verlag
CHOIMET D. **QUEFFÉLEC H.**	Analyse mathématique – **2 ex.** –	Cassini
CHOQUET G.	Cours d'analyse Tome II : Topologie – **6 ex.** –	Masson
CHOQUET G.	L'enseignement de la géométrie – **4 ex.** –	Hermann
CHOQUET-BRUHAT Y.	Distributions. Théories et problèmes – **1 ex.** –	Masson
CHRISTOL G. **PILIBOSSIAN P.** **YAMMINE S.**	— Algèbre 1 – **1 ex.** – — Algèbre 2 – **2 ex.** –	Ellipses
CIARLET P.G.	Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation – **2 ex.** –	Masson
CIARLET P.G.	Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation – **1 ex.** –	Dunod
COGIS O. **ROBERT C.**	Au-delà des ponts de Könisberg. Théorie des graphes. Problèmes, théorie, algorithmes – **1 ex.** –	Vuibert
COHN P.M.	Algebra Volume 1 – **1 ex.** –	John Wiley
COLLET H. **GIRARD B.** **PERRIER C.**	Mathématique BTS industriel – **1 ex.** –	Nathan
COLLET P.	Modeling binary data – **1 ex.** –	Chapman and Hall
COLLET J.-F.	Discrete stochastic processes and applications – **2 ex.** –	Springer

COLMEZ P.	Éléments d'analyse et d'algèbre – **2 ex.** –	Editions de l'X
COMBROUZE A.	Probabilités et statistiques – **1 ex.** –	PUF
CORI R. **LASCAR D.**	Logique mathématique — 1. Calcul propositionnel, algèbre de Boole, calcul des prédicats – **1 ex.** – — 2. Fonctions récursives, théorème de Gödel, théorie des ensembles, théorie des modèles – **1 ex.** –	Dunod
CORMEN T. H. **LEISERSON C. E.** **RIVEST R. L.** **STEIN C.**	Introduction à l'algorithmique – **2 ex.** –	Dunod
CORTELLA A.	Théorie des groupes – **2 ex.** –	Vuibert
COTRELL M. **GENON-CATALOT V.** **DUHAMEL C.** **MEYRE T.**	Exercices de probabilités – **2 ex.** –	Cassini
COURANT R. **HILBERT D.**	Methods of Mathematical Physics — Volume 1 – **1 ex.** – — Volume 2 – **1 ex.** –	John Wiley
COUSINEAU G. **MAUNY M.**	Approche fonctionnelle de la programmation – **2 ex.** –	Ediscience
COX D.A.	Galois Theory – **1 ex.** –	Wiley Interscience
COXETER H.S.M.	Introduction to Geometry – **1 ex.** –	John Wiley
CVITANOVIĆ P.	Universality in Chaos – **1 ex.** –	Institute of Physics Publishing
DACUNHA-CASTELLE D. **DUFLO M.**	— Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe – **3 ex.** – — Exercices de Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe – **1 ex.** –	Masson

DACUNHA-CASTELLE D. **REVUZ D.** **SCHREIBER M.**	Recueil de problèmes de calcul des probabilités – **1 ex.** –	MASSON
DAMPHOUSSE P.	Petite introduction à l'algorithmique – **1 ex.** –	ELLIPSES
DANTZER J.F.	Mathématiques pour l'agrégation interne – **3 ex.** –	VUIBERT
DAVID R. **NOUR K.** **RAFFALI C.**	Introduction à la logique Théorie de la démonstration – **1 ex.** –	DUNOD
DEBREIL A.	Groupes finis et treillis de leurs sous-groupes – **1 ex.** –	CALVAGE & MOUNET
DEBREIL A. **EIDEN J.-D.** **MNEIMNÉ R.** **NGUYEN T.-H.**	Formes quadratiques et géométrie : Une introduction, et un peu plus – **1 ex.** –	CALVAGE & MOUNET
DE BIÈVRE S.	Face au jury du CAPES : Préparer les leçons d'Analyse, l'oral du CAPES de mathématiques – **1 ex.** –	ELLIPSES
DEHEUVELS P.	L'intégrale – **2 ex.** –	PUF
DEHEUVELS R.	Formes quadratiques et groupes classiques – **3 ex.** –	PUF
DEHORNOY P.	Complexité et décidabilité – **1 ex.** –	SPRINGER
DE KONNINCK J.M. **MERCIER A.**	Introduction à la théorie des nombres – **1 ex.** –	MODULO
DELCOURT J.	Théorie des groupes – **2 ex.** –	DUNOD
DELTHEIL R. **CAIRE D.**	Géométrie et compléments – **2 ex.** –	JACQUES GABAY
DEMAILLY J.P.	Analyse numérique et équations différentielles – **2 ex.** –	PU GRENOBLE
DEMAZURE M.	Catastrophes et bifurcations – **1 ex.** –	ELLIPSES

DEMAZURE M.	Cours d'algèbre : primalité, divisibilité, codes – **2 ex.** –	Cassini
DEMAZURE M.	Cours d'algèbre – **2 ex.** –	Cassini
DEMBO A. **ZEITOUNI O.**	Large deviations techniques and applications – **1 ex.** –	Springer
DESCHAMPS C. **WARUSFEL A.** *et al.*	Mathématiques, cours et exercices corrigés — 1ère année MPSI, PCSI, PTSI – **2 ex.** – — 2ème année MP, PC, PSI – **1 ex.** –	Dunod
DESCOMBES R.	Éléments de théorie des nombres – **2 ex.** –	PUF
DE SEGUINS PAZZIS C.	Invitation aux formes quadratiques – **3 ex.** –	Calvage & Mounet
DESPRÉS B.	Lois de conservations euleriennes, lagrangiennes et méthodes numériques – **2 ex.** –	Springer
DEVANZ C. **ELHODAIBI M.**	Exercices corrigés de Mathématiques posés à l'oral des Ensi, Tome 2 – **4 ex.** –	Ellipses
DI MENZA L.	Analyse numérique des équations aux dérivées partielles – **2 ex.** –	Cassini
DIEUDONNÉ J.	Algèbre linéaire et géométrie élémentaire – **4 ex.** –	Hermann
DIEUDONNÉ J.	Calcul infinitésimal – **2 ex.** –	Hermann
DIEUDONNÉ J.	Sur les groupes classiques – **1 ex.** –	Hermann
DIEUDONNÉ J.	Éléments d'Analyse. — Fondements de l'analyse moderne – **5 ex.** – — Éléments d'Analyse Tome 2. – **4 ex.** –	Gauthier-Villars
DIXMIER J.	Cours de Mathématiques du premier cycle — Première année – **3 ex.** – — Deuxième année – **3 ex.** –	Gauthier-Villars

DOUCHET J.	Analyse complexe – **2 ex.** –	Presses polytechniques et univ. romandes
DOUCHET J.	Analyse : recueil d'exercices et aide-mémoire, volume 1 – **2 ex.** –	Presses polytechniques et univ. romandes
DOUCHET J.	Analyse : recueil d'exercices et aide-mémoire, volume 2 – **2 ex.** –	Presses polytechniques et univ. romandes
DOUCHET J. **ZWALHEN B.**	Calcul différentiel et intégral – **2 ex.** –	Presses polytechniques et univ. romandes
DOWEK G. **LÉVY J.-J**	Introduction à la théorie des langages de programmation – **1 ex.** –	Editions de l'X
DRAPPER N. **SCHMITH H.**	Applied regression analysis – **1 ex.** –	Wiley
DUBUC S.	Géométrie plane – **4 ex.** –	PUF
DUGAC P.	Histoire de l'analyse. Autour de la notion de limite et de ses voisinages – **1 ex.** –	Vuibert
DUTERTRET G.	Initiation à la cryptographie – **1 ex.** –	PUF
DYM H. **McKEAN H.P.**	Fouriers series and integrals – **1 ex.** –	Academics Press
EBBINGHAUS H. *et al.*	Les Nombres – **2 ex.** –	Vuibert
EIDEN J.D.	Géométrie analytique classique – **3 ex.** –	Calvage et Mounet
EIDEN J.D.	Le jardin d'Eiden – **1 ex.** –	Calvage et Mounet

EL KACIMI ALAOUI A. **QUEFFÉLEC H.** **SACRÉ C.** **VASSALLO V.**	Quelques aspects des mathématiques actuelles – **3 ex.** –	ELLIPSES
ENGEL A.	Solutions d'expert — Vol 1 – **1 ex.** – — Vol 2 – **1 ex.** –	CASSINI
ÉPISTEMON L. **(OVAERT J.L.** **VERLEY J.L.)**	Exercices et problèmes — Analyse. Volume 1 – **1 ex.** – — Algèbre. – **3 ex.** –	CÉDIC/NATHAN
ESCOFIER J.-P.	Théorie de Galois : Cours et exercices corrigés – **2 ex.** –	DUNOD
ESKIN G.	Lectures on linear partial differential equations – **2 ex.** –	AMS
EXBRAYAT J.M. **MAZET P.**	Notions modernes de mathématiques — Algèbre 1 : Notions fondamentales de la théorie des ensembles – **3 ex.** – — Analyse 1 : Construction des espaces fondamentaux de l'analyse – **3 ex.** – — Analyse 2 : Éléments de topologie générale – **3 ex.** –	HATIER
FADDEEV D. **SOMINSKI I.**	Recueil d'exercices d'Algèbre Supérieure – **3 ex.** –	MIR
FAIRBANK X. **BEEF C.**	POX - Exercices posés au petit oral de l'X – **7 ex.** –	ELLIPSES
FARAUT J.	Analyse sur les groupes de Lie – **3 ex.** –	CALVAGE ET MOUNET
FARAUT J. **KHALILI E.**	Arithmétique Cours, Exercices et Travaux Pratiques sur Micro-Ordinateur – **1 ex.** –	ELLIPSES
FELLER W.	An introduction to probability theory and its applications — Volume 1 – **2 ex.** – — Volume 2 – **2 ex.** –	JOHN WILEY
FERRIER J.P.	Mathématiques pour la licence – **2 ex.** –	MASSON

FILBET F.	Analyse numérique – **1 ex.** –	DUNOD
FLORY G.	Exercices de topologie et analyse avec solutions — Tome 1 - Topologie – **10 ex.** – — Tome 2 - Fonctions d'une variable réelle – **6 ex.** – — Tome 3 - Fonctions différentiables, intégrales multiples – **7 ex.** – — Tome 4 - Séries, équations différentielles – **7 ex.** –	VUIBERT
FONTANEZ F. **RANDÉ B.**	Les clefs pour les Mines – **2 ex.** –	CALVAGE ET MOUNET
FRANCHINI J. **JACQUENS J-C.**	Mathématiques Spéciales — Algèbre – **1 ex.** – — Analyse 1 – **1 ex.** – — Analyse 2 – **1 ex.** –	ELLIPSES
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Algèbre 1 – **5 ex.** –	CASSINI
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Algèbre 2 – **1 ex.** –	CASSINI
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Algèbre 3 – **4 ex.** –	CASSINI
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Analyse 1 – **6 ex.** –	CASSINI
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Analyse 2 – **2 ex.** –	CASSINI
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Analyse 3 – **5 ex.** –	CASSINI
FRANCINOU S. **GIANELLA H.**	Exercices de Mathématiques Algèbre 1 – **6 ex.** –	MASSON
FRENKEL J.	Géométrie pour l'élève-professeur – **1 ex.** –	HERMANN

FRESNEL J.	Groupes – **1 ex.** –	HERMANN
FRESNEL J.	Méthodes modernes en géométrie – **1 ex.** –	HERMANN
FRESNEL J. **MATIGNON M.**	Algèbre et géométrie – **1 ex.** –	HERMANN
FUHRMANN P.	A polynomial approach to linear algebra – **1 ex.** –	SPRINGER
FULTON W.	Algebraic Topology A first course – **1 ex.** –	SPRINGER
GABRIEL P.	Matrices, géométrie, algèbre linéaire – **3 ex.** –	CASSINI
GANTMACHER F.R.	Théorie des matrices — Tome 1 – **1 ex.** – — Tome 2 – **1 ex.** –	DUNOD
GARET O.	Probabilités et processus stochastiques – **3 ex.** –	COPYRIGHTED MATERIAL
GARET O. **KURTZMANN A.**	De l'intégration aux probabilités – **5 ex.** –	ELLIPSES
GAREY M. **JOHNSON D.**	Computers and intractability – **1 ex.** –	FREEMAN
GARLING D.J.H.	Inequalities : a journey into linear analysis – **1 ex.** –	CAMBRIDGE
GARNIER J.-M.	Groupes et géométrie pour l'agrégation – **4 ex.** –	ELLIPSES
GATHEN (von zur) J. **GERHARD .J**	Modern computer algebra – **1 ex.** –	CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS
GENET J.	Mesure et intégration. Théorie élémentaire. Cours et exercices résolus – **2 ex.** –	VUIBERT
GHIDAGLIA J.M.	Petits problèmes d'analyse – **1 ex.** –	SPRINGER
GINDIKIN S.	Histoires de mathématiciens et de physiciens – **1 ex.** –	CASSINI

GOBLOT R.	Algèbre commutative – **2 ex.** –	Masson
GOBLOT R.	Thèmes de géométrie – **1 ex.** –	Masson
GODEMENT R.	Analyse — Tome 1 – **1 ex.** – — Tome 2 – **4 ex.** – — Tome 3 – **1 ex.** –	Springer
GODEMENT R.	Cours d'Algèbre – **4 ex.** –	Hermann
GOLUB G.H. **VAN LOAN C.F.**	Matrix computations – **1 ex.** –	Wiley
GONNORD S. **TOSEL N.**	Thèmes d'Analyse pour l'agrégation — Topologie et Analyse fonctionnelle – **2 ex.** – — Calcul différentiel – **1 ex.** –	Ellipses
GOSTIAUX B.	Cours de mathématiques spéciales — Tome 1 - Algèbre – **1 ex.** – — Tome 2 - Topologie et analyse réelle – **1 ex.** – — Tome 3 - Analyse fonctionnelle et calcul différentiel – **1 ex.** – — Tome 4 - Géométrie affine et métrique – **1 ex.** – — Tome 5 - Géométrie : arcs et nappes – **1 ex.** –	PUF
GOUDON T.	Mathématiques pour la modélisation et le calcul scientifique – **2 ex.** –	Iste
GOUDON T.	Intégration – **2 ex.** –	Ellipses
GOURDON X.	Les maths en tête, mathématiques pour M' — Algèbre – **2 ex.** – — Analyse – **1 ex.** –	Ellipses
GRAHAM R. **KNUTH D.** **PATASHNIK O.**	Concrete mathematics – **1 ex.** –	Adison-Wesley
GRAMAIN A.	Géométrie élémentaire – **2 ex.** –	Hermann

GRAMAIN A.	Intégration – **1 ex.** –	HERMANN
GRANJON Y.	Informatique, algorithmes en pascal et en C – **2 ex.** –	DUNOD
GRENIER J.-P.	Débuter en algorithmique avec Matlab et Scilab – **1 ex.** –	ELLIPSES
GREUB W.	Linear Algebra – **1 ex.** –	SPRINGER VERLAG
GRIFONE J.	Algèbre linéaire – **3 ex.** –	CEPADUES
GRIMMET G. **WELSH D.**	Probability (an introduction) – **1 ex.** –	OXFORD
GUJARATI D. N.	Basic Econometrics – **1 ex.** –	WILEY
GUSFIELD D.	Algorithms on strings, trees and sequences – **1 ex.** –	CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS
HABSIEGER L. **MARTEL V.**	Exercices corrigés posés à l'oral des ENSI Tome 1 Analyse – **7 ex.** –	ELLIPSES
HALMOS P.	Problèmes de mathématiciens petits et grands – **1 ex.** –	CASSINI
HAMMAD P.	Cours de probabilités – **3 ex.** –	CUJAS
HAMMAD P. **TARANCO A.**	Exercices de probabilités – **2 ex.** –	CUJAS
HAMMER R. **HOCKS M.** **KULISH U.** **RATZ D.**	C++ toolbox for verified computing – **1 ex.** –	SPRINGER
HARDY G.H. **WRIGHT E.M.**	An introduction to the theory of numbers – **2 ex.** –	OXFORD
HAREL D.	Computer LTD. What they really can't do – **1 ex.** –	OXFORD

HAREL D. **FELDMAN Y.**	Algorithmics. The spirit of computing – **1 ex.** –	ADDISON WESLEY
HAUCHECORNE B.	Les contre-exemples en mathématiques – **2 ex.** –	ELLIPSES
HENNEQUIN P.L. **TORTRAT A.**	Théorie des probabilités et quelques applications – **2 ex.** –	MASSON
HENRICI P.	Applied and Computational Complex Analysis — Volume 1 – **1 ex.** – — Volume 2 – **1 ex.** – — Volume 3 – **2 ex.** –	WILEY-INTERSCIENCE
HERBIN R. **GALLOUËT T.**	Mesures, intégration, probabilités – **3 ex.** –	ELLIPSES
HERVÉ M.	Les fonctions analytiques – **4 ex.** –	PUF
HINDRY M.	Arithmétique – **2 ex.** –	CALVAGE ET MOUNET
HIRSCH F. **LACOMBE G.**	Eléments d'analyse fonctionnelle – **3 ex.** –	MASSON
HOCHART M. **SCIUTO G.**	Algèbre Analyse Géométrie (MPSI/PCSI) – **1 ex.** –	VUIBERT
HOPCROFT J.E. **MOTWANI R.** **ULLMAN J. D.**	Introduction to automata theory, Languages and Computation – **1 ex.** –	ADDISON WESLEY
HOUZEL C.	Analyse mathématique : cours et exercices – **1 ex.** –	BELIN
HUBBARD J. **HUBERT F.**	Calcul scientifique T1 – **3 ex.** –	VUIBERT
HUBBARD J. **HUBERT F.**	Calcul scientifique T2 – **3 ex.** –	VUIBERT
INGRAO B.	Coniques projectives, affines et métriques – **2 ex.** –	CALVAGE ET MOUNET
IRELAND K. **ROSEN M.**	A Classical Introduction to Modern Numbers Theory – **2 ex.** –	SPRINGER VERLAG

ISAAC R.	Une initiation aux probabilités (Trad. R. Mansuy) – **1 ex.** –	VUIBERT-SPRINGER
ITARD J.	Les nombres premiers – **1 ex.** –	QUE SAIS-JE ? PUF
JACOBSON N.	Basic Algebra — Tome I – **2 ex.** – — Tome II – **2 ex.** –	FREEMAN AND CO
JACOD J. **PROTTER P.**	L'essentiel en théorie des probabilités – **1 ex.** –	CASSINI
JAUME M.	Éléments de mathématiques discrètes – **2 ex.** –	ELLIPSES
KAHANE J.P. **GILLES P.**	Séries de Fourier et ondelettes – **4 ex.** –	CASSINI
KATZNELSON Y.	An Introduction to Harmonic Analysis – **1 ex.** –	DOVER
KERBRAT Y. **BRAEMER J.-M.**	Géometrie des courbes et des surfaces – **1 ex.** –	HERMANN
KERNIGHAN B. **RITCHIE D.**	Le langage C – **1 ex.** –	DUNOD
KLOECKNER B.	Un bref aperçu de la géométrie projective – **1 ex.** –	CALVAGE ET MOUNET
KNUTH D.E.	The art of computer programming — Volume 1 : Fundamental algorithms – **1 ex.** – — Volume 2 : Seminumerical algorithms – **1 ex.** – — Volume 3 : Sorting and Searching – **1 ex.** –	ADDISON-WESLEY
KOBLITZ N.	A course in number theory and cryptography – **1 ex.** –	SPRINGER
KOLMOGOROV A. **FOMINE S.**	Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle – **1 ex.** –	ELLIPSES
de KONNINCK J.M. **MERCIER A.**	Introduction à la théorie des nombres – **1 ex.** –	MODULO

KÖRNER T.W.	Fourier analysis – **2 ex.** –	CAMBRIDGE
KÖRNER T.W.	Exercises for Fourier analysis – **1 ex.** –	CAMBRIDGE
KOURIS E.	Une année de colle en maths en MPSI – **1 ex.** –	CALVAGE ET MOUNET
KREE P.	Introduction aux Mathématiques et à leurs applications fondamentales M.P.2 – **1 ex.** –	DUNOD
KRIVINE H.	Exercices de Mathématiques pour physiciens – **1 ex.** –	CASSSINI
KRIVINE J.-L.	Théorie axiomatique des ensembles – **2 ex.** –	PUF
KRIVINE J.-L.	Théorie des ensembles – **2 ex.** –	CASSINI
KUNG J.P.S. **ROTA G-C.** **YAN C.H.**	Combinatorics : the Rota way – **1 ex.** –	CAMBRIDGE
LAAMRI E. H.	Mesures, intégration et transformée de Fourier des fonctions – **1 ex.** –	DUNOD
LACOMME P. **PRINS C.** **SEVAUX M.**	Algorithmes de graphes – **1 ex.** –	EYROLLES
LAFONTAINE J.	Introduction aux variétés différentielles – **1 ex.** –	PUF
LALEMENT R.	Logique, réduction, résolution – **1 ex.** –	MASSON
LANG S.	Algèbre linéaire — Tome 1 – **2 ex.** – — Tome 2 – **2 ex.** –	INTEREDITIONS
LANG S.	Algebra – **5 ex.** –	ADDISON-WESLEY
LANG S.	Linear Algebra – **6 ex.** –	ADDISON-WESLEY

LAROCHE F.	Escapades arithmétiques – **1 ex.** –	Ellipses
LASCAR D.	La théorie des modèles en peu de maux – **1 ex.** –	Cassini
LASCAUX T. **THÉODOR R.**	Analyse matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur, tomes 1 & 2 – **2 ex.** –	Dunod
LAVILLE G.	Courbes et surfaces – **1 ex.** –	Ellipses
LAVILLE G.	Géométrie pour le CAPES et l'Agrégation – **2 ex.** –	Ellipses
LAX P. D.	Functional analysis – **1 ex.** –	Wiley
LAX P. D.	Linear Algebra – **1 ex.** –	Wiley
LE BRIS G.	Maple Sugar : une initiation progressive à Maple – **1 ex.** –	Cassini
LEBOEUF C. **GUÉGAND J.** **ROQUE J.L.** **LANDRY P.**	Exercices corrigés de probabilités – **1 ex.** –	Ellipses
LEBORGNE D.	Calcul différentiel et géométrie – **3 ex.** –	PUF
LEBOSSÉ C. **HÉMERY C.**	Géométrie. Classe de Mathématiques – **1 ex.** –	Jacques Gabay
LEHMANN D. **SACRÉ C.**	Géométrie et topologie des surfaces – **1 ex.** –	PUF
LEHNING H. **JAKUBOWICZ D.**	Mathématiques supérieures et spéciales 2 : Dérivation – **8 ex.** –	Masson
LEHNING H.	Mathématiques supérieures et spéciales — Tome 1 : Topologie – **8 ex.** – — Tome 3 : Intégration et sommation – **5 ex.** – — Tome 4 : Analyse en dimension finie – **8 ex.** – — Tome 5 : Analyse fonctionnelle – **5 ex.** –	Masson

LEICHTNAM E. **SCHAUER X.**	Exercices corrigés de mathématiques posés aux oraux X-ENS — Tome I - Algèbre 1 – **2 ex.** – — Tome 2 - Algèbre et géométrie – **5 ex.** – — Tome 3 - Analyse 1 – **4 ex.** – — Tome 4 - Analyse 2 – **9 ex.** –	Ellipses
LELONG-FERRAND J.	Géométrie différentielle – **3 ex.** –	Masson
LELONG-FERRAND J.	Les fondements de la géométrie – **2 ex.** –	PUF
LESIEUR L. **MEYER Y.** **JOULAIN C.** **LEFEBVRE J.**	Algèbre linéaire, géométrie – **1 ex.** –	Armand Colin
LIRET F.	Maths en pratiques – **1 ex.** –	Dunot
LION G.	Algèbre pour la licence Cours et exercices (2ème édition) – **1 ex.** –	Vuibert
LION G.	Géométrie du plan Cours complet avec 600 exercices résolus – **1 ex.** –	Vuibert
LOTHAIRE M.	Algebraic combinatorics on words – **1 ex.** –	Cambridge
MAC LANE S. **BIRKHOFF G.**	Algèbre — 1 : Structures fondamentales – **4 ex.** – — 2 : Les grands théorèmes – **4 ex.** –	Gauthier-Villars
MACKI J. **STRAUSS A.**	Introduction to optimal control theory – **1 ex.** –	Springer
MADÈRE K.	Leçons d'analyse – **1 ex.** –	Ellipse
MADÈRE K.	Leçons d'algèbre – **1 ex.** –	Ellipse
MAKAROV B.M. **GOLUZINA M.G.** **LODKIN A.A.** **PODKORYTOV A.N.**	Problèmes d'analyse réelle – **1 ex.** –	Cassini

MALLIAVIN M. P.	Les groupes finis et leurs représentations complexes – **2 ex.** –	Masson
MALLIAVIN P.	Géométrie différentielle intrinsèque – **2 ex.** –	Hermann
MALLIAVIN M. P. **WARUSFEL A.**	Algèbre linéaire et géométrie classique. Exercices – **3 ex.** –	Masson
MANIVEL L.	Cours spécialisé – **1 ex.** –	SMF
MANSUY R. **MNEIMNÉ R.**	Algèbre linéaire réduction des endomorphismes – **1 ex.** –	Vuibert
MANSUY R. **RANDÉ B.**	Les clefs pour l' X – **1 ex.** –	Calvage et Mounet
Manuels Matlab	— Using Matlab version 5 – **1 ex.** – — Using Matlab version 6 – **11 ex.** – — Statistics Toolbox – **5 ex.** – — Using Matlab Graphics – **3 ex.** –	
MARCO J.P. *et al.*	Analyse L3 – **2 ex.** –	Pearson
MASCART H. **STOKA M.**	Fonctions d'une variable réelle — Tome 2 : Exercices et corrigés – **1 ex.** – — Tome 3 : Exercices et corrigés – **1 ex.** – — Tome 4 : Exercices et corrigés – **1 ex.** –	PUF
MAURY B.	Analyse fonctionnelle, Exercices et problèmes corrigés – **15 ex.** –	Ellipses
MAWHIN J.	Analyse : fondements, technique, évolutions – **2 ex.** –	De Boeck Université
MAZET P.	Algèbre et géométrie pour le CAPES et l'Agrégation – **1 ex.** –	Ellipses
MENEZES A.J. **van OORSCHOT P.C.** **VANSTONE S.A.**	Handbook of applied cryptography – **1 ex.** –	CRC Press
MERINDOL J.-Y.	Nombres et algèbre – **2 ex.** –	EDP Sciences

MERKIN D.	Introduction to the theory of stability – **1 ex.** –	SPRINGER
MÉTIVIER M.	Probabilités : dix leçons d'introduction. École Polytechnique – **2 ex.** –	ELLIPSES
MEUNIER P.	Agrégation interne de Mathématiques Exercices d'oral corrigés et commentés — Tome 2 – **1 ex.** –	PUF
MEUNIER P.	Algèbre avec applications à l'algorithmique et à la cryptographie – **1 ex.** –	ELLIPSES
MEYRE T.	Probabilités, cours et exercices corrigés – **2 ex.** –	CALVAGE & MOURET
MIGNOTTE M.	Mathématiques pour le calcul formel – **1 ex.** –	PUF
MILHAU X.	Statistique – **1 ex.** –	BELIN
MITCHELL J. C.	Concepts in programming languages – **1 ex.** –	CAMBRIDGE
MNEIMNÉ R.	Eléments de géométrie : action de groupes – **3 ex.** –	CASSINI
MNEIMNÉ R.	Réduction des endomorphismes – **2 ex.** –	CALVAGE ET MOUNET
MNEIMNÉ R. **TESTARD F.**	Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques – **5 ex.** –	HERMANN
MOISAN J. **VERNOTTE A.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales Analyse : topologie et séries – **3 ex.** –	ELLIPSES
MOISAN J. **VERNOTTE A.** **TOSEL N.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales Analyse : suites et séries de fonctions – **2 ex.** –	ELLIPSES

MONIER J.M.	Cours de mathématiques — Analyse 2 MPSI, PCSI, PTSI – **1 ex.** – — Analyse 3 MP, PSI, PC, PT – **1 ex.** – — Analyse 4 MP, PSI, PC, PT – **1 ex.** – — Algèbre 1 MPSI, PCSI, PTSI – **3 ex.** – — Algèbre 2 MP, PSI, PC, PT – **2 ex.** – — Exercices d'analyse MPSI – **1 ex.** – — Exercice d'algèbre et géométrie MP – **2 ex.** –	DUNOD
MUTAFIAN C.	Le défi algébrique — Tome 1 – **3 ex.** – — Tome 2 – **3 ex.** –	VUIBERT
NAGEL E. **NEWMAN J. R.** **GÖDEL K.** **GIRARD J. Y.**	Le théorème de Gödel – **1 ex.** –	SEUIL
NAUDIN P. **QUITTE C.**	Algorithmique algébrique avec exercices corrigés – **1 ex.** –	MASSON
NEVEU J.	Base mathématique du calcul des probabilités – **1 ex.** –	MASSON
NEVEU J.	Martingales à temps discret – **1 ex.** –	MASSON
NIVEN I.	Irrational numbers – **2 ex.** –	MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA
NORRIS J.R.	Markov chains – **1 ex.** –	CAMBRIDGE
NOURDIN Y.	Leçons d'analyse, probabilités, algèbre et géométrie – **1 ex.** –	DUNOD
O'ROURKE J.	Computational geometry in C (second edition) – **1 ex.** –	CAMBRIDGE
OPREA J.	Differential geometry – **1 ex.** –	PRENTICE HALL
OUVRARD J.Y.	— Probabilités 1 (capes, agrégation) – **3 ex.** – — Probabilités 2 (maîtrise, agrégation) – **1 ex.** –	CASSINI

PABION J.F.	Elements d'analyse complexe – **2 ex.** –	Ellipse
PAPADIMITRIOU C.H.	Computational complexity – **1 ex.** –	Pearson Education
PAPINI O. **WOLFMANN J.**	Algèbre discrète et codes correcteurs – **2 ex.** –	Springer
PARDOUX E.	Processus de Markov et applications – **1 ex.** –	Dunod
PEDOE D.	Geometry- A comprehensive course – **1 ex.** –	Dover
PERKO L.	Differential equation and dynamical systems – **1 ex.** –	Springer
PERRIN D.	Cours d'Algèbre – **3 ex.** –	Ellipses
PERRIN D.	Cours d'Algèbre – **2 ex.** –	ENSJF
PERRIN D.	Mathématiques d'école – **1 ex.** –	Cassini
PERRIN D.	Nombres, mesures et géométrie – **1 ex.** –	Ellipse
PERRIN-RIOU B.	Algèbre, arithmétique et MAPLE – **3 ex.** –	Cassini
PETAZZONI B.	Seize problèmes d'informatique – **1 ex.** –	Springer
PETROVŠEK M. **WILF H.S.** **ZEILBERGER D.**	A=B – **1 ex.** –	A.K. Peters
PEVZNER P.	Computational molecular biology- an algorithmic approach – **1 ex.** –	MIT press
PEYRÉ G.	L'algèbre discrète de la transformée de Fourier – **3 ex.** –	Ellipse
PÓLYA G. **SZEGŐ G.**	Problems and Theorems in Analysis — Volume I – **3 ex.** – — Volume II – **3 ex.** –	Springer Verlag

POMMELLET A.	Agrégation de Mathématiques. Cours d'Analyse – **2 ex.** –	Ellipses
PRASOLOV V.	Polynomials – **1 ex.** –	Springer
PRASOLOV V.	Problèmes et théorèmes d'algèbre linéaires – **3 ex.** –	Cassini
PREPARATA F.P. **SHAMOS M.I.**	Computational geometry - an introduction – **1 ex.** –	Springer
PRESS W. **FLANNERY B.** **TEUKOLSKI S.** **VETTERLING W.**	Numerical recipes in Pascal – **1 ex.** –	Cambridge
PUTZ J.F.	Maple animation – **1 ex.** –	Chapman and Hall
QUATERONI A. **SACCO R.** **SALERI F.**	Méthodes numériques – **2 ex.** –	Springer
QUATERONI A. **SALERI F.** **GERVASIO P.**	Calcul scientifique – **2 ex.** –	Springer
QUEFFÉLEC H.	Topologie – **3 ex.** –	Dunod
QUEFFÉLEC H. **ZUILY C.**	Éléments d'analyse – **2 ex.** –	Dunod
QUEFFÉLEC H. **ZUILY C.**	Analyse pour l'agregation – **1 ex.** –	Dunod
RALSTON A. **RABINOWITCH P**	A first course in numerical analysis – **3 ex.** –	Internatinal Student Edition

RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Cours de Mathématiques spéciales — 1- Algèbre – **7 ex.** – — 2- Algèbre et applications à la géométrie – **8 ex.** – — 3- Topologie et éléments d'analyse – **13 ex.** – — 4- Séries et équations différentielles – **9 ex.** – — 5- Applications de l'analyse à la géométrie – **8 ex.** –	Masson
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Exercices avec solutions — Algèbre – **2 ex.** – — Analyse 1 – **5 ex.** – — Analyse 2 – **7 ex.** –	Masson
RAMIS J.P. **WARUSFEL A.**	Mathématiques - Tout en un pour la licence – **2 ex.** –	Dunod
RAMIS J.P. **WARUSFEL A.**	Mathématiques - Tout en un pour la licence Niveau 1 – **2 ex.** –	Dunod
RAMIS J.P. **WARUSFEL A.**	Mathématiques - Tout en un pour la licence Niveau 2 – **2 ex.** –	Dunod
RAMIS J.P. **WARUSFEL A.**	Mathématiques - Tout en un pour la licence Niveau 3 – **2 ex.** –	Dunod
RAO C.R.	Linear statistical inference and its application – **1 ex.** –	Wiley
RANDÉ B.	Les carnets indiens de Srinivasa Ramanujan – **1 ex.** –	Cassini
RANDÉ B. **MANSUY R.**	Les clefs pour l'X (2) – **1 ex.** –	Calvage Mounet
RANDÉ B. **TAIEB F.**	Les clefs pour l'X – **1 ex.** –	Calvage Mounet
REINHARDT F. **SOEDER H.**	Atlas des mathématiques – **1 ex.** –	Livre de Poche
REMMERT R.	Classical topics in complex function theory – **1 ex.** –	Springer
RIDEAU F.	Exercices de calcul différentiel – **2 ex.** –	Hermann

RIESZ F. **NAGY SZ. B.**	Leçons d'analyse fonctionnelle – **2 ex.** –	GAUTHIER-VILLARS
RIO E.	Théorie asymptotique des processus aléatoires faiblement dépendants – **2 ex.** –	SPRINGER
RITTAUD, B.	Newton implique Kepler – **2 ex.** –	ELLIPSES
RIVAUD J.	Algèbre (Tome 2) – **1 ex.** –	VUIBERT
RIVOIRARD V. **STOLTZ G.**	Statistique mathématique en action – **3 ex.** –	DUNOD
ROBERT C.	Contes et décomptes de la statistique - Une initiation par l'exemple – **1 ex.** –	VUIBERT
ROLLAND R.	Théorie des séries 2- Séries entières – **1 ex.** –	CÉDIC/NATHAN
ROMAN S.	Field theory – **1 ex.** –	SPRINGER-VERLAG
ROMBALDI J.-E.	Thèmes pour l'agrégation de mathématiques – **2 ex.** –	EDP SCIENCES
ROMBALDI J.-E.	Analyse matricielle – **1 ex.** –	EDP SCIENCES
ROMBALDI J.-E.	Mathématiques pour l'agrégation – **2 ex.** –	DEBOECK SUP.
ROMBALDI J.E.	Analyse matricielle – **1 ex.** –	EDP SCIENCES
ROTMAN J. J.	An introduction to the theory of groups – **1 ex.** –	SPRINGER-VERLAG
ROUDIER H.	Alèbre linéaire. Cours et exercices – **1 ex.** –	VUIBERT
ROUSSEAU Y. **SAINT-AUBIN Y.**	Mathématiques et technologie – **1 ex.** –	SPRINGER (SUMAT)
ROUVIÈRE F.	Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation – **3 ex.** –	CASSINI

ROUX C.	Initiation à la théorie des graphes – **1 ex.** –	Ellipses
RUAUD J.F. **WARUSFEL A.**	Exercices de Mathématiques Algèbre 3 – **2 ex.** –	Masson
RUDIN W.	Analyse réelle et complexe – **2 ex.** –	Masson
RUDIN W.	Functional analysis – **2 ex.** –	Mc Graw Hill
RUDIN W.	Real and complex analysis – **1 ex.** –	Mc Graw Hill
SA EARP R. **TOUBIANA E.**	Introduction à la Géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann – **1 ex.** –	Cassini
SAINSAULIEU L.	Calcul scientifique – **1 ex.** –	Dunod
SAINT RAYMOND J.	Topologie, calcul différentiel et variable complexe – **1 ex.** –	Calvage et Mounet
SAKAROVITCH J.	Eléments de théorie des automates – **1 ex.** –	Vuibert
SAKS S. **ZYGMUND A.**	Fonctions analytiques – **2 ex.** –	Masson
SAMUEL P.	Géométrie projective – **1 ex.** –	PUF
SAMUEL P.	Théorie algébrique des nombres – **3 ex.** –	Hermann
SARMANT M.C. **MERLIER T.** **PILIBOSSIAN Ph.** **YAMMINE S.**	Analyse 1 – **1 ex.** –	Ellipses
SAVIOZ J.C.	Algèbre linéaire, cours et exercices – **1 ex.** –	Vuibert
SCHATZMAN M.	Analyse numérique, une approche mathématique – **2 ex.** –	Dunod
SCHNEIER B.	Applied cryptography – **1 ex.** –	Wiley

SCHWARTZ L.	Analyse — I Topologie générale et analyse fonctionnelle – **4 ex.** – — II Calcul différentiel et équations différentielles – **1 ex.** –	Hermann
SCHWARTZ L.	Cours d'Analyse — Tome 1 – **2 ex.** – — Tome 2 – **3 ex.** –	Hermann
SCHWARTZ L.	Méthodes Mathématiques pour les sciences physiques – **1 ex.** –	Hermann
SEDGEWICK R.	Algorithms – **1 ex.** –	Addison Wesley
SEDGEWICK R.	Algorithmes en Java – **1 ex.** –	Pearson Education
SEDGEWICK R.	Algorithmes en langage C – **2 ex.** –	Dunod
SEGUINS PAZZIS (de) C.	Invitation aux formes quadratiques – **1 ex.** –	Calvage et Mounet
SELBERHERR S. **STIPPEL H.** **STRASSER E.**	Simulation of semi-conductor devices and processes – **1 ex.** –	Springer
SERRE D.	Les matrices, théorie et pratique – **3 ex.** –	Dunod
SERRE J.P.	Cours d'arithmétique – **3 ex.** –	PUF
SHAPIRO H.N.	Introduction to the theory of numbers – **1 ex.** –	Dover
SIDLER J.C.	Géométrie Projective – **1 ex.** –	Dunod
SILVESTER J. R.	Geometry, ancient and modern – **1 ex.** –	Oxford Univ. Press
SIPSER M.	Introduction to the theory of computation – **1 ex.** –	Thomson C. T.
SKANDALIS G.	Topologie et analyse – **1 ex.** –	Dunod

SKANDALIS G.	Agrégation interne : Algèbre générale, algèbre linéaire et un peu de géométrie – **2 ex.** –	Calvage & Mounet
STANLEY R.P.	Enumerative combinatorics Volume I – **2 ex.** –	Waddworth and Brooks
STEIN E.	Functional Analysis – **2 ex.** –	Princeton
STEIN E.	Complex Analysis – **2 ex.** –	Princeton
STEIN E.	Fourier Analysis – **2 ex.** –	Princeton
STEIN E.	Real Analysis – **2 ex.** –	Princeton
STEWART I.	Galois theory – **2 ex.** –	Chapman and Hall
STROUSTRUP B	Le langage C++ – **1 ex.** –	Pearson Education
SZPIRGLAS A.	Exercices d'algèbre – **1 ex.** –	Cassini
SZPIRGLAS A. *et al.*	Mathématiques : Algèbre L3 – **1 ex.** –	Pearson
TAUVEL P.	Cours de Géométrie – **1 ex.** –	Dunod
TAUVEL P.	Cours d'algèbre – **1 ex.** –	Dunod
TAUVEL P.	Corps commutatifs et théorie de Galois – **1 ex.** –	Calvage et Mounet
TAUVEL P.	Mathématiques générales pour l'agrégation – **1 ex.** –	Masson
TAUVEL P.	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Algèbre 2 – **2 ex.** –	Masson
TAUVEL P.	Analyse complexe pour la licence – **2 ex.** –	Dunod

TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres T 1 – **1 ex.** –	S. M. F.
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres – **2 ex.** –	Belin
TENENBAUM G. **MENDÈS-FRANCE M.**	Les nombres premiers – **2 ex.** –	Que sais-je ? PUF
TENENBAUM G. **WU J.**	Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres T 2 – **1 ex.** –	S. M. F.
TESTARD F.	Analyse mathématique – **3 ex.** –	Calvage et Mounet
TEYTAUD O. **ANTONINI C.** **BORGNAT P.** **CHATEAU A.** **LEBEAU E.**	Les maths pour l'agreg – **1 ex.** –	Dunod
TISSERON C.	Géométries affine, projective et euclidienne – **1 ex.** –	Hermann
TISSIER A.	Mathématiques générales : exercices avec solutions – **4 ex.** –	Bréal
TITCHMARSH E.C.	The theory of functions – **2 ex.** –	Oxford Univ. Press
TORTRAT A.	Calcul des probabilités et introduction aux processus aléatoires – **1 ex.** –	Masson
TRIGNAN J.	Constructions géométriques et courbes remarquables – **1 ex.** –	Vuibert
TURING A. **GIRARD J. Y.**	La Machine de Turing – **1 ex.** –	Seuil
ULMER F.	Théorie des groupes – **2 ex.** –	Ellipses
VALIRON G.	Cours d'analyse mathématique — I Théorie des fonctions – **2 ex.** – — II Équations fonctionnelles - Applications – **2 ex.** –	Masson

VAUTHIER J. **PRAT J-J.**	Cours d'Analyse Mathématique de l'Agrégation – **3 ex.** –	MASSON
VAZIRANI V.V.	Algorithmes d'approximation – **1 ex.** –	SPRINGER
VERGNAUD D.	Exercices et problèmes de cryptographie – **2 ex.** –	DUNOD
VINBERG E. B.	A course in algebra – **1 ex.** –	AMS
WAGSCHAL C.	Fonctions holomorphes - Équations différentielles – **1 ex.** –	HERMANN
WAGSCHAL C.	Topologie et analyse fonctionnelle – **1 ex.** –	HERMANN
WAGSCHAL C.	Distributions, analyse microlocale, équations aux dérivées partielles – **2 ex.** –	HERMANN
WARIN B.	L'algorithmique, votre passeport informatique pour la programmation – **1 ex.** –	ELLIPSES
WARUSFEL A.	Structures algébriques finies – **2 ex.** –	CLASSIQUES HACHETTE
WARUSFEL A. **ATTALI P.** **COLLET M.** **GAUTIER C.** **NICOLAS S.**	Mathématiques — Analyse – **1 ex.** – — Arithmétique – **1 ex.** – — Géométrie – **1 ex.** – — Probabilités – **1 ex.** –	VUIBERT
WATERMAN M.S.	Introduction to computational biology – **1 ex.** –	CHAPMAN AND HALL / CRC
WEST D. B.	Introduction to graph theory – **1 ex.** –	PRENTICE HELL
WHITTAKER E.T. **WATSON G.N.**	A course of modern analysis – **3 ex.** –	CAMBRIDGE
WILF H.	Generatingfunctionology – **1 ex.** –	ACADEMIC PRESS
WILF H.	Algorithms and complexity – **1 ex.** –	A.K. PETERS

WILLEM M.	Analyse fonctionnelle élémentaire – **2 ex.** –	Cassini
WILLEM M.	Principes d'analyse fonctionnelle – **3 ex.** –	Cassini
WINSKEL G.	The formal semantics of programming languages – **1 ex.** –	MIT Press
YALE P.B.	Geometry and Symmetry – **1 ex.** –	Dover
YGER A.	Analyse complexe – **2 ex.** –	Ellipse
YGER A. **WEIL J.-A.** *et al.*	Matématiques appliquées L3 – **1 ex.** –	Pearson
YOUNG D.M. **GREGORY R.T.**	A survey of numerical mathematics – **1 ex.** –	Dover
ZAVIDOVIQUE M.	Un max de math – **1 ex.** –	Calvage et Mounet
ZÉMOR G.	Cours de cryptographie – **3 ex.** –	Cassini
ZUILY C.	Éléments de distributions et d' équations aux dérivées partielles – **2 ex.** –	Dunod
ZUILY C. **QUEFFÉLEC H.**	Éléments d'analyse pour l'agrégation – **1 ex.** –	Masson
ZUILY C. **QUEFFÉLEC H.**	Analyse pour l'agrégation – **2 ex.** –	Dunod
ZUILY C. **QUEFFÉLEC H.**	Problèmes de distributions – **3 ex.** –	Cassini