MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Concours du second degré

Rapport de jury

Concours : Agrégation externe

Section : Mathématiques

Session 2015

Rapport de jury présenté par :

Charles Torossian

Président du jury, Inspecteur général

Table des matières

Chapitre 1

Composition du jury

DIRECTOIRE

TOROSSIAN Charles, Président	PARIS	Inspecteur général de l'éducation nationale
BONNAILLIE-NOEL Virginie, Vice-présidente	PARIS	Directrice de recherches CNRS
CHEMIN Jean-Yves, Vice-président	PARIS	Professeur des Universités
CHENO Laurent, Vice-président	PARIS	Inspecteur général de l'éducation nationale
FOULON Patrick, Vice-président	AIX-MARSEILLE	Professeur des Universités
GOUDON Thierry, Vice-président	NICE	Directeur de recherches INRIA
YEBBOU Johan, Secrétaire général	PARIS	Inspecteur général de l'éducation nationale
BOISSON François, Directoire	PARIS	Professeur de Chaire supérieure
RUPPRECHT David, Directoire	TOULOUSE	Professeur de Chaire supérieure

JURY

ABERGEL Luc	PARIS	Professeur de Chaire supérieure
ABGRALL Rémi	BORDEAUX	Professeur des Universités
ABGRALL Sophie	BORDEAUX	Professeure agrégée
APPEL Walter	LYON	Professeur de Chaire supérieure
AUBERT Violaine	PARIS	Professeur de Chaire supérieure
BARANI Jean Pierre	LYON	Professeur de Chaire supérieure
BARBOLOSI Dominique	AIX-MARSEILLE	Professeur des Universités
BARDET Jean-Marc	PARIS	Professeur des Universités

BARDET Magali	ROUEN	Maître de conférences des Universités
BASSON Arnaud	VERSAILLES	Professeur agrégé
BAUMANN Pierre	STRASBOURG	Chargé de recherches CNRS
BAYLE Vincent	TOULOUSE	Professeur agrégé
BEAULIEU Anne	CRETEIL	Maître de conférences des Universités
BECHATA Abdellah	CAEN	Professeur de Chaire supérieure
BERNARDI Dominique	PARIS	Maître de conférences des Universités
BIOLLEY Anne-Laure	PARIS	Professeure agrégée
BLANLOEIL Vincent	STRASBOURG	Maître de conférences des Universités
BOLDO Sylvie	VERSAILLES	Chargée de recherches INRIA
BOSTAN Alin	VERSAILLES	Chargé de recherches INRIA
BOUALEM Hassan	MONTPELLIER	Maître de conférences des Universités
BOUGE Luc	RENNES	Professeur des Universités
BOULMEZAOUD Tahar-Zamène	VERSAILLES	Maître de conférences des Universités
BREMONT Julien	CRETEIL	Maître de conférences des Universités
BROUZET Robert	MONTPELLIER	Maître de conférences des Universités
BURGUET David	PARIS	Chargé de recherches CNRS
CACHERA David	RENNES	Maître de conférences des Universités
CALDERO Philippe	LYON	Maître de conférences des Universités
CANCES Clément Antoine	PARIS	Maître de conférences des Universités
CARAYOL Henri	STRASBOURG	Professeur des Universités
CHAINAIS Claire	LILLE	Professeure des Universités
CHALENDAR Isabelle	LYON	Maître de conférences des Universités
CHOIMET Denis	LYON	Professeur de Chaire supérieure
CHOMETTE Thomas	PARIS	Professeur agrégé
CLARK Julien	TOULOUSE	Professeur agrégé
CLAUSEL Marianne	GRENOBLE	Maître de conférences des Universités
COQUIO Agnès	GRENOBLE	Maître de conférences des Universités
COMON Hubert	VERSAILLES	Professeur des Universités
COURANT Judicael	LYON	Professeur agrégé
COUVREUR Alain	VERSAILLES	Chargé de recherches INRIA
D'ANGELO Yves	ROUEN	Professeur des Universités
DAMBRINE Marc	BORDEAUX	Professeur des Universités
DEVULDER Christophe	ORLEANS-TOURS	Professeur de Chaire supérieure
DI VIZIO Lucia	VERSAILLES	Directrice de recherches CNRS
DOUMERC Yan	LILLE	Professeur agrégé
DROUHIN Catherine	PARIS	Professeure de Chaire supérieure
DUJARDIN Guillaume	LILLE	Chargé de recherches INRIA
DUJARDIN Romain	CRETEIL	Professeur des Universités
FISCHLER Stéphane	VERSAILLES	Maître de conférences des Universités
FLECKINGER Vincent	BESANÇON	Professeur des Universités
FLON Stéphane	VORLEANS-TOURS	Professeur agrégé
FONTAINE Hélène	LYON	Professeure de Chaire supérieure
FONTAINE Philippe	POITIERS	Professeur de Chaire supérieure
FRANCINOU Serge	PARIS	Professeur de Chaire supérieure
FREGIER Yael	LILLE	Maître de conférences des Universités
FRICKER Christine	VERSAILLES	Directrice de recherches INRIA
GERMAIN Cyril	PARIS	Professeur agrégé
GRIVAUX Sophie	LILLE	Chargée de recherches CNRS
HADIJI Rejeb	CRETEIL	Maître de conférences des Universités
HANROT Guillaume	LYON	Professeur des Universités

HARDOUIN Cécile	VERSAILLES	Maître de conférences des Universités
HENRI Michel	PARIS	Professeur de Chaire supérieure
HERAU Frédéric	NANTES	Professeur des Universités
HMIDI Taoufik	RENNES	Maître de conférences des Universités
HUBERT Florence	MARSEILLE	Maître de conférences des Universités
IMEKRAZ Rafik	BORDEAUX	Maître de conférences des Universités
KASPEREK Xavier	NICE	Professeur agrégé
KLOPP Frédéric	PARIS	Professeur des Universités
KUCZMA Frédéric	NANTES	Professeur de Chaire supérieure
LATOUCHE Pierre	PARIS	Maître de conférences des Universités
LAMBOLEY Jimmy	PARIS	Maître de conférences des Universités
LE COURTOIS Olivier	LYON	Professeur Ecole de commerce
LE FLOCH Matthieu	RENNES	Professeur agrégé
LECUE Guillaume	VERSAILLES	Chargé de recherches CNRS
LEFEVRE Pascal	LILLE	Professeur des Universités
LEGER Jean-Christophe	PARIS	Professeur agrégé
LEROY Richard	TOULOUSE	Professeur agrégé
LEVY-VEHEL Jacques	VERSAILLES	Directeur de recherches INRIA
LIVERNET Muriel	CRETEIL	Maître de conférences des Universités
LLERAS Vanessa	MONTPELLIER	Maître de conférences des Universités
LODS Véronique	PARIS	Professeure de Chaire supérieure
MALLORDY Jean-François	CLERMONT- FERRAND	Professeur de Chaire supérieure
MARCHE Claude	VERSAILLES	Directeur de recherches INRIA
MARIANI Charles-Pierre	PARIS	Professeur agrégé
MARINO Alexandre	MONTPELLIER	Professeur agrégé
MATHERON Etienne	LILLE	Professeur des Universités
MATRINGE Nadir	POITIERS	Maître de conférences des Universités
MERIGOT Quentin	PARIS	Chargé de recherches CNRS
MERIL Alexis	GUADELOUPE	Professeur des Universités
MICHEL Julien	POITIERS	Professeur des Universités
MONAT Pascale	GRENOBLE	Professeure de Chaire supérieure
MONIER Marie	PARIS	Professeure agrégée
MONNIAUX Sylvie	AIX-MARSEILLE	Maître de conférences des Universités
MONS Pascal	PARIS	Professeur de Chaire supérieure
NIEDERMAN Laurent	VERSAILLES	Maître de conférences des Universités
OUDET Edouard	GRENOBLE	Professeur des Universités
PUCHOL Pierre	VERSAILLES	Professeur de Chaire supérieure
RECHER François	LILLE	Maître de conférences des Universités
REZZOUK Marc	ROUEN	Professeur de Chaire supérieure
RHODES Rémi	PARIS	Maître de conférences des Universités
RISLER Jean-Jacques	PARIS	Professeur des Universités
RIVOLLIER Damien	NANCY-METZ	Professeur agrégé
ROBERT Damien	BORDEAUX	Chargé de recherches INRIA
ROUX Raphaël	PARIS	Maître de conférences des Universités
SCHRAEN Benjamin	VERSAILLES	Chargé de recherches CNRS
THERY Laurent	NICE	Chargé de recherches INRIA
TOSEL Nicolas	PARIS	Professeur de Chaire supérieure
TOSEL Emmanuelle	PARIS	Professeure de Chaire supérieure
TROTABAS Denis	MONTPELLIER	Professeur agrégé
TU Jean-Louis	NANCY-METZ	Professeur des Universités
VALLETTE Bruno	NICE	Maître de conférences des Universités

VALIBOUZE Annick	PARIS	Professeure des Universités
VERNEYRE-PETITGIRARD Séverine	VERSAILLES	Professeure agrégée
VIAL Grégory	LYON	Professeur des Universités
VINCENT Christiane	NANCY-METZ	Professeure de Chaire supérieure
WATTIEZ Johann	PARIS	Professeur agrégé
WEILL Mathilde	PARIS	Professeure agrégée
ZINSMEISTER Michel	ORLEANS-TOURS	Professeur des Universités
ZWALD Laurent	GRENOBLE	Maître de conférences des Universités

Chapitre 2

Déroulement du concours et statistiques

2.1 Déroulement du concours

Les épreuves écrites se sont déroulées selon le calendrier suivant :

- Épreuve de mathématiques générales : mercredi 11 mars 2015
- Épreuve d'analyse et probabilités : jeudi 12 mars 2015

La liste d'admissibilité a été publiée le mardi 26 mai 2015.

L'oral s'est déroulé du jeudi 18 juin au vendredi 3 juillet 2015 au lycée Jean-Pierre Vernant 21 rue du docteur Gabriel Ledermann, à Sèvres. La liste d'admission a été publiée le samedi 4 juillet 2015.

L'oral était composé de 5 séries de trois jours avec une journée de pause le samedi 27 juin. Durant les 15 jours d'interrogation, 9 commissions ont travaillé en parallèle, impliquant en permanence 108 interrogateurs, 4 membres du directoire ou remplaçants et 35 surveillants ou appariteurs. Dans chaque salle d'interrogation, les candidats disposaient d'un projecteur connecté à un ordinateur fixe pour l'épreuve de modélisation.

Les candidats admissibles ont reçu une convocation papier, indiquant leurs jours de passage. Pour connaître ses horaires précis, il fallait se connecter sur le site sécurisé de l'agrégation de mathématiques, en indiquant son numéro de candidat. L'application a été fermée, comme l'an passé, la veille du début des oraux (il en sera de même l'an prochain). Seuls quelques candidats hésitants n'ont pas réussi à éditer leurs horaires et ont dû se présenter à 6h30 le premier jour de convocation sur les lieux du concours, sous peine d'être déclarés non présents.

Le jury considère que le fait d'éditer sa convocation horaire, est un signal fort de présence à l'oral.

Le concours propose quatre options. Les options A, B, C ne diffèrent que par les épreuves de modélisation alors que les trois épreuves orales de l'option D (informatique) sont spécifiques.

En 2015 comme dans les sessions précédentes, on peut constater que dans les options A, B et C, le nombre d'inscrits est similaire ; ils sont toujours – et c'est bien compréhensible – nettement inférieurs dans l'option D.

Dans les options A, B et C les rapports admis/présents sont quasiment identiques. Cela veut clairement dire que le choix de l'option n'a guère d'influence sur la réussite au concours et elle ne doit pas être l'objet d'une stratégie de dernière minute de la part des candidats. Le choix de l'option doit être mis en cohérence par rapport à la formation académique ; chaque option ouvre des champs applicatifs des mathématiques qui trouveront leur impact dans le futur métier du professeur agrégé.

Le nom officiel, « concours externe de recrutement de professeurs agrégés stagiaires », montre clairement que, par le concours d'agrégation, le ministère recrute des professeurs agrégés destinés, selon leur statut, à l'enseignement secondaire (lycées d'enseignement général et technologique et, exceptionnellement, collèges) ou à l'enseignement supérieur (universités, instituts universitaires de technologie, Grandes Écoles, classes préparatoires aux Grandes Écoles, sections de techniciens supérieurs).

Les candidats qui ont été admis à un concours de recrutement sont nommés professeurs agrégés stagiaires à la rentrée scolaire de l'année au titre de laquelle est organisé le recrutement et classés, dès leur nomination, selon les dispositions du décret du 5 décembre 1951 susvisé.

Ils sont affectés dans une académie par le ministre chargé de l'Éducation nationale dans des conditions fixées par arrêté de ce dernier. Le stage a une durée d'un an. Au cours de leur année, les professeurs stagiaires bénéficient d'une formation dispensée au sein des ESPE, d'un stage à mi-temps en situation de responsabilité, d'un tutorat, ainsi que, le cas échéant, d'autres types d'actions d'accompagnement. Les modalités du stage et les conditions de son évaluation sont arrêtées par le ministre chargé de l'Éducation nationale.

La note de service 2015-064 du 9 avril 2015, relative à l'affectation des lauréats des concours du second degré en qualité de professeur stagiaire, explique en détail les conditions d'un éventuel report de stage accordé aux lauréats du concours de l'agrégation qui souhaitent poursuivre des études doctorales ou des autres possibilités d'accomplissement du stage.

Les lauréats disposent sur le site http ://www.education.gouv.fr/ du système d'information et d'aide aux lauréats (Sial), qui comporte notamment un guide synthétisant la note de service. De plus, un dispositif d'aide et de conseil personnalisé joignable par téléphone a été mis à leur disposition du 4 mai au 12 juin 2015 puis du 15 au 31 juillet 2015.

Le programme, la nature des épreuves écrites et orales, font l'objet de publications sur le site officiel de Ministère de l'Education nationale à l'adresse http://www.education.gouv.fr/pid63/siac2.html.

Le programme pour la session 2015 a été publié le 14 février 2014. Les candidats sont invités à consulter le site officiel de l'agrégation externe de mathématiques, à l'adresse www.agreg.org où se trouvent aussi tous les renseignements pratiques concernant les sessions à venir. Il comporte comporte une modification légère du programme spécifique de l'oral ; le corpus commun de modélisation légèrement modifié fera partie intégrante du corpus commun de l'oral.

Le programme de la session 2016 a été publié le 13 avril 2015, il est identique à celui de la session 2015.

Par ailleurs, à partir de cette session, seuls des logiciels libres sont proposés pour les épreuves de modélisation (options A, B, C). La liste précise et actualisée de ces logiciels est disponible sur le site de l'agrégation. À ce jour la liste est la suivante : Python, Scilab, Octave, Sage, Maxima, Xcas, R.

L'épreuve « agir en fonctionnaire de l'État de manière éthique et responsable » a été supprimée lors de la session 2015. En effet l'arrêté du 25 juillet 2014 modifiant l'arrêté du 28 décembre 2009 fixant les sections et les modalités d'organisation des concours de l'agrégation et publié au Journal Officiel du 12 août 2014, précise les nouveaux coefficients des épreuves (4 pour les 5 épreuves) et indique par ailleurs dans son article 8 que les aspects professionnels pourront être évalués durant les épreuves orales elles-mêmes. L'article 8 est rédigé comme suit : « Lors des épreuves d'admission du concours externe, outre les interrogations relatives aux sujets et à la discipline, le jury pose les questions qu'il juge utiles lui permettant d'apprécier la capacité du candidat, en qualité de futur agent du service public d'éducation, à prendre en compte dans le cadre de son enseignement la construction des apprentissages des élèves et leurs besoins, à se représenter la diversité des conditions d'exercice du métier, à en connaître de façon réfléchie le contexte, les différentes dimensions (classe, équipe éducative, établissement, institution scolaire, société) et les valeurs qui le portent, dont celles de la République. Le jury peut, à cet effet, prendre appui sur le référentiel des compétences professionnelles des métiers du professorat et de l'éducation fixé par l'arrêté du 1er juillet 2013 ».

Durant les épreuves de l'oral, le jury a posé aux candidats des questions portant sur la mise en situation pratique de leurs savoirs académiques, dans des situations pédagogiques et dans un contexte didactique posé.

2.2 Statistiques et commentaires généraux sur la session 2015

2.2.1 Commentaires généraux

Après la diminution sensible du nombre de postes entre les concours 2005 (388 postes) et 2008 (252 postes), ce nombre a augmenté légèrement jusqu'en 2012.

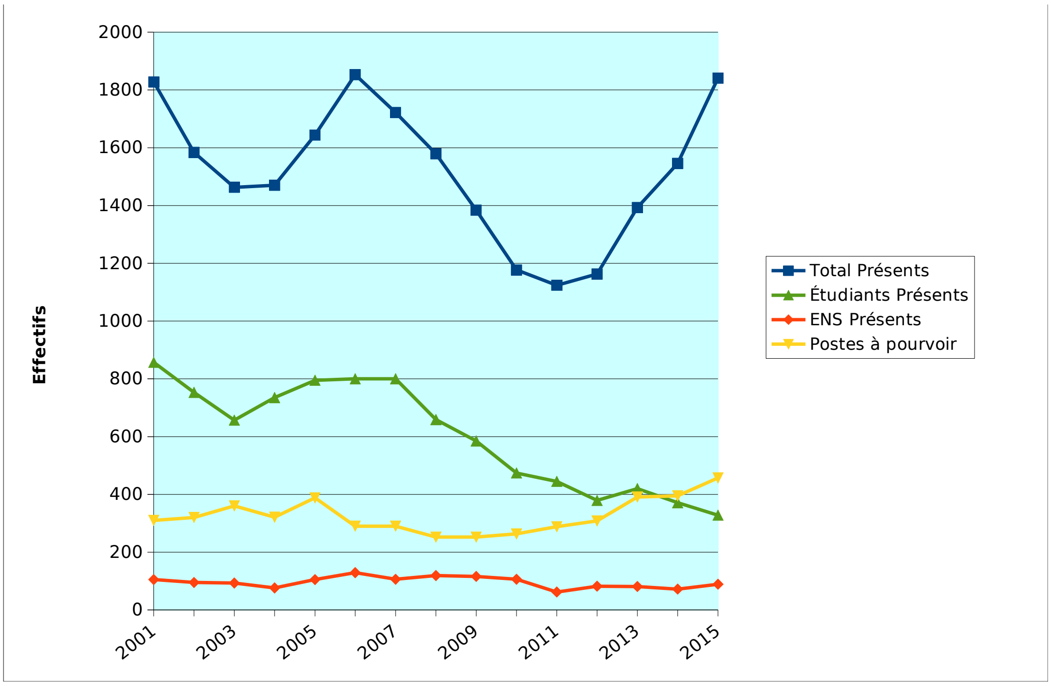
Depuis la session 2013, une rupture nette a été constatée. En effet 391 postes ont été ouverts en 2013, 395 en 2014 et 457 en 2015. Comme toujours l'agrégation externe de mathématiques représente à elle seule, près de 25% des postes d'agrégés mis aux concours externes. Ce niveau très élevé nous ramène à la situation des années 1992–1996 où 480 postes étaient proposés. Remarquons dès à présent qu'il y avait à cette époque près de 1000 étudiants présents lors des épreuves écrites, alors qu'ils n'étaient que 330 cette année.

Le nombre d'inscrits est en hausse par rapport à celui de l'an passé, puisque nous comptons 3252 inscrits. Le nombre de personnes (1841) ayant composé aux deux épreuves écrites est en nette augmentation par rapport à l'an passé (+ 22 %) ; en revanche cette augmentation, ne fait pas apparaître une augmentation du nombre d'étudiants présents, et cache une augmentation sensible du nombre de professeurs en exercice qui tentent ce concours. De fait le recouvrement des concours de l'agrégation interne et externe est maintenant une réalité.

Il faut noter que les chiffres de ce rapport concernant les 1841 personnes ayant composé aux écrits de la session 2015 ou les 1895 personnes présentes à l'une des épreuves, ne prennent pas en compte les personnes qui ont passé les épreuves dans le cadre des conventions internationales qui lient la France le Maroc et la Tunisie [1]. Ces chiffres peuvent donc différer d'autres chiffres disponibles sur Internet ou sur le site du Ministère de l'Education nationale.

C'est la deuxième année que le nombre d'étudiants est moindre que le nombre de postes ouverts au concours. Le graphe ci-dessous résume cette situation préoccupante.

1. 2017 copies en Mathématiques générales ont été corrigées, incluant celles des étudiants marocains et tunisiens.



Évolution du nombre de présents aux deux épreuves écrites

Comme l'indique le diagramme ci-dessus, bien qu'on ait retrouvé le niveau des présents des années 2000, le nombre d'étudiants constituant le vivier principal du concours, est passé de 800 à 330. De fait le concours externe joue en partie le rôle d'un second concours interne et de nombreux professeurs en exercice tentent leur chance, parfois avec succès. Cette intersection importante entre les viviers de l'agrégation interne et externe a pour conséquence que les admis à l'agrégation interne sont en général admissibles à l'agrégation externe mais ne se présentent pas aux oraux, ce sont près de 80 places qui sont perdues de manière mécanique chaque année à l'admissibilité.

Admissibilité : À l'issue de la délibération d'écrit portant sur deux épreuves (Mathématiques générales et Analyse-Probabilités), 789 candidats ont été déclarés admissibles ; le premier admissible avait une moyenne de 20/20 et le dernier une moyenne de 5/20.

Les moyennes et écarts-types des présents sur les épreuves écrites sont résumés dans le tableau ci-dessous :

	Moy. présents	Ecart-type présents	Moy. admissibles	Ecart-type admissibles
MG	5,28	4,07	9,01	3,79
AP	5,35	4,19	9,06	3,89

Admission : Le jury ne dispose pas, lors des passages des candidats devant les commissions, d'informations particulières (notes d'écrit, notes aux autres oraux, qualité, etc.). Il note toutes les personnes à partir de leur seule prestation, selon les mêmes critères et une grille stricte commune à toutes les commissions. Des tests statistiques (KS) sont faits régulièrement pour veiller à l'harmonisation entre les commissions. La présidence du concours veille sur ces indicateurs et réunit à la fin de chaque série, les 27 secrétaires de commissions pour un bilan partiel. Il est important de rappeler que le jury a la volonté de noter les candidats de manière bienveillante, il n'a pas de peine à valoriser les aspects positifs des prestations des candidats.

De fait comme l'an passé le jury n'a pas attribué l'ensemble des postes ouverts au concours. À l'issue des épreuves orales, 274 postes ont été pourvus ; le premier admis a eu une moyenne de 19,65/20, le dernier admis une moyenne de 8,1/20. Notons qu'un candidat a abandonné lors de la dernière épreuve orale, alors qu'il avait un total de points suffisant pour passer la barre. Notons toutefois que la moyenne générale des admis se situe à 11,93/20 (écart-type 2,84) tandis que celle des candidats présents à l'ensemble des épreuves orales était de 8,62/20 (écart-type 3,75).

Le jury rappelle qu'un concours n'est pas un examen et qu'il convient de passer toutes les épreuves. Par ailleurs les notes attribuées ne sont pas des jugements de valeur sur les candidats, mais permettent de classer les personnes de manière efficace en minimisant le risque d'erreur. C'est pourquoi toute la plage de 0 à 20 est utilisée. Le président du jury reçoit de nombreuses réclamations concernant l'existence de notes très basses et répond systématiquement dans ce sens.

On résume dans le tableau ci-dessous les barres d'admission durant les 8 précédentes années :

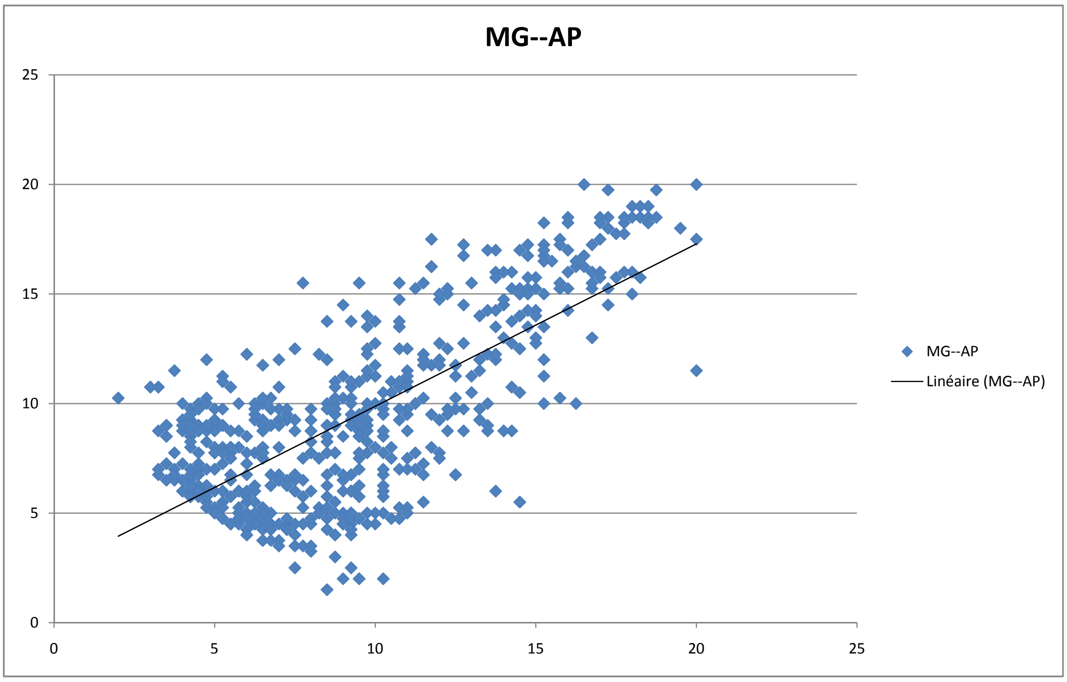
Année	Nombre de postes attribués	Barre d'admission
2015	274	8,1/20
2014	275	8,48/20
2013	323	7,95/20
2012	308	8,1/20
2011	288	9,33/20
2010	263	9,8/20
2009	252	10,15/20
2008	252	10,1/20

Le recrutement de professeurs agrégés de mathématiques ne peut se faire que sur des critères de qualités scientifiques et pédagogiques répondant à un minimum, placé cette année à 162/400, eu égard aux missions actuellement fixées aux agrégés telles qu'elles sont définies sur le site du MEN ; *les professeurs agrégés participent aux actions d'éducation, principalement en assurant un service d'enseignement et assurent le suivi individuel et l'évaluation des élèves. Ils contribuent à conseiller les élèves dans le choix de leur projet d'orientation. Ils enseignent dans les classes préparatoires aux grandes écoles, dans les classes des lycées, dans les établissements de formation et exceptionnellement dans les classes des collèges.*

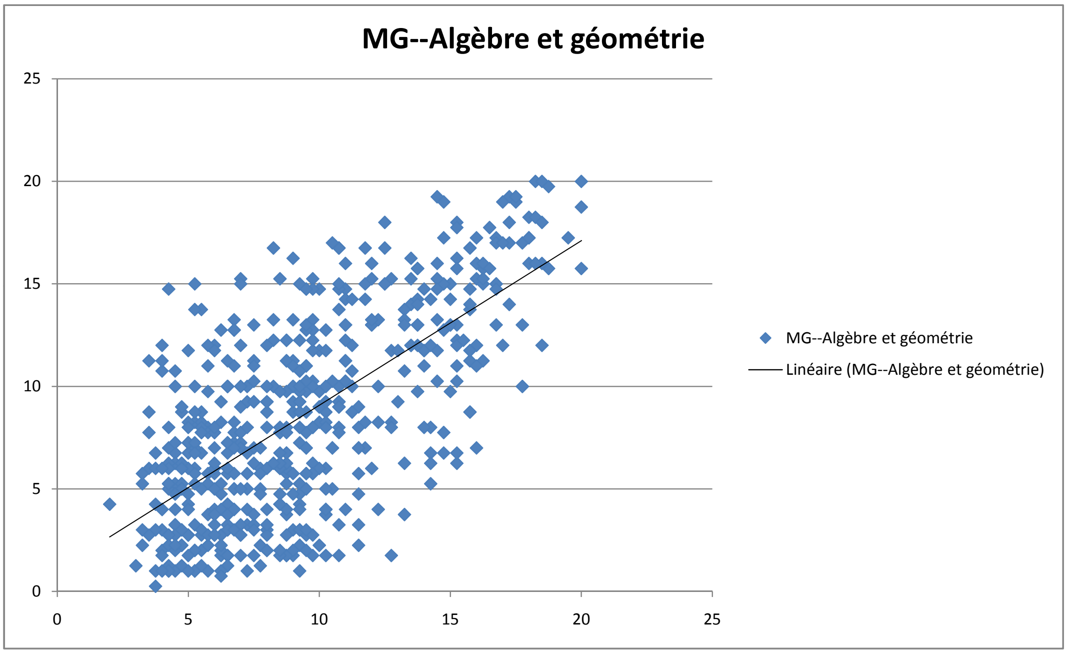
Les moyennes et écarts-types des candidats présents **à l'oral** sur les épreuves écrites et orales sont résumés dans le tableau ci-dessous :

	Moy. présents	Ecart-type présents	Moy. admis	Ecart-type admis
Ecrit MG	9,48	4,02	12,31	3,73
Ecrit AP	9,49	4,11	12,21	4,02
Oral Algèbre-géométrie	8,55	4,86	12,38	3,78
Oral Analyse-probabilités	8,03	4,86	11,76	4,05
Oral Modélisation	7,56	4,58	10,97	3,93

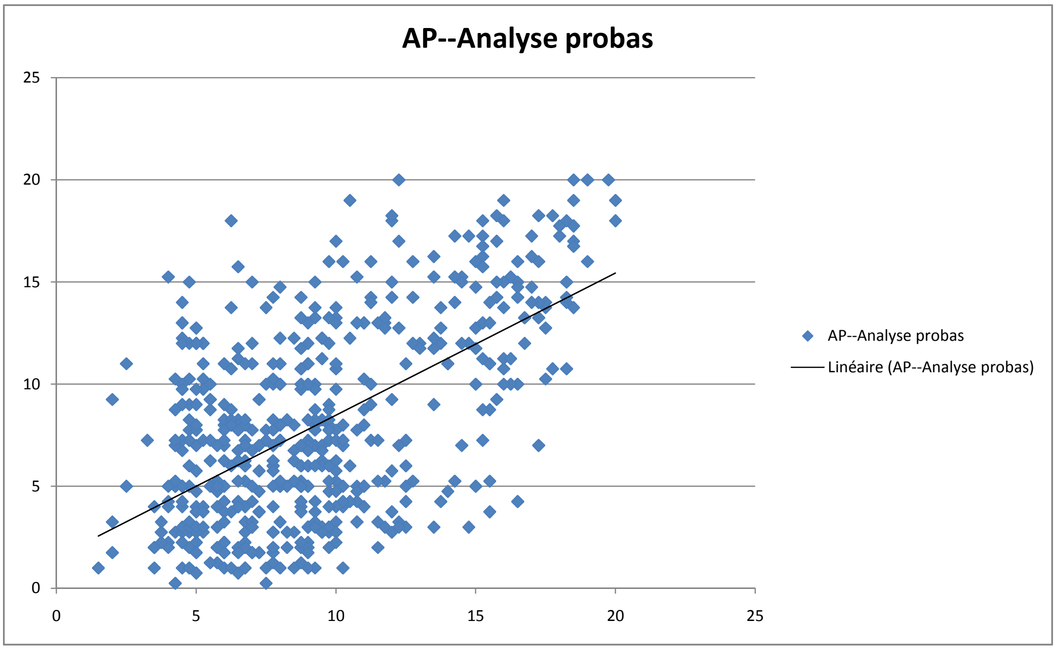
Concernant les éventuelles corrélations entre les épreuves orales et écrites, on résume dans les tableaux ci-dessous les nuages de points des présents aux épreuves orales, entre les épreuves écrites (MG-AP), l'épreuve écrite de mathématiques générales et l'épreuve orale d'algèbre-géométrie, l'épreuve écrite d'analyse-probabilités et l'épreuve orale d'analyse-probabilités pour les candidats des options A,B,C.



Nuage de points des épreuves écrites des présents à l'oral Option A-B-C

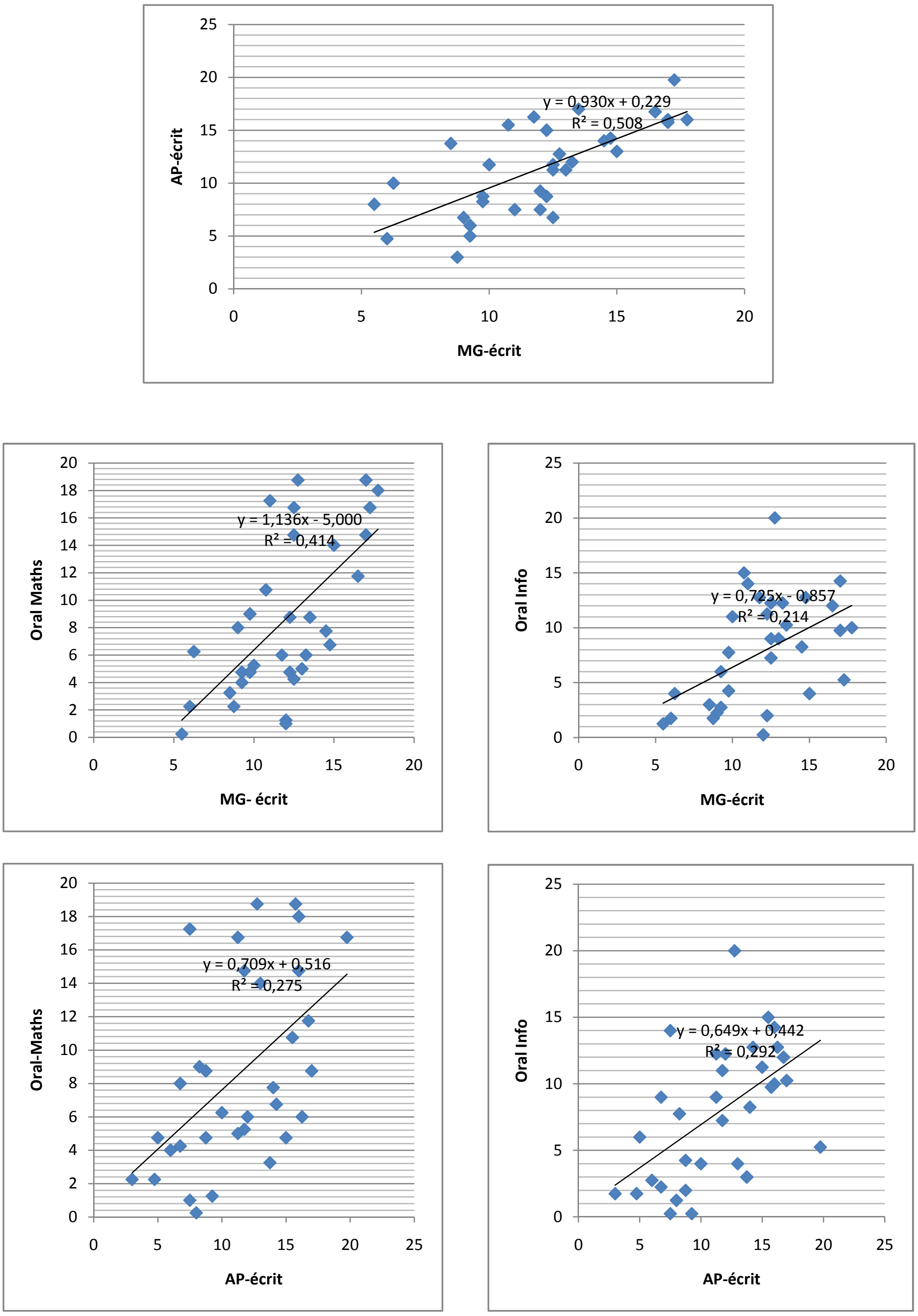


Nuage de points des épreuves écrit MG-oral d'algèbre-géométrie des présents à l'oral Option A-B-C



Nuage de points des épreuves écrit AP- oral d'analyse et probabilités des présents à l'oral Option A-B-C

Concernant les candidats de l'option D (informatique), le tableau ci-dessous résume les corrélations entre les écrits et les oraux de mathématiques ou d'informatique. La différence en très nette entre la corrélation écrit-oral entre mathématiques et informatique.



Nuage de points des épreuves pour les candidats de l'option D

Au final, comme les années précédentes, jury est bien conscient du malaise profond qui touche l'ensemble de la filière mathématique et cette session révèle les difficultés dans lesquelles sont placées nos universités où la population étudiante se raréfie. Le constat est sans appel, on ne peut pas réussir le concours de l'agrégation externe sans un minimum de préparation. Le jury est particulièrement frappé cette année par le trop faible nombre d'étudiants préparant ce concours, c'est-à-dire dans des préparations universitaires (en gros moins de 200 personnes). D'autre part, le jury est préoccupé par le défaut de préparation des candidats issus du corps professoral (certifiés en général) : cela dévoile des moyens trop faibles consacrés à la formation continue et l'absence de congés formation.

2.2.2 Données statistiques diverses

On trouvera dans les pages qui suivent différents tableaux et graphiques constituant le bilan statistique du concours selon différents critères (géographie, sexe, catégorie professionnelle, âge). Toutes ces statistiques portent sur les candidats français et de l'Union Européenne, en particulier ces chiffres n'incluent pas les étudiants marocains et tunisiens.

Effectifs détaillés

Année	Total Inscrits	Total Présents	Etudiants Présents	ENS Présents	Postes à pourvoir	Présents par poste
2001	**2663**	**1828**	857	105	310	**5,9**
2002	**2343**	**1584**	753	95	320	**5,0**
2003	**2217**	**1463**	657	93	360	**4,1**
2004	**2333**	**1470**	735	76	321	**4,6**
2005	**2560**	**1644**	795	105	388	**4,2**
2006	**2849**	**1853**	800	129	290	**6,4**
2007	**2801**	**1722**	800	106	290	**5,9**
2008	**2491**	**1579**	659	119	252	**6,3**
2009	**2351**	**1384**	585	116	252	**5,5**
2010	**2332**	**1177**	474	106	263	**4,5**
2011	**2500**	**1124**	445	62	288	**3,9**
2012	**2673**	**1163**	379	82	308	**3,8**
2013	**2673**	**1393**	420	81	391	**3,6**
2014	**3001**	**1546**	371	72	395	**3,9**
2015	**3252**	**1841**	328	89	457	**4,0**

Évolution du nombre de présents aux deux épreuves d'écrit

Professions et Diplômes

Profession	Inscrits	Présents	Composés	Admissibles	Oral	Admis
CERTIFIE	1464	906	886	294	169	11
ETUDIANT HORS ESPE	406	330	328	214	206	127
ENS.STAGIAIRE 2E DEG. COL/LYC	227	124	120	34	28	3
SANS EMPLOI	224	104	98	34	26	14
CADRES SECT PRIVE CONV COLLECT	147	54	48	20	14	4
CONTRACTUEL 2ND DEGRE	115	44	41	7	6	2
ETUDIANT EN ESPE	95	68	64	38	36	19
ELEVE D'UNE ENS	92	89	89	89	88	82
PLP	54	20	18	1	1	
SALARIES SECTEUR TERTIAIRE	41	13	10	4	4	2
PERS ENSEIG TIT FONCT PUBLIQUE	35	9	9	3	2	
ENSEIGNANT DU SUPERIEUR	34	10	10	5	3	
SALARIES SECTEUR INDUSTRIEL	29	8	8	1		
PROFESSIONS LIBERALES	29	11	11	4	2	
PROFESSEUR ECOLES	26	7	6	1		
MAITRE CONTR.ET AGREE REM TIT	21	17	17	10	4	
PERS FONCTION PUBLIQUE	20	7	7	2	1	1
MAITRE AUXILIAIRE	18	11	11	3	1	
FORMATEURS DANS SECTEUR PRIVE	17	7	7	2	2	1
PROFESSEUR ASSOCIE 2ND DEGRE	16	7	7	3	1	
VACATAIRE ENSEIGNANT DU SUP.	16	6	6	3	3	1
AGREGE	14	4	3	2	1	
CONTRACT ENSEIGNANT SUPERIEUR	14	7	7	5	4	4
AG NON TITULAIRE FONCT PUBLIQ	12	5	5	2	2	1
VACATAIRE DU 2ND DEGRE	12	7	7	2	2	
FONCT STAGIAIRE FONCT PUBLIQUE	10	5	5	2	2	1
ASSISTANT D'EDUCATION	8	4	4	2	1	
PERS ENSEIG NON TIT FONCT PUB	8	5	4			
INSTITUTEUR	6					
ENSEIG NON TIT ETAB SCOL.ETR	5	1				
MAITRE DELEGUE	5	1	1	1	1	
PERS FONCT TERRITORIALE	4					
ARTISANS / COMMERCANTS	4					
AGENT ADMI.MEMBRE UE(HORS FRA)	3					
ADJOINT D'ENSEIGNEMENT	3					
PEGC	2					
CONTRACTUEL FORMATION CONTINUE	2					
MAITRE CONTR.ET AGREE REM MA	2	1	1			
PROF DES ECOLES STAGIAIRE	2					
PEPS	1	1	1			
EMPLOI AVENIR PROF.2ND D.PUBLI	1					
MILITAIRE	1					
CONTRACTUEL APPRENTISSAGE(CFA)	1					
AGRICULTEURS	1	1	1			
SURVEILLANT D'EXTERNAT	1					
INSTITUTEUR SUPPLEANT	1					
VACATAIRE APPRENTISSAGE (CFA)	1					
EMPLOI AVENIR PROF.ECOLE PUBLI	1					
CONTRACT MEN ADM OU TECHNIQUE	1	1	1	1	1	1

Résultat du concours par catégories professionnelles[2]

Cette année, 86 certifiés, lauréats du concours de l'agrégation interne 2015 ou du CAER 2015, étaient admissibles. Seules 8 personnes se sont présentées à l'oral, dont deux ont été admises. Il faut donc rester prudent sur l'interprétation des taux de succès concernant les certifiés ou les admissibles à l'agrégation interne, compte tenu du fait que la population présente à l'oral de l'agrégation externe est celle qui n'a pas eu de succès au concours de l'interne.

2. Les catégories professionnelles et les catégories par diplômes listées correspondent aux déclarations des candidats lors de l'inscription : elles ne font l'objet d'aucune vérification et doivent être considérées avec prudence.

Diplôme	Inscrits	Présents	Composés	Admissibles	Oral	Admis
MASTER	1269	823	807	407	370	227
ENSEIGNANT TITUL-ANCIEN TITUL CAT A	756	463	453	151	81	4
DIPLOME D'INGENIEUR (BAC+5)	442	220	208	88	63	16
DOCTORAT	302	130	124	53	40	12
DIP POSTSECONDAIRE 5 ANS OU +	154	79	77	18	9	1
DIPLOME GRANDE ECOLE (BAC+5)	118	66	62	41	31	9
DISP.TITRE 3 ENFANTS	76	44	44	11	6	1
GRADE MASTER	72	35	31	8	6	4
ADMIS ECH.REM.CERTIFIE PLP PEPS	38	23	23	9	3	
DIPLOME CLASSE NIVEAU I	22	11	11	3	2	
CPE TITULAIRE - ANCIEN TITULAIRE	2	1	1			
ADMIS ECH.REM PROFESSEUR ECOLE	1					

Diplômes des candidats hors étudiants tunisiens et marocains

Ces résultats par grandes catégories confirment que le concours de l'agrégation externe de mathématiques est un concours de recrutement de nouveaux enseignants ; c'est d'ailleurs sa fonction primaire.

La catégorie cumulée des étudiants en mathématiques (ENS et hors ENS) constitue en effet 76% de l'effectif des admis. La nouvelle catégorie des « étudiants » inscrits en ESPE, désigne des titulaires d'un Master2 et inscrits en 1ère année d'ESPE ; cette nouvelle catégorie regroupe un ensemble assez varié de personnes dont il n'est pas clair qu'il s'agisse d'étudiants ayant suivi des fiières en mathématiques, nous avons donc dissocié cette catégorie de la catégorie « étudiants ».

La catégorie *sans emploi* recoupe souvent les titulaires d'un doctorat. Cela reflète les difficultés actuelles de l'emploi des docteurs de l'Université et la disparition des postes d'enseignants-chercheurs au niveau maître de conférences.

L'impact du diplôme sur la performance à l'écrit est net. Notons le nombre important de docteurs inscrits au concours, mais aussi le peu d'admis dans cette catégorie, souvent faute d'une préparation spécifique pour l'oral ou de révisions suffisantes sur les fondamentaux en algèbre linéaire, en analyse ou probabilité.

Répartition selon le sexe : Les tableaux suivants donnent les départitions en fonction du sexe. Il y a un fort déséquilibre hommes-femmes puisque l'on compte 78% d'admis hommes.

Age	Inscrits	Présents	Composés	Admissibles	Oral	Admis
Homme	2219	1270	1228	577	450	214
Femme	1033	625	613	212	161	60

Ces pourcentages sont à apprécier en tenant compte du fait que les femmes ne représentent qu'un faible pourcentage parmi les candidats issus d'une ENS (8 femmes pour 81 hommes). Si on exclut cette catégorie, on trouve un taux de réussite à l'oral (admis/présent) de 35% pour les femmes et 36% pour les hommes.

La question qui consiste à s'interroger sur le fait que la répartition hommes-femmes à l'écrit (33%) ne se retrouve pas sur les admis (22%) n'est pas vraiment pertinente dans le cadre d'un concours où le hasard n'a pas sa place. En pratique, le taux de réussite est très clairement corrélé à la qualité de la préparation et le jury encourage donc vivement les femmes à s'engager dans les études à dominante mathématique, puisqu'elles y réussissent bien, notamment à l'oral où le taux de réussite des étudiantes admissibles est légèrement meilleur que celui des étudiants.

Répartition selon l'âge : Le tableau ci-dessous décrit les répartitions des lauréats en fonction de leur âge.

Age	Inscrits	Présents	Composés	Admissibles	Oral	Admis
21	2	2	2	2	2	2
22	32	28	28	24	24	19
23	160	146	143	110	109	85
24	194	172	171	120	115	78
25	139	96	95	43	41	22
26	145	99	97	34	31	18
27	117	57	56	23	22	6
28	149	86	82	18	16	5
29	173	92	89	30	21	7
30	148	72	69	26	15	2
31	119	62	56	19	16	2
32	101	45	43	19	17	4
33	102	54	53	23	15	3
34	116	51	49	18	7	1
35	108	56	53	17	10	1
36	100	57	57	20	15	3
37	107	65	65	22	10	2
38	119	60	59	22	14	
39	98	56	53	25	12	2
40	96	51	51	17	10	
41	90	47	45	18	8	1
42	97	48	46	17	9	2
43	91	54	53	20	9	2
44	83	48	47	12	7	1
45	77	50	49	16	10	1
46	71	30	29	7	5	
47	57	31	30	12	7	2
48	69	34	32	10	6	1
49	39	15	15	6	2	
50	43	23	23	10	6	
51	43	21	19	8	5	
52	38	20	19	5	5	1
53	24	11	11	3	2	
54	21	15	13	5	3	
55	21	12	12	3	2	
56	17	12	11	3	2	1
57	9	4	4	1	1	
58	8	3	3			
59	4	3	2			
60	6	1	1			
61	5	2	2			
62	8	3	3	1		
63	2	1	1			
64	1					
65	2					
66	1					

Tableau de répartition des candidats en fonction de l'âge

Ce tableau confirment que l'agrégation externe permet de recruter de jeunes enseignants. Les jeunes (moins de 27 ans) constituent 45% des admissibles mais surtout l'essentiel des admis au concours (84% des reçus). Cependant des candidats plus avancés en âge se sont aussi présentés avec succès lorsqu'ils ont pu bénéficier d'une bonne préparation.

Répartition selon l'académie

Academie	Inscrit	Compose	Admissible	Oral	Admis
CRETEIL-PARIS-VERSAIL.	903	497	256	212	103
RENNES	140	112	58	50	34
LYON	169	96	53	40	28
GRENOBLE	148	90	42	33	17
TOULOUSE	150	81	40	31	15
AIX-MARSEILLE	186	108	36	26	11
BORDEAUX	106	66	28	24	11
STRASBOURG	96	54	24	20	7
BESANCON	66	49	21	18	7
LILLE	131	80	27	15	6
NICE	133	63	22	12	5
MONTPELLIER	113	64	19	14	4
NANCY-METZ	74	42	16	15	4
POITIERS	88	20	5	4	3
ORLEANS-TOURS	75	49	17	13	3
AMIENS	63	37	9	7	3
DIJON	60	34	15	12	3
CAEN	46	33	13	9	3
NANTES	122	63	21	16	2
ROUEN	68	45	17	9	2
LA REUNION	87	52	16	10	1
CLERMONT-FERRAND	46	28	8	5	1
REIMS	42	27	11	7	1
GUADELOUPE	35	13	2	2	
MARTINIQUE	31	13	2	2	
LIMOGES	19	8	6	3	
MAYOTTE	14	5	3	1	
POLYNESIE FRANCAISE	14	5	1		
GUYANE	12	3	1	1	
NOUVELLE CALEDONIE	12	4			
CORSE	3				

Répartition par académie

La répartition des lauréats par académie [3] se concentre clairement sur quelques centres (Paris-Créteil-Versailles, Rennes, Lyon, Grenoble, Toulouse, Aix-Marseille, Bordeaux, Strasbourg, Besançon, Lille et Nice) qui totalisent près de 90% des lauréats.

Cette concentration des admis sur les grandes métropoles françaises a diverses conséquences qu'il est difficile de prévoir.

La première est l'affectation des stagiaires, qui depuis deux ans se fait en général sur l'académie d'inscription universitaire. Ainsi de nombreuses académies ne reçoivent que quelques stagiaires agrégés alors que l'Ile-de-France est submergée. Il est donc conseillé aux lauréats de demander à effectuer leur stage dans des académies déficitaires dans lesquelles ils trouveront de bonnes conditions. Les lauréats d'Ile-de-France n'auront pas la garantie de pouvoir effectuer leur stage en lycée.

La deuxième conséquence est la tension qu'induit une baisse de performance au concours de l'agrégation dans certaines académies où bien souvent Master-2 rime avec préparation à l'agrégation, compte tenu de la faiblesse des effectifs d'étudiants. Bien que la préparation à l'agrégation ne soit pas un objectif prioritaire des petites universités de province, il convient de réfléchir à l'égalité territoriale dans ce contexte de pénurie des étudiants. La situation des DOM est particulièrement préoccupante de ce point de vue. La conséquence logique, à terme, est la fermeture des formations académiques de type Master de mathématiques dans de nombreuses universités ou leur mutualisation au sein des nouvelles grandes régions ou des ComUE.

A titre de comparaison, le tableau suivant synthétise le nombre d'admis en 2005 par académie, session qui avait vu 1644 présents (dont 795 étudiants et 104 élèves d'une ENS), 712 admissibles et finalement 388 admis pour 388 postes.

3. On a classé les académies en fonction du nombre de personnes admises.

Academie	Admis 2005	Admis 2015
AIX-MARSEILLE	7	11
AMIENS	3	3
BESANCON	7	7
BORDEAUX	20	11
CAEN	6	3
CLERMONT-FERRAND	6	1
CORSE	0	0
CRETEIL-PARIS-VERSAIL.	136	103
DIJON	3	3
GRENOBLE	19	17
GUADELOUPE	1	0
GUYANE	0	0
LA REUNION	0	1
LILLE	13	6
LIMOGES	0	0
LYON	51	28
MARTINIQUE	0	0
MAYOTTE	0	0
MONTPELLIER	5	4
NANCY-METZ	8	4
NANTES	13	2
NICE	2	5
NOUVELLE CALEDONIE	0	0
ORLEANS-TOURS	9	3
POITIERS	5	3
POLYNESIE FRANCAISE	0	0
REIMS	7	1
RENNES	35	34
ROUEN	3	2
STRASBOURG	15	7
TOULOUSE	14	15

Admis par académie, comparaison 2005-2015

Chapitre 3

Épreuve écrite de mathématiques générales

3.1 Énoncé

Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs et autres appareils électroniques similaires, ainsi que les documents sont interdits. La qualité de la rédaction sera un facteur important d'appréciation des copies. On invite donc le candidat à produire des raisonnements clairs, complets et concis. Le candidat peut utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes ; il veillera toutefois à préciser la référence du résultat utilisé.

Introduction, notations et conventions

Pour tout ensemble fini X, $\#X$ désignera le cardinal de X.

On note $\mathbf{Z}$ l'anneau des entiers et $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers positifs. On notera $a \equiv b\,[n]$ pour signifier que les entiers a et b sont congrus modulo n. L'élément $\overline{a}_n$ de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ sera la classe de a modulo n, que l'on écrira aussi $\overline{a}$ si le contexte s'y prête. On écrira $a \mid b$ pour « a divise b ».

On notera $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers positifs. Pour tout nombre premier p, la p-valuation d'un nombre m est la puissance de p dans la décomposition en facteurs premiers de m. On la notera $\mathrm{val}_p(m)$. Le nombre m sera dit *sans facteur carré*, si $\mathrm{val}_p(m) = 0$ ou 1 pour tout p de $\mathcal{P}$.

Pour tout p premier, on notera $\mathbf{F}_p$ le corps $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, on notera $\mathrm{GL}(E)$ le groupe des endomorphismes inversibles de E. Si $\underline{e}$ est une base de E, et ϕ un endomorphisme de E, alors $\mathrm{Mat}_{\underline{e}}(\phi)$ sera la matrice de ϕ dans la base $\underline{e}$. Le déterminant d'un endomorphisme ou d'une matrice sera noté det.

Si $\mathbf{A}$ est un sous-anneau du corps des réels, $\mathrm{M}_n(\mathbf{A})$ sera l'anneau des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbf{A}$. Si M est une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbf{A})$, ${}^tM$ désignera sa transposée. On notera $\mathrm{GL}_n(\mathbf{A})$ le groupe des matrices inversibles dans l'anneau $\mathrm{M}_n(\mathbf{A})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbf{A})$ le sous-groupe constitué des matrices de déterminant 1.

On rappelle qu'une fonction q de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ telle que $q(x,y) = ax^2+bxy+cy^2$, avec a, b, c des réels, est une forme quadratique. La forme quadratique q sera dite *définie positive* si ses valeurs sont strictement positives, sauf pour $(x,y) = (0,0)$.

Le sujet est composé de cinq parties. Les parties 2 et 3 utilisent la partie 1, mais sont, dans une large mesure, indépendantes entre elles. La partie 4 est indépendante des parties qui précèdent.

1- Généralités sur les formes quadratiques sur $\mathbf{R}^2$

Dans cette section, E désigne le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{R}^2$ muni de sa base canonique (e_1, e_2). On note π une forme bilinéaire symétrique de $E \times E$ vers $\mathbf{R}$, et $q = q_\pi$, de E dans $\mathbf{R}$, sa forme quadratique associée définie par $q(u) = \pi(u,u)$, $u \in E$.

1.1

Soit A la matrice de $\mathrm{M}_2(\mathbf{R})$ associée à π, et définie par $A = (\pi(e_i, e_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant 2}$.

1. Démontrer la formule $q(e+f) = q(e) + 2\pi(e,f) + q(f)$.
2. On écrit la matrice A sous la forme
$$A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix},$$
avec a, b, c des réels. Montrer que (a,b,c) est l'unique triplet tel que $q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ pour tout (x,y) dans E.

On notera dans la suite A_q (respectivement π_q) la matrice A (respectivement la forme bilinéaire π).

On dira que la forme q est non dégénérée si $\det A_q \neq 0$. On notera également $q = [a,b,c]$.

3. Soit φ dans $\mathrm{GL}(E)$. On définit la forme quadratique q' par $q'(e) = q(\varphi(e))$, $e \in E$. Soit P la matrice de φ dans la base (e_1,e_2), calculer $A_{q'}$ en fonction de P et A_q.

Dans la suite, on dira que deux formes quadratiques q' et q'' de E sont *congruentes* s'il existe φ dans $\mathrm{GL}(E)$ tel que $q''(e) = q'(\varphi(e))$ pour tout e dans E.

4. Soit donc $q = [a,b,c]$ fixée et $q' = [a',b',c']$ une forme quadratique sur E de matrice associée $A_{q'}$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

   (i) q et q' sont congruentes,
   (ii) il existe une matrice P de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ telle que $A_{q'} = {}^tPA_qP$,
   (iii) il existe une base (f_1, f_2) de E telle que $q(f_1) = a'$, $\pi_q(f_1,f_2) = \frac{b'}{2}$, $q(f_2) = c'$.

On suppose dans la suite de cette section que la forme q est non dégénérée.

Un endomorphisme θ de E est une isométrie pour la forme q si $q(\theta(e)) = q(e)$ pour tout e de E.

5. Soit θ une isométrie pour la forme q et $M = \mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)}(\theta)$. Quelles sont les valeurs possibles de $\det(M)$?

On notera $\mathrm{O}(q,\mathbf{R})$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ formé des matrices $M = \mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)}(\theta)$, où θ est une isométrie pour q (on admettra qu'il s'agit bien d'un sous-groupe).

On note $\mathrm{SO}(q,\mathbf{R}) = \mathrm{O}(q,\mathbf{R}) \cap \mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$.

Soient q et q' congruentes avec q non dégénérée. On fixe un automorphisme φ tel que $q' = q \circ \varphi$.

6. Donner des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une matrice M de $\mathrm{M}_2(\mathbf{R})$ appartienne à $\mathrm{SO}(q,\mathbf{R})$ (on donnera ces conditions sous forme matricielle). Expliciter ensuite un isomorphisme entre les groupes $\mathrm{SO}(q,\mathbf{R})$ et $\mathrm{SO}(q',\mathbf{R})$.

On suppose maintenant q définie positive.

7. Prouver que $\mathrm{SO}(q,\mathbf{R})$ est isomorphe au groupe $\mathrm{SO}_2(\mathbf{R})$ des rotations de l'espace vectoriel euclidien $\mathbf{R}^2$.
8. Montrer qu'il existe un réel $k > 0$ tel que, pour tout e dans E, on ait $q(e) \geqslant k\|e\|^2$, où $\|.\|$ désigne la norme euclidienne canonique de $\mathbf{R}^2$.

1.2

Soit d un entier. On note $\mathcal{Q}_d$ l'ensemble des formes quadratiques définies positives sur E de la forme $q = [a,b,c]$, avec a, b, c dans $\mathbf{Z}$, tels que $4ac - b^2 = d$. On dira que deux formes quadratiques q et q' sont *proprement équivalentes* s'il existe un endomorphisme φ de E tel que

$$\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)}(\varphi) \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \text{ et } \forall (x,y) \in E,\ q'(x,y) = q(\varphi(x,y)).$$

1. Montrer que si $\mathcal{Q}_d$ est non vide, alors $d > 0$.
2. Montrer que si q' est proprement équivalente à q dans $\mathcal{Q}_d$, alors $q' \in \mathcal{Q}_d$.
3. Montrer que "*être proprement équivalente à*" définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{Q}_d$.

On notera S_d l'ensemble des classes d'équivalence dans $\mathcal{Q}_d$ pour cette relation. Pour tout q dans $\mathcal{Q}_d$, on notera $[q]$ sa classe dans S_d. On dira dans la suite que la forme q *représente* l'entier m si l'image réciproque $q^{-1}(m) \cap \mathbf{Z}^2$ de m par q, restreinte à $\mathbf{Z}^2$, est non vide.

On fixe deux formes q, q' dans $\mathcal{Q}_d$.

4. On suppose que q et q' sont proprement équivalentes. Établir alors une bijection entre $q^{-1}(m) \cap \mathbf{Z}^2$ et $q'^{-1}(m) \cap \mathbf{Z}^2$.
5. Montrer que, pour tout $m \in \mathbf{N}$, $q^{-1}(m) \cap \mathbf{Z}^2$ est fini.

Le but du problème est l'étude de l'équivalence propre des formes sur $\mathcal{Q}_d$, $d > 0$, ainsi que celle de la représentation des entiers par ces formes.

2- Z-congruence et nombre de classes

Soit d un entier strictement positif. Dans ce problème, on dira que la forme quadratique $[a,b,c]$ de $\mathcal{Q}_d$ est *réduite* si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\begin{array}{ll} R1: & b^2 \leqslant a^2 \leqslant c^2 \\ R2: & \text{Si } a^2 = b^2, \text{ alors } b \geqslant 0. \end{array}$$

1. Soit k, k' des entiers. Montrer que $4k' - k^2$ est congru à 0 ou à -1 modulo 4.

2. Montrer que $\mathcal{Q}_d$ est non vide si et seulement si d est congru à 0 ou à -1 modulo 4.

Dans la suite, d désignera un entier strictement positif congru à 0 ou à -1 modulo 4.

3. Après avoir montré que l'équation $x^2 + 5y^2 = 2$ n'a pas de solution entière, déduire que $[1,0,5]$ et $[2,2,3]$ ne sont pas proprement équivalentes dans $\mathcal{Q}_{20}$.

4. Soit $q = [a,b,c]$ dans $\mathcal{Q}_d$.

   (a) Montrer, en utilisant une matrice de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ bien choisie, que pour tout entier k, il existe un entier c' tel que q soit proprement équivalente à $[a, b+2ka, c']$.

   (b) Montrer que $[a,b,c]$ est proprement équivalente à $[c,-b,a]$.

5. Montrer que toute classe de S_d contient une forme réduite.

   On pourra montrer que $q = [a,b,c]$ dans $\mathcal{Q}_d$ implique a, $c > 0$, puis commencer par trouver un élément $[a_0, b_0, c_0]$ de $[q]$ vérifiant $-a_0 \leqslant b_0 \leqslant a_0$.

6. (a) Montrer que, pour toute forme réduite $q = [a,b,c]$ de $\mathcal{Q}_d$, on a $b^2 \geqslant 4b^2 - d$, puis, déduire l'inégalité $0 < a \leqslant \sqrt{\frac{d}{3}}$.

   (b) Montrer que S_d est fini.

7. Calculer $\#S_{20}$, le cardinal de S_{20}.

On définit $\mathrm{SO}(q,\mathbf{Z}) = \mathrm{SO}(q,\mathbf{R}) \cap \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$.

8. On suppose que la forme quadratique $q = [a,b,c]$ est réduite et que $a < c$.

   (a) Montrer que $d > a^2$ et déduire que l'équation $(2ax+by)^2 + dy^2 = 4a^2$ n'a pas de solution entière pour $|y| \geqslant 2$.

   (b) Montrer que si $|y| = 1$, alors $(2ax+yb)^2 \geqslant b^2$ pour tout entier x. En déduire que l'équation ci-dessus n'a aucune solution entière pour $|y| \geqslant 1$.

   (c) En déduire que le groupe $\mathrm{SO}(q,\mathbf{Z})$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

3- Représentabilité d'un entier par une forme

On rappelle que d est un entier strictement positif congru à 0 ou -1 modulo 4.

Pour toute forme quadratique q de $\mathcal{Q}_d$ et tout entier $m > 0$, on notera

$$\mathcal{C}_q(m) = q^{-1}(m) \cap \mathbf{Z}^2 = \left\{(x, y) \in \mathbf{Z}^2,\ q(x, y) = m\right\},\ \mathcal{C}_q^1(m) = \{(x, y) \in \mathcal{C}_q(m),\ \text{pgcd}(x, y) = 1\},$$

de sorte que $\mathcal{C}_q(m)$ est non vide dès que m est représentable par q. Si $\mathcal{C}_q^1(m)$ est non vide, on dira que m est *primitivement représentable* par q.

1. Soit q dans $\mathcal{Q}_d$. Montrer qu'un entier $m > 0$ est représentable par q si et seulement s'il s'écrit $m'k^2$, où k est un élément de $\mathbf{N}$ et $m' > 0$ un entier primitivement représentable par q.

2. On fixe dans la suite un entier $m > 0$. Soit k, k' deux entiers tels que $k^2 \equiv -d\ [4m]$ et $k \equiv k'$ $[2m]$. Montrer que l'on a $k'^2 \equiv -d\ [4m]$. On notera alors, sans ambiguïté :
$$T(d, m) := \left\{\overline{k} \in \mathbf{Z}/2m\mathbf{Z},\ k^2 \equiv -d\,[4m]\right\}.$$

3. On fixe q dans $\mathcal{Q}_d$, (x, y) dans $\mathcal{C}_q^1(m)$, supposé non vide. Soit (u, v) un couple d'entiers tel que $vx - uy = 1$. On pose $n = 2\pi_q\big((x, y), (u, v)\big)$. En écrivant la matrice de q dans la base $\big((x, y), (u, v)\big)$ de $\mathbf{R}^2$, montrer l'égalité
$$n^2 - 4mq(u, v) = -d.$$

4. Montrer que l'application ν_q de $\mathcal{C}_q^1(m)$ vers $T(d, m)$ qui, à un couple (x, y), associe la classe $\overline{2\pi_q\big((x, y), (u, v)\big)}$ modulo $2m$, est bien définie. On montrera en particulier qu'elle ne dépend pas du choix du couple (u, v) défini ci-dessus.

5. (a) Soit $\theta \in \text{SO}(q, \mathbf{Z})$. Montrer que $\nu_q\big(\theta(x, y)\big) = \nu_q(x, y)$, pour tout couple (x, y) de $\mathcal{C}_q^1(m)$.
   (b) Réciproquement, on suppose (x, y) et (x', y') dans $\mathcal{C}_q^1(m)$ tels que $\nu_q(x', y') = \nu_q(x, y)$. Montrer qu'il existe alors un unique θ dans $\text{SO}(q, \mathbf{Z})$ tel que $(x', y') = \theta(x, y)$.

6. Soit n dans $\mathbf{Z}$ tel que $\overline{n} \in T(d, m)$. Montrer qu'il existe un unique entier l tel que $[m, n, l] \in \mathcal{Q}_d$. En posant $q = [m, n, l]$, montrer que $\nu_q(1, 0)$ (a un sens et) est égal à $\overline{n}$.

7. On fixe q et q' dans $\mathcal{Q}_d$.
   (a) On suppose ici q et q' proprement équivalentes, avec $\varphi \in \text{SL}_2(\mathbf{Z})$ tel que $q' = q \circ \varphi$. Montrer l'égalité $\nu_q\big(\varphi(x', y')\big) = \nu_{q'}(x', y')$, pour tout (x', y') de $\mathcal{C}_{q'}^1(m)$.
   (b) Réciproquement, on suppose $(x, y) \in \mathcal{C}_q^1(m)$, $(x', y') \in \mathcal{C}_{q'}^1(m)$, tels que $\nu_q(x, y) = \nu_{q'}(x', y')$. Montrer que q et q' sont proprement équivalentes.

8. Pour toute classe $[q] \in S_d$, on fixe un représentant q dans $\mathcal{Q}_d$, et on note R_d l'ensemble des représentants ainsi fixés. Montrer l'égalité
$$\sum_{q \in R_d} \frac{\#\mathcal{C}_q^1(m)}{\#\text{SO}(q, \mathbf{Z})} = \#T(d, m).$$

4- Nombre de solutions d'une équation modulaire

Cette partie est, dans une large mesure, indépendante des précédentes. Elle a pour but de calculer le cardinal de $T(d,m)$.

Soit m un entier impair et v un entier premier à m. On se propose de déterminer le nombre $\mu_v(m)$ de x de $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ tels que $x^2 = \overline{v}_m$.

Dans les questions qui suivent (question 1. à question 4.), p est un nombre premier impair positif, α un entier strictement positif et v est un entier premier à p.

1. Justifier que l'ordre du groupe $(\mathbf{Z}/p^\alpha\mathbf{Z})^*$ des inversibles de $\mathbf{Z}/p^\alpha\mathbf{Z}$ est égal à $p^{\alpha-1}(p-1)$.
2. Dans cette question, $\alpha = 1$.
   (a) L'application ψ de $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$ dans lui-même définie par $\psi(x) = x^2$ est clairement un morphisme de groupes. Quel est son noyau ? Quel est le nombre de carrés de $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$?
   (b) Montrer que $\overline{v}_p$ est un carré de $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$ si et seulement si $\overline{v}_p^{\frac{p-1}{2}} = \overline{1}_p$.

Dans la suite, pour tout nombre premier p impair positif, et tout entier a non multiple de p, on notera $\begin{pmatrix} a \\ p \end{pmatrix}$ le symbole de Legendre (à ne pas confondre avec les coefficients binomiaux) défini par

$$\begin{pmatrix} a \\ p \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{si } \overline{a}_p \text{ est un carré dans } (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^* \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On a donc $\begin{pmatrix} a \\ p \end{pmatrix} \equiv a^{\frac{p-1}{2}}\ [p]$.

3. Montrer que, pour tout v non multiple de p, $\mu_v(p) = 1 + \begin{pmatrix} v \\ p \end{pmatrix}$.
4. (a) Soit l'application ϕ de $(\mathbf{Z}/p^\alpha\mathbf{Z})^*$ dans $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$ qui envoie la classe d'un entier x modulo p^α sur la classe de x modulo p. Vérifier que ϕ est bien définie et est un morphisme surjectif de groupes. En déduire que son noyau est inclus dans le sous-groupes des carrés de $(\mathbf{Z}/p^\alpha\mathbf{Z})^*$.
   On pourra s'intéresser au cardinal du noyau.
   (b) Montrer que $\overline{v}_{p^\alpha}$ est un carré de $(\mathbf{Z}/p^\alpha\mathbf{Z})^*$ si et seulement si $\overline{v}_p$ est un carré dans $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$, puis, que $\mu_v(p^\alpha) = 1 + \begin{pmatrix} v \\ p \end{pmatrix}$.
5. Soit m un entier impair, $m \geqslant 3$ et v un entier premier à m. Montrer l'égalité

$$\mu_v(m) = \prod_{p,\, \mathrm{val}_p(m)>0} \left(1 + \begin{pmatrix} v \\ p \end{pmatrix}\right),$$

   où $\mathrm{val}_p(m)$ désigne la p-valuation de m pour tout nombre premier p de $\mathcal{P}$.

Pour a entier, on note désormais, pour tout l impair premier avec a,

$$\begin{pmatrix} a \\ l \end{pmatrix} = \prod_{p\in\mathcal{P},\mathrm{val}_p(l)>0} \begin{pmatrix} a \\ p \end{pmatrix}^{\mathrm{val}_p(l)}, \quad \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = 1.$$

6. Montrer, pour tout m impair premier à d, les égalités successives

$$\#T(d,m) = \mu_{-d}(m) = \sum \left(\frac{-d}{l}\right),$$

où la somme porte sur les entiers positifs l divisant m et sans facteur carré.

Pour la première égalité, on pourra comparer $\#T(d,m)$ avec $\#\{x \in \mathbf{Z}/4m\mathbf{Z}, x^2 = -\overline{d}_{4m}\}$ et utiliser le lemme chinois.

Soit m un entier premier avec d. On note $\mathcal{D}_m$ l'ensemble des diviseurs positifs de m.

7. Expliciter une bijection entre $\mathcal{D}_m$ et l'ensemble des couples (l,e) d'entiers positifs tels que e^2 divise m et où l, sans facteur carré, divise $\frac{m}{e^2}$.
8. En déduire

$$\sum_{e>0, e^2|m} \#T(d, \frac{m}{e^2}) = \sum_{0<l|m} \left(\frac{-d}{l}\right).$$

5- Nombre de solutions d'équations quadratiques.

On étudie, dans cette partie, quelques équations quadratiques dans le cas où $d = 20$.

1. Soit m un entier strictement positif, premier avec 20. On pose $q = [1,0,5]$ et $q' = [2,2,3]$. Montrer que

$$\#\mathcal{C}_q(m) + \#\mathcal{C}_{q'}(m) = 2 \sum_{e>0, e^2|m} \#T(20, \frac{m}{e^2}) = 2 \sum_{0<l|m} \left(\frac{-20}{l}\right).$$

On note dans le suite, $p = 2a+1$ un nombre premier positif impair tel que $p \nmid 5$. Soit

$$\mathcal{X} = \left\{(x_1, \dots, x_p) \in \mathbf{F}_5^p, \sum_{i=1}^{p} x_i^2 = 1\right\}.$$

2. (a) Montrer que $\#\mathcal{X}$ est congru à $1 + \left(\frac{p}{5}\right)$ modulo p.

   On pourra faire opérer le groupe cyclique $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ sur $\mathcal{X}$ et appliquer la formule des classes.

   (b) Quel est le cardinal d'un hyperplan de l'espace affine $\mathbf{F}_5^n$, pour tout entier n ?

   (c) En effectuant le changement de variables $u_j = x_j + 2x_{a+j}$, $u'_j = x_j - 2x_{a+j}$, $1 \leqslant j \leqslant a$, $u_p = x_p$, montrer que $\#\mathcal{X}$ est congru à $1 + 5^a$ modulo p.

   (d) En déduire l'égalité $\left(\frac{5}{p}\right) = \left(\frac{p}{5}\right)$.

3. Montrer l'équivalence

$$\overline{p} \in \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{7}, \overline{9}\} \subset \mathbf{Z}/20\mathbf{Z} \iff \exists q \in \mathcal{Q}_{20}, \exists (x,y) \in \mathbf{Z}^2,\ p = q(x,y).$$

On pourra chercher, modulo 20, les nombres premiers impairs tels que $1 + \left(\frac{-20}{p}\right)$ est non nul.

4. On veut maintenant affiner l'assertion précédente. Soit p premier distinct de 2 et 5. Montrer les équivalences suivantes

$$\overline{p} \in \{\overline{1}, \overline{9}\} \subset \mathbf{Z}/20\mathbf{Z} \Longleftrightarrow \exists (x,y) \in \mathbf{Z}^2,\ p = x^2 + 5y^2,$$

$$\overline{p} \in \{\overline{3}, \overline{7}\} \subset \mathbf{Z}/20\mathbf{Z} \Longleftrightarrow \exists (x,y) \in \mathbf{Z}^2,\ p = 2x^2 + 2xy + 3y^2.$$

On pourra éliminer des possibilités en regardant les égalités modulo 4 et en considérant la parité de x et de y.

5. (a) Montrer que pour tout nombre premier p congru à 1 ou 9 modulo 20, et tout α entier positif, on a
$$\#\left\{(x,y) \in \mathbf{Z}^2,\ x^2 + 5y^2 = p^\alpha\right\} = 2(1+\alpha).$$

   (b) Montrer que pour tout nombre premier p congru à 3 ou 7 modulo 20, et tout β entier positif, on a
$$\#\left\{(x,y) \in \mathbf{Z}^2,\ x^2 + 5y^2 = p^{2\beta}\right\} = 2(1+2\beta),\ \#\left\{(x,y),\ 2x^2 + 2xy + 3y^2 = p^{2\beta+1}\right\} = 4(1+\beta).$$

3.2 Rapport sur l'épreuve écrite de mathématiques générales

Généralités sur les formes quadratiques sur $\mathbf{R}^2$

1.1.1 Cette question demandait juste de mettre en exergue la bilinéarité et la symétrie de la forme. Elle n'a posé de soucis à personne excepté à des candidats, soit hors profil, soit sous l'emprise de leurs émotions.

1.1.2 Un bon pourcentage de candidats n'a vu dans cette question que le problème de l'unicité. Il faut bien sûr également que l'égalité ait lieu.

1.1.3 La formule bien connue $A_{q'} =^t PA_qP$ était attendue avec sa preuve. Les candidats n'ont pas toujours su sur quel pied danser avec cette question, qui était une question de cours. Il était attendu que la formule soit montrée dans le contexte du problème. La plupart a su prouver la formule ${}^tXA_{q'}X =^t X^tPA_qPX$, pour toute colonne X, mais n'a pas su conclure en utilisant l'unicité de 1.1.2.

1.1.5 A la question « quelles sont les valeurs possibles du déterminant d'une isométrie ? », les candidats ont répondu ± 1. Il y avait tout de même des pièges. D'une part, ici, la forme quadratique était non dégénérée, et les correcteurs ont attendu que cet argument intervienne explicitement. D'autre part, demander les valeurs possibles exige qu'elles soient réalisables. Sinon, la réponse « le déterminant est un nombre réel, voire complexe » aurait été tout aussi satisfaisante. Le pourcentage des candidats ayant abordé ce dernier point, ou tout au moins, ayant remarqué son existence, a été infime. Nous invitons à une réflexion collective sur le sens du mot « possible ».

1.1.6 Il fallait, pour cette question, avoir bien compris le rôle de la conjugaison dans l'algèbre linéaire. Ceux qui pensaient que l'application attendue était $M \mapsto PM$, voire $M \mapsto^t PMP$, ou autre chose de ce genre, doivent prendre un peu de recul pour refléchir à ce lien important et très général (il dépasse le cadre de l'algèbre linéaire), qui relie les groupes et les objets sur lesquels ils agissent, et qui se résumerait en une maxime : lorsque les objets sont en bijection, les groupes sont en conjugaison.

Une fois la bonne application trouvée, il fallait encore montrer que l'on avait un isomorphisme. Bien entendu, il fallait déjà voir que l'application était bien définie et exhiber un inverse. Les correcteurs ont été surpris de voir que certains candidats montraient que les groupes multiplicatifs étaient isomorphes à l'aide d'arguments d'espaces vectoriels (commutation avec l'addition, noyau nul...)

1.1.7 Il était attendu que l'on parle d'existence d'une base orthonormée, afin de pouvoir utiliser la question précédente.

1.1.8 Les candidats qui ont su montrer l'existence de k n'ont pas toujours su (ou pensé à) montrer que celui-ci était non nul.

1.2.1 Les candidats ont souvent abordé la question avec l'argument du signe du discriminant du trinôme. Attention toutefois, le trinôme $ax^2 + bx + c$ n'en est un que si a est non nul, ce qui n'a souvent pas été vérifié.

1.2.2 Demander de montrer que q' est dans $\mathcal{Q}_d$ demandait deux choses : d'une part qu'elle soit de discriminant d, mais aussi qu'elle soit définie positive. Ce dernier point a souvent été oublié.

1.2.4 Il fallait ici proposer une bijection, puis prouver que c'en était une. Généralement, la bijection proposée était la bonne. En revanche, la preuve demandait d'être un peu minutieux : la bijection devait être bien définie dans les deux sens, et selon deux critères, un critère d'intégrité, et un critère de représentation de m.

Z-congruence et nombre de classes

2.1 Question souvent abordée, avec beaucoup de succès. On peut toutefois regretter que les candidats préfèrent, par sécurité, travailler par congruence dans $\mathbb{Z}$, plutôt que par égalité, dans un quotient.

2.2 La partie « seulement si » n'a posé de problème à personne puisqu'elle découlait directement de la question précédente. La réciproque, en revanche, était plus délicate. Il fallait d'une part donner explicitement une forme quadratique de discriminant d fixé, et ensuite montrer que celle-ci était définie positive (le signe du discriminant n'étant pas suffisant).

2.3 On sait tous au fond de soi pourquoi $x^2 + 5y^2 = 2$ n'a pas de solution entière. Mais manifestement, tout le monde ne sait pas le montrer de façon simple et convaincante, avec de petites inégalités bien senties. Les correcteurs ont dû assister, les yeux plissés, à des combats contre $\sqrt{\frac{2}{5}}$. Parfois, des inégalités qui omettaient les valeurs absolues montraient correctement que l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$, en oubliant les entiers négatifs. En revanche, l'autre question, plus subtile, a été abordée avec plus de succès.

2.4 Il fallait ici exhiber deux matrices. Ceux qui ont abordé la question l'ont généralement bien fait. Evidemment, ceux qui avaient un peu de culture et connaissaient les générateurs classiques de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ avaient un coup d'avance et ont dû être avantagés.

2.5 Cette question était délicate. Dans un premier temps, il fallait faire de la réduction en utilisant les matrices de 2.4 a), puis 2.4 b). Mais ensuite, il fallait remarquer que ce que faisait 2.4 b) détricotait légèrement l'intervention de 2.4 a). Très peu de candidats l'ont remarqué, et seules de très bonnes copies ont su déjouer le piège.

2.6 (b) Les candidats qui ont abordé la question ont parfois su montrer correctement qu'il y avait un nombre fini de formes réduites. Mais ils ont souvent oublié de montrer que cela répondait effectivement à la question, c'est-à-dire que cela prouvait qu'il y avait un nombre fini de classes d'équivalence. Or, il n'était pas clair qu'il y avait une bijection entre classes d'équivalence et forme réduites.

Représentabilité d'un entier par une forme

3.3 On a retrouvé ici une erreur tragique bien connue des enseignants : la confusion entre matrice et endomorphisme. Une matrice M avait parfois deux valeurs différentes selon la base choisie. Il convient donc d'agiter quelques crécelles : lorsque l'on change de base, l'endomorphisme ne change pas, la matrice, si.

3.4 Le lemme de Gauss était attendu. Il faut, à ce stade, savoir résoudre l'équation entière $au + bv = 1$ quand a et b sont premiers entre eux. Bien entendu, il fallait aussi voir que la question posée se ramenait à celle-ci.

Nombre de solutions d'une équation modulaire

4.1 Comme pour la partie 1.1, il faut savoir reconnaître une question de cours : on ne pouvait pas imaginer avoir répondu à la question en dégainant la formule de l'indicatrice d'Euler. Le mot « justifier » était assez clair.

4.2 (a) Les candidats ont été d'une rapidité fulgurante pour énoncer que $x^2 = 1$ possédait 2 solutions : 1 et -1. Il fallait quand même rappeler que l'on travaillait sur un corps (donc intègre). Mais cela ne suffisait pas : il fallait aussi voir que ce corps était de caractéristique différente de 2 (pour que 1 et -1 soient distincts).

4.2 (b) Il s'agissait d'une question classique et un candidat bien préparé connaissait en général la solution. L'improviser *ex nihilo* un jour d'écrit était une tâche difficile.

4.4 (a) Cette question a été souvent traitée. Les candidats ont bien pensé à prouver que l'application naturelle de $\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est bien définie, mais ils ont souvent utilisé des moyens archaïques pour le prouver. A l'ère de l'algèbre dite moderne, il faudrait savoir utiliser le passage au quotient.

Ensuite la surjectivité de l'application naturelle n'impliquait pas directement la surjectivité de l'application de $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^*$ sur $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, ni même que celle-ci soit bien définie.

Nombre de solutions d'équations quadratiques.

5.2 (b) Les adeptes du grappillage ont apprécié cette question à sa juste valeur, en remarquant que le cardinal d'un sous-espace, sur un corps fini, est déterminé par la dimension. Il faut toutefois rappeler que l'existence d'une base est primordial dans ce résultat.

3.3 Corrigé de l'épreuve de mathématiques générales

3.3.1 Commentaires mathématiques généraux

Le théorème des deux carrés de Fermat est un exemple type de ce qu'un énoncé simple peut dissimuler de richesses. Après s'être demandé quels entiers m se décomposent en somme de deux carrés d'entiers, on cherche à comprendre de combien de façons on peut effectuer une telle décomposition pour m fixé. On peut ensuite généraliser cette question au cas des formes entières binaires : soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ de la forme $q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$, avec a, b, c entiers, quel est le cardinal de l'ensemble $\mathcal{C}_q(m)$ des solutions entières de l'équation $q(x, y) = m$? Ou, pour un point de vue inverse, m fixé dans $\mathbb{Z}$ quels sont les formes entières binaires qui *représentent* m, *i.e.* telles que $q(x, y) = m$ possède une solution entière ? Ce problème, devenu un classique, a permis d'ouvrir des voies insoupçonnées tracées par Lagrange, Gauss, Dirichlet, Dedekind et autres mathématiciens d'envergure. Nous nous contenterons d'en visiter la porte d'entrée.

Tout d'abord, ce cardinal est-il fini ? Le meilleur moyen de s'en assurer est d'imposer à q d'être une forme quadratique définie ; l'ensemble des solutions est alors un compact discret pour la topologie naturelle de $\mathbb{R}^2$, donc fini. On supposera donc que q est définie positive et m strictement positif. On notera $\mathcal{C}_q(m)$ l'ensemble des solutions entières de l'équation.

Comme q est homogène de degré 2, on sait qu'une solution (x, y) de $\mathcal{C}_q(l)$ fournit une solution (ex, ey) de $\mathcal{C}_q(e^2 l)$, ce qui permet de réduire l'étude à celle de l'ensemble $\mathcal{C}_q^1(m)$ des couples (x, y) de solutions d'entiers premiers entre eux.

Maintenant, l'idée habituelle est de partitionner $\mathcal{C}_q^1(m)$, et rien de mieux pour cela que de penser à une action de groupe. Le premier groupe (ou presque) qui vient à l'esprit est le groupe $\mathrm{SO}(q, \mathbb{Z})$ des isométries entières, de déterminant 1, qui respectent la forme q. On voit qu'il agit naturellement sur $\mathcal{C}_q(m)$ et même sur $\mathcal{C}_q^1(m)$. Cette action est d'ailleurs « simplifiée » par le fait que les stabilisateurs sont triviaux, puisque $(0, 0)$ n'est jamais solution ; chaque orbite a donc même cardinal que le groupe. Compter les éléments de $\mathcal{C}_q^1(m)$ se ramène donc à compter le nombre orbites.

Selon une procédure désormais bien convenue, on cherche un invariant « palpable », permettant de caractériser les orbites de cette action. Compter les orbites revient à compter le nombre d'invariants possibles. L'invariant proposé se construit ainsi : le fait que (x, y) est dans $\mathcal{C}_q^1(m)$ implique en particulier que (x, y) peut se compléter en une $\mathbb{Z}$-base directe de $\mathbb{Z}^2$, par Bezout. Notons, $((x, y), (u, v))$ une telle base. On remarque alors que, si π_q désigne la forme polaire de q, $2\pi_q((x, y), (u, v))$ réduit modulo $2m$ ne dépend que de (x, y) et non pas du choix de (u, v). On voit aussi qu'il s'agit là d'un invariant pour l'action de $\mathrm{SO}(q, \mathbb{Z})$. Mieux, il sépare les orbites du groupe.

Reste à savoir dans quel ensemble raisonnable on va aller chercher cet invariant. Comme le déterminant est un invariant de changement de $\mathbb{Z}$-bases pour une forme quadratique entière, on obtient que $n :=$

$(2\pi_q((x,y),(u,v)))$ vérifie $n^2 \equiv b^2 - 4ac$ modulo $4m$. Ceci engage à poser $d = 4ac - b^2$ et

$$T(d,m) := \left\{\overline{k} \in \mathbb{Z}/2m\mathbb{Z},\ k^2 \equiv -d\,[4m]\right\},$$

en vérifiant qu'il n'y a pas ambiguïté dans cette définition.

On peut énoncer maintenant le résultat clef du problème : 1) tout d'abord, ce que nous venons de voir, c'est-à-dire que l'application ν_q qui à une $\mathrm{SO}(q,\mathbb{Z})$-orbite dans $\mathcal{C}_q^1(m)$ envoie l'élément de $T(d,m)$ défini plus haut, est injective. 2) Réciproquement, tout élément de $T(d,m)$ caractérise une classe de forme entière binaire modulo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-congruence. On obtient alors, en fixant un ensemble R_d de représentants de formes de « déterminant » d pour l'action par congruence de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ la formule

$$\sum_{q \in R_d} \frac{\#\mathcal{C}_q^1(m)}{\#\mathrm{SO}(q,\mathbb{Z})} = \#T(d,m).$$

Pour tirer des résultats effectifs de cette formule, il est nécessaire de travailler encore un peu de part et d'autre de l'égalité. Le membre de droite demande de passer par le symbole de Legendre, la réciprocité quadratique, et le lemme chinois. Le membre de gauche demande une compréhension pratique des orbites de congruence pour les formes entières binaires. Pour cela, Lagrange a défini une notion de forme réduite, qui fournit une forme normale pour chaque orbite de congruence. Il ne reste plus qu'à faire de petits calculs.

3.3.2 L'organisation du sujet

La partie **1** du problème est là pour rappeler au candidat les outils fondamentaux des formes quadratiques, dans le cadre de la dimension 2. Tout d'abord sur $\mathbb{R}$, où l'on revoit la mise sous forme matricielle d'une forme quadratique. La principale piqûre de rappel de la section **1.1** est la triple façon de concevoir la congruence : (i) l'existence d'un passage par composition à droite, pour deux formes quadratiques fixées, (ii) la formule matricielle de congruence, (iii) l'existence d'une base faisant passer d'une matrice à l'autre, pour une forme quadratique fixée. On introduit le groupe d'isométrie d'une forme quadratique, et on regarde comment la congruence se traduit sur les groupes d'isométrie. La section **1.2** explore le problème des formes entières binaires. On voit que le déterminant est un invariant de congruence. On commence ensuite à s'intéresser à l'ensemble des solutions entières de l'équation $q(x,y) = m$. On montre qu'il est fini, et que son cardinal ne dépend que de la classe de congruence des formes définies positives.

La partie **2** concerne l'équivalence propre des formes entières binaires, c'est-à-dire, la $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-congruence. On définit les formes dites réduites et on montre que toute classe de congruence contient une telle forme. On en déduit que l'ensemble des classes est fini. On introduit ce qui va devenir l'exemple courant du problème : le cas où le déterminant vaut 20. On montre ensuite que pour les formes réduites « générales », *ie* telles que $a \neq c$, le groupe d'isotropie est le groupe à 2 éléments.

La partie **3** est essentiellement consacrée à la correspondance de Gauss-Dirichlet. On fixe deux entiers $m, d > 0$. On établit donc une correspondance biunivoque entre la donnée d'un couple constitué d'une part d'une classe d'équivalence propre de forme q de déterminant d, d'autre part d'une classe pour l'action de $\mathrm{SO}(q)$ de solution primitive de l'équation $q(x,y) = m$, et la donnée d'un élément d'un ensemble $T(d,m)$ défini par des résidus quadratiques. Le nœud du problème est démêlé.

La partie **4** s'intéresse au membre de droite de la formule obtenue en **3**, c'est-à-dire au cardinal de $T(d,m)$. On s'y pose une question classique chez les groupes cycliques : comment caractériser les carrés de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$? Les outils pour y répondre sont encore plus classiques : utilisation de la surjection canonique, du passage au quotient, du théorème de Lagrange. En particulier, on définit le symbole de Legendre que l'on généralise en un symbole de Jacobi, et le résultat vient d'un relèvement classique des carrés par la surjection naturelle de $\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, puis par le lemme chinois.

La partie **5** aboutit à des résultats explicites sur le nombre de solutions d'équations quadratiques, et ce, sur l'exemple courant $d = 20$ sur lequel on a collecté des informations tout au long du problème. L'exemple est facilité par le fait qu'il n'y a que deux classes de formes proprement équivalentes, ainsi, pour être sûr que l'on est dans une classe, il suffit de voir que l'on est pas dans l'autre...Il faut aussi calculer concrètement des symboles de Legendre, et pour cela, on doit utiliser la loi de réciprocité quadratique de Gauss. On obtient cette loi par une méthode de géométrie sur un corps fini, en calculant de deux façons le cardinal d'une nappe quadratique.

Les bonus

Concours oblige, on n'a malheureusement pas pu mettre tous les jolis éléments de la théorie, qui pourtant valent le détour. Voici quelques scènes qui ont été coupées au montage.

A toute classe d'équivalence propre de forme entière binaire, on a unicité de la forme réduite– on n'a montré que l'existence.

Pour une forme q entière binaire, le groupe $\mathrm{SO}(q, \mathbb{Z})$ ne dépend bien sûr à isomorphisme près que de la classe de congruence à laquelle il appartient. Or, on n'a calculé le groupe d'isotropie d'une forme réduite $q = [a, b, c]$ que dans le cas $a < c$. Il n'est pas beaucoup plus difficile d'obtenir le résultat complet :

$$\mathrm{SO}(q, \mathbb{Z}) \text{ est isomorphe à } \begin{cases} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} & \text{si b=a=c} \\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \text{si 0= b<a=c} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour finir sur la plus belle partie de la théorie, qui était le but inaccessible du problème : la « partie VI », signalons que l'on peut construire une structure de groupe sur l'ensemble des classes d'équivalence propre des formes entières binaires de déterminant d donné. La façon la plus simple de comprendre cette structure est d'exhiber une bijection entre cet ensemble et l'ensemble des classe d'idéaux de $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}\sqrt{-d}]$. Comme ce dernier possède une structure naturelle de groupe, on utilise juste un transport de structure. Le résultat est le suivant : si un entier m, resp. m', est représenté par q, resp. q', dans $\mathcal{Q}_d$, alors cette structure de groupe permet de trouver q'' qui représente l'entier mm'.

Dans le cas où $d = 4$, le groupe est trivial puisque l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ est principal, et le résultat est lié à la formule bien connue de multiplicativité de la norme de $\mathbb{C}$

$$(x^2 + y^2)(u^2 + v^2) = (xu - yv)^2 + (xv + yu)^2.$$

Illustrons ceci avec l'exemple courant où $d = 20$. On a vu qu'il n'y avait que deux classes de formes entières binaires ; le groupe est forcément $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. L'élément neutre est la classe de la norme $[1, 0, 5]$, l'autre est donc $[2, 2, 3]$. Une formule qui met en lumière la multiplicativité dans la représentation des entiers est donnée par

$$(2x^2 + 2xy + 3y^2)(2u^2 + 2uv + 3v^2) = (2xu + xv + yu + 2yv)^2 + 5(xv + yu + yv)^2.$$

qui correspond à $\bar{1} + \bar{1} = \bar{0}$ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

3.3.3 Correction détaillée

1- Généralités sur les formes quadratiques sur $\mathbb{R}^2$

1.1

1. On développe $q(e + f) = \pi(e + f, e + f)$. La bilinéarité de π donne $q(e) + \pi(e, f) + \pi(f, e) + q(f)$. La symétrie de π donne le résultat.

2. Par la question 1.1.1, on a bien

$$q(x,y) = q(x,0) + 2\pi\big((x,0),(0,y)\big) + q(0,y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

Pour l'unicité, on utilise, par exemple, l'évaluation en $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, qui nous donne l'unicité de a, c, et $a+b+c$, donc celle du triplet (a,b,c).

3. Si on pose $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors $q(x,y)$ est la valeur de la matrice 1×1 donnée par ${}^tUA_qU$. Il vient d'une part $q'(x,y) = {}^t UA_{q'}U$ et d'autre part $q'(x,y) = {}^t(PU)A_q(PU) = {}^tU({}^tPA_qP)U$.
Par l'unicité montrée dans la question précédente, il vient $A_{q'} = {}^tPA_qP$.

4. La question précédente montre que (i) implique (ii) et la réciproque est immédiate.
(i)$\Rightarrow$(iii). Soit $q' = q \circ \varphi$, avec $\varphi \in \mathrm{GL}(E)$. Posons $f_i = \varphi(e_i)$, $i = 1,2$. Alors, (f_1, f_2) est une base et $a' = q'(e_1) = q\big(\varphi(e_1)\big) = q(f_1)$. Les autres égalités sont similaires.
(iii)$\Rightarrow$(i). Soit φ l'élément de $\mathrm{GL}(E)$ qui envoie la base (e_1, e_2) sur la base (f_1, f_2). D'après l'hypothèse, en notant π' la forme polaire de q', on voit que l'égalité $\pi'(x,y) = \pi\big(\varphi(x), \varphi(y)\big)$ est valable sur la base (e_1, e_2) et donc sur tout E puisque, d'après 1.1.2, une forme quadratique sur E est entièrement déterminée par les valeurs de sa forme polaire sur une base.

5. D'après 1.1.3, on a $A_q = {}^tMA_qM$. Donc,

$$\det(A_q) = \det({}^tM)\det(A_q)\det(M) = \det(M)^2\det(A_q).$$

Comme $\det(A_q) \neq 0$, il vient $\det(M) = \pm 1$.
Maintenant, est-ce que ces valeurs sont atteintes ? C'est bien évident pour 1 puisque la matrice identité est toujours une isométrie. Pour -1, on peut faire deux cas :
Si $a \neq 0$, dans ce cas, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & b/a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ fait l'affaire.
Si $c \neq 0$, le cas est similaire. Et si $a = c = 0$, on peut prendre $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. On a vu que ${}^tMA_qM = A_q$ est équivalent à $M \in \mathrm{O}(q)$. Pour que M soit dans $\mathrm{SO}(q)$, il faut ajouter la condition $\det(M) = 1$.
L'isomorphisme est donné par $M \mapsto P^{-1}MP$, où P est la matrice de φ.
Pour prouver qu'il est bien (co)défini, on voit d'une part, que $\det(P^{-1}MP) = \det(M)$, et d'autre part, que ${}^tMA_qM = A_q$ implique ${}^t(P^{-1}MP)({}^tPA_qP)(P^{-1}MP) = {}^tPA_qP$.
C'est clairement un morphisme de groupes puisque $P^{-1}MNP = (P^{-1}M)(PP^{-1}NP)$, et il est bijectif d'inverse $M \mapsto PMP^{-1}$.

7. Par le procédé de Gram-Schmidt, il existe une base orthonormée (f_1, f_2) pour q (car q est définie positive). Soit φ l'automorphisme qui envoie (e_1, e_2) sur (f_1, f_2), alors $q \circ \varphi$ a pour matrice I_2. L'assertion découle donc de 1.1.6.

8. L'homogénéité, de part et d'autre de l'inégalité, fait que l'on peut se restreindre au cas où e est sur le cercle unité, qui est compact. Soit donc k le minimum de q, atteint sur le cercle qui est compact.
On a donc bien $k > 0$ car q est définie positive et que le minimum est atteint sur un point clairement non nul.

1.2

1. Soit $q = [a, b, c]$ dans $\mathcal{Q}_d$. On a q définie positive, et donc $a = q(1, 0) > 0$. On a donc a non nul, et la méthode de Gauss (voire la décomposition canonique!) prouve que

$$\frac{1}{a}q(x, y) = (x + \frac{b}{2a}y)^2 + \frac{d}{4a^2}y^2.$$

   Si, par l'absurde, $d \leqslant 0$, la forme q se factorise sur $\mathbb{R}$ en produit de deux formes linéaires et donc elle n'est plus définie positive, puisqu'elle peut alors s'annuler sur le noyau d'une forme linéaire (une droite).

   On aurait pu aussi avancer que, comme q est définie positive, les valeurs propres de A_q sont toutes deux strictements positives et donc le déterminant de A_q, égal à $d/4$ est strictement positif.

2. Tout d'abord, si $q' = q \circ \varphi$, alors la positivité de q implique celle de q'. La formule de congruence 1.1.4 (ii) montre que les déterminants des matrices A_q et $A_{q'}$ sont les mêmes, puisque φ est dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.
3. Cela vient du fait que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est un groupe. Plus précisément : la relation est réflexive car $\mathrm{I}_2 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, symétrique car $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est stable par inversion et transitive car $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est stable par multiplication.
4. Si on note $q' = q \circ \varphi$, avec $\varphi \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, alors $(x, y) \mapsto \varphi^{-1}(x, y)$ fournit la bijection. On note que si $q(x, y) = m$, alors $q'\big(\varphi^{-1}(x, y)\big) = q(x, y) = m$. Cette application est donc bien définie car, de plus, $\varphi^{-1} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, et donc envoie un couple d'entier sur un couple d'entier. La bijection réciproque est $(x, y) \mapsto \varphi(x, y)$ est également bien définie car $\varphi \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$.
5. Soit $e = xe_1 + ye_2$, $x, y \in \mathbb{Z}$, tel que $q(e) = m$. Par 1.1.8,

$$x^2, y^2 \leqslant x^2 + y^2 = ||e||^2 \leqslant \frac{m}{k}.$$

   Ce qui prouve que $|x|, |y| \leqslant \sqrt{\frac{m}{k}}$. Comme x et y sont entiers, il ne peut y avoir qu'un nombre fini de vecteurs e dans $q^{-1}(m) \cap \mathbb{Z}^2$.

   On peut aussi le faire avec l'équivalence de la norme quadratique avec la norme sup, ou bien alors, avec la propriété qu'un espace topologique compact et discret est fini.

2- $\mathbb{Z}$-congruence et nombre de classes

1. C'est tout simplement que les carrés de l'anneau $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sont $\bar{0}$ et $\bar{1}$.
2. Si $q = [a, b, c]$ est dans $\mathcal{Q}_d$, alors $d = 4ac - b^2$ et d est congru à 0 ou -1 modulo 4, par ce qui précède. Inversement, si d est congru à 0 ou -1 modulo 4, alors il existe des entiers k et k' tels que $d = 4k' - k^2$ et $q = [1, k, k']$ est dans $\mathcal{Q}_d$.

   Il reste à montrer que la forme q est définie positive. Ceci provient de la décomposition canonique

$$q(x, y) = x^2 + kxy + k'y^2 = (x + \frac{k}{2}y)^2 + \frac{d}{4}y^2.$$

3. L'égalité $x^2 + 5y^2 = 2$ avec x, y entiers, implique $|y| < 1$ et donc $y = 0$, ce qui donne $x^2 = 2$. L'équation n'a donc pas de solution entière alors que $2x^2 + 2xy + 3y^2 = 2$ possède $(1, 0)$ comme solution entière. En utilisant 1.2.4, on obtient que $[1, 0, 5]$ et $[2, 2, 3]$ ne sont pas proprement équivalentes.
4. (a) On prend $P = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, qui appartient à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, et on applique 1.1.4 (ii).

   (b) Idem avec $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. C'est une application des deux questions précédentes. Soit $q = [a, b, c]$ dans une classe fixée de S_d. On a : $a, c > 0$ car $a = q(1, 0)$ qui est strictement positif et de même $c = q(0, 1) > 0$. Quitte à changer b en $b + 2ka$, en utilisant 2.4 a), avec k un entier compris entre $-\frac{1}{2} - \frac{b}{2a}$ et $\frac{1}{2} - \frac{b}{2a}$, on se ramène au cas où $-a \leqslant b \leqslant a$ et donc $b^2 \leqslant a^2$. Maintenant, choisissons $q = [a, b, c]$ dans la classe fixée tel que $|b|$ soit minimal. D'après ce qui précède, on a donc $b^2 \leqslant a^2$ et, en utilisant 2.4 b), on a également $b^2 \leqslant c^2$. Toujours en utilisant 2.4 b), on peut supposer, quitte à échanger a et c, que $a \leqslant c$. On a donc bien les inégalités R_1.
   De plus, si $a^2 = b^2$, et $b < 0$, et donc $b = -a$, on peut choisir $k = 1$ et on se ramène à $b = a$ positif. On a donc R_2.
6. (a) On a $b^2 = 4ac - d \geqslant 4b^2 - d$ et donc $b^2 \leqslant \frac{d}{3}$. Puis,
   $$0 < a^2 \leqslant ac = \frac{1}{4}(b^2 + d) \leqslant \frac{1}{4}(\frac{d}{3} + d) = \frac{d}{3}.$$
   (b) Par 2.5, on a une application surjective qui, à une forme réduite, associe sa classe de S_d. il suffit donc de montrer que le nombre de formes réduites possibles est fini. Or, pour une forme réduite, le nombre de (a, b) possibles est fini par 2.6 a), et c est déterminé par a, b et d ; explicitement $c = \frac{1}{4a}(d + b^2)$, car $a \neq 0$.
7. On cherche les formes réduites possibles. Par 2.6 a) les seules possibilités pour (a, b) sont $(2, b)$, avec $-1 \leqslant b \leqslant 2$, ou $(1, b)$ avec $0 \leqslant b \leqslant 1$. Après un cas par cas (on a six cas), seuls $(a, b) = (1, 0)$, avec $c = 5$, et $(2, 2)$, avec $c = 3$ survivent à la condition $4ac - b^2 = 20$. On trouve donc $S_{20} \leqslant 2$ par ce qui précède, et $S_{20} \geqslant 2$ par 1.2.3. Conclusion $S_{20} = 2$.
8. (a) $d = 4ac - b^2 \geqslant 4a^2 - a^2 > a^2$. L'autre assertion devient claire.
   (b) On fixe $y = \pm 1$, et on étudie la fonction $x \mapsto (2ax + yb)^2$ sur $\mathbb{R}$. Elle est décroissante pour $x \leqslant -\frac{yb}{2a}$ et croissante pour $x \geqslant -\frac{yb}{2a}$. Comme $|\frac{yb}{2a}| < 1$, forme réduite oblige, il suffit de vérifier l'inégalité pour $x = -1, 0, 1$. Ce qui est immédiat. L'autre assertion devient claire puisque $4a^2 \geqslant b^2 + d$ impliquerait $a \geqslant c$.
   (c) Soit $M = \begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix}$ dans $\mathrm{SO}(q, \mathbb{Z})$. Par 1.1.4 (iii), on se ramène à chercher x, y, x', y' entiers, tels que
   $$q(x, y) = a,\ \pi_q\big((x, y), (x', y')\big) = b/2,\ q(x', y') = c,\ xy' - x'y = 1.$$
   Par les deux questions qui précèdent, la première équation n'a que deux solutions $(1, 0)$ et $(-1, 0)$. Quitte à multiplier M par $-\mathrm{I}_2$, qui appartient bien à $\mathrm{SO}(q, \mathbb{Z})$, on peut se ramener au cas où $(x, y) = (1, 0)$. La dernière équation donne $y' = 1$, puis la seconde donne $x' = 0$.

3- Représentabilité d'un entier par une forme

1. Soit m représentable par q, soit (x, y) un couple d'entiers tels que $q(x, y) = m$, et $k = \mathrm{pgcd}(x, y)$. On pose $x' = \frac{x}{k}$, $y' = \frac{y}{k}$, de sorte que $\mathrm{pgcd}(x', y') = 1$ par homogénéité du pgcd, il vient $k^2 q(x', y') = m$, et donc $m' := \frac{m}{k^2}$ est primitivement représentable par q.
   La réciproque est claire.
2. On élève au carré $k' = k + 2em$, avec e entier, et on développe k'^2. Il vient immédiatement que k^2 et k'^2 sont congrus modulo 4.
3. La matrice de q dans cette nouvelle base est égale à $\begin{pmatrix} m & \frac{n}{2} \\ \frac{n}{2} & q(u, v) \end{pmatrix}$. L'invariance de d par congruence, 1.2.2, montre alors l'égalité.

4. Par la question précedente, on voit que l'élément associé est bien dans $T(d,m)$.
Par le lemme de Gauss, on voit qu'un autre choix (u',v') de complément implique
$$(u',v') = (u,v) + k(x,y).$$
On obtient alors que
$$\overline{2\pi_q\big((x,y),(u',v')\big)} \text{ et } \overline{2\pi_q\big((x,y),(u,v)\big)}$$
sont congrus modulo $2q(x,y) = 2m$.

5. (a) Si (x,y) est dans $\mathcal{C}^1(m)$, alors, $q\big(\theta(x,y)\big) = q(x,y) = m$. De plus, comme θ est à coefficients dans $\mathbb{Z}$, on a $\theta(x,y)$ dans $\mathcal{C}(m)$. Enfin, comme $\theta(k(x,y)) = k\theta(x,y)$, on voit que $\theta(x,y)$ est dans $\mathcal{C}^1(m)$.
Puisque θ est de déterminant 1, on a que le déterminant du bivecteur $\big(\theta(x,y),\theta(u,v)\big)$ est égal au déterminant du bivecteur $\big((x,y),(u,v)\big)$, c'est-à-dire 1. Le résultat vient alors de l'invariance de π_q par θ.
(b) Unicité : par 1.1.7, θ est une rotation et le stabilisateur d'un élément non nul par une rotation est l'identité.
Existence : on construit donc, par les hypothèses de l'énoncé, deux bases directes, respectivement $\big((x,y),(u,v)\big)$ et $\big((x',y'),(u',v')\big)$, telle que les matrices de q dans ces bases sont de la forme, respectivement
$$\begin{pmatrix} m & \frac{n}{2} \\ \frac{n}{2} & q(u,v)\end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} m & \frac{n'}{2} \\ \frac{n'}{2} & q(u',v')\end{pmatrix},$$
avec n et n' congrus modulo $2m$. On se ramène, par la matrice de passage de 2.4 a), au cas où $n = n'$ et donc $q(u,v) = q(u',v')$ par invariance du déterminant. Les deux matrices sont alors égales, et l'endomorphisme θ qui envoie la première base sur la seconde vérifie bien les propriétés voulues.

6. Comme $\overline{n} \in T(d,m)$, on a $n^2 = -d + 4ml$, pour un l. L'unicité de l est claire car m non nul. L'élément $\nu_q(1,0)$ a un sens car $(1,0)$ est bien dans $\mathcal{C}^1_q(m)$ et il vaut $\overline{2\pi_q\big((1,0),(0,1)\big)} = \overline{n}$.

7. (a) On a encore, comme dans 5 a), $\varphi(x',y') \in \mathcal{C}^1_q(m)$, puisque $(x',y') \in \mathcal{C}^1_{q'}$ et $q' = q\circ\varphi$. Il suffit ensuite de remarquer, toujours comme dans 5 a), que le déterminant du bivecteur $\big(\varphi(x,y),\varphi(u,v)\big)$ est égal au déterminant du bivecteur $\big((x,y),(u,v)\big)$, c'est-à-dire 1. Le reste découle de la définition de ν_q.
(b) On construit deux bases directes $\underline{e}$, et $\underline{e}'$ telles que la matrice de q dans $\underline{e}$ est égale à celle de q' dans $\underline{e}'$. On procède pour cela exactement comme pour la preuve de 3.5 b). L'endomorphisme φ de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ qui envoie $\underline{e}'$ sur $\underline{e}$ vérifie alors $q' = q\circ\varphi$.

8. Pour chaque q dans R_d, on considère un élément (x,y) de $\mathcal{C}^1_q(m)$ et on lui associe $\nu_q(x,y)$ dans $T(d,m)$. Par 3.5 a), cette valeur est invariante pour l'action de $\mathrm{SO}(q,\mathbb{Z})$ et ne dépend donc pas de l'élément choisi dans $\mathrm{SO}(q,\mathbb{Z}).(x,y)$.
On définit donc une application de l'ensemble des orbites $\mathcal{C}^1_q(m)/SO(q,\mathbb{Z})$ dans $T(d,m)$. On obtient alors une application dont l'ensemble de départ est la réunion disjointe des $\mathcal{C}^1_q(m)/\mathrm{SO}(q,\mathbb{Z})$, pour q parcourant R_d, dont l'ensemble d'arrivée est $T(d,m)$.
Par l'unicité montrée en 3.5 b), on a
$$\#\mathcal{C}^1_q(m)/\mathrm{SO}(q,\mathbb{Z}) = \frac{\#\mathcal{C}^1_q(m)}{\#\mathrm{SO}(q,\mathbb{Z})}.$$
Si on montre que l'application construite est bijective, on aura donc l'égalité voulue.
Pour des q choisis dans des classes distinctes, les $\nu_q(x,y)$ sont distincts, par 3.7 b). De plus, pour q fixé dans R_d, $\nu_q(x',y') = \nu_q(x,y)$ implique $\mathrm{SO}(q,\mathbb{Z}).(x,y) = \mathrm{SO}(q,\mathbb{Z}).(x',y')$, par 3.5 b). On a donc l'injectivité.

Maintenant, si l'on part d'un élément $\overline{n}$ de $T(d,m)$, alors, par 3.6, on peut trouver une forme q, et un couple (x,y) tels que $\overline{n} = \nu_q(x,y)$. L'élément $\nu_q(x,y)$, pour (x,y) dans $\mathcal{C}_q^1(m)$, ne dépend pas du représentant choisi dans la classe de q par 3.7 a), donc, on peut choisir q dans R_d, puis (x,y) par 1.2.4. D'où la surjectivité.

4- Nombre de solutions d'une équation modulaire

1. Les éléments de $\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$ sont les classes modulo p^α des éléments de $[0, p^\alpha - 1]$. Un élément $\bar{x}$ est inversible si et seulement si x est premier avec p^α. On se ramène donc à compter les entiers de $[0, p^\alpha - 1]$ non multiples de p.
2. (a) Comme p est impair, son noyau est ± 1, de cardinal 2. Le nombre de carrés est donc
$$\#\mathrm{Im}(\psi) = \frac{\#(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*}{\#\ker\psi} = \frac{p-1}{2}.$$
   (b) « Seulement si » découle du théorème de Lagrange qui dit que l'ordre d'un élément divise l'ordre du groupe, qui est ici égal à $p-1$.
   « Si » : par cardinalité, car le nombre de solutions d'une équation d'un polynôme de degré $\frac{p-1}{2}$ sur un corps (commutatif!) est inférieur à $\frac{p-1}{2}$.
3. On fait deux cas selon si v est un carré ou non modulo p. Comme p est impair et v non nul, il y a soit 0 soit 2 solutions.
4. (a) La surjection canonique de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ passe au quotient de $p^\alpha\mathbb{Z}$. L'image d'un élément $\bar{x}$ de $\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$ est nulle si et seulement si x est multiple de p, et donc si et seulement si $\bar{x}$ est non inversible.
   Le morphisme ϕ est la restriction à $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^*$ de ce passage au quotient. Son image est donc $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$.
   Son noyau est donc d'ordre $\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{p-1} = p^{\alpha-1}$, qui est premier avec 2. Par l'identité de Bezout, il existe des entiers u et v tels que $2u + p^{\alpha-1}v = 1$. Tout élément x du noyau vaut, par le théorème de Lagrange : $x = x^1 = x^{2u+p^{\alpha-1}v} = (x^u)^2$.
   (b) « Seulement si » est clair car le passage au quotient est un morphisme.
   Montrons le « si » : par surjectivité du morphisme multiplicatif ψ, l'image réciproque d'un carré contient un carré, et par la question précédente, tous les antécédents d'un carré fixé sont des carrés puisqu'ils sont tous égaux modulo le noyau de ψ.
   Au bilan, on peut compter le nombre de carrés de $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^*$ car ce sont les antécédents des carrés de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$; il y en a $\frac{p-1}{2} \cdot \#\ker\psi = \frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}$. En considérant le morphisme de groupe $\kappa : x \mapsto x^2$ de $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^*$, on obtient que $\#\ker\kappa = 2$. On montre la dernière assertion comme en 3).
   On peut montrer que $\#\ker\kappa = 2$ de façon plus élémentaire en prouvant tout simplement que si $a^2 - 1$ est multiple de p^α, p impair, alors $a-1$ ou $a+1$ est multiple de p^α.
5. On décompose d'abord $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ par le lemme chinois (l'image d'un carré est un k-uplet de carrés), et on applique ensuite la question 4.4 b).

6. Montrons la première égalité. On montre tout d'abord l'égalité
$$\#T(d,m) = \frac{1}{2}\#\{x \in \mathbb{Z}/4m\mathbb{Z},\ x^2 = -\overline{d}_{4m}\},$$
   Cela provient de 3.2 et du fait que le noyau du morphisme naturel $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est d'ordre 2.
   On montre ensuite l'égalité

$$\frac{1}{2}\#\{x \in \mathbb{Z}/4m\mathbb{Z},\ x^2 = -\overline{d}_{4m}\} = \#\{x \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\ x^2 = -\overline{d}_m\}$$

.

Effectivement, par le lemme chinois, qui identifie $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ à $\mathbb{Z}/4m\mathbb{Z}$ (m est impair), on se ramène à trouver les couples de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ dont le carré est $(-\overline{d}_4, -\overline{d}_m)$. On se sert donc du fait qu'un carré de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ possède 2 racines carrées.

Enfin, la seconde égalité provient directement du développement du produit dans la question 4.5.

7. Pour tout v qui divise m, on note $\mathrm{val}_p(v) = 2s_p(v) + r_p(v)$, la division euclidienne de $\mathrm{val}_p(v)$ par 2. La bijection est donnée par $v \mapsto (l, e)$, où $l = \prod_p p^{r_p(v)}$ et $e = \prod_p p^{s_p(v)}$. La bijection inverse est donnée par $(l, e) \mapsto le^2$.
8. C'est juste une synthèse des questions 4.6 et 4.7. Il suffit de réindexer la somme en utilisant la bijection.

5- Nombre de solutions d'équations quadratiques.

1. Par 2.7, q et q' constituent un choix de représentants de S_{-20}. On a, par 3.7,

$$\#\mathcal{C}_q(m) + \#\mathcal{C}_{q'}(m) = \sum_{e>0, e^2|m} \#\mathcal{C}_q^1(\frac{m}{e^2}) + \#\mathcal{C}_{q'}^1(\frac{m}{e^2}).$$

Par 3.8 et 2.8, il vient donc

$$\#\mathcal{C}_q(m) + \#\mathcal{C}_{q'}(m) = 2\sum_{e>0, e^2|m} \#T(20, \frac{m}{e^2}).$$

La dernière égalité est claire par 4.8.

2. (a) On fait opérer de façon cyclique $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur $\mathcal{X}$. Les orbites singletonnes correspondent aux solutions de $px^2 = 1$; il y en a donc $1 + \left(\frac{p}{5}\right)$ par 4.3. Les autres orbites sont de cardinal p.

   (b) Le même qu'un espace vectoriel de dimension $n-1$ (existence d'une base !), donc 5^{n-1}.

   (c) On voit que l'on a bien un changement de variables (inversibilité).
   L'équation devient (puisque modulo 5, on a $-4 = 1$), $\sum_{j=1}^{a} u_j u'_j + u_p^2 = 1$. Si tous les u_j, $1 \leqslant j \leqslant a$ sont nuls, on a 2.5^a solutions. Sinon, chaque donnée de u_j, $1 \leqslant j \leqslant a$, non tous nuls et u_p quelconque fournit un hyperplan de solutions, soit, par la question qui précède, en $5^{a-1}.(5^a - 1).5 = 5^{p-1} - 5^a$ solutions. Soit en tout $5^{p-1} + 5^a$. Par Fermat, on a, modulo p, $1 + 5^a$ solutions.

   (d) Par 4.2 (b), on a donc $1 + \left(\frac{5}{p}\right)$ solutions à l'équations. Comme p est impair, et que le symbole de Legendre ne peut prendre que les valeurs 1 et -1, en comparant 5.2 a) et 5.2 c), on obtient l'égalité.

3. D'après la question 5.1, cela revient à trouver p tel que $1 + \left(\frac{-20}{p}\right)$ est non nul. Or, par multiplicativité du symbole de Legendre, ceci vaut $1 + \left(\frac{-5}{p}\right) = 1 + (-1)^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{5}{p}\right) = 1 + (-1)^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{p}{5}\right)$.
Donc, ce nombre est non nul si et seulement si on est dans les deux cas suivants : soit p congru à 1 modulo 4 et p congru à 1, 4 modulo 5, soit p congru à 3 modulo 4 et p congru à 2,3 modulo 5. En utilisant l'isomorphisme du lemme chinois, on obtient bien l'assertion demandée.

4. Montrons la première équivalence, la seconde en découlera par la question qui précède.
Si $p = x^2+5y^2$ alors p est congru à x^2+y^2 modulo 4 et donc ne peut être congru à 3 modulo 4. Par élimination p ne peut être congru qu'à 1 ou 9 modulo 20. Réciproquement, si p est congru à 1 ou 9 modulo 4, alors par la question précédente, p est représenté par x^2+5y^2 ou par $2x^2+2xy+3y^2$. Il suffit de montrer qu'il n'est pas représenté par $2x^2+2xy+3y^2$. Supposons $p = 2x^2+2xy+3y^2$, cela implique y impair et donc $x(x+y)$ pair. Donc modulo 4, p vaut $3y^2$ donc 3. Ce qui est impossible.

5. (a) Comme $[q]$ est ici la seule classe de forme quadratique possible, par congruence modulo 4 (voir question précédente), on obtient par la question 5.1

$$\#\mathcal{C}_q(p^\alpha) = 2\sum_{0\leqslant k\leqslant\alpha}\left(\frac{-20}{p^k}\right) = 2\sum_{0\leqslant k\leqslant\alpha}\left(\frac{-20}{p}\right)^k = 2(1+\alpha)$$

car $\left(\frac{-20}{p}\right) = 1.$

(b) Il suffit de remarquer que dans ce cas $p^{2\beta}$ est congru à 1 modulo 4 et $p^{2\beta+1}$ à 3 modulo 4. La méthode est analogue.

Chapitre 4

Épreuve écrite d'analyse et probabilités

4.1 Énoncé

Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs et autres appareils électroniques similaires, ainsi que les documents sont interdits. La qualité de la rédaction sera un facteur important d'appréciation des copies. On invite donc le candidat à produire des raisonnements clairs, complets et concis. Le candidat peut utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes ; il veillera toutefois à préciser la référence du résultat utilisé.

Notations.

On note : $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbf{N}^* = \mathbf{N}\backslash\{0\}$, $\mathbf{R}$ le corps des nombres réels, $\mathbf{C}$ le corps des nombres complexes. Si z est un complexe, $\overline{z}$ désigne son conjugué, $\mathrm{Im}(z)$ sa partie imaginaire et $|z|$ son module.

Dans ce sujet, toute mesure σ sera définie sur un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{B}_\Omega)$ où Ω un espace métrique et $\mathcal{B}_\Omega$ sa tribu borélienne. En outre, une fonction $f : \Omega \to \mathbf{C}$ sera qualifiée de mesurable si elle est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{B}_\Omega$. On utilise également :

- l'abréviation « p.p. » pour « pour presque tout (pour la mesure σ) » ;
- la notation $L^2(\Omega, \sigma)$ pour désigner l'ensemble (des classes) de fonctions de Ω dans $\mathbf{R}$ (mesurables) de carré intégrable sur Ω pour la mesure σ.
- pour f intégrable, on utilisera abusivement la notation $\sigma(f) = \int_\Omega f \mathrm{d}\sigma$ ou $\int_\Omega f(\omega)\mathrm{d}\sigma(\omega)$, si on a besoin de préciser les variables.

Si $\mathbf{K}$ est un corps et $n \in \mathbf{N}^*$, on note $\mathfrak{M}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et n colonnes à coefficients dans le corps $\mathbf{K}$.

Les parties IV, V et VI utilisent les notations complémentaires définies à la page 47. D'autres notations sont introduites au début de chaque partie.

Objectif du sujet.

Le sujet a pour but :

- d'étudier la localisation des valeurs propres des matrices hermitiennes de grandes tailles (partie V) qui est un résultat important, notamment dans les télécommunications modernes ;

— de démontrer une convergence en loi (*loi du demi-cercle*) de la moyenne des valeurs propres des matrices hermitiennes de taille n (partie VI). Dans l'étude des matrices aléatoires, ce résultat joue un rôle semblable au théorème central limite des variables aléatoires réelles.

Dépendance des parties entre elles :

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{I} & & \\ & \swarrow & \downarrow & & \\ \mathrm{II} & & \mathrm{V} & & \mathrm{III} \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \swarrow & \\ \mathrm{IV} & \rightarrow & \mathrm{VI} & & \end{array}$$

PARTIE I : Polynômes d'Hermite.

On considère les fonctions φ et H_k ($k \in \mathbf{N}$) définies sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \quad \text{et} \quad H_k(x) = (-1)^k \frac{\varphi^{(k)}(x)}{\varphi(x)},$$

ainsi que les fonctions K_n ($n \in \mathbf{N}^*$) définie sur $\mathbf{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad K_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{H_k(x) H_k(y)}{2^k k!}.$$

On note $\mathrm{d}t$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$.

1. Soit $x \in \mathbf{R}$. On considère la fonction $\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \psi(t) = \varphi(x-t).$$

   (a) Rappeler les développements en série entière des fonctions $t \mapsto e^{2xt}$ et $t \mapsto e^{-t^2}$ en $t = 0$, ainsi que la valeur de leur rayon de convergence.

   (b) Établir que la fonction ψ est développable en série entière en 0.

   (c) En déduire que :

$$\forall (x,t) \in \mathbf{R}^2, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{H_k(x)}{k!} t^k = e^{2xt-t^2}. \tag{4.1}$$

2. Soit $x \in \mathbf{R}$. Justifier que l'on peut dériver terme à terme par rapport à t la relation (4.1) et en déduire que :

$$\forall k \geqslant 1, \quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad H_{k+1}(x) = 2xH_k(x) - 2kH_{k-1}(x). \tag{4.2}$$

3. Soit $k \in \mathbf{N}$. Prouver que H_k est une fonction polynomiale à coefficients réels. Préciser son degré et son coefficient dominant.

4. Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ avec $x \neq y$. À l'aide de la relation (4.2) prouver que :

$$K_n(x,y) = \frac{1}{2^n (n-1)!} \left(\frac{H_n(x) H_{n-1}(y) - H_{n-1}(x) H_n(y)}{x-y} \right). \tag{4.3}$$

5. Soit P une fonction polynomiale à coefficients réels. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, établir que :

$$\int_{\mathbf{R}} \varphi^{(n)}(t) P(t)\, \mathrm{d}t = (-1)^n \int_{\mathbf{R}} \varphi(t) P^{(n)}(t)\, \mathrm{d}t.$$

6. Démontrer que :

$$\int_{\mathbf{R}} H_n(t) H_m(t) \varphi(t) \, \mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } m < n, \\ 2^n n! & \text{si } m = n. \end{cases}$$

7. Établir que :

$$\forall (k,x) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}, \quad H_k(x) = \frac{i^k e^{x^2}}{2\sqrt{\pi}} \int_{\mathbf{R}} t^k e^{-t^2/4} e^{-ixt} \, \mathrm{d}t.$$

Indication : *On pourra étudier d'abord le cas $k = 0$ et utiliser librement l'expression suivante de la transformée de Fourier de la gaussienne $t \mapsto e^{-t^2/2}$:*

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \int_{\mathbf{R}} e^{-t^2/2} e^{-ixt} \, \mathrm{d}t = \sqrt{2\pi} e^{-x^2/2}.$$

8. *La question suivante ne sera utilisée qu'à la question 4 de la partie V et pourra être admise en première lecture.*

Soit $x \in \mathbf{R}$. Pour n tendant vers $+\infty$, montrer que :

$$H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2n}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{2n}{e}\right)^{n/2} i^n \frac{\left((-1)^n e^{ix} + e^{-ix}\right)}{2} + o\left(\left(\frac{2n}{e}\right)^{\frac{n}{2}}\right) \tag{4.4}$$

Indication : *On utilisera librement la méthode de Laplace : soient $u_0 \in \mathbf{R}$, $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{C}$ continue et $g : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que :*
i) $\int_{\mathbf{R}_+} |f(t)| e^{ug(t)} dt$ *converge pour tout $u \geqslant u_0$;*
ii) *que g' s'annule en un seul point $t_0 \in \mathbf{R}_+^*$ avec $g(t_0) = \max_{]0,+\infty[} g$ et $g''(t_0) < 0$, alors quand u tend vers $+\infty$:*

$$\int_{\mathbf{R}_+} f(t) e^{ug(t)} dt = \sqrt{\frac{2\pi}{-g''(t_0)}} f(t_0) \frac{e^{ug(t_0)}}{\sqrt{u}} + o\left(\frac{e^{ug(t_0)}}{\sqrt{u}}\right).$$

PARTIE II : Projection orthogonale sur $\mathbf{R}_{n-1}[X]$.

On note μ la mesure définie sur $\mathbf{R}$ par : $\mathrm{d}\mu(t) = \varphi(t) \mathrm{d}t$ où $\mathrm{d}t$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$, c'est-à-dire que pour toute fonction f mesurable et positive sur $\mathbf{R}$, on a :

$$\int_{\mathbf{R}} f(t) \, \mathrm{d}\mu(t) = \int_{\mathbf{R}} f(t) \varphi(t) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbf{R}} f(t) e^{-t^2} \mathrm{d}t \quad \textit{et} \quad \int_{\mathbf{R}} \mathrm{d}\mu(t) = 1.$$

On munit le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $L^2(\mathbf{R}, \mu)$ du produit scalaire :

$$\forall (f,g) \in L^2(\mathbf{R}, \mu), \quad \langle f, g \rangle = \int_{\mathbf{R}} f(t) \, g(t) \, \mathrm{d}\mu(t) = \int_{\mathbf{R}} f(t) \, g(t) \, \varphi(t) \, \mathrm{d}t.$$

Dans cette partie, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et q_n désigne la fonction polynomiale définie sur $\mathbf{R}^n$ par :

$$\forall (t_1, ..., t_n) \in \mathbf{R}^n, \quad q_n(t_1, ..., t_n) = D_n \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (t_j - t_i)^2 \text{ avec } D_n = \frac{2^{n(n-1)/2}}{\prod_{j=0}^{n} j!}, \tag{4.5}$$

en convenant que $0! = 1$. Rappelons que la fonction K_n est définie à la partie I.

1. Soit $(E, \langle , \rangle_E)$ un espace vectoriel préhilbertien, F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, $(e_1, ..., e_p)$ une base orthonormale de F et x un élément de E.

   Rappeler, sans démonstration, l'expression du projeté orthogonal $p_F(x)$ de x sur F en fonction des vecteurs $e_1, ..., e_p$ et x.
2. On note Π_n le projecteur orthogonal de $L^2(\mathbf{R}, \mu)$ sur $\mathbf{R}_{n-1}[X]$. Justifier que :
$$\forall f \in L^2(\mathbf{R}, \mu), \quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad \Pi_n(f)(x) = \int_{\mathbf{R}} K_n(x, y) f(y)\, \mathrm{d}\mu(y).$$
3. Soit $(x, z) \in \mathbf{R}^2$. Prouver que :
$$\int_{\mathbf{R}} K_n(x, y) K_n(y, z)\, \mathrm{d}\mu(y) = K_n(x, z) \quad \text{et} \quad \int_{\mathbf{R}} K_n(x, x)\, \mathrm{d}\mu(x) = n.$$
4. Soit $(t_1, ..., t_n) \in \mathbf{R}^n$. On considère les deux matrices :
$$A = (K_n(t_i, t_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbf{R}) \quad \text{et} \quad B = \left(\frac{H_{i-1}(t_j)}{\sqrt{2^{i-1}(i-1)!}}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbf{R}).$$
   (a) Exprimer A en fonction des matrices B et ${}^tB$. Justifier que :
$$\det\left((H_{i-1}(t_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\right) = 2^{n(n-1)/2} \det\left(\left(t_j^{i-1}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\right).$$
   (b) En déduire que :
$$\det\left((K_n(t_i, t_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\right) = n! q_n(t_1, ..., t_n).$$
5. On note $\mathcal{S}_n$ le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, ..., n\}$. Prouver que :
$$\int_{\mathbf{R}^n} \left(\det\left((H_{i-1}(t_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\right)\right)^2 \mathrm{d}\mu(t_1) ... \mathrm{d}\mu(t_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \prod_{i=1}^{n} \left\langle H_{\sigma(i)-1}, H_{\sigma(i)-1} \right\rangle.$$
6. En déduire que :
$$\int_{\mathbf{R}^n} q_n(t_1, ..., t_n)\, \mathrm{d}\mu(t_1) ... \mathrm{d}\mu(t_n) = 1$$
   et que :
$$\int_{\mathbf{R}^n} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (t_j - t_i)^2 e^{-\left(t_1^2 + \cdots + t_n^2\right)} \mathrm{d}t_1 ... \mathrm{d}t_n = \frac{\pi^{n/2}}{D_n} = \pi^{n/2} 2^{-n(n-1)/2} \prod_{j=0}^{n} j! \quad .$$
7. Soient m tel que $2 \leqslant m \leqslant n$ et $(t_1, .., t_{m-1}) \in \mathbf{R}^{m-1}$. Démontrer que :
$$\int_{\mathbf{R}} \det\left((K_n(t_i, t_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant m}\right) \mathrm{d}\mu(t_m) = (n - m + 1) \det\left((K_n(t_i, t_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant m-1}\right). \tag{4.6}$$

   Indication : *Développer selon la dernière colonne le déterminant* $\det\left((K_n(t_i, t_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant m}\right)$ *puis développer certains sous-déterminants selon la dernière ligne.*

PARTIE III : Holomorphie.

Soit Ω un ouvert de $\mathbf{C}$, on note $\mathcal{O}(\Omega)$ le $\mathbf{C}$-espace vectoriel des fonctions holomorphes sur Ω à valeurs dans $\mathbf{C}$. On munit $\mathcal{O}(\Omega)$ de la topologie de convergence uniforme sur tout compact de Ω.

1. Soit log la détermination holomorphe du logarithme sur $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}_-$ définie par $\log(1) = 0$ et $\sqrt{\ }$ la fonction racine carrée de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}_+^*$. On note :

$$\Phi : z \mapsto z \exp\left(\frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{2}{z^2}\right)\right).$$

   (a) Démontrer que la fonction Φ est holomorphe sur $\mathbf{C}\backslash\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$ et que :

$$\forall x \in \mathbf{R}\backslash\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right], \quad \Phi(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-2} & \text{si } x > \sqrt{2} \\ -\sqrt{x^2-2} & \text{si } x < -\sqrt{2} \end{cases}.$$

   (b) Soit $C(O, R)$ le cercle de centre O et de rayon R. Montrer que :

$$\forall z \in \mathbf{C}, \quad \lim_{R\to+\infty} \int_{C(O,R)} \frac{\Phi(w) - w}{w - z}\mathrm{d}w = 0.$$

2. On note G la fonction de $\mathcal{O}\left(\mathbf{C}\backslash\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]\right)$ donnée par :

$$\forall z \in \mathbf{C}\backslash\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right], \quad G(z) = z - \Phi(z).$$

   Prouver que :

$$\forall z \in \mathbf{C}\backslash\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right], \qquad \int_{\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]} \frac{1}{\pi}\frac{\sqrt{2-t^2}}{z-t}\mathrm{d}t = G(z).$$

   Indication : *On pourra appliquer le théorème des résidus à l'intégrale curviligne* $\int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} \frac{\Phi(w)}{w-z}\mathrm{d}w$ *où* $\Gamma_{R,\varepsilon}$ *est le contour obtenu en réunissant le cercle* $C(O, R)$ *avec le rectangle dont les sommets sont* $\pm\left(\sqrt{2} + \varepsilon + i\varepsilon\right)$, $\pm\left(\sqrt{2} + \varepsilon - i\varepsilon\right)$.

3. On considère $(\sigma_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de mesures de probabilité sur $\mathbf{R}$. Pour tout $n \geqslant 1$, on définit la fonction H_n par

$$H_n : z \mapsto \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{z-t}\mathrm{d}\sigma_n(t),$$

   pour $z \in \mathbf{C}\backslash\mathbf{R}$.

   Supposons que les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

   — $\forall n \geqslant 1$, $H_n \in \mathcal{O}(\mathbf{C}\backslash\mathbf{R})$ et $\forall z \in \mathbf{C}\backslash\mathbf{R}$, $\quad \mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Im}(H_n(z)) < 0$;

   — $(H_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}$ et

$$\forall z \in \mathbf{C}\backslash\mathbf{R}, \quad \lim_{n\to+\infty}\left((H_n(z))^2 - 2zH_n(z) + 2\right) = 0.$$

   (a) Établir que la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ converge dans $\mathcal{O}(\mathbf{C}\backslash\mathbf{R})$.
   Indication : *On pourra utiliser le théorème d'Ascoli (ou de Montel).*

   (b) Prouver que $(H_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers G sur $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}$.

Notations complémentaires pour les parties IV, V et VI.

Dans toute la suite du sujet, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Pour toute matrice $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbf{C})$, on note :

$$M^* = \left(\overline{m_{j,i}}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbf{C}) \text{ et } \operatorname{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}.$$

Si $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$, on note $\operatorname{diag}(\lambda_1, .., \lambda_n)$ la matrice diagonale de $\mathfrak{M}_n(\mathbf{R})$ définie par :

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

On considère $\mathcal{H}_n(\mathbf{C})$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des matrices hermitiennes défini par :

$$\mathcal{H}_n(\mathbf{C}) = \{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbf{C}) \quad / \quad M^* = M\}$$

et $U_n(\mathbf{C})$ le sous-groupe de $GL_n(\mathbf{C})$ défini par :

$$U_n(\mathbf{C}) = \{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbf{C}) \quad / \quad MM^* = I_n\}.$$

On munit $\mathcal{H}_n(\mathbf{C})$ (qui est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n^2) de la mesure suivante ω_n définie comme suit : pour toute fonction f mesurable et positive sur $\mathcal{H}_n(\mathbf{C})$, on pose :

$$\int\limits_{\mathcal{H}_n(\mathbf{C})} f(M)\,\mathrm{d}\omega_n(M) = \int\limits_{\mathbf{R}^{n^2}} g\left((u_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}, (v_{i,j})_{1\leqslant i<j\leqslant n}\right) \prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}^{n} \mathrm{d}u_{i,j} \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}^{n} \mathrm{d}v_{i,j}$$

où l'on a posé p.p. $\left((u_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}, (v_{i,j})_{1\leqslant i<j\leqslant n}\right) \in \mathbf{R}^{n^2}$,

$$g\left((u_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}, (v_{i,j})_{1\leqslant i<j\leqslant n}\right) = f(M_{u,v})$$

avec

$$M_{u,v} = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2}+iv_{1,2} & & \cdots & u_{1,n}+iv_{1,n} \\ u_{1,2}-iv_{1,2} & u_{2,2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n}+iv_{n-1,n} \\ u_{1,n}-iv_{1,n} & \cdots & \cdots & u_{n-1,n}-iv_{n-1,n} & u_{n,n} \end{pmatrix}.$$

On admet le théorème suivant.

Théorème (Formule d'intégration de Weyl) : *Soit $n \geqslant 2$, il existe un réel $C_n > 0$ tel que pour toute fonction $f : \mathcal{H}_n(\mathbf{C}) \mapsto \mathbf{R}$ mesurable et intégrable sur $\mathcal{H}_n(\mathbf{C})$ pour la mesure ω_n et vérifiant :*

$$\forall V \in U(n, \mathbf{C}), \quad \forall M \in \mathcal{H}_n(\mathbf{C}), \quad f(VMV^*) = f(M)$$

alors :

$$\int\limits_{\mathcal{H}_n(\mathbf{C})} f(M)\,\mathrm{d}\omega_n(M) = C_n \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(\operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)) \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i)^2 \prod_{i=1}^{n} \mathrm{d}\lambda_i. \qquad (4.7)$$

PARTIE IV : Intégration et probabilités sur $\mathcal{H}_n(\mathbf{C})$.

Soient $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant 4}$ quatre variables aléatoires à valeurs réelles définies sur un même espace probabilisé (Ω, P). On pose :

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & \frac{X_2+iX_3}{\sqrt{2}} \\ \frac{X_2-iX_3}{\sqrt{2}} & X_4 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire :

$$\text{p.p. } \omega \in \Omega, \quad X(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) & \frac{X_2(\omega)+iX_3(\omega)}{\sqrt{2}} \\ \frac{X_2(\omega)-iX_3(\omega)}{\sqrt{2}} & X_4(\omega) \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_2(\mathbf{C}).$$

X est donc une variable aléatoire sur (Ω, P) à valeurs dans $\mathcal{H}_2(\mathbf{C})$. Pour tous intervalles $(I_k)_{1\leqslant k\leqslant 4}$ de $\mathbf{R}$, on pose :

$$U_{I_1,I_2,I_3,I_4} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2+ia_3 \\ a_2-ia_3 & a_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_2(\mathbf{C}), \quad (a_1,a_2,a_3,a_4) \in I_1 \times I_2 \times I_3 \times I_4 \right\}.$$

1. Montrer que les variables $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant 4}$ sont mutuellement indépendantes et qu'elles suivent la même loi normale $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2}\right)$ (*c'est-à-dire qu'elles possèdent pour densité φ, définie en partie I*), si et seulement si pour tous intervalles $(I_k)_{1\leqslant k\leqslant 4}$ de $\mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} P\left(X \in U_{I_1,I_2,I_3,I_4}\right) &= \frac{2}{\pi^2} \int\limits_{I_1\times I_2\times I_3\times I_4} e^{-\left(x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+x_4^2\right)} \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4 \\ &= \frac{2}{\pi^2} \int\limits_{U_{I_1\times I_2\times I_3\times I_4}} e^{-\mathrm{Tr}\left(M^2\right)} \mathrm{d}\omega_2(M). \end{aligned} \tag{4.8}$$

2. Montrer que :

$$\int\limits_{\mathcal{H}_n(\mathbf{C})} e^{-\mathrm{Tr}\left(M^2\right)} \mathrm{d}\omega_n(M) = \frac{\pi^{n^2/2}}{2^{n(n-1)/2}}.$$

   En déduire la valeur du réel C_n défini par la relation (4.7).

Dans la suite du sujet, on considère la mesure P_n de probabilité sur $\mathcal{H}_n(\mathbf{C})$ notée symboliquement :

$$\mathrm{d}P_n(M) = \frac{2^{n(n-1)/2}}{\pi^{n^2/2}} e^{-\mathrm{Tr}\left(M^2\right)} \mathrm{d}\omega_n(M), \tag{4.9}$$

c'est-à-dire pour toute fonction $f : \mathcal{H}_n(\mathbf{C}) \to \mathbf{C}$ intégrable, on a :

$$\int\limits_{\mathcal{H}_n(\mathbf{C})} f(M)\, \mathrm{d}P_n(M) = \int\limits_{\mathcal{H}_n(\mathbf{C})} f(M) \frac{2^{n(n-1)/2}}{\pi^{n^2/2}} e^{-\mathrm{Tr}\left(M^2\right)} \mathrm{d}\omega_n(M).$$

3. Soit $f : \mathcal{H}_n(\mathbf{C}) \mapsto \mathbf{R}$ une fonction mesurable et bornée. On suppose que :

$$\forall V \in U_n(\mathbf{C}), \quad \forall M \in \mathcal{H}_n(\mathbf{C}), \quad f(VMV^*) = f(M).$$

   Montrer qu'il existe une fonction $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ mesurable et bornée telle que :

$$\int\limits_{\mathcal{H}_n(\mathbf{C})} f(M)\, \mathrm{d}P_n(M) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} g(\lambda_1, ..., \lambda_n)\, q_n(\lambda_1, ..., \lambda_n)\, \mathrm{d}\mu(\lambda_1) \cdots \mathrm{d}\mu(\lambda_n)$$

avec

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n, \quad \forall (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbf{R}^n, \quad g\left(\lambda_{\sigma(1)}, ..., \lambda_{\sigma(n)}\right) = g(\lambda_1, ..., \lambda_n)$$

et q_n définie par la relation (4.5).

4. Soient $\gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction mesurable et bornée et $k \in \{1, .., n\}$. On considère la variable aléatoire $F_k : \mathcal{H}_n(\mathbf{C}) \to \mathbf{C}$ sur l'espace probabilisé $(\mathcal{H}_n(\mathbf{C}), P_n)$ définie par :

$$\forall M \in \mathcal{H}_n(\mathbf{C}), \quad F_k(M) = \sum_{1 \leqslant i_1 < .... < i_k \leqslant n} \gamma(\lambda_{i_1}) ... \gamma(\lambda_{i_k}),$$

où $(\lambda_1, .., \lambda_n)$ désigne les valeurs propres de M (comptées avec multiplicité) et on note $\mathbb{E}_n(F_k)$ son espérance. Prouver que :

$$\mathbb{E}_n(F_k) = \frac{1}{k!} \int\limits_{\mathbf{R}^k} \gamma(\lambda_1) \cdots \gamma(\lambda_k) \det\left((K_n(\lambda_i, \lambda_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant k}\right) \, \mathrm{d}\mu(\lambda_1) \cdots \mathrm{d}\mu(\lambda_k). \tag{4.10}$$

Indication : *On pourra utiliser la relation (4.6).*

PARTIE V : Localisation du spectre.

On munit $\mathcal{H}_n(\mathbf{C})$ de la mesure P_n de probabilité définie par la relation (4.9).

Si Y désigne une variable aléatoire sur $(\mathcal{H}_n(\mathbf{C}), P_n)$, on note $\mathbb{E}_n(Y)$ son espérance.

Pour tout intervalle I de $\mathbf{R}$, on note χ_I la fonction indicatrice de I définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \chi_I(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in I \\ 0 \text{ si } x \notin I \end{cases}.$$

Soient $M \in \mathcal{H}_n(\mathbf{C})$ de valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$ (comptées avec multiplicité), $z \in \mathbf{C}$ et $k \in \{1, ..., n\}$, on note :

$$X_I^{(k)}(M) = \sum_{1 \leqslant i_1 < .... < i_k \leqslant n} \chi_I(\lambda_{i_1}) ... \chi_I(\lambda_{i_k}); \tag{4.11}$$

$$X_{I,z}(M) = \prod_{i=1}^{n} (1 - z\chi_I(\lambda_i)).$$

On admet que les applications

$$X_I^{(k)} : \begin{cases} \mathcal{H}_n(\mathbf{C}) & \to & \mathbf{N} \\ M & \mapsto & X_I^{(k)}(M) \end{cases} \quad \text{et} \quad X_{I,z} : \begin{cases} \mathcal{H}_n(\mathbf{C}) & \to & \mathbf{C} \\ M & \mapsto & X_{I,z}(M) \end{cases}$$

sont des variables aléatoires sur $(\mathcal{H}_n(\mathbf{C}), P_n)$.

On note $Q_{n,I}$ la fonction définie sur $\mathbf{C}$ par :

$$\forall z \in \mathbf{C}, \quad Q_{n,I}(z) = \mathbb{E}_n(X_{I,z}).$$

Pour tout entier $k \in \{0, ..., n\}$ et tout intervalle I, on considère l'événement :

$A_n^{(k)}(I) = \{$ $M \in \mathcal{H}_n(\mathbf{C})$ tel que M possède exactement k valeurs propres (comptées avec multiplicité) appartenant à I $\}$;

1. Montrer que :

$$\forall k \in \{1, ..., n\}, \quad \mathbb{E}_n\left(X_I^{(k)}\right) = \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} P_n\left(A_n^{(j)}(I)\right),$$

où on a posé : $\forall (j,k) \in \mathbf{N}^2$ avec $k \leqslant j$, $\displaystyle\binom{j}{k} = \frac{j!}{k!\,(j-k)!}$.

2. Soit $z \in \mathbf{C}$. Établir que :

$$Q_{n,I}(z) = 1 + \sum_{j=1}^{n} P_n\left(A_n^{(j)}(I)\right)\left[(1-z)^j - 1\right].$$

En déduire que :

$$\forall k \in \{0, ..., n\}, \quad P_n\left(A_n^{(k)}(I)\right) = \frac{(-1)^k}{k!} Q_{n,I}^{(k)}(1),$$

où $Q_{n,I}^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième de $Q_{n,I}$.

3. Démontrer que :

$$\forall z \in \mathbf{C}, \quad Q_{n,I}(z) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} z^k \int_{I^k} \det\left((K_n(\lambda_i, \lambda_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant k}\right) \mathrm{d}\mu(\lambda_1) \cdots \mathrm{d}\mu(\lambda_k).$$

Indication : *On pourra utiliser la relation (3).*

4. Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Démontrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\left[a/\sqrt{2n}, b/\sqrt{2n}\right]^k} \det\left((K_n(\lambda_i, \lambda_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant k}\right) \mathrm{d}\mu(\lambda_1) \cdots \mathrm{d}\mu(\lambda_k) \tag{4.12}$$

$$= \frac{1}{\pi^k} \int_{[a,b]^k} \det\left(\left(\frac{\sin(t_i - t_j)}{t_i - t_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant k}\right) \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_k.$$

Indication : *On admettra le résultat :* $\forall (a,b) \in \mathbf{R}^2$ *avec* $a < b$, $\displaystyle\sup_{\substack{(x,y) \in [a,b]^2 \\ n \in \mathbf{N}^*}} \left|\sqrt{\frac{\pi}{2n}} K_n\left(\frac{x}{\sqrt{2n}}, \frac{y}{\sqrt{2n}}\right)\right|$ *est fini et l'identité suivante :*

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad x \neq y \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}} K_n\left(\frac{x}{\sqrt{2n}}, \frac{y}{\sqrt{2n}}\right) = \frac{\sin(x-y)}{x-y},$$

qui sont conséquences des relations (4.3) et (4.4).

5. Montrer que la fonction $Q : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ donnée pour tout $z \in \mathbf{C}$ par :

$$Q(z) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{z}{\pi}\right)^k \int_{[a,b]^k} \det\left(\left(\frac{\sin(\lambda_i - \lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant k}\right) \mathrm{d}\lambda_1 \cdots \mathrm{d}\lambda_k$$

est bien définie et holomorphe sur $\mathbf{C}$.

Indication : *On pourra utiliser l'inégalité d'Hadamard* :

$$\forall S = (s_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant k} \in \mathcal{H}_k(\mathbf{C}), \quad |\det(S)| \leqslant \prod_{j=1}^{k} \sqrt{\sum_{i=1}^{k} |s_{i,j}|^2}.$$

6. Montrer que la suite de fonctions holomorphes $\left(Q_{n,[a/\sqrt{2n},b/\sqrt{2n}]}\right)_{n\geqslant 2}$ converge vers la fonction holomorphe Q dans $\mathcal{O}(\mathbf{C})$.
7. Prouver que pour tout $m \in \mathbf{N}$:
$$\lim_{n\to+\infty} P_n\left(A_n^{(m)}\left(\left[\frac{a}{\sqrt{2n}},\frac{b}{\sqrt{2n}}\right]\right)\right) = \frac{(-1)^m}{m!}Q^{(m)}(1).$$

PARTIE VI : Loi du demi-cercle.

Soit $z \in \mathbf{C}\backslash\mathbf{R}$, on désigne par $R_z^{(n)}$ la variable aléatoire définie sur $(\mathcal{H}_n(\mathbf{C}), P_n)$ par :
$$\forall M \in \mathcal{H}_n(\mathbf{C}), \quad R_z^{(n)}(M) = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}\left((zI_n - M)^{-1}\right).$$
On note $\mathbb{E}_n\left(R_z^{(n)}\right)$ son espérance et
$$G_n(z) = \sqrt{n}\mathbb{E}_n\left(R_{\sqrt{n}z}^{(n)}\right).$$
On considère v_n la mesure de probabilité sur $\mathbf{R}$ donnée par :
$$\mathrm{d}v_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}K_n\left(t\sqrt{n}, t\sqrt{n}\right)\ \varphi\left(t\sqrt{n}\right)\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que, pour tout segment $[a,b]$ de $\mathbf{R}$:
$$\mathbb{E}_n\left(\frac{1}{n}X^{(1)}_{[a\sqrt{n},b\sqrt{n}]}\right) = v_n([a,b]),$$
où la variable aléatoire $X_I^{(1)}$ est définie en début de partie V. Comment interpréter ce résultat ?
2. Prouver que :
$$\forall z \in \mathbf{C}\backslash\mathbf{R}, \quad G_n(z) = \int_{\mathbf{R}} \frac{\mathrm{d}v_n(t)}{z-t}.$$
Indication : *On pourra utiliser la question IV-4.*

La suite du problème fait intervenir des distributions. On note :
- $\mathcal{D}\left(\mathbf{R}^2\right)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^2$ à valeurs dans $\mathbf{C}$ à support compact ;
- $\mathcal{D}'\left(\mathbf{R}^2\right)$ l'ensemble des distributions sur $\mathbf{R}^2$.

Toute fonction $f : \mathbf{C}\backslash E \to \mathbf{C}$ (avec E est un ensemble de mesure nulle de $\mathbf{C}$) sera identifiée abusivement à la fonction
$$\widetilde{f} : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2\backslash E' & \to & \mathbf{C} \\ (x,y) & \mapsto & f(x+iy) \end{array}\right.$$
où l'on a posé :
$$E' = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \quad / \quad x+iy \in E\right\}.$$
En particulier, on notera $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ la fonction :
$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2\backslash\{(0,0)\} & \to & \mathbf{C} \\ (x,y) & \mapsto & \dfrac{1}{x+iy} \end{array}\right..$$

En outre, si $\widetilde{f}$ est localement intégrable sur $\mathbf{R}^2$, on identifiera alors f à une distribution sur $\mathbf{R}^2$ par :

$$\forall \psi \in \mathcal{D}\left(\mathbf{R}^2\right), \quad \langle f, \psi \rangle = \int_{\mathbf{R}^2} \psi(x,y) f(x+iy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Toute mesure de probabilité σ sur $\mathbf{R}$ sera identifiée à la distribution sur $\mathbf{R}^2$ donnée par :

$$\forall \psi \in \mathcal{D}\left(\mathbf{R}^2\right), \quad \langle \sigma, \psi \rangle = \int_{\mathbf{R}} \psi(t,0)\,\mathrm{d}\sigma(t).$$

Enfin, on considère la mesure de probabilité v définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\mathrm{d}v(t) = \frac{1}{\pi}\sqrt{2-t^2}\;\chi_{\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]}(t)\,\mathrm{d}t.$$

On rappelle que la fonction G est définie à la question III-2 et qu'on y démontre la relation suivante :

$$\forall z \in \mathbf{C}\setminus\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right], \quad G(z) = \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{z-t}\mathrm{d}v(t).$$

$\boxed{\text{On admet que } (G_n)_{n\geqslant 2} \text{ converge vers } G \text{ dans } \mathcal{O}(\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}).}$

3. Prouver qu'il existe un réel $c > 0$ tel que :

$$\forall R \in \mathbf{R}_+, \quad \forall t \in \mathbf{R}, \qquad \iint_{|x+iy|\leqslant R} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|(x+iy)-t|} \leqslant cR.$$

   En déduire que les fonctions $z \mapsto \dfrac{1}{z}$, G_n et G sont localement intégrables sur $\mathbf{R}^2$.

4. Démontrer que $(G_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers G dans $\mathcal{D}'\left(\mathbf{R}^2\right)$ c'est-à-dire que :

$$\forall \psi \in \mathcal{D}\left(\mathbf{R}^2\right), \quad \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbf{R}^2} G_n(x+iy)\,\psi(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbf{R}^2} G(x+iy)\,\psi(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

5. On définit l'opérateur $\overline{\partial}$ sur $\mathcal{D}\left(\mathbf{R}^2\right)$ par : $\overline{\partial} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$.

   Prouver l'égalité suivante dans $\mathcal{D}'\left(\mathbf{R}^2\right)$:

$$\overline{\partial}\left(\frac{1}{z}\right) = \pi\delta_{(0,0)},$$

   c'est-à-dire :

$$\forall \psi \in \mathcal{D}\left(\mathbf{R}^2\right), \quad -\iint_{\mathbf{R}^2} \frac{1}{x+iy}\overline{\partial}\psi(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi\psi(0,0).$$

6. Montrer qu'on a dans $\mathcal{D}'\left(\mathbf{R}^2\right)$:

$$\overline{\partial}G = \pi v \quad \text{et} \quad \overline{\partial}G_n = \pi v_n.$$

   En déduire que la suite de distributions $(v_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers v dans $\mathcal{D}'\left(\mathbf{R}^2\right)$.

   Indication : *On pourra remarquer que l'on a* $G_n = \dfrac{1}{z} * v_n$.

7. En déduire que pour tout segment $[a,b]$ de $\mathbf{R}$:

$$\lim_{n\to+\infty} v_n([a,b]) = v([a,b]).$$

   Interpréter ce résultat.

4.2 Rapport sur l'épreuve écrite d'analyse et probabilités

Rapport sur l'épreuve écrite d'analyse et probabilités

4.2.1 Matrices aléatoires

La théorie des matrices aléatoires étudie les propriétés probabilistes des matrices dont la taille tend vers $+\infty$ et dont les coefficients suivent la même loi tout en étant mutuellement indépendants. Voici quelques moments importants de cette théorie :

- Le statisticien Whishart effectue dans les années 1930 l'analyse probabiliste de matrices du type $\sum_{i=1}^{r} V_i\, {}^tV_i$ avec $\forall i \in \{1,..,r\}$, V_i une matrice colonne à n lignes dont les coefficients sont réels et suivent une loi gaussienne.
- Le fameux physicien Eugène Wigner (Prix Nobel 1963 et auteur du célèbre article : « la déraisonnable efficacité des mathématiques dans les sciences naturelles ») a constaté dans les années 1950 que les énergies des résonances de la diffusion des neutrons sur des noyaux lourds ont les mêmes propriétés statistiques que les valeurs propres d'un ensemble de matrices aléatoires (matrices aléatoires symétriques dont les coefficients suivent une loi gaussienne) *[dont la taille tend vers $+\infty$ comme le nombre de neutrons]*. Ce résultat fondamental a relancé la théorie des matrices aléatoires.
- Le mathématicien H.L. Montgomery et le physicien F.J. Dyson observent dans les années 1980 que la distribution des écarts (convenablement renormalisés) des zéros consécutifs de la célébrissime fonction zêta ($\zeta : z \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$ prolongée à $\mathbf{C}\setminus\{1\}$) est la même que la distribution des écarts (convenablement renormalisés) des valeurs propres consécutives des matrices hermitiennes dont les parties réelles et parties imaginaires des coefficients suivent une loi gaussienne.
- Le mathématicien D.V. Voiculescu établit dans les années 1990 des liens importants entre la théorie des algèbres d'opérateurs et la théorie des matrices aléatoires via la théorie des probabilités libres.
- Depuis les années 1990, les matrices aléatoires (rectangulaires) sont utilisées massivement dans les télécommunications modernes via les grands systèmes de communication sans fil multi-antennes (réseaux GSM (p antennes émettrices et q antennes réceptrices engendrent des matrices aléatoires de taille $p \times q$), etc).

4.2.2 Loi du demi-cercle et localisation spectrale

Le sujet aborde le cas des matrices aléatoires hermitiennes (dont les parties réelles et imaginaires des coefficients suivent la même loi normale $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2}\right)$ et sont mutuellement indépendants) et établit dans ce contexte deux résultats importants :

- La loi du demi-cercle obtenue initialement par Eugène Wigner et que l'on peut interpréter comme suit : Si $M \in \mathcal{H}_n(\mathbf{C})$ est une matrice aléatoire alors, en moyenne et lorsque n devient très grand, la proportion de valeurs propres de M situées dans l'intervalle $[a\sqrt{n}, b\sqrt{n}]$ vaut approximativement $\frac{1}{\pi} \int_{[a,b]\cap[-\sqrt{2},\sqrt{2}]} \sqrt{2-t^2}dt$.

  Ce résultat s'étend à de grandes classes de matrices aléatoires : les matrices symétriques réelles, les matrices unitaires complexes, etc. En outre, dans la théorie des probabilités libres elle joue un rôle analogue au théorème central limite des variables aléatoires réelles.
- La localisation des valeurs propres des matrices hermitiennes : Si $M \in \mathcal{H}_n(\mathbf{C})$ est une matrice aléatoire alors pour tout entier m, la probabilité que M possède m valeurs propres dans

l'intervalle $\left[\frac{a}{\sqrt{2n}}, \frac{b}{\sqrt{2n}}\right]$ vaut approximativement, lorsque n est très grand,

$$\sum_{k=m}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k-m)!\pi^k} \int_{[a,b]^k} \det\left(\left(\frac{\sin(\lambda_i - \lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant k}\right) \mathrm{d}\lambda_1 \cdots \mathrm{d}\lambda_k.$$

Ces deux résultats possèdent de nombreuses preuves. Nous avons choisi d'utiliser une stratégie accessible au niveau de l'agrégation et mélant des notions mathématiques variées et très riches.

4.2.3 Commentaires des correcteurs

Les parties abordées par la grande majorité des candidats sont les parties I, II, III (uniquement les questions 1 et 2) et IV (essentiellement la question 1). Les candidats de bon niveau traitent également la partie IV ainsi que la partie V. La partie VI est très peu abordée par les candidats sauf éventuellement la question 1. Voici les remarques précises des correcteurs par partie.

Partie I

- Les questions 3, 4 et 6 n'ont pas posé de difficulté particulière aux candidats.
- Si la question 1 est correctement traitée par une part importante des candidats, le jury est surpris d'observer qu'un nombre non négligeable de candidats à l'agrégation :
  - confond séries entières et développements limités ;
  - ne soit pas capable d'invoquer clairement et précisément que le produit de deux fonctions développables en série entière est développable en série entière ;
  - pense qu'une fonction de classe C^∞ est développable en série entière.
- Pour la question 2, il est surprenant de constater que le théorème de dérivation terme à terme des séries entières semble inconnu par une part importante des candidats ! Les explications sont souvent alambiquées et fausses (« la série converge uniformément ou normalement donc elle est dérivable terme à terme »). L'unicité des coefficients est assez souvent remplacée par une « identification » nébuleuse. Rappelons que la maîtrise des séries de fonctions et des séries entières est un attendu pour un candidat à l'agrégation.
- La question 5 est bien trop souvent formelle : l'intégration par parties généralisées n'est pas souvent justifiée, l'annulation du crochet non plus. Régulièrement, il est invoqué une itération sans qu'elle soit menée. Les candidats les plus consciencieux ont pensé à justifier l'existence des intégrales intervenants dans l'égalité et ont pensé à effectuer une récurrence.
- La question 7 est abordée par une minorité de copies et il s'agit essentiellement du cas $k = 0$. Pour le cas général, les stratégies sont variées (récurrence, dérivation sous l'intégrale, propriété de la transformée de Fourier). Une part importante des candidats ayant procédé par récurrence n'a pas traité le cas $k = 1$ ce qui s'avère indispensable compte tenu de la récurrence double vérifiée par la suite $(H_n)_n$.
- Seuls les meilleurs candidats traitent la question 8.

Partie II

- Une minorité des candidats ne répond pas à la question 1 ou donne une réponse fantaisiste voire n'ayant aucune sens. Rappelons que les espaces préhilbertiens sont un attendu de l'agrégation et que la projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie est une notion importante.
- Les questions 2 à 6 n'apportent pas de commentaires particuliers de la part du jury, elles ont joué le rôle de filtre selon le niveau des candidats
- Seuls les meilleurs candidats traitent la question 7.

Partie III

- Le jury est surpris que la question 1.a) soit si mal traitée par les candidats. La résolution, dans $\mathbf{C}$, de l'inéquation $1 - \dfrac{2}{z^2} < 0$ est confuse, les candidats sous-entendent que $z \in \mathbf{R}$ (voire pour certains faisant une étude de la fonction réelle $x \mapsto 1 - \dfrac{2}{x^2}$ ce qui est encore plus clair). Le jury est également surpris que l'égalité

$$\forall x \in \mathbf{R} \backslash \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right], \quad \Phi(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-2} & \text{si } x > \sqrt{2} \\ -\sqrt{x^2-2} & \text{si } x < -\sqrt{2} \end{cases}$$

semble très difficile à démontrer correctement par une majorité de candidats, l'expression $|x|$ ou l'égalité $\sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ apparaissant peu dans l'argumentaire !

- La question 1.b) n'est traitée correctement que par les meilleurs candidats.
- Pour la question 2, le théorème des résidus semble inconnu ou excessivement mal appliqué par l'immense majorité des candidats.
- Les questions 3 et 4 ne sont quasiment jamais abordées.

Partie IV

- La question 1 a joué un rôle de filtre et est correctement traitée par les candidats ayant un niveau convenable.
- Les questions 2 à 4 n'amènent pas de commentaires particuliers de la part du jury et sont traitées partiellement ou complètement par les candidats de niveau convenable.

Partie V

- Les questions 1 et 2 pouvaient être traitées par de multiples méthodes (niveau lycée par un raisonnement combinatoire, formule d'intégration de la partie précédente ou théorème du transfert). Etonnamment, seul une minorité de candidats a été capable d'y répondre.
- Les questions 3 à 5 et la question 7 sont traitées par les meilleurs candidats.
- La question 6 est abordée par quelques candidats.

Partie VI

Cette partie n'est quasiment jamais abordée sauf la question 1, traitée par un faible nombre de candidats.

4.3 Corrigé de l'épreuve écrite d'analyse et probabilités

Corrigé sujet Analyse Probabilités Agrégation externe 2015

PARTIE I : Polynômes d'Hermite.

1. (a) Pour tous réels x et t, on a : $e^{xt} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} t^n, \quad e^{-t^2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n}$ et le rayon de convergence de chacune vaut $+\infty$.

   (b) Soit $x \in \mathbf{R}$. Comme $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \psi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} e^{-2xt} e^{-t^2}$, ψ est développable en série entière avec un rayon infini comme le produit de deux telles fonctions.

   (c) Puisque ψ est développable en série entière en 0 avec un rayon de convergence infini, elle est égale à sa série de Taylor c'est-à-dire pour tout $(x,t) \in \mathbf{R}^2$:

$$\psi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\psi^{(n)}(0)}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \varphi^{(n)}(x)}{n!} t^n = \varphi(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n$$

$$\Leftrightarrow e^{2xt-t^2} = \frac{\psi(t)}{\varphi(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n.$$

2. Comme la fonction $t \mapsto e^{2xt-t^2}$ est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R = +\infty$, elle est C^∞ sur $\mathbf{R}$ et on peut la dériver terme à terme. En dérivant la relation (1) par rapport à t, on obtient :

$$2(x-t)e^{2xt-t^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{(n-1)!}t^{n-1} \Leftrightarrow 2(x-t)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{n!}t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_{n+1}(x)}{n!}t^n$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2xH_n(x)}{n!}t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2H_n(x)t^{n+1}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_{n+1}(x)}{n!}t^n$$

On conclut en remarquant que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)t^{n+1}}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_{n-1}(x)t^n}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nH_{n-1}(x)t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{nH_{n-1}(x)t^n}{n!}$$

et en utilisant l'unicité des coefficients d'une somme de série entière.

3. Il est immédiat que $H_0 = 1$, $H_1 = 2X$ et on démontre par récurrence double la propriété $(\mathcal{P}_n)$: « $H_n \in \mathbf{R}[X]$ et $\deg(H_n) = n$ ». Si a_n est le coefficient de degré n de H_n alors la relation de récurrence montre que $H_{n+1} \in \mathbf{R}[X]$ et $a_{n+1} = 2a_n$ donc $a_n = 2^n a_0 = 2^n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

4. On procède par récurrence simple en posant $(\mathcal{P}_n)$: « (3) est vraie pour l'entier n ».
Initialisation $(n = 1)$:

$$\frac{1}{2^1(1-1)!}\left(\frac{H_1(x)H_0(y) - H_0(x)H_1(y)}{x-y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2x-2y}{x-y}\right) = 1 = K_0(x,y) \Rightarrow (\mathcal{P}_1) \text{ est vraie.}$$

Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie pour un certain entier $n \in \mathbf{N}^*$ alors

$$\begin{aligned}
K_{n+1}(x,y) &= K_n(x,y) + \frac{H_n(x)H_n(y)}{2^n n!} && (4.13)\\
&= \frac{1}{2^n(n-1)!}\left(\frac{H_n(x)H_{n-1}(y) - H_{n-1}(x)H_n(y)}{x-y}\right) + \frac{H_n(x)H_n(y)}{2^n n!} && (4.14)\\
&= \frac{1}{2^n n!(x-y)}\left(H_n(x)nH_{n-1}(y) - H_{n-1}(x)H_n(y) + (x-y)H_n(x)H_n(y)\right) && (4.15)\\
&= \frac{1}{2^n n!(x-y)}(H_n(x)\left[yH_n(y) - \frac{1}{2}H_{n+1}(y)\right] - \left[xH_n(x) - \frac{1}{2}H_{n+1}(x)\right]H_n(y) && (4.16)\\
&\quad + (x-y)H_n(x)H_n(y)) && (4.17)\\
&= \frac{1}{2^{n+1}n!(x-y)}\left(H_{n+1}(x)H_n(y) - H_n(x)H_{n+1}(y)\right) \Rightarrow (\mathcal{P}_{n+1}) \text{ est vraie.}
\end{aligned}$$

5. Pour tout polynôme P, φP est continue sur $\mathbf{R}$, $\varphi(x)P(x) \underset{|x|\to+\infty}{=} o\left(e^{-|x|}\right)$ et $x \mapsto e^{-|x|}$ est intégrable sur $\mathbf{R}$ donc φP aussi. Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $A > 0$, une intégration par parties donne :

$$\int_{-A}^{A} \varphi^{(n)}P = \left[\varphi^{(n-1)}P\right]_{-A}^{A} - \int_{-A}^{A} \varphi^{(n-1)}P' \underset{A\to+\infty}{\Rightarrow}$$

$$\int_{\mathbf{R}} \varphi^{(n)}P = -\int_{\mathbf{R}} \varphi^{(n-1)}P' = (-1)^2\int_{\mathbf{R}} \varphi^{(n-2)}P^{(2)} = \cdots = (-1)^n\int_{\mathbf{R}} \varphi^{(0)}P^{(n)}.$$

6. En remplaçant à la question précédente P par H_m et en remarquant que $\varphi^{(n)} = (-1)^n H_n\varphi$, on obtient :
$\int_{\mathbf{R}} H_n(x)H_m(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathbf{R}} H_m^{(n)}\,\mathrm{d}\mu(x)$. On a $H_m^{(n)} = n!2^n\delta_{n,m}$ (car $\deg(H_m) = m < n$ alors $H_m^{(n)} = 0$ et $n = m$, $H_n^{(n)} = (\deg(H_n))! *$ coefficient dominant de $H_n = n!2^n$ donc $\int_{\mathbf{R}} H_n(x)H_m(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathbf{R}} n!2^n\,\delta_{n,m}\mathrm{d}\mu(x) = n!2^n\delta_{n,m}$.

7. En remplaçant x par $\sqrt{2}x$ dans cette dernière formule puis en effectuant le changement de variable $t = \frac{s}{\sqrt{2}}$, on obtient $e^{-x^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2/4} e^{-ixs} ds$. Or la transformée de Fourier vérifie la relation :

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}) \text{ (fonctions à décroissances rapides)}, \quad \forall k \in \mathbf{N}, \quad (\mathcal{F}(f))^{(k)} = (-i)^k \mathcal{F}\left(t \mapsto t^k f(t)\right)$$

et en choisissant la fonction $f : t \mapsto e^{-t^2/4} \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, on obtient la formule demandée.

8. En utilisant la formule établie à la question précédente et en utilisant le changement de variable $t = s\sqrt{2n}$, on a :

$$H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2n}}\right) = \frac{i^n e^{x^2/(2n)}}{2\sqrt{\pi}} \left(\sqrt{2n}\right)^{n+1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} s^n e^{-nt^2/2n} e^{-ixs}\,\mathrm{d}s = \frac{i^n e^{x^2/(2n)}}{2\sqrt{\pi}} \left(\sqrt{2n}\right)^{n+1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(se^{-s^2/2}\right)^n e^{-ixs}\,\mathrm{d}s$$

En utilisant la relation de Chasles ($\mathbf{R} = \mathbf{R}_- \cup \mathbf{R}_+$) et le changement de variable $t = -s$ dans l'intégrale sur $\mathbf{R}_-$, on obtient :

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(se^{-s^2/2}\right)^n e^{-ixs}\,\mathrm{d}s = \int\limits_{0}^{+\infty} \left(se^{-s^2/2}\right)^n e^{-ixs}\,\mathrm{d}s + (-1)^n \int\limits_{0}^{+\infty} \left(se^{-s^2/2}\right)^n e^{ixs}\,\mathrm{d}s.$$

Si l'on pose $g : t \in \mathbf{R}_+^* \mapsto \ln(t) - \frac{t^2}{2}$, on a $\int\limits_0^{+\infty} \left(se^{-s^2/2}\right)^n e^{-ixs} = \int\limits_0^{+\infty} e^{ng(t)} e^{-ixt} dt$. Il est aisé de constater que $t \mapsto e^{ixt}$ et g vérifient les hypothèses de la méthode de Laplace avec $u_0 = 1$ et $t_0 = 1$ ($g(t_0) = -\frac{1}{2}$, $g''(t_0) = -2$) donc

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{ng(t)} e^{-ixt} dt \underset{n \to +\infty}{=} \sqrt{\pi} e^{-ix} \frac{e^{-n/2}}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{e^{-n/2}}{\sqrt{n}}\right) \text{ et } \int\limits_0^{+\infty} e^{ng(t)} e^{ixt} dt \underset{n \to +\infty}{=} \sqrt{\pi} e^{ix} \frac{e^{-n/2}}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{e^{-n/2}}{\sqrt{n}}\right).$$

En remarquant que $e^{x^2/(2n)} = 1 + o(1)$, on en déduit la formule attendue.

PARTIE II : Projection orthogonale sur $\mathbf{R}_{n-1}[X]$.

1. Si on note $p(x)$ ce projeté alors $p(x) = \sum\limits_{k=1}^{p} \langle x, e_k \rangle_E e_k$.

2. $\left(L^2(\mathbf{R}, \mu), \langle , \rangle\right)$ est un préhilbert, $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $L^2(\mathbf{R},\mu)$.
$\left(\frac{H_k}{\|H_k\|}\right)_{0 \leqslant k \leqslant n-1} = \left(\frac{H_k}{\sqrt{2^k k!}}\right)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ est une famille orthonormée de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$, de cardinal $n = \dim(\mathbf{R}_{n-1}[X])$ donc c'est une base orthonormée de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ donc pour tout $f \in L^2(\mathbf{R},\mu)$:

$$\Pi_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\langle f, \frac{H_k}{\|H_k\|} \right\rangle \frac{H_k}{\|H_k\|} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{H_k(x)}{2^k k!} \int\limits_{\mathbf{R}} f(y) H_k(y)\,\mathrm{d}\mu(y) \underset{\text{de l'intégrale}}{\overset{\text{linéarité}}{=}} \int\limits_{\mathbf{R}} f(y) K_n(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y).$$

3. Un calcul direct nous donne :

$$\int\limits_{\mathbf{R}} K_n(x,y) K_n(y,z)\,\mathrm{d}\mu(y) = \left\langle \sum_{k=0}^{n-1} \frac{H_k(x)}{\|H_k\|^2} H_k, \sum_{l=0}^{n-1} \frac{H_l}{\|H_l\|^2} H_k(z) \right\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{H_k(x) H_k(z)}{\|H_k\|^2 \|H_l\|^2} \langle H_k, H_l \rangle$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1} \frac{H_k(x)\,H_k(z)}{\|H_k\|^2\,\|H_l\|^2}\delta_{k,l}\,\|H_k\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{H_k(x)\,H_k(z)}{\|H_k\|^2} = K_n(x,z) \quad (4.18)$$

$$\int_{\mathbf{R}} K_n(x,x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\|H_k\|^2}\langle H_k, H_k\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n.$$

4. (a) On a ${}^tBB = (d_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ avec $d_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} c_{i,k}b_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} b_{k,i}b_{k,j} = \sum_{k=1}^{n}\frac{H_{k-1}(t_i)}{\|H_{k-1}\|}\frac{H_{k-1}(t_j)}{\|H_{k-1}\|} = K_n(t_i,t_j)$ donc $A = {}^tBB$. On note L_i la $i^{\text{ème}}$ ligne du déterminant $\det\left(H_{i-1}(t_j)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ c'est-à-dire $L_i = \left(H_{i-1}(t_j)\right)_{1\leqslant j\leqslant n}$. D'après la question 3 de la partie I, pour tout entier $i \in \{0,..,n-1\}$, il existe un polynôme R_i tel que $H_i = 2^iX^i + R_i$ avec $\mathbf{R}_{i-1}[X] = \mathrm{Vect}(H_0,..,H_{i-1})$. En particulier, il existe des réels $a_0^{(i)},..,a_{i-1}^{(i)}$ tels que $R_{n-1} = \sum_{k=0}^{i-1} a_k^{(i)}H_k$.

En effectuant les opérations élémentaires $L_i \leftarrow L_i - \sum_{k=0}^{i-2} a_k^{(i-1)}H_k$ en commençant par $i = n$ puis $i = n-1$ et ainsi de suite jusqu'à $i = 2$, on obtient que :

$$\det\left(H_{i-1}(t_j)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \det\left(\left(2^{i-1}t_j^{i-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right) = \left(\prod_{i=1}^{n}2^{i-1}\right)\det\left(\left(t_j^{i-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right)$$
$$= 2^{n(n-1)/2}\det\left(\left(t_j^{i-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right).$$

(b) D'après la question précédente, on a : $\det\left(\left(K_n(t_i,t_j)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right) = \det\left({}^tB\right)\det(B) = \left(\det(B)\right)^2$. En utilisant la multilinéarité du déterminant et en posant $c_i = 2^{i-1}(i-1)!$, on a :

$$\det(B) = \det\left(\left(\frac{H_{i-1}(t_j)}{\sqrt{2^{i-1}(i-1)!}}\right)_{i,j}\right) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}\sqrt{c_i}}\det\left(\left(H_{i-1}(t_j)\right)_{i,j}\right) = \frac{1}{\sqrt{\prod_{i=1}^{n}c_i}}\det\left(\left(2^{i-1}t_j^{i-1}\right)_{i,j}\right) \quad (4.19)$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{n}2^{i-1}}{\sqrt{\prod_{i=1}^{n}2^{i-1}\prod_{i=0}^{n-1}i!}}\det\left(\left(t_j^{i-1}\right)_{i,j}\right) \underset{}{\overset{\text{Vandermonde}}{=}} \sqrt{\frac{2^{n(n-1)/2}}{\prod_{i=0}^{n-1}i!}}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(t_j - t_i) \text{ cqfd.}$$

5. Si ε est la signature, on a pour la matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ avec $a_{i,j} = H_{i-1}(t_j)$

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}a_{i,\sigma(i)} \Rightarrow \left(\det(A)\right)^2 = \sum_{(\sigma,\sigma')\in\mathcal{S}_n^2}\varepsilon(\sigma)\,\varepsilon(\sigma')\prod_{i=1}^{n}a_{\sigma(i),i}a_{\sigma'(i),i}.$$

puis en intégrant sur $\mathbf{R}^n$ relativement à la mesure $\mathrm{d}\mu(t_1)\ldots\mathrm{d}\mu(t_n)$ et en utilisant la formule de Fubini

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(t_1)\cdots f(t_n)\,\mathrm{d}\mu(t_1)\ldots\mathrm{d}\mu(t_n) = \prod_{i=1}^{n}\int_{\mathbf{R}} f(t_i)\,\mathrm{d}\mu(t_i)$$

(ce qui est licite car chaque fonction intervenant dans les intégrales sont intégrables sur le domaine considéré), on obtient :

$$\int_{\mathbf{R}^n}\left(\det\left(H_{i-1}(t_j)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right)^2\mathrm{d}\mu(t_1)\ldots\mathrm{d}\mu(t_n) = \sum_{(\sigma,\sigma')\in\mathcal{S}_n^2}\varepsilon(\sigma)\,\varepsilon(\sigma')\prod_{i=1}^{n}\underbrace{\left\langle H_{\sigma(i)-1}, H_{\sigma'(i)-1}\right\rangle}_{=0 \text{ si } \sigma(i-1)\neq\sigma'(i-1)}$$

$$= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)\,\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}\left\langle H_{\sigma(i)-1}, H_{\sigma(i)-1}\right\rangle \underset{\varepsilon^2=1}{=} \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\prod_{i=1}^{n}\left\langle H_{\sigma(i)-1}, H_{\sigma(i)-1}\right\rangle$$

car $\prod\limits_{i=1}^{n}\left\langle H_{\sigma(i)-1},H_{\sigma'(i)-1}\right\rangle \neq 0 \Leftrightarrow \forall i\in\{1,..,n\},\quad \left\langle H_{\sigma(i)-1},H_{\sigma'(i)-1}\right\rangle \neq 0 \Leftrightarrow \sigma(i)-1=\sigma'(i)-1 \Leftrightarrow \sigma=\sigma'$.

6. D'après la question précédente, en effectuant le changement de variable bijectif $j=\sigma(i)-1$, on a :

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n}\left(\det\left(H_{i-1}(t_j)\right)_{i,j}\right)^2 \mathrm{d}\mu(t_1)\ldots\mathrm{d}\mu(t_n) \underset{j=\sigma(i)}{=} \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\prod_{i=0}^{n-1}\langle H_i,H_i\rangle = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\prod_{i=0}^{n-1}2^i i! \ = n!2^{n(n-1)/2}\prod_{i=0}^{n-1}i!$$

D'autre part, à l'aide de la question 4, on peut écrire :

$$q_n(t_1,\ldots,t_n)=\frac{1}{n!}\det\left(K_n(t_i,t_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right)=\frac{1}{n!}(\det(B))^2=\frac{1}{n!2^{n(n-1)/2}\prod\limits_{i=1}^{n}(i-1)!}\left(\det\left(\left(H_{i-1}(t_j)\right)_{i,j}\right)\right)^2$$

$$=\underbrace{\frac{1}{2^{n(n-1)/2}\prod\limits_{i=0}^{n} i!}\left(\det\left(\left(H_{i-1}(t_j)\right)_{i,j}\right)\right)^2}_{=\alpha}=\frac{1}{2^{n(n-1)/2}\prod\limits_{i=1}^{n} i!}\left(2^{n(n-1)/2}\det\left(\left(t_j^{i-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right)\right)^2$$

$$=\underbrace{D_n\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(t_j-t_i)^2}_{=\beta}$$

En utilisant que $q_n=\alpha$ et la valeur de $\det\left(\left(H_{i-1}(t_j)\right)_{i,j}\right)$, on obtient : $\int\limits_{\mathbf{R}^n} q_n(t_1,\ldots,t_n)\,\mathrm{d}\mu(t_1)\ldots\mathrm{d}\mu(t_n)=1$. En utilisant cette formule et l'égalité $q_n=\beta$, on a :

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} D_n\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(t_j-t_i)^2\,\mathrm{d}\mu(t_1)\ldots\mathrm{d}\mu(t_n)=1$$

$$\Leftrightarrow D_n\int\limits_{\mathbf{R}^n}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(t_j-t_i)^2\,\frac{1}{\pi^{1/2}}e^{-t_1^2}\cdots\frac{1}{\pi^{1/2}}e^{-t_n^2}\,\mathrm{d}t_1\ldots\mathrm{d}t_n=1$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_{\mathbf{R}^n}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(t_j-t_i)^2\,e^{-\left(t_1^2+\cdots+t_n^2\right)}\,\mathrm{d}t_1\ldots\mathrm{d}t_n=\frac{\pi^{n/2}}{D_n}=\pi^{n/2}2^{-n(n-1)/2}\prod_{j=0}^{n}j!$$

7. En suivant l'indication proposée, on a :

$$\det\left(K_n(t_i,t_j)_{1\leqslant i,j\leqslant m}\right)=\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+m}K_n(t_k,t_m)\det\left(K_n(t_i,t_j)_{\substack{1\leqslant i\leqslant m \text{ et } i\neq k\\ 1\leqslant j\leqslant m-1}}\right).$$

Soit $k\in\{1,..,m-1\}$. On développe le mineur $\det\left(K_n(t_i,t_j)_{\substack{1\leqslant i\leqslant m \text{ et } i\neq k\\ 1\leqslant j\leqslant m-1}}\right)$ selon la dernière ligne de ce mineur de taille $m-1$ dont sa dernière ligne est de la forme $\left(K_n(t_m,t_l)\right)_{1\leqslant l\leqslant m-1}$ ce qui nous donne :

$$\det\left(K_n(t_i,t_j)_{\substack{1\leqslant i\leqslant m \text{ et } i\neq k\\ 1\leqslant j\leqslant m-1}}\right)=\sum_{l=1}^{m-1}(-1)^{l+m-1}K_n(t_m,t_l)\det\left(K_n(t_i,t_j)_{\substack{1\leqslant i\leqslant m-1 \text{ et } i\neq k\\ 1\leqslant j\leqslant m-1 \text{ et } j\neq l}}\right)$$

Par conséquent, on a :

$$\det\left(K_n(t_i,t_j)_{1\leqslant i,j\leqslant m}\right) = K_n(t_m,t_m)\det\left(K_n(t_i,t_j)_{\substack{1\leqslant i\leqslant m-1\\1\leqslant j\leqslant m-1}}\right) + \sum_{k=1}^{m-1}(-1)^{k+m}K_n(t_k,t_m)*$$

$$\det\left(K_n(t_i,t_j)_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ \text{et } i\neq k\\1\leqslant j\leqslant m-1}}\right) = K_n(t_m,t_m)\det\left(K_n(t_i,t_j)_{\substack{1\leqslant i\leqslant m-1\\1\leqslant j\leqslant m-1}}\right) + \sum_{k=1}^{m-1}\sum_{l=1}^{m-1}(-1)^{k+m}(-1)^{l+m-1}$$

$$*K_n(t_k,t_m)K_n(t_m,t_l)\det\left(K_n(t_i,t_j)_{\substack{1\leqslant i\leqslant m-1 \text{ et } i\neq k\\1\leqslant j\leqslant m-1 \text{ et } j\neq l}}\right)$$

En intégrant cette relation suivant t_m (relativement à la mesure μ) et en utilisant la question 3, on obtient :

$$\int_{\mathbf{R}}\det\left(K_n(t_i,t_j)_{1\leqslant i,j\leqslant m}\right)\mathrm{d}\mu(t_m) = n\det\left(K_n(t_i,t_j)_{\substack{1\leqslant i\leqslant m-1\\1\leqslant j\leqslant m-1}}\right) \tag{4.20}$$

$$-\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{l=1}^{m-1}(-1)^{k+l}\det\left(K_n(t_i,t_j)_{\substack{1\leqslant i\leqslant m-1 \text{ et } i\neq k\\1\leqslant j\leqslant m-1 \text{ et } j\neq l}}\right)K_n(t_k,t_l)$$

La formule suivante (obtenue par développement selon la dernière colonne) permet d'obtenir la formule souhaitée :

$$\det\left((K_n(t_i,t_j))_{\substack{1\leqslant i\leqslant m-1\\1\leqslant j\leqslant m-1}}\right) = \sum_{l=1}^{m-1}(-1)^{k+l}\det\left(K_n(t_i,t_j)_{\substack{1\leqslant i\leqslant m-1 \text{ et } i\neq k\\1\leqslant j\leqslant m-1 \text{ et } j\neq l}}\right)K_n(t_k,t_l).$$

PARTIE III : Holomorphie.

1. (a) Soit $z\in\mathbf{C}$ alors $1-\frac{2}{z^2}\in\mathbf{R}_-\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} z^2\in\mathbf{R}\\ 1\leqslant\frac{2}{z^2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} z^2\in\mathbf{R}_+\\ z^2\leqslant 2\end{array}\right.\Leftrightarrow z\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$. La fonction $z\mapsto 1-\frac{2}{z^2}$ étant holomorphe sur $\mathbf{C}\backslash\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$ à valeurs dans $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}_-$ et la fonction log étant holomorphe sur $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}_-$, on en déduit que Φ est holomorphe sur $\mathbf{C}\backslash\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$. La fonction log coïncidant sur $\mathbf{R}_+^*$ avec la fonction ln, on a :

$$\Phi(x) = x\sqrt{1-\frac{2}{x^2}} = x\sqrt{\frac{x^2-2}{x^2}} = x\frac{\sqrt{x^2-2}}{|x|} = \left\{\begin{array}{ll}\sqrt{x^2-2} & \text{si } x>\sqrt{2};\\ -\sqrt{x^2-2} & \text{si } x<-\sqrt{2}.\end{array}\right.$$

   (b) La fonction $F: Z\mapsto\exp\left(\frac{1}{2}\ln(1-2Z)\right)$ est holomorphe au voisinage de 0, elle admet donc un développement limité en 0 de la forme $F(Z)\underset{Z\to0}{=}F(0)+O(Z)\underset{Z\to0}{=}1+O(Z)$. Ainsi il existe $\alpha>0$ et $C>0$ tel que :

$$|Z|\leqslant\alpha\Rightarrow|F(Z)-1|\leqslant C|Z|\Rightarrow\left(|w|\geqslant\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\Rightarrow\left|F\left(\frac{1}{w^2}\right)-1\right|\leqslant\frac{C}{|w^2|}\underset{\times w}{\Leftrightarrow}|\Phi(w)-w|\leqslant\frac{C}{|w|}\right) \tag{4.21}$$

$$\forall R\geqslant\max\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}},|z|\right),\quad\forall w\in C(O,R),\quad\left|\int_{C(0,R)}\frac{\Phi(w)-w}{w-z}\mathrm{d}w\right| = \left|\int_{[0,2\pi]}\frac{\Phi\left(Re^{it}\right)-Re^{it}}{Re^{it}-z}iRe^{it}\mathrm{d}t\right| \tag{4.22}$$

$$\leqslant\int_{[0,2\pi]}\left|\frac{\Phi\left(Re^{it}\right)-Re^{it}}{Re^{it}-z}iRe^{it}\right|\mathrm{d}t\leqslant\int_{[0,2\pi]}\frac{\frac{C}{R}}{\left||Re^{it}|-|z|\right|}R\mathrm{d}t = \frac{2\pi C}{R-|z|}\underset{R\to+\infty}{\to}0.$$

2. Soit R_ε le rectangle proposé et $z \in \mathbf{C}\backslash\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$. La fonction $w \mapsto \frac{\Phi(w)}{w-z}$ étant holomorphe sur $\mathbf{C}\backslash\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$ sauf en $w=z$ et admet $\Phi(z)$ pour résidu en $w=z$, le théorème des résidus au contour $\Gamma_{R,\varepsilon}$ montre que :

$$\forall z \in \mathbf{C}\backslash\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right], \quad \int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} \frac{\Phi(w)}{w-z}\mathrm{d}w = 2\pi i\Phi(z) \Leftrightarrow \int\limits_{C(O,R)} \frac{\Phi(w)}{w-z}\mathrm{d}w - \int\limits_{R_\varepsilon} \frac{\Phi(w)}{w-z}\mathrm{d}w = 2\pi i\Phi(z)$$

$\boxed{\lim\limits_{R\to+\infty}}$ Pour tout $R>|z|$: $\int\limits_{C(O,R)} \frac{\Phi(w)-w}{w-z}\mathrm{d}w = \int\limits_{C(O,R)} \frac{\Phi(w)}{w-z}\mathrm{d}w - \int\limits_{C(O,R)} \frac{w}{w-z}\mathrm{d}w$ $= \int\limits_{C(O,R)} \frac{\Phi(w)}{w-z}\mathrm{d}w - 2\pi i z$. En utilisant la question précédente et en faisant tendre R vers $+\infty$, on obtient : $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_{C(0,R)} \frac{\Phi(w)}{w-z}\mathrm{d}w = 2\pi i z$.

$\boxed{\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}}$ On a $\forall z \in \mathbf{C}\backslash\mathbf{R}_-$, $\log(z) = \ln|z| + i\arg(z)$ avec $\arg(z)$ l'argument de z appartenant à $]-\pi,\pi[$. Soit $w \in \left[-\sqrt{2}-i\varepsilon, \sqrt{2}-i\varepsilon\right] \Leftrightarrow w = t - i\varepsilon$ avec $t \in \left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[\backslash\{0\}$, on a :

$$1-\frac{2}{(t-i\varepsilon)^2} = 1-\frac{2}{t^2}\times\frac{1}{\left(1-\frac{i\varepsilon}{t}\right)^2} = 1-\frac{2}{t^2}\left[1-\frac{2i\varepsilon}{t}+o(\varepsilon)\right] = 1-\frac{2}{t^2}+i\frac{4\varepsilon}{t^3}+o(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\left(1-\frac{2}{(t-i\varepsilon)^2}\right) \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} 1-\frac{2}{t^2} = \frac{t^2-2}{t^2} < 0 \text{ et } \mathrm{Im}\left(1-\frac{2}{(t-i\varepsilon)^2}\right) \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \frac{4\varepsilon}{t^3}\begin{cases} >0 \text{ si } \varepsilon t>0 \\ <0 \text{ si } \varepsilon t<0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0^+} \arg\left(1-\frac{2}{(t-i\varepsilon)^2}\right) = \begin{cases} \pi \text{ si } t>0 \\ -\pi \text{ si } t<0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon\to 0^+} \arg\left(1-\frac{2}{(t+i\varepsilon)^2}\right) = \begin{cases} -\pi \text{ si } t>0 \\ \pi \text{ si } t<0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0^+} \Phi(t-i\varepsilon) = \begin{cases} t\sqrt{2-t^2}\times\frac{1}{|t|}e^{-i\pi/2} = -i\sqrt{2-t^2} & \text{si } t>0 \\ t\sqrt{2-t^2}\times\frac{1}{|t|}e^{i\pi/2} = -i\sqrt{2-t^2} & \text{si } t<0 \end{cases} = -i\sqrt{2-t^2}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \Phi(t+i\varepsilon) = \begin{cases} t\sqrt{2-t^2}\times\frac{1}{|t|}e^{i\pi/2} = i\sqrt{2-t^2} & \text{si } t>0 \\ t\sqrt{2-t^2}\times\frac{1}{|t|}e^{-i\pi/2} = i\sqrt{2-t^2} & \text{si } t<0 \end{cases} = i\sqrt{2-t^2}$$

Il est aisé de vérifier que :

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_{-\sqrt{2}-\varepsilon-i\varepsilon}^{-\sqrt{2}-i\varepsilon} \frac{\Phi(w)}{w-z}dw = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_{\sqrt{2}-i\varepsilon}^{\sqrt{2}+\varepsilon-i\varepsilon} \frac{\Phi(w)}{w-z}dw = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_{-\sqrt{2}-\varepsilon+i\varepsilon}^{-\sqrt{2}+i\varepsilon} \frac{\Phi(w)}{w-z}dw = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_{\sqrt{2}+i\varepsilon}^{\sqrt{2}+\varepsilon+i\varepsilon} \frac{\Phi(w)}{w-z}dw = 0$$

(la fonction sous l'intégrale possède une limite quand $\varepsilon\to 0$ valant $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\Phi(t\pm i\varepsilon) = e^{i\theta}\sqrt{t^2-2}$ ave $\theta\in\mathbf{R}$ et l'intervalle a une longueur qui tend vers 0). Il est aisé de vérifier que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\Phi\left(\sqrt{2}+it\right)}{\sqrt{2}+it-z}dt =$ $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\Phi\left(-\sqrt{2}+it\right)}{-\sqrt{2}+it-z}dt = 0$ donc

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{R_\varepsilon}\frac{\Phi(w)}{w-z}\mathrm{d}w = i\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2-t^2}}{z-t}dt + i\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2-t^2}}{z-t}dt = 2i\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2-t^2}}{z-t}dt.$$

On conclut en faisant tendre R vers $+\infty$ et ε vers 0^+ dans la formule des résidus obtenue initialement.

3. (a) Soit $H_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{simplement}}{\to}} H_\infty$. Soit K un compact de $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}$, $\exists\alpha > 0$ tel que $\forall z \in K,\quad |\mathrm{Im}(z)| \geqslant \alpha \Rightarrow \forall (n,z) \in \mathbf{N}^* \times K$:

$$|H_n(z)| = \left|\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{z-t}\mathrm{d}\sigma_n(t)\right| \leqslant \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{|z-t|}\mathrm{d}\sigma_n(t) \leqslant \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{|\mathrm{Im}(z-t)|}\mathrm{d}\sigma_n(t)$$
$$= \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{|\mathrm{Im}(z)|}\mathrm{d}\sigma_n(t) \leqslant \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\alpha}\mathrm{d}\sigma_n(t) = \frac{1}{\alpha}.$$

<u>Preuve via Montel</u>. Ainsi la famille $(H_n)_{n\geqslant1}$ est uniformément bornée sur tout compact de $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}$ donc d'après le théorème de Montel, elle admet au moins une valeur d'adhérence dans $\mathcal{O}(\mathbf{C}\backslash\mathbf{R})$. Or $(H_n)_{n\geqslant1}$ ne possède qu'une valeur d'adhérence qui est H_∞ (la limite uniforme est la limite simple) donc la suite $(H_n)_{n\geqslant1}$ est convergente.
<u>Preuve via Ascoli.</u> On a :

$$|H_n(z) - H_n(z')| = |z'-z|\left|\int_{\mathbf{R}} \frac{\mathrm{d}\sigma_n(t)}{(z-t)(z'-t)}\right| \leqslant |z'-z|\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\alpha^2}\mathrm{d}\sigma_n(t) = \frac{|z'-z|}{\alpha^2}$$

On peut affirmer que la partie $\overline{\{H_n,\quad n \in \mathbf{N}^*\}}$ est fermée, bornée et équicontinue donc compacte dans $C^0(K,\mathbf{C})$ (d'après le théorème d'Ascoli) donc elle possède une valeur d'adhérence dans $C^0(K,\mathbf{C})$. Comme pour le cas Montel, on en déduit que $(H_n)_{n\geqslant1}$ converge vers H_∞ sur tout compact de $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}$ et sa limite est holomorphe (par convergence uniforme sur tout compact) donc $H_\infty \in \mathcal{O}(\mathbf{C}\backslash\mathbf{R})$ et $(H_n)_{n\geqslant1}$ converge vers H_∞ dans $\mathcal{O}(\mathbf{C}\backslash\mathbf{R})$.

(b) Soit $z \in i\mathbf{R}_+^*$, il existe $\beta > 0$ tel que $z = i\beta$. On a $(H_\infty(i\beta))^2 - 2i\beta H_\infty(i\beta) + 2 = 0 \Leftrightarrow H_\infty(i\beta) = i\left(\beta \pm \sqrt{\beta^2-2}\right)$

$$\text{et } \forall n \geqslant 1,\quad \underbrace{\mathrm{Im}(i\beta)}_{>0}\mathrm{Im}(H_n(i\beta)) < 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(H_n(i\beta)) > 0 \Rightarrow \mathrm{Im}(H_\infty(i\beta)) < 0 \Rightarrow \quad (4.23)$$

$$H_\infty(i\beta) = i\left(\beta - \sqrt{\beta^2-2}\right) \underset{\beta>0}{=} i\beta - i\beta\sqrt{1-\frac{2}{\beta^2}} = i\beta - i\beta\exp\left(\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{2}{\beta^2}\right)\right) = G(i\beta)$$

donc les fonctions G et H_∞ sont holomorphes sur $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}$ et coïncident sur $i\mathbf{R}_+^*$ donc elles sont égales sur $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}$.

PARTIE IV : Intégration et probabilités sur $\mathcal{H}_n(\mathbf{C})$.

1. Soit $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2+ia_3 \\ a_2-ia_3 & a_4\end{pmatrix} \in \mathcal{H}_2(\mathbf{C})$, on a : $\mathrm{Tr}(M^2) = a_1^2 + 2a_2^2 + 2a_3^2 + a_4^2$ donc

$$\frac{2}{\pi^2}\int_{U_{I_1\times I_2\times I_3\times I_4}} e^{-\mathrm{Tr}(M^2)}\mathrm{d}\omega_2(M) = \frac{2}{\pi^2}\int_{I_1\times I_2\times I_3\times I_4} e^{-\left(x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+x_4^2\right)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4$$
$$= \left(\int_{I_1}\frac{1}{\pi^{1/2}}e^{-x_1^2}\mathrm{d}x_1\right)\left(\int_{I_2}\frac{2^{1/2}}{\pi^{1/2}}e^{-2x_2^2}\mathrm{d}x_2\right)\left(\int_{I_2}\frac{2^{1/2}}{\pi^{1/2}}e^{-2x_3^2}\mathrm{d}x_3\right)\left(\int_{I_4}\frac{1}{\pi^{1/2}}e^{-x_4^2}\mathrm{d}x_4\right)$$
$$= \left(\int_{I_1}\frac{1}{\pi^{1/2}}e^{-x_1^2}\mathrm{d}x_1\right)\left(\int_{\sqrt{2}I_2}\frac{1}{\pi^{1/2}}e^{-x_2^2}\mathrm{d}x_2\right)\left(\int_{\sqrt{2}I_2}\frac{1}{\pi^{1/2}}e^{-x_3^2}\mathrm{d}x_3\right)\left(\int_{I_4}\frac{1}{\pi^{1/2}}e^{-x_4^2}\mathrm{d}x_4\right)$$

d'où $P\left(X\in U_{I_1,I_2,I_3,I_4}\right)=P\left(\left(X_1\in I_2\right)\cap\left(X_2\in\sqrt{2}I_2\right)\cap\left(X_3\in\sqrt{2}I_3\right)\cap\left(X_4\in I_4\right)\right)$. Si $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant 4}$ sont mutuellement indépendantes et qu'elles suivent la même loi normale $\mathcal{N}\left(0,\frac{1}{2}\right)$ alors pour tous intervalles $(I_k)_{1\leqslant k\leqslant 4}$ de $\mathbf{R}$:

$$P\left(X\in U_{I_1,I_2,I_3,I_4}\right)=P\left(X_1\in I_2\right)P\left(X_2\in\sqrt{2}I_2\right)P\left(X_3\in\sqrt{2}I_3\right)P\left(X_4\in I_4\right)$$

$$=\int\limits_{I_1}\frac{1}{\pi^{1/2}}e^{-x_1^2}\mathrm{d}x_1\int\limits_{\sqrt{2}I_2}\frac{1}{\pi^{1/2}}e^{-x_2^2}\mathrm{d}x_2\int\limits_{\sqrt{2}I_2}\frac{1}{\pi^{1/2}}e^{-x_3^2}\mathrm{d}x_3\int\limits_{I_4}\frac{1}{\pi^{1/2}}e^{-x_4^2}\mathrm{d}x_4=\frac{2}{\pi^2}\int\limits_{U_{I_1\times I_2\times I_3\times I_4}}e^{-\mathrm{Tr}\left(M^2\right)}\mathrm{d}\omega_2\left(M\right)$$

Réciproquement, si pour tous intervalles $(I_k)_{1\leqslant k\leqslant 4}$ de $\mathbf{R}$, on a :

$$P\left(X\in U_{I_1,I_2,I_3,I_4}\right)=\frac{2}{\pi^2}\int\limits_{U_{I_1\times I_2\times I_3\times I_4}}e^{-\mathrm{Tr}\left(M^2\right)}\mathrm{d}\omega_2\left(M\right).$$

En choisissant $I_2=I_3=I_4=\mathbf{R}$ alors pour tout intervalle I_1, on a :

$$P\left(X_1\in I_1\right)=P\left(X\in U_{I_1,\mathbf{R},\mathbf{R},\mathbf{R}}\right)=\int\limits_{I_1}\frac{1}{\pi^{1/2}}e^{-x_1^2}\mathrm{d}x_1$$

donc X_1 suit la loi $\mathcal{N}\left(0,\frac{1}{2}\right)$, de même avec X_2, X_3 et X_4. En outre, pour tous intervalles $(I_k)_{1\leqslant k\leqslant 4}$, on a :

$$P\left(\left(X_1\in I_2\right)\cap\left(X_2\in\sqrt{2}I_2\right)\cap\left(X_3\in\sqrt{2}I_3\right)\cap\left(X_4\in I_4\right)\right)=P\left(X\in U_{I_1,I_2,I_3,I_4}\right)=\int\limits_{I_1}\frac{1}{\pi^{1/2}}e^{-x_1^2}\mathrm{d}x_1$$

$$\int\limits_{I_2}\frac{1}{\pi^{1/2}}e^{-x_2^2}\mathrm{d}x_2\int\limits_{I_3}\frac{1}{\pi^{1/2}}e^{-x_3^2}\mathrm{d}x_3\int\limits_{I_4}\frac{1}{\pi^{1/2}}e^{-x_4^2}\mathrm{d}x_4=P\left(X_1\in I_2\right)P\left(X_2\in\sqrt{2}I_2\right)P\left(X_3\in\sqrt{2}I_3\right)P\left(X_4\in I_4\right).$$

2. Si on pose $M=(m_{k,l})_{1\leqslant k,l\leqslant n}\in\mathcal{H}_n\left(\mathbf{C}\right)$ avec $m_{k,l}=u_{k,l}+iv_{k,l}$ où $(u_{k,l},v_{k,l})\in\mathbf{R}^2$ pour tout $(k,l)\in\{1,..,n\}^2$. Il est immédiat que $v_{k,k}=0$ pour tout $k\in\{1,..,n\}$. On a $M=M^*$ donc :

$$\mathrm{Tr}\left(M^2\right)=\mathrm{Tr}\left(MM^*\right)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}|m_{k,l}|^2=\sum_{k=1}^{n}|m_{k,k}|^2+2\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}|m_{k,l}|^2=\sum_{k=1}^{n}u_{k,k}^2+2\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}\left(u_{k,l}^2+v_{k,l}^2\right).$$

$$\int\limits_{\mathcal{H}_n(\mathbf{C})}e^{-\mathrm{Tr}\left(M^2\right)}\mathrm{d}\omega_n\left(M\right)=\int\limits_{\mathbf{R}^{n^2}}\prod_{k=1}^{n}e^{-u_{k,k}^2}\mathrm{d}u_{k,k}\prod_{1\leqslant k<l\leqslant n}^{n}e^{-2u_{k,l}^2}\mathrm{d}u_{k,l}\prod_{1\leqslant k<l\leqslant n}^{n}e^{-2v_{k,l}^2}\mathrm{d}v_{k,l}$$

$$=\prod_{k=1}^{n}\int\limits_{\mathbf{R}}e^{-u_{k,k}^2}\mathrm{d}u_{k,k}*\prod_{1\leqslant k<l\leqslant n}^{n}\int\limits_{\mathbf{R}}e^{-2u_{k,l}^2}\mathrm{d}u_{k,l}\prod_{1\leqslant k<l\leqslant n}^{n}\int\limits_{\mathbf{R}}e^{-2v_{k,l}^2}\mathrm{d}v_{k,l}\ \text{(Fubini)}$$

$$=\prod_{k=1}^{n}\int\limits_{\mathbf{R}}e^{-u_{k,k}^2}\mathrm{d}u_{k,k}\prod_{1\leqslant k<l\leqslant n}^{n}\frac{1}{2^{1/2}}\int\limits_{\mathbf{R}}e^{-u_{k,l}^2}\mathrm{d}u_{k,l}\prod_{1\leqslant k<l\leqslant n}^{n}\frac{1}{2^{1/2}}\int\limits_{\mathbf{R}}e^{-v_{k,l}^2}\mathrm{d}v_{k,l}$$

$$=\prod_{k=1}^{n}\pi^{1/2}\prod_{1\leqslant k<l\leqslant n}^{n}\frac{\pi^{1/2}}{2^{1/2}}\prod_{1\leqslant k<l\leqslant n}^{n}\frac{\pi^{1/2}}{2^{1/2}}=\frac{\left(\pi^{1/2}\right)^{n+n(n-1)/2+n(n-1)/2}}{\left(2^{1/2}\right)^{n(n-1)/2+n(n-1)/2}}=\frac{\pi^{n^2/2}}{2^{n(n-1)/2}}.$$

Or $\forall M\in\mathcal{H}_n\left(\mathbf{C}\right)$, $\mathrm{Tr}\left(M^2\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k^2$ où $(\lambda_1,..,\lambda_n)$ sont les valeurs propres de M, on a par la formule de Weyl :

$$\int\limits_{\mathcal{H}_n(\mathbf{C})} e^{-\mathrm{Tr}\left(M^2\right)}\,\mathrm{d}\omega_n(M) = C_n \int\limits_{\mathbf{R}^n} e^{-\left(\lambda_1^2+\cdots+\lambda_n^2\right)} \left(\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (\lambda_j-\lambda_i)\right)^2 \prod_{i=1}^n \mathrm{d}\lambda_i$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi^{n^2/2}}{2^{n(n-1)/2}} = C_n \int\limits_{\mathbf{R}^n} \frac{\pi^{n/2}}{D_n} q_n(\lambda_1,..,\lambda_n) \prod_{i=1}^n \mathrm{d}\mu(\lambda_i) \underset{\text{Partie II. q 6}}{\Leftrightarrow} \frac{\pi^{n^2/2}}{2^{n(n-1)/2}} = \frac{C_n \pi^{n/2}}{D_n} \Leftrightarrow C_n = \frac{\pi^{n(n-1)/2}}{\prod\limits_{j=0}^{n} j!}.$$

3. La fonction $\phi : M \in \mathcal{H}_n(\mathbf{C}) \mapsto \frac{2^{n(n-1)/2}}{\pi^{n^2/2}} f(M)\, e^{-\mathrm{Tr}\left(M^2\right)} \in \mathbf{R}$ vérifie :

$$\forall V \in U(n,\mathbf{C}), \quad \forall M \in \mathcal{H}_n(\mathbf{C}), \quad \phi(VMV^*) = \phi(M)$$

car f la vérifie ainsi que $M \mapsto \mathrm{Tr}\left(M^2\right)$ (puisque $V^* = V^{-1}$ et que la trace est invariante par conjuguaison). En outre, on a $\mathrm{Tr}\left(M^2\right) = \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i^2$ où $(\lambda_1,..,\lambda_n)$ sont les valeurs propres (réelles d'après le théorème spectral) de M (comptées avec multiplicité). La fonction f étant bornée et la fonction $M \mapsto e^{-\mathrm{Tr}\left(M^2\right)}$ étant intégrable sur $\mathcal{H}_n(\mathbf{C})$, ϕ est intégrable sur $\mathcal{H}_n(\mathbf{C})$ et la formule de Weyl donne :

$$\int\limits_{\mathcal{H}_n(\mathbf{C})} \phi(M)\,\mathrm{d}\omega_n(M) = \frac{C_n}{D_n} \int\limits_{\mathbf{R}^n} g(\mathrm{diag}(\lambda_1,...,\lambda_n))\, q_n(\lambda_1,...,\lambda_n) \prod_{i=1}^n \mathrm{d}\lambda_i$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_{\mathcal{H}_n(\mathbf{C})} f(M)\,\mathrm{d}P_n(M) = \underbrace{\frac{C_n}{D_n}\frac{2^{n(n-1)/2}}{\pi^{n^2/2}}\pi^{n/2}}_{=1 \text{ question III.2}} \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(\mathrm{diag}(\lambda_1,...,\lambda_n))\, q_n(\lambda_1,...,\lambda_n) \prod_{i=1}^n \mathrm{d}\mu(\lambda_i)$$

Ainsi en posant $g : (\lambda_1,...,\lambda_n) \mapsto f(\mathrm{diag}(\lambda_1,...,\lambda_n))$, g est bornée (car f l'est). Si l'on note $h : (\lambda_1,..,\lambda_n) \in \mathbf{R}^n \mapsto \mathrm{diag}(\lambda_1,...,\lambda_n) \in \mathcal{H}_n(\mathbf{C})$ qui est continue donc mesurable. Ainsi $g = f \circ h$ est aussi mesurable pour la tribu borélienne (si $\mathcal{B}_{\mathbf{R}}$ est la tribu borélienne de $\mathbf{R}$ alors $\mathcal{C} = f^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbf{R}})$ est une tribu contenant la tribu borélienne de $\mathcal{H}_n(\mathbf{C})$ puisque f est mesurable donc l'image réciproque d'un ouvert est un borélien et la tribu borélienne est la plus petite tribu contenant les ouverts) donc $h^{-1}(\mathcal{C})$ est une tribu de $\mathbf{R}^d$ (car h est continue donc mesurable) contenant la tribu borélienne de $\mathbf{R}^d$ (même argument que pour f) donc $g^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbf{R}}) = h^{-1}\left(f^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbf{R}})\right) = h^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}_{\mathbf{R}^d}$ ce qui démontre la mesurabilité de g). Pour toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note p_σ l'endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ définie par : $\forall i \in \{1,..,n\}, \quad p_\sigma(e_i) = e_\sigma(i)$ où $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est la base canonique de $\mathbf{R}^n$ et P_σ sa matrice dans cette base. Il est immédiat que $P_\sigma \in \mathcal{U}_n(\mathbf{C})$ (ses colonnes forment une base orthonormale de $\mathbf{C}^n$ pour son produit scalaire hermitien canonique). En outre, pour tout $(\lambda_1,..,\lambda_n) \in \mathbf{R}^n$ et tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on a :

$$\begin{aligned} g\left(\lambda_{\sigma(1)},...,\lambda_{\sigma(n)}\right) &= f\left(\mathrm{diag}\left(\lambda_{\sigma(1)},...,\lambda_{\sigma(n)}\right)\right) = f\left(P_\sigma \mathrm{diag}(\lambda_1,...,\lambda_n) P_\sigma^*\right) \\ &= f(\mathrm{diag}(\lambda_1,...,\lambda_n)) = g(\lambda_1,...,\lambda_n). \end{aligned}$$

4. La fonction F_k vérifie : $\forall V \in U(n,\mathbf{C}), \quad \forall M \in \mathcal{H}_n(\mathbf{C}), \quad F_k(VMV^*) = F_k(M)$ car les spectres (comptés avec multiplicité) de M et $VMV^* = VMV^{-1}$ sont égaux et que la fonction $(\lambda_1,..,\lambda_n) \to \sum\limits_{1\leqslant i_1<....<i_k\leqslant n} \gamma(\lambda_{i_1})...\gamma(\lambda_{i_k})$ est invariante par permutation sur les indices (la somme considérée correspond à la $k^{\text{ème}}$ fonction symétrique "des racines" qui est invariante par permutation). D'après la question III. 3 et par définition de l'espérance, on a :

$$\mathbb{E}_n(F_k) = \int\limits_{\mathcal{H}_n(\mathbf{C})} F_k(M)\,\mathrm{d}P_n(M) = \sum_{1\leqslant i_1<....<i_k\leqslant n} \int\limits_{\mathbf{R}^n} \gamma(\lambda_{i_1})...\gamma(\lambda_{i_k})\, q_n(\lambda_1,...,\lambda_n) \prod_{i=1}^n \mathrm{d}\mu(\lambda_i).$$

Fixons $i_1 < \cdots < i_k$ des entiers de $\{1,..,n\}$, on note $\{1,..,n\} \setminus \{i_1,..,i_k\} = \{i_{k+1},..,i_n\}$. L'application
$\sigma : j \in \{1,..,n\} \mapsto i_j$ est clairement une permutation de $\{1,..,n\}$ et la fonction q_n étant invariante par permutation, on a pour tout $(\lambda_1,..,\lambda_n) \in \mathbf{R}^n$: $q_n(\lambda_1,..,\lambda_n) = q_n\left(\lambda_{\sigma(1)},..,\lambda_{\sigma(n)}\right) = q_n(\lambda_{i_1},..,\lambda_{i_n})$ donc :

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(\lambda_{i_1})...f(\lambda_{i_k})\, q_n(\lambda_1,...,\lambda_n) \prod_{i=1}^n \mathrm{d}\mu(\lambda_i) = \int_{\mathbf{R}^n} f(\lambda_{i_1})...f(\lambda_{i_k})\, q_n\left(\lambda_{i_1},..,\lambda_{i_k},\lambda_{i_{k+1}},..,\lambda_n\right) \prod_{i=1}^n \mathrm{d}\mu(\lambda_i)$$

$$= \int_{\mathbf{R}^k} f(\lambda_{i_1})...f(\lambda_{i_k}) \left(\int_{\mathbf{R}^{n-k}} q_n\left(\lambda_{i_1},..,\lambda_{i_k},\lambda_{i_{k+1}},..,\lambda_n\right) \mathrm{d}\mu\left(\lambda_{i_{k+1}}\right)\cdots \mathrm{d}\mu(\lambda_{i_n}) \right) \prod_{j=1}^k \mathrm{d}\mu\left(\lambda_{i_j}\right)$$

$$= \int_{\mathbf{R}^k} f(\lambda_1)...f(\lambda_k) \left(\int_{\mathbf{R}^{n-k}} q_n(\lambda_1,..,\lambda_k,\lambda_{k+1},..,\lambda_n)\, \mathrm{d}\mu(\lambda_{k+1})\cdots \mathrm{d}\mu(\lambda_n) \right) \prod_{i=1}^k \mathrm{d}\mu(\lambda_i)$$

car les variables d'intégration sont muettes. D'après les questions II.4 et II. 7, on a :

$$\int_{\mathbf{R}^{n-k}} q_n(\lambda_1,..,\lambda_n) \prod_{i=k+1}^n \mathrm{d}\mu(\lambda_i) = \int_{\mathbf{R}^{n-k}} \frac{\det\left(K_n(\lambda_i,\lambda_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right)}{n!} \prod_{i=k+1}^n \mathrm{d}\mu(\lambda_i)$$
$$= \frac{(n-k)!}{n!} \det\left(K_n(\lambda_i,\lambda_j)_{1\leqslant i,j\leqslant k}\right)$$

(pour cette dernière égalité, il suffit de faire une itération ou récurrence descendante sur k). On en déduit que :

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(\lambda_{i_1})...f(\lambda_{i_k})\, q_n(\lambda_1,...,\lambda_n) \prod_{i=1}^n \mathrm{d}\mu(\lambda_i)$$
$$= \frac{(n-k)!}{n!} \int_{\mathbf{R}^k} f(\lambda_1)...f(\lambda_k) \det\left(K_n(\lambda_i,\lambda_j)_{1\leqslant i,j\leqslant k}\right) \prod_{i=1}^k \mathrm{d}\mu(\lambda_i).$$

Ainsi dans l'expression de $\mathbb{E}_n(F_k)$, tous les termes ont la même valeur (celle-ci dessus) et la somme comporte $\binom{n}{k}$ termes (nombre de façons de sélectionner k éléments distincts parmi n) d'où le résultat demandé.

PARTIE V : Localisation du spectre.

1. Soit $M \in \mathcal{H}_n(\mathbf{C})$ et $\lambda_1,..,\lambda_n$ ses valeurs propres (comptées avec multiplicité). Le produit $\chi_I(\lambda_{i_1})...\chi_I(\lambda_{i_k})$ vaut 1 si et seulement si $(\lambda_{i_1},..,\lambda_{i_k}) \in I^k$ et 0 sinon. Ainsi $X_I^{(k)}$ représente le nombre de parties $\{i_1,..,i_k\}$ à k éléments de $\{1,..,n\}$ telles que $\{\lambda_{i_1},..,\lambda_{i_k}\} \subset I$. Si M possède exactement j valeurs propres (comptées avec multiplicité) appartenant à I alors $X_I^{(k)}(M) = \binom{j}{k}$ (nombre de parties à k éléments dans l'ensemble des j valeurs propres de M appartenant à I avec bien entendu $k \leqslant j$) et si cette égalité est vérifiée alors M admet nécessairement j valeurs propres (comptées avec multiplicité). Par conséquent, on a $X_I^{(k)}(\mathcal{H}_n(\mathbf{C})) = \left\{\binom{j}{k},\quad j \in \{k,..,n\}\right\}$ et d'après le théorème du transfert :

$$\mathbb{E}_n\left(X_I^{(k)}\right) = \sum_{j=k}^n \binom{j}{k} P\left(X_I^{(k)} = \binom{j}{k}\right) = \sum_{j=k}^n \binom{j}{k} P_n\left(A_n^{(j)}(I)\right).$$

2. On a $X_{I,z}(M) = \prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ \lambda_i\in I}} (1-z) = (1-z)^{\operatorname{card}\{i\in\{1,..,n\}\ /\ \lambda_i\in I\}}$. D'après le théorème de transfert, on a :

$$Q_{n,I}(z) = \mathbb{E}_n(X_{I,z}) = \sum_{j=0}^{n} P_n\left(A_n^{(j)}(I)\right)(1-z)^j = P_n\left(A_n^{(0)}(I)\right) + \sum_{j=1}^{n} P_n\left(A_n^{(j)}(I)\right)(1-z)^j \tag{4.24}$$

$$= 1 - \sum_{j=1}^{n} P\left(A_n^{(j)}(I)\right) + \sum_{j=1}^{n} P_n\left(A_n^{(j)}(I)\right)(1-z)^j = 1 + \sum_{j=1}^{n} P_n\left(A_n^{(j)}(I)\right)\left[(1-z)^j - 1\right].$$

Or d'après la formule de Taylor en 1, on a : $Q_{n,I}(z) = \sum_{j=0}^{n} \frac{Q_{n,I}^{(j)}(1)}{j!}(z-1)^j$. La famille $\left((X-1)^j\right)_{0\leqslant j\leqslant n}$ étant une base de $\mathbf{C}_n[X]$, on peut affirmer que $\forall j \in \{0,..,n\}$, $\frac{Q_{n,I}^{(j)}(1)}{j!} = (-1)^j P_n\left(A_n^{(j)}(I)\right)$ ce qui permet de conclure.

3. D'après question précédente et utilisant la question IV.4 avec la fonction $f = \chi_I$ qui est mesurable et bornée :

$$Q_{n,I}(z) = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k z^k \mathbb{E}_n\left(X_I^{(k)}\right) \tag{4.25}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{z^k}{k!} \int_{\mathbf{R}^k} \chi_I(\lambda_1)\cdots\chi_I(\lambda_k) \det\left(K_n(\lambda_i,\lambda_j)_{1\leqslant i,j\leqslant k}\right) \prod_{i=1}^{k} \mathrm{d}\mu(\lambda_i) \tag{4.26}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{z^k}{k!} \int_{I^k} \det\left(K_n(\lambda_i,\lambda_j)_{1\leqslant i,j\leqslant k}\right) \prod_{i=1}^{k} \mathrm{d}\mu(\lambda_i).$$

4. En utilisant le changement de variable $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant k} = \left(\frac{t_i}{\sqrt{2n}}\right)_{1\leqslant i\leqslant k}$ qui est clairement un C^1-difféomorphisme de $I_k = \left[\frac{a}{\sqrt{2n}}, \frac{b}{\sqrt{2n}}\right]^k$ sur $[a,b]^k$ et dont la jacobienne vaut $\frac{1}{\left(\sqrt{2n}\right)^k}$, on obtient :

$$\int_{I_k} \det\left(K_n(\lambda_i,\lambda_j)_{1\leqslant i,j\leqslant k}\right) \prod_{i=1}^{k} \mathrm{d}\mu(\lambda_i) = \int_{I_k} \det\left(K_n(\lambda_i,\lambda_j)_{1\leqslant i,j\leqslant k}\right) \frac{1}{\left(\pi^{1/2}\right)^k} e^{-\left(\lambda_1^2+\cdots+\lambda_k^2\right)} \prod_{i=1}^{k} \mathrm{d}\lambda_i$$

$$= \frac{1}{\pi^{k/2}} \int_{[a,b]^k} \det\left(K_n\left(\frac{t_i}{\sqrt{2n}}, \frac{t_j}{\sqrt{2n}}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant k}\right) e^{-\left(\lambda_1^2+\cdots+\lambda_k^2\right)/(2n)} \frac{1}{\left(\sqrt{2n}\right)^k} \prod_{i=1}^{k} \mathrm{d}\lambda_i$$

$$= \frac{1}{\pi^k} \int_{[a,b]^k} \det\left(\sqrt{\frac{\pi}{2n}} K_n\left(\frac{t_i}{\sqrt{2n}}, \frac{t_j}{\sqrt{2n}}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant k}\right) e^{-\left(\lambda_1^2+\cdots+\lambda_k^2\right)/(2n)} \prod_{i=1}^{k} \mathrm{d}\lambda_i$$

(par linéarité du déterminant). Tout entier $n \geqslant 1$, la fonction

$$(t_i)_{1\leqslant i\leqslant k} \mapsto \det\left(\left(\sqrt{\frac{\pi}{2n}} K_n\left(\frac{t_i}{\sqrt{2n}}, \frac{t_j}{\sqrt{2n}}\right)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant k}\right) e^{-\left(\lambda_1^2+\cdots+\lambda_k^2\right)/(2n)}$$

est continue et pour tout $(t_i)_{1\leqslant i\leqslant k} \in [a,b]^k$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \det\left(\sqrt{\frac{\pi}{2n}} K_n\left(\frac{t_i}{\sqrt{2n}}, \frac{t_j}{\sqrt{2n}}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant k}\right) e^{-\left(\lambda_1^2+\cdots+\lambda_k^2\right)/(2n)} = \det\left(\left(\frac{\sin(x-y)}{x-y}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant k}\right)$$

(par continuité du déterminant qui est une fonction polynôme en les coordonnées dans la base canonique de la matrice). Si on pose :

$$C = \sup_{\substack{(x,y)\in[-a,a]^2 \\ n\in\mathbf{N}^*}} \left|\sqrt{\frac{\pi}{2n}} K_n\left(\frac{x}{\sqrt{2n}}, \frac{y}{\sqrt{2n}}\right)\right|,$$

$$\forall\,(n,i,j) \in \mathbf{N}^* \times \{1,..,k\} \times \{1,..,k\}\,, \quad a_{i,j} = \sqrt{\frac{\pi}{2n}} K_n\left(\frac{t_i}{\sqrt{2n}}, \frac{t_j}{\sqrt{2n}}\right)$$

alors on dispose de la domination valable pour tout $(t_i)_{1\leqslant i\leqslant k} \in [a,b]^k$ et tout $n \geqslant 1$:

$$\left|\det\left((a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant k}\right)\, e^{-\left(\lambda_1^2+\cdots+\lambda_k^2\right)/(2n)}\right| = \left|\det\left((a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant k}\right)\right|\, e^{-\left(\lambda_1^2+\cdots+\lambda_k^2\right)/(2n)}$$

$$\leqslant \left|\det\left((a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant k}\right)\right| = \left|\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_k} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{k} a_{\sigma(i),i}\right| \leqslant \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_k} \prod_{i=1}^{k} |a_{\sigma(i),i}| \leqslant \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_k} \prod_{i=1}^{k} C = k!C^k$$

La fonction $(t_i)_{1\leqslant i\leqslant k} \mapsto k!C^k$ est indépendante de n et intégrable sur $[a,b]^k$ (car c'est compact de $\mathbf{R}^k$), le théorème de convergence dominée permet de conclure.

5. D'après l'inégalité des accroissements finis, on a : $\forall x \in \mathbf{R}^*$, $\left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \leqslant 1$. En posant : $\forall\,(i,j) \in \{1,..,n\}\,, \quad a_{i,j} = \frac{\sin(\lambda_i-\lambda_j)}{\lambda_i-\lambda_j}$, l'inégalité d'Hadamard montre que :

$$\left|\det\left((a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant k}\right)\right| \leqslant \prod_{j=1}^{k} \sqrt{\sum_{i=1}^{k} |a_{i,j}|^2} \leqslant \prod_{j=1}^{k} \sqrt{\sum_{i=1}^{k} 1} = \prod_{j=1}^{k} \sqrt{k} = k^{k/2}.$$

Par conséquent, pour $z \in \mathbf{C}$, on a :

$$\left|\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{z}{\pi}\right)^k \int\limits_{[a,b]^k} \det\left(\left(\frac{\sin(\lambda_i-\lambda_j)}{\lambda_i-\lambda_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant k}\right) \prod_{i=1}^{k} \mathrm{d}\lambda_i\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{k!}\left(\frac{|z|}{\pi}\right)^k \int\limits_{[a,b]^k} \left|\det\left(\left(\frac{\sin(\lambda_i-\lambda_j)}{\lambda_i-\lambda_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant k}\right)\right| \prod_{i=1}^{k} \mathrm{d}\lambda_i$$

$$\leqslant \frac{1}{k!}\left(\frac{|z|}{\pi}\right)^k \int\limits_{[a,b]^k} k^{k/2} \prod_{i=1}^{k} \mathrm{d}\lambda_i = \frac{1}{k!}\left(\frac{|z|\,(b-a)}{\pi}\right)^k k^{k/2}.$$

Si on pose $u_k = \frac{1}{k!}\left(\frac{|z|(b-a)}{\pi}\right)^k k^{k/2}$ et $c = \frac{|z|(b-a)}{\pi}$ alors pour $z \in \mathbf{C}^*$

$$\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \frac{c}{k+1}\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)^{1/2} \sqrt{k+1} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{c}{k} e^{1/2}\sqrt{k} = \frac{ce^{1/2}}{\sqrt{k}} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc, d'après le critère de D'Alembert, la série $\sum\limits_k u_k$ converge. Ainsi on a $u_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ quel que soit $z \in \mathbf{C}^*$ donc la suite $\left(\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{z}{\pi}\right)^k \int\limits_{[a,b]^k} \det\left(\left(\frac{\sin(\lambda_i-\lambda_j)}{\lambda_i-\lambda_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant k}\right) \mathrm{d}\lambda_1\cdots\mathrm{d}\lambda_k\right)_k$ aussi. D'après le lemme d'Abel, on peut affirmer que la série entière considérée a un rayon de convergence infini donc sa somme Q est une fonction dé finie et holomorphe sur $\mathbf{C}$.

6. Pour établir ce résultat, on va utiliser le théorème de convergence dominée sur $\mathbf{N}$ muni de la mesure de comptage v définie par : $\forall S \subset \mathbf{N}, \quad v(S) = \operatorname{card}(S)$ et pour $\alpha \in L^1(\mathbf{N},v)$ (i.e. une suite $(\alpha(k))_{k\in\mathbf{N}}) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ dont la série associée $\sum\limits_k \alpha(k)$ est absolument convergente), on pose $\int\limits_{\mathbf{N}} \alpha \mathrm{d}v = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \alpha(k))$. Soit $z \in \mathbf{C}$, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on considère la suite $u_z^{(n)} = \left(u_z^{(n)}(k)\right)_{k\in\mathbf{N}}$ définie par : $\forall k \in\mathbf{N}, \quad u_z^{(n)}(k) = \begin{cases} 1 \text{ si } k=0 \\ 0 \text{ si } k>n \end{cases}$ et pour tout $k \in \{1,..,n\}$,

$$u_z^{(n)}(k) = \frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{z}{\pi}\right)^k \int\limits_{[a,b]^k} \det\left(\sqrt{\frac{\pi}{2n}} K_n\left(\frac{t_i}{\sqrt{2n}}, \frac{t_j}{\sqrt{2n}}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant k}\right) e^{-\left(\lambda_1^2+\cdots+\lambda_k^2\right)/(2n)} \prod_{i=1}^k \mathrm{d}\lambda_i.$$

On introduit également la suite $u_z = (u_z(k))_{k\in\mathbf{N}}$ définie par : $u(0) = 1$ et $\forall k \geqslant 1$:

$$u_z(k) = \frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{z}{\pi}\right)^k \int\limits_{[a,b]^k} \det\left(\left(\frac{\sin(\lambda_i-\lambda_j)}{\lambda_i-\lambda_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant k}\right) \prod_{i=1}^k \mathrm{d}\lambda_i.$$

Pour tout $z \in \mathbf{C}$, on a : $Q_{n,\left[a/\sqrt{2n},b/\sqrt{2n}\right]}(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} u_z^{(n)}(k) = \int\limits_{\mathbf{N}} u_z^{(n)}(k)\,\mathrm{d}v(k)$ et $Q(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_z(k) = \int\limits_{\mathbf{N}} u_z(k)\,\mathrm{d}v(k)$. D'après la question IV. 4, on a : $\forall k \in\mathbf{N}, \quad \lim\limits_{n\to+\infty} u_z^{(n)}(k) = u_z(k)$. Soit $C = \sup\limits_{\substack{(x,y)\in[a,b]^2 \\ n\in\mathbf{N}^*}} \left|\sqrt{\frac{\pi}{2n}} K_n\left(\frac{x}{\sqrt{2n}}, \frac{y}{\sqrt{2n}}\right)\right|$. Pour tout entier $(n,k) \in \mathbf{N}^2$, en utilisant l'inégalité d'Hadamard, on a :

$$\left|u_z^{(n)}(k)\right| \leqslant \frac{|z|^k}{k!} \int\limits_{[a,b]^k} \left|\det\left(\sqrt{\frac{\pi}{2n}} K_n\left(\frac{t_i}{\sqrt{2n}}, \frac{t_j}{\sqrt{2n}}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant k}\right)\right| \mathrm{d}\lambda_1\cdots\mathrm{d}\lambda_k \tag{4.27}$$

$$\leqslant \frac{|z|^k}{k!} \int\limits_{[a,b]^k} \prod_{i=1}^k \sum_{i=1}^k C^2 \mathrm{d}\lambda_1\cdots\mathrm{d}\lambda_k = \frac{\left(|z|(b-a)C^2\right)^k}{k!} k^{k/2} = w_z(k).$$

En outre, $w_z \in L^1(\mathbf{N},v)$ d'après la question précédente. Le théorème de convergence dominée montre que :

$$\forall z \in \mathbf{C}, \quad \lim_{n\to+\infty} \int\limits_{\mathbf{N}} u_z^{(n)}(k)\,\mathrm{d}v(k) = \int\limits_{\mathbf{N}} u_z(k)\,\mathrm{d}v(k) \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} Q_{n,\left[a/\sqrt{2n},b/\sqrt{2n}\right]}(z) = Q(z)$$

Soit $R > 0$ et $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| \leqslant R$, on a

$$\left|Q_{n,\left[a/\sqrt{2n},b/\sqrt{2n}\right]}(z) - Q(z)\right| = \left|\int\limits_{\mathbf{N}} \left(u_z^{(n)}(k) - u_z(k)\right) \mathrm{d}v(k)\right| \leqslant \sup \int\limits_{\mathbf{N}} \left|u_z^{(n)}(k) - u_z(k)\right| \mathrm{d}v(k)$$

$$\leqslant \int\limits_{\mathbf{N}} \left|u_R^{(n)}(k) - u_R(k)\right| \mathrm{d}v(k)$$

Etant donné que la suite $\left(\int\limits_{\mathbf{N}} \left|u_R^{(n)}(k) - u_R(k)\right| \mathrm{d}v(k)\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est indépendante de z et tend vers 0, on en déduit la convergence de $Q_{n,\left[a/\sqrt{2n},b/\sqrt{2n}\right]}$ vers Q sur tout disque $\{z \in \mathbf{C}, \quad |z| \leqslant R\}$.

7. La suite de fonctions holomorphes $\left(Q_{n,\left[a/\sqrt{2n},b/\sqrt{2n}\right]}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers Q uniformément sur $\{z\in\mathbf{C},\quad |z|\leqslant 2\}$ donc tout entier m, la suite des dérivées $\left(Q^{(m)}_{n,\left[a/\sqrt{2n},b/\sqrt{2n}\right]}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $Q^{(m)}$ uniformément donc simplement sur $\{z\in\mathbf{C},\quad |z|\leqslant 2\}$. En particulier, pour tout entier m, on a :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} Q^{(m)}_{n,\left[a/\sqrt{2n},b/\sqrt{2n}\right]}(1) = Q^{(m)}(1) &\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}(-1)^m m! P_n\left(A_n^{(m)}\left(\left[\frac{a}{\sqrt{2n}},\frac{b}{\sqrt{2n}}\right]\right)\right) = Q^{(m)}(1) \quad (4.28)\\ &\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} P_n\left(A_n^{(m)}\left(\left[\frac{a}{\sqrt{2n}},\frac{b}{\sqrt{2n}}\right]\right)\right) = \frac{(-1)^m}{m!}Q^{(m)}(1)\end{aligned}$$

PARTIE VI : Loi du demi-cercle.

1. A l'aide de la question IV.3, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_n\left(\frac{1}{n}X^{(1)}_{[a\sqrt{n},b\sqrt{n}]}\right) &= \int_{[a\sqrt{n},b\sqrt{n}]}\frac{1}{n}K_n(\lambda_1,\lambda_1)\varphi(\lambda_1)\,\mathrm{d}\lambda_1\\ &\underset{\lambda_1=t\sqrt{n}}{=}\int_{[a,b]}\frac{1}{\sqrt{n}}K_n\left(t\sqrt{n},t\sqrt{n}\right)\varphi\left(t\sqrt{n}\right)\mathrm{d}t = \int_{[a,b]}\mathrm{d}v_n(t) = v_n([a,b]).\end{aligned}$$

2. Soient $z\in\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}$ et $M\in\mathcal{H}_n(\mathbf{C})$. Etant donné que pour tout $V\in\mathcal{U}_n(\mathbf{C})$, on a $V^*=V^{-1}$, on obtient :

$$\begin{aligned}R_z(VMV^*) &= \frac{1}{t}\mathrm{Tr}\left(zI_n - VMV^*\right)^{-1} = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}\left(zI_n - VMV^{-1}\right)^{-1} = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}\left(\left[V\left(zI_n-M\right)V^{-1}\right]^{-1}\right) \quad (4.29)\\ &= \frac{1}{n}\mathrm{Tr}\left(V\left(zI_n-M\right)^{-1}V^{-1}\right) = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}\left(\left(zI_n-M\right)^{-1}\right) = R_z(M).\end{aligned}$$

La fonction R_z est continue sur $\mathcal{H}_n(\mathbf{C})$ (car fractionnelle rationnelle en les coefficients de M et n'ayant pas de pôles dans $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}$ car toutes les valeurs propres de M sont réelles) et elle est bornée sur $\mathcal{H}_n(\mathbf{C})$ car pour toute matrice $M\in\mathcal{H}_n(\mathbf{C})$, le spectre de $(zI_n-M)^{-1}$ est $\left\{\frac{1}{z-\lambda_i},\quad i\in\{1,..,n\}\right\}$ où $\lambda_1,..,\lambda_n$ sont les valeurs propres de M (comptées avec multiplicité) donc :

$$|R_z(M)| = \frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^n\frac{1}{z-\lambda_i}\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{1}{|z-\lambda_i|} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{1}{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(|z-\lambda_i|)} = \frac{1}{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(|z-\lambda_i|)}.$$

En appliquant le résultat de la question III.3 avec la fonction $f: t\mapsto\frac{1}{\sqrt{n}z-t}$ qui est continue et bornée sur $\mathbf{R}$, on a :

$$\begin{aligned}G_n(z) = \sqrt{n}\mathbb{E}_n\left(R^{(n)}_{\sqrt{n}z}\right) &= \sqrt{n}\frac{1}{1!}\int_{\mathbf{R}^1}\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{n}z-\lambda_1}K_n(\lambda_1,\lambda_1)\varphi(\lambda_1)\,\mathrm{d}\lambda_1\\ &\underset{\lambda_1=t\sqrt{n}}{=}\int_{\mathbf{R}}\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{n}z-\sqrt{n}t}K_n\left(t\sqrt{n},t\sqrt{n}\right)\varphi\left(t\sqrt{n}\right)\mathrm{d}t = \int_{\mathbf{R}}\frac{1}{z-t}\mathrm{d}v_n(t).\end{aligned}$$

3. En passant aux coordonnées polaires, on a :

$$\iint_{|x+iy|\leqslant R}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|(x+iy)-t|} = \iint_{B(0,R)}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|(x+iy)-t|} = \iint_{B(-t,R)}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|x+iy|} = \iint_{B(-t,R)}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \iint_{B(-t,R)}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

Si $|t| \leqslant R$ alors $B(t,R) \subset B(0,2R)$ donc $\iint\limits_{B(-t,R)} \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \leqslant \iint\limits_{B(0,2R)} \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_0^{2R} \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\theta = 4\pi R.$
Si $|t| > R$ alors $B(-t,R) \subset B(0,|t|+R) \backslash B(0,|t|-R)$ et l'ensemble des angles polaires des éléments de $B(-t,R)$ vérifient si $t<0$:

$$\left(\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\text{ et } \frac{R}{t} \leqslant \tan(\theta) \leqslant -\frac{R}{t} \right) \Leftrightarrow \theta \in \left[\arctan\left(\frac{R}{t}\right), -\arctan\left(\frac{R}{t}\right) \right]$$

et si $t>0$:

$$\left(\theta \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[\text{ et } -\frac{R}{t} \leqslant \tan(\theta) \leqslant \frac{R}{t} \right) \Leftrightarrow \theta \in \left[\pi - \arctan\left(\frac{R}{t}\right), \pi + \arctan\left(\frac{R}{t}\right) \right].$$

Par conséquent, l'intervalle des angles polaires des éléments de $B(-t,R)$ est de longueur $2\left|\arctan\left(\frac{R}{t}\right)\right|$ donc :

$$\iint\limits_{B(-t,R)} \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \leqslant 2R * 2\left|\arctan\left(\frac{R}{t}\right)\right| = 4R\left|\arctan\left(\frac{R}{t}\right)\right| \leqslant 2\pi R$$

Ainsi $c = 4\pi$ convient. Pour tout compact K, il existe $R>0$ tel que $K \subset B(0,R)$ et $\frac{1}{z}$ est intégrable sur $B(0,R)$ donc sur K (il suffit de considérer $t=0$ dans l'inégalité précédente !).

$$\iint\limits_K |G(x+iy)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \iint\limits_{B(0,R)} |G(x+iy)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{B(0,R)} \left| \int\limits_{\mathbf{R}} \frac{1}{x+iy-t} \mathrm{d}v_n(t) \right| \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\leqslant \iint\limits_{B(0,R)} \int\limits_{\mathbf{R}} \frac{1}{|x+iy-t|} \mathrm{d}v_n(t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{\mathbf{R}} \left(\iint\limits_{B(0,R)} \frac{1}{|x+iy-t|} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}v_n(t) \leqslant \int\limits_{\mathbf{R}} cR\,\mathrm{d}v_n(t) = cR < +\infty$$

donc G est bien localement intégrable. Il en est rigoureusement de même pour v_n.

4. Soit K un compact de $\mathbf{R}^2$ et $\psi \in \mathcal{D}\left(\mathbf{R}^2\right)$ à support inclus dans K. On note $K' = K \cap (\mathbf{R} \times \{0\})$ qui est un compact de $\mathbf{R}$ donc il existe un segment $[\alpha,\beta]$ tel que K' est inclus strictement dans $[\alpha,\beta]$. On fixe $\eta>0$, on considère $N_\varepsilon = \left\lfloor \frac{\alpha}{\eta} \right\rfloor$ et $M_\varepsilon = \left\lfloor \frac{\beta}{\eta} \right\rfloor + 1$ alors $K' \subset \bigcup\limits_{k=N_\eta}^{M_\eta} B\left(k\eta, \frac{\eta}{2}\right)$ (il suffit de faire un petit dessin). On pose $K_\eta = K \cap \left(\bigcup\limits_{k=N_\eta}^{M_\eta} B\left(k\eta, \frac{\eta}{2}\right) \right)$ et $\|\varphi\|_\infty = \sup\limits_K |\varphi|$, alors pour tout entier n, on a :

$$\left| \int\limits_{K_\eta} G_n(x+iy)\,\varphi(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \right| \leqslant \int\limits_{K_\eta} |G_n(x+iy)\,\varphi(x,y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \|\varphi\|_\infty \int\limits_{K_\eta} |G_n(x+iy)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\leqslant \|\varphi\|_\infty \sum_{k=N_\eta}^{M_\eta} \int\limits_{B(k\eta,\eta/2)} |G_n(x+iy)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant 4\pi\|\varphi\|_\infty \eta + \eta \sum_{\substack{N_\eta \leqslant k \leqslant M_\eta \\ k \neq 0}} 2\pi \left| \arctan\left(\frac{2}{k}\right) \right|$$

$$\leqslant 4\pi\|\varphi\|_\infty \eta + 4\pi\|\varphi\|_\infty \eta \sum_{\substack{N_\eta \leqslant k \leqslant M_\eta \\ k \neq 0}} \frac{1}{|k|}.$$

On a (par comparaison série-intégrale) :

$$\eta \sum_{\substack{N_\eta \leqslant k \leqslant M_\eta \\ k \neq 0}} \frac{1}{|k|} = \eta O\left(\int\limits_1^{\max(|N_\eta|,|M_\eta|)} \frac{dt}{t} \right) = \eta O\left(\ln\left(|N_\eta| + |M_\eta|\right)\right) = \eta O(\ln(\eta)) \underset{\eta\to 0}{\to} 0$$

donc $\lim\limits_{\eta\to 0}\left|\int\limits_{K_\eta} G_n(x+iy)\,\varphi(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| = 0$. Soit $\varepsilon > 0$, $\exists \eta_\varepsilon > 0$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\left|\int\limits_{K_\eta} G_n(x+iy)\,\varphi(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant \varepsilon$. De même, on a $\left|\int\limits_{K_\eta} G(x+iy)\,\varphi(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant \varepsilon$. D'autre part, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_{K\backslash K_{\eta_\varepsilon}} G_n(x+iy)\,\varphi(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{K\backslash K_{\eta_\varepsilon}} G(x+iy)\,\varphi(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ en appliquant le théorème de convergence dominée puisque :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \forall x \in K\backslash K_{\eta_\varepsilon}, \quad |G_n(x+iy)| \leqslant \int\limits_{\mathbf{R}} \frac{\mathrm{d}v_n(t)}{|x+iy-t|} \leqslant \int\limits_{\mathbf{R}} \frac{\mathrm{d}v_n(t)}{|y|} = \frac{1}{|y|} \leqslant \sup_{y\in K\backslash K_\eta} \frac{1}{|y|} = M_{\eta_\varepsilon}$$

donc les fonctions $(G_n\varphi)_{n\in\mathbf{N}^*}$ sont uniformément bornées sur $K\backslash K_{\eta_\varepsilon}$ (qui est un ensemble borné). Par conséquent, il existe $N(\varepsilon) \in \mathbf{N}^*$ tel que :

$$\forall n \geqslant N(\varepsilon), \quad \left|\int\limits_{K\backslash K_{\eta_\varepsilon}} G_n(x+iy)\,\varphi(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int\limits_{K\backslash K_{\eta_\varepsilon}} G(x+iy)\,\varphi(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant \varepsilon \text{ donc}$$

$$\left|\int\limits_{\mathbf{R}^2} G_n(x+iy)\,\varphi(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int\limits_{\mathbf{R}^2} G(x+iy)\,\varphi(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant \left|\int\limits_{K_{\eta_\varepsilon}} G_n(x+iy)\,\varphi(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|$$

$$+\left|\int\limits_{K\backslash K_{\eta_\varepsilon}} G_n(x+iy)\,\varphi(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int\limits_{K\backslash K_{\eta_\varepsilon}} G(x+iy)\,\varphi(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| + \left|\int\limits_{K\backslash K_{\eta_\varepsilon}} G(x+iy)\,\varphi(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant \varepsilon + \varepsilon +$$

ce qui démontre que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_{\mathbf{R}^2} G_n(x+iy)\,\varphi(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{\mathbf{R}^2} G(x+iy)\,\varphi(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

5. Puisque $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$, on considère la fonction $\psi : (r,\theta) \mapsto \varphi(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ et on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial r} &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} * \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} * \frac{\partial y}{\partial r} = \cos(\theta)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi}{\partial\theta} &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} * \frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} * \frac{\partial y}{\partial\theta} = -r\sin(\theta)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + r\cos(\theta)\frac{\partial\varphi}{\partial y} \end{aligned} \tag{4.30}$$

donc

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -r\sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial r} \\ \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -r\sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial r} \\ \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\frac{\sin(\theta)}{r} \\ \sin(\theta) & \frac{1}{r}\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial r} \\ \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\frac{\partial\psi}{\partial r} - -\frac{\sin(\theta)}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \\ \sin(\theta)\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos(\theta)\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \end{pmatrix}$$

ce qui permet d'écrire :

$$2\overline{\partial}\varphi = \cos(\theta)\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{\sin(\theta)}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + i\left(\sin(\theta)\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos(\theta)\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) = e^{i\theta}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right).$$

A l'aide du changement de variable associé aux coordonnées polaires dans l'intégrale double considérée, on obtient :

$$\iint\limits_{\mathbf{R}^2} \frac{1}{x+iy}\overline{\partial}\varphi(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int\limits_{r=0}^{+\infty}\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{1}{re^{i\theta}}e^{i\theta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{i}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{r=0}^{+\infty}\int\limits_{0}^{2\pi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{i}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}\left(\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\partial\psi}{\partial r}\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta + \frac{i}{2r}\int\limits_{0}^{+\infty}\left(\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}r$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}\left(\int\limits_{0}^{+\infty}[\psi(r,\theta)]_{r=0}^{r\to+\infty}\right)\mathrm{d}\theta + \frac{i}{2r}\int\limits_{0}^{+\infty}\left([\psi(r,\theta)]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\right)\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}-\varphi(0,0)\,\mathrm{d}\theta + 0 = -\pi\varphi(0,0)$$

car $\theta \mapsto \psi(r,\theta)$ est 2π-périodique et pour tout $\theta \in [0,2\pi]$, on a : $\lim\limits_{r\to+\infty}\psi(r,\theta) = \lim\limits_{r\to+\infty}\varphi(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = 0$.

6. En utilisant la définition de la dérivation sur les distributions, on a :

$$\left\langle \overline{\partial}G,\psi\right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)G,\psi\right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle\frac{\partial}{\partial x}G,\psi\right\rangle + \frac{i}{2}\left\langle\frac{\partial}{\partial y}G,\psi\right\rangle \tag{4.31}$$

$$= -\frac{1}{2}\left\langle G,\frac{\partial\psi}{\partial x}\right\rangle - \frac{i}{2}\left\langle G,\frac{\partial}{\partial y}\psi\right\rangle = -\left\langle G,\overline{\partial}\psi\right\rangle = -\int\limits_{\mathbf{R}^2}\left(\int\limits_{\mathbf{R}}\frac{dv(t)}{x+iy-t}\right)\overline{\partial}\varphi(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4.32}$$

$$= -\int\limits_{\mathbf{R}}\left(\int\limits_{\mathbf{R}^2}\frac{1}{x+iy-t}\overline{\partial}\varphi(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}v(t) = \int\limits_{\mathbf{R}}\pi\varphi(t,0)\,\mathrm{d}v(t)$$

donc $\overline{\partial}G = v$. Le calcul est identique avec G_n et v_n. Puisque $(G_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers G dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ alors $\frac{\partial G_n}{\partial x}$ et $\frac{\partial G}{\partial y}$ convergent respectivement vers $\frac{\partial G}{\partial x}$ et $\frac{\partial G}{\partial y}$ donc $(\overline{\partial}G_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ vers $\overline{\partial}G$.

7. On notera $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}u_n$ (respectivement $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\,u_n$) la limite supérieure (respectivement limite inférieure) de la suite $(u_n)_n$. Pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$ telle que $\sup(\varphi_\varepsilon) = [a-\varepsilon,b+\varepsilon]\times[0,1]$ et $\varphi_\varepsilon = 1$ sur $[a,b]\times[0,1]$ et $0 \leqslant \varphi_\varepsilon \leqslant 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_{\mathbf{R}}\varphi_\varepsilon(t,0)\,dv_n(t) = \int\limits_{\mathbf{R}}\varphi_\varepsilon(t,0)\,dv(t)$ (car $v_n \underset{n\to+\infty}{\to} v$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$)

$$\forall n\in\mathbf{N}^*,\quad v_n([a,b]) = \int\limits_{[a,b]}dv_n(t) = \int\limits_{[a,b]}\varphi_\varepsilon(t,0)\,dv_n(t) \leqslant \int\limits_{\mathbf{R}}\varphi_\varepsilon(t,0)\,dv_n(t)$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l}\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}v_n([a,b])\\ \underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\,v_n([a,b])\end{array}\right. \leqslant \int\limits_{\mathbf{R}}\varphi_\varepsilon(t,0)\,dv(t) = \int\limits_{a-\varepsilon}^{b+\varepsilon}\varphi_\varepsilon(t,0)\,dv(t) \leqslant \int\limits_{a-\varepsilon}^{b+\varepsilon}dv(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{a-\varepsilon}^{b+\varepsilon}\sqrt{2-t^2}\chi_{[-\sqrt{2},\sqrt{2}]}(t)\,dt$$

puis en faisant tendre ε vers 0, on a :

$$\left\{\begin{array}{l}\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}v_n([a,b])\\ \underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\,v_n([a,b])\end{array}\right. \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_{a}^{b}\sqrt{2-t^2}\chi_{[-\sqrt{2},\sqrt{2}]}(t)\,dt = v([a,b]).$$

Pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\psi_\varepsilon\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$ telle que $\sup\psi_\varepsilon = [a,b]\times[0,1]$ et $\psi_\varepsilon = 1$ sur $[a+\varepsilon,b-\varepsilon]\times[0,1]$ et $0\leqslant\psi_\varepsilon\leqslant 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_{[a,b]}\psi_\varepsilon(t,0)\,dv_n(t) = \int\limits_{[a,b]}\psi_\varepsilon(t,0)\,dv(t)$ (car $v_n \underset{n\to+\infty}{\to} v$ dans

$\mathcal{D}'\left(\mathbf{R}^2\right)$). Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$v_n\left([a,b]\right) = \int\limits_{[a,b]} dv_n\left(t\right) \geqslant \int\limits_{[a,b]} \psi_\varepsilon\left(t,0\right) dv_n\left(t\right) = \int\limits_{\mathbf{R}} \psi_\varepsilon\left(t,0\right) dv_n\left(t\right)$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ puis ε vers 0, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} v_n\left([a,b]\right) \\ \underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} v_n\left([a,b]\right) \end{array} \right. \geqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_a^b \sqrt{2-t^2}\chi_{\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]}\left(t\right) dt = v\left([a,b]\right).$$

donc $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} v_n\left([a,b]\right) = \underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} v_n\left([a,b]\right) = v\left([a,b]\right)$ ce qui démontre la convergence de $\left(v_n\left([a,b]\right)\right)_n$ vers $v\left([a,b]\right)$.

Chapitre 5

Épreuves orales : Algèbre et Géométrie ; Analyse et Probabilités ; Mathématiques pour l'Informatique ; Informatique-Option D

5.1 Organisation des épreuves 2015

Tous les candidats tirent un couple de sujets. Le candidat est libre de choisir le sujet qui lui plaît.

Quelques rares candidats prennent des libertés quant au libellé de la leçon ; les titres des leçons définissent un champ clair qu'il faut traiter entièrement. **Le hors sujet est lourdement sanctionné**.

À l'issue de la période de préparation qui dure 3 heures durant laquelle le candidat dispose des livres de la bibliothèque de l'Agrégation ou de ses propres ouvrages s'ils ne sont pas imprimés par le candidat lui-même (avec un numéro ISBN et non annotés [1]) mais n'a pas accès à Internet (ni bien sûr à son téléphone portable ou tout autre objet électronique [2] !), le jury fait procéder à la photocopie des plans de la leçon préparés par les candidats.

Ces derniers sont manuscrits, comportent 3 pages A4 ***au maximum*** et possèdent une marge de 1 cm sur tous les côtés afin d'éviter tout problème lors de la photocopie. *Il est conseillé de ne pas utiliser de stylos de couleurs.* Il est en revanche conseillé de soigner la présentation du plan écrit, de mettre des titres, d'encadrer les formules, *etc.* pour qu'il soit le plus lisible possible. En particulier il est vain de vouloir écrire petit dans l'espoir de placer plus de contenu ; on perd en clarté et le jury n'est pas disposé à utiliser une loupe. Les plans peuvent être complétés par une quatrième page consacrée aux figures. Il faut noter clairement sur le plan les développements proposés.

1. Les rapports de jury de l'agrégation externe de mathématiques, complets et reliés sont autorisés. Concernant les ouvrages numériques avec ISBN, seuls les ouvrages disponibles dans le commerce sont autorisés. Tous les ouvrages personnels peuvent être interdits, lors de l'oral, sur simple décision du représentant du directoire présent lors de la préparation.
2. Les calculatrices ne sont pas autorisées, ni les clés USB, etc...

Le candidat *peut utiliser sa copie du plan pendant toute l'épreuve* et pourra utiliser les notes manuscrites produites durant la préparation, pendant la première phase de l'interrogation dite « présentation du plan ». Notons toutefois que le jury peut restreindre cette utilisation durant la période consacrée au développement, si le plan comporte lui-même trop de détails sur les développements proposés !

L'épreuve s'organise en trois temps, prévus pour une durée totale de 50 minutes environ : une présentation de la leçon éventuellement suivie d'une brève discussion, un développement de 15 minutes maximum et enfin une partie consacrée au dialogue et aux questions.

Le jury ne cherche pas à déstabiliser le candidat pendant l'épreuve.

5.1.1 Première partie : présentation de la leçon

Le candidat est convié à utiliser son temps de parole, **6 minutes maximum**, pour présenter, argumenter, mettre en valeur et faire une synthèse de sa leçon.

Il existe maintenant de nombreux plans *tout faits* disponibles dans la littérature, plus ou moins pertinents, de plus ou moins grande valeur. Il est naturel que les candidats s'inspirent de sources de qualité et, d'une certaine manière le choix de ces sources, la capacité à s'en affranchir ou à pleinement se les approprier, participent au regard que le jury peut porter sur leur maturité scientifique. Cependant, il est bien entendu que l'objectif de cette partie de l'épreuve n'est pas de juger la capacité à simplement recopier un plan, ni à la réciter par cœur d'ailleurs. Il s'agit d'une épreuve *orale* et le document transmis au jury est une base de discussion et un fil conducteur qui servira au jury pour mener la partie consacrée aux dialogue et questions.

En particulier, chercher à remplir à tout prix les 3 feuilles autorisées, surtout avec des éléments que le candidat ne maîtrise manifestement pas, ne constitue en rien une stratégie payante.

Le plan écrit n'est ni une énumération de paragraphes, ni un cours ou un exposé complet avec développement des démonstrations. Il définit toutefois avec suffisamment de précision les notions mathématiques introduites, donne les *énoncés complets des résultats fondamentaux*, notamment sur les hypothèses, cite des exemples et des applications.

La formalisation mathématique et le français doivent être soignés, mais bien évidemment il ne s'agit pas d'un texte destiné à être publié dans une revue internationale.

De manière générale le jury conseille vivement aux candidats de soigner tant leurs écrits que leur expression orale, car c'est une compétence professionnelle importante du métier d'enseignant.

L'exposé oral qui consiste à relire simplement ce qui est écrit n'a pas beaucoup d'intérêt, le candidat se contente trop souvent d'une présentation linéaire, sans expliquer ou mettre en valeur les articulations du plan, ni faire ressortir les méthodes ou les résultats importants de la leçon.

En fait, le candidat devrait s'imaginer dans la situation où il doit introduire à un auditoire, pendant 6 minutes, une leçon destinée ensuite à être développée sur plusieurs séances. Quel est l'intérêt du sujet ? Comment se positionne-t-il dans un paysage mathématique plus large ? Comment s'articulent les différentes sections qui composent la leçon ? Comment s'expliquent et se motivent les enchaînements ? C'est l'occasion de s'interroger sur les difficultés didactiques de la leçon, c'est-à-dire dans quel ordre et comment présenter les choses pour que le tout soit cohérent, compréhensible et pédagogiquement efficace. En quoi les exemples sélectionnés s'avèrent-ils pertinents ? Quelles figures illustrent particulièrement les notions en jeu ?

Autrement dit, le jury attend une argumentation synthétique de la construction de la leçon.

Le plan doit être maîtrisé, c'est-à-dire que les résultats exposés doivent être compris ainsi que l'organisation d'ensemble. Il est souhaitable que le candidat connaisse dans leurs grandes lignes les démonstrations des résultats figurant au programme du concours : le jury pourra appliquer ce critère pour évaluer la maîtrise du plan.

C'est au candidat de circonscrire son plan, notamment en ce qui concerne les énoncés débordant largement le cadre du programme. Il peut être bon aussi de préciser, lors de la présentation orale, le niveau auquel s'adresse le candidat.

Le jury ne cherche pas des plans absolument originaux, le plus important est que le plan soit bien structuré, maîtrisé par le candidat et qu'y figure une quantité substantielle d'exemples et de mathématiques. La plan écrit ne peut pas être une suite de banalités sur des sujets généraux mais doit aborder suffisamment profondément les mathématiques sous-jacentes à la leçon.

Il s'agit d'une épreuve orale, il est donc inutile de recopier le plan au tableau, dans la mesure où le jury possède une copie du texte. Toutefois l'usage du tableau (blanc ou à craie selon la configuration des salles) comme support pédagogique peut être efficace. Durant cette partie de l'épreuve, le candidat n'hésitera donc pas à exploiter son tableau afin de préciser son propos et de le rendre plus vivant.

La présentation orale, la qualité d'expression, la compréhension synthétique, la plus-value de l'exposé par rapport au plan écrit, la capacité du candidat à intéresser son auditoire sur une leçon donnée, constituent des éléments importants d'évaluation.

Insistons sur le fait que la recopie de plans disponibles sur Internet ou dans des livres spécialisés ne constitue pas un travail suffisant de préparation du concours. Ainsi, au-delà de l'exploitation d'ouvrages de référence, qui n'a rien de condamnable, le jury attend que le candidat fasse preuve d'un investissement personnel sur le sujet.

L'exposé oral ne peut être maîtrisé s'il ressemble à une récitation. Bien entendu, ceci ne s'improvise pas et le discours doit avoir été réfléchi durant la préparation de l'épreuve.

À la fin de cette présentation de la leçon, le jury peut éventuellement questionner très brièvement le candidat. On peut aborder quelques points techniques, sans entrer dans des détails qui retarderaient le début du développement.

5.1.2 Deuxième partie : le développement

Le jury veille à la cohérence du plan et des propositions de développements eu égard au niveau du candidat.

Il est souhaitable que le candidat recherche une adéquation entre son niveau intrinsèque et les développements proposés. Un candidat ne sera pas avantagé s'il présente un développement non maîtrisé, mal compris ou exposé trop rapidement. Il faut toutefois veiller à rester au niveau de l'Agrégation ; les développements de niveau d'une classe de Terminale ou d'une première année post-bac ne peuvent constituer une proposition acceptable.

Le jury demande au candidat de présenter *deux développements au moins*. Ceux-ci doivent être clairement mentionnés sur le plan écrit et non pas vaguement évoqués à l'oral. Dans cet esprit, le candidat motivera soigneusement le choix des développements qu'il propose, expliquant en quoi il estime que ces résultats ou énoncés sont centraux ou jouent à ses yeux un rôle particulier sur le sujet.

Le candidat doit aussi préciser, sur son plan écrit, ce qu'il va démontrer et, le cas échéant, les résultats de son plan qu'il va admettre pour mener à bien son développement.

Le candidat dispose de 15 minutes (maximum) pour le mener à bien. Le jury demande au candidat de bien gérer son tableau, en particulier le candidat doit demander aux membres du jury l'autorisation d'effacer. Le jury souhaite, dans la mesure du possible, que le candidat efface le moins possible le tableau pendant cette période.

Lors du développement, le jury attend du candidat des explications sur les démonstrations et sur l'utilisation pertinente des notions développées durant l'exposé oral ; il peut être opportun, lors du développement, de se référer explicitement au plan présenté.

Trop peu de candidats commencent leur développement par une rapide exposition des grandes idées ou des étapes qui le composent. Le jury aimerait avoir une petite explication de la démarche au début du développement. Il est inutile de se précipiter ou de parler trop vite ; on veillera au contraire à préciser ses notations, à soigner sa présentation, à placer sa voix et à regarder de temps en temps le jury !

Le développement ressemble parfois à une succession plus ou moins convaincante de résultats intermédiaires *ad hoc*. La récitation d'un développement est lourdement sanctionnée ; le jury veille à ce que les futurs enseignants comprennent ce qu'ils exposent et sachent exposer ce qu'ils comprennent. C'est une qualité essentielle d'un futur agrégé.

On ne saurait trop conseiller aux candidats d'illustrer leur développement (et éventuellement leur plan) par un ou plusieurs dessins : l'exposé y gagnerait en clarté pour le jury, le candidat pourrait ainsi montrer un souci louable de pédagogie.

Rappelons que le développement doit être en rapport avec le sujet traité, la leçon présentée et le plan écrit. Tout hors-sujet est sévèrement sanctionné. L'utilisation d'un résultat non présent dans le plan écrit doit être explicitement signalée par le candidat. Toute utilisation d'un lemme non démontré et enfermant l'essence de la démonstration est sanctionnée. Le jury peut exiger la démonstration d'un lemme, soit-disant admis, si celui-ci est essentiellement le cœur du développement. Il faut éviter de présenter ou d'utiliser un résultat préliminaire ou intermédiaire sans explication convaincante. Dans le cas d'un développement ambitieux, il ne faut pas négliger les cas élémentaires et les détails utiles à la compréhension du jury.

Comme mentionné précédemment, le candidat *peut utiliser sa copie du plan pendant toute l'épreuve* et ses notes manuscrites produites durant la préparation, uniquement durant la première phase de l'interrogation dite « présentation de la leçon », mais il ne pourra les utiliser pendant le développement.

Enfin, même si le jury laisse évoluer le candidat durant son développement, en intervenant le moins possible, il peut, en cas de lacunes ou d'erreurs manifestes, interrompre le candidat pour demander des explications. Cette intervention ne donne pas droit à une extension du temps consacré au développement.

La pertinence des explications, le souci pédagogique, la capacité à mener à bien et complètement le sujet dans le temps imparti, l'aisance technique sont des éléments importants d'appréciation. Par ailleurs, le candidat doit s'attendre à être interrogé lors de la période de discussion sur des applications ou illustrations élémentaires de son développement. Il est donc essentiel qu'il soit capable de reconnaître dans une question donnée un cas particulier simple du résultat général qu'il vient d'exposer.

5.1.3 Troisième partie : questions et dialogue

Le jury vérifie systématiquement la maîtrise approfondie du plan présenté. Ainsi, une part importante de la discussion portera sur le plan, ou trouvera sa source dans le plan présenté par le candidat. De manière générale, le candidat doit éviter de placer la leçon à un niveau trop ambitieux qu'il serait incapable de maîtriser.

Pour assimiler les notions il faut, durant l'année de préparation, se demander si on est capable de les mettre en œuvre sur des exemples simples et, pour certains théorèmes, si on a réfléchi à des exemples ou des contre-exemples. Le candidat doit être conscient que, s'il met un énoncé dans son plan, il doit se préparer à des questions élémentaires voire considérées comme évidentes auxquelles il doit répondre avec précision, et à des calculs éventuels sur ce point.

Une fois de plus, insistons sur le fait qu'il est essentiel de bien maîtriser ce que l'on propose.

Le jury pose aussi des exercices en rapport direct avec la leçon, mais ne s'attend pas à ce que le candidat trouve une solution immédiatement. Le but est plutôt de voir évoluer le futur agrégé dans une démarche scientifique rigoureuse et méthodique. Le candidat doit réfléchir, utiliser son plan et rattacher l'exercice à sa leçon. Le fait de ne pas résoudre un exercice ne doit pas être compris comme un échec et le candidat ne doit pas se décourager. *Il doit au contraire rester attentif aux suggestions du jury* ; la qualité du dialogue, les réponses aux questions, l'utilisation du plan écrit et l'écoute dont le candidat fait preuve sont des éléments importants de notation.

Pendant cette discussion le jury veille à laisser un temps raisonnable au candidat pour réfléchir, sans le submerger de questions.

Rappelons que l'objet du concours est de recruter de futurs enseignants, le jury peut donc aussi comme l'indique l'article 8 de l'arrêté du 25 juillet 2014, poser toutes questions utiles pour juger de la capacité des candidats à occuper de tels postes.

5.2 Rapport détaillé sur les épreuves orales

Le jury suggère la lecture des rapports de ces cinq dernières années. Les commentaires précis sur les leçons y restent d'actualité.

Voici quelques remarques concernant certaines leçons de la session 2015, reprenant pour partie les commentaires des années précédentes. Les candidats sont invités à étendre ces commentaires aux leçons non commentées.

Les candidats de l'option D consulteront la liste *ad hoc* des titres (repérés par un numéro unique) reprenant ceux de l'oral des options A, B, C, en algèbre et analyse.

5.2.1 Leçons d'Algèbre et Géométrie

Voici quelques remarques concernant certaines leçons de la session 2015, reprenant en partie les commentaires des années précédentes. Les candidats sont invités à étendre ces commentaires aux leçons non commentées.

En règle générale, le jury apprécie que les candidats soient capables d'appliquer les résultats fondamentaux de leur leçon à des cas simples. Par exemple il est indispensable de savoir

— justifier qu'une matrice est diagonalisable ou en déterminer un polynôme annulateur ;

— effectuer des manipulations élémentaires sur les éléments appartenant à diverses structures algébriques standards ($\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathfrak{S}_n$, $\mathbb{F}_q$ etc.) ;

— mettre en œuvre des algorithmes exposés dans le plan (opérations élémentaires sur des systèmes ou des déterminants, réduction de Gauss d'une forme quadratique, etc.).

Les leçons d'algèbre sont de difficultés variables, mais le candidat n'aura jamais à choisir entre deux leçons de niveau difficile. En revanche, même si le jury comprend parfaitement qu'un candidat de niveau modeste ne choisisse pas une leçon de niveau difficile, il acceptera plus difficilement qu'un candidat place sa leçon à un niveau trop élevé qu'il ne maîtrise pas. De la même manière, il est déconseillé, pour un candidat de niveau modeste, de choisir une leçon difficile alors qu'une plus facile lui tend les bras.

Dans la leçon qu'il présente, le candidat devra savoir mettre en application les concepts qu'il introduit ; en particulier il doit s'attendre à ce que le jury lui demande d'effectuer un calcul simple faisant appel aux notions présentées dans le plan.

On note que les leçons de géométrie sont souvent délaissées, alors que les candidats seront amenés à enseigner la géométrie. Ajoutons que, dans les leçons, les illustrations des notions algébriques par des exemples et des applications issus de la géométrie sont les bienvenus, ceci tout particulièrement en théorie des groupes. À ce propos, rappelons qu'un dessin au tableau est souvent apprécié et soulignons que le jury n'est pas vraiment regardant sur les qualités esthétiques du dessin.

Les titres des leçons comportent souvent les mots « exemples » et « applications ». Il faut bien distinguer les deux termes ; un exemple n'est pas en soi une application et inversement. Les leçons d'exemples (celles dont l'intitulé commence par « Exemples de ») devraient être construites à partir des connaissances théoriques du candidat et d'un panel d'outils pratiques, pour arriver rapidement aux exemples proprement dits.

Le jury a noté que les notions de quotients échappent souvent au candidat. Il est important à ce stade de dominer la projection canonique et surtout, les subtilités du passage au quotient dans le cadre d'un morphisme.

La théorie des représentations est apparue il y a quelques années au programme. Elle est naturellement reliée à bon nombre de leçons. En effet, en dehors des leçons qui la concerne directement, les représentations peuvent figurer naturellement dans les leçons 101, 102, 103, 104, 105, 106, 150. Le jury note avec satisfaction une réelle progression des connaissances des candidats autour des représentations et des actions de groupes.

5.2.2 Commentaires sur les leçons d'algèbre et géométrie

Les remarques qui suivent sont spécifiques à chaque leçon et permettent de mieux saisir les attentes du jury.

leçon 101 : Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

Il faut bien dominer les deux approches de l'action de groupe : l'approche naturelle et l'approche, plus subtile, via le morphisme qui relie le groupe agissant et le groupe des permutations de l'ensemble sur lequel il agit. Des exemples de natures différentes doivent être présentés : actions sur un ensemble fini, sur un espace vectoriel (en particulier les représentations), sur un ensemble de matrices, sur des fonctions, voire des polynômes. Les exemples issus de la géométrie ne manquent pas (groupes d'isométries d'un solide). Certains candidats décrivent les actions naturelles de $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{F}_q)$ sur la droite projective qui donnent des injections intéressantes pour $q = 2, 3$ et peuvent plus généralement en petit cardinal donner lieu à des isomorphismes de groupes. Enfin, on pourra noter que l'injection du groupe de permutations dans le groupe linéaire par les matrices de permutations donne lieu à des représentations dont il est facile de déterminer le caractère.

Leçon 102 : Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.

Cette leçon est encore abordée de façon élémentaire sans réellement expliquer où et comment les nombres complexes de modules 1 et les racines de l'unité apparaissent dans divers domaines des mathématiques (polynômes cyclotomiques, spectre de matrices remarquables, théorie des représentations).

Il ne faut pas non plus oublier la partie « groupe » de la leçon : on pourra s'intéresser au relèvement du groupe unité au groupe additif des réels et aux propriétés qui en résultent (par exemple l'alternative « sous-groupes denses versus sous-groupes monogènes »). On pourra aussi s'intéresser aux groupes des nombres complexes de $\mathbb{Q}[i]$, et les racines de l'unité qui y appartiennent.

Leçon 103 : Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications

Les candidats parlent de groupe simple et de sous-groupe dérivé ou de groupe quotient sans savoir utiliser ces notions. Entre autres, il faut savoir pourquoi on s'intéresse particulièrement aux groupes simples. La notion de produit semi-direct n'est plus au programme, mais lorsqu'elle est utilisée, il faut savoir la définir proprement et savoir reconnaître des situations simples où de tels produits apparaissent (le groupe diédral D_n par exemple).

On pourra noter que les tables de caractères permettent d'illustrer toutes ces notions. Pour les candidats les plus téméraires, on pourra noter que le treillis des sous-groupes distingués d'un groupe fini se voit dans sa table de caractères, ainsi que l'indice du sous-groupe dérivé.

Leçon 104 : Groupes finis. Exemples et applications.

On attend des candidats de savoir manipuler correctement les éléments de quelques structures usuelles ($\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathfrak{S}_n$, etc.). Par exemple, proposer un générateur simple de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ voire tous les générateurs, calculer aisément un produit de deux permutations, savoir décomposer une permutation en produit de cycles à supports disjoints.
Il est important que la notion d'ordre d'un élément soit mentionnée et comprise dans des cas simples.

Les exemples doivent figurer en bonne place dans cette leçon. On peut par exemple étudier les groupes de symétries $\mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}_4, \mathfrak{A}_5$ et relier sur ces exemples géométrie et algèbre, les représentations ayant ici toute leur place. Il est utile de connaître les groupes diédraux, et pour les candidats aguerris, les spécificités de groupes plus exotiques comme le groupe quaternionique. Le théorème de structure des groupes abéliens finis doit être connu.

Leçon 105 : Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

Parmi les attendus, il faut savoir relier la leçon avec les notions d'orbites et d'actions de groupes. Il faut aussi savoir décomposer une permutation en cycles à supports disjoints, tant sur le plan théorique (preuve du théorème de décomposition), que pratique (sur un exemple). Il est important de savoir déterminer les classes de conjugaisons du groupe symétrique par la décomposition en cycles, et, pour les candidats confirmés, dominer les problèmes de dénombrement qui en résultent.

Des dessins ou des graphes illustrent de manière commode ce que sont les permutations.

Par ailleurs, un candidat qui se propose de démontrer que *tout groupe simple d'ordre* 60 *est isomorphe à* $\mathfrak{A}_5$ devrait savoir donner des applications à la simplicité d'un groupe.

L'existence du morphisme signature est un résultat non trivial mais ne peut pas constituer, à elle seule, l'objet d'un développement.

Comme pour toute structure algébrique, il est souhaitable de s'intéresser aux automorphismes d'un groupe, par exemple, à ceux du groupe symétrique. On note que les candidats connaissent en général les applications du groupe symétrique aux polyèdres réguliers de l'espace.

Leçon 106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

Cette leçon est souvent présentée comme un catalogue de résultats épars et zoologiques sur $\mathrm{GL}(E)$. Il serait bien que les candidats unifient la présentation de la leçon en faisant correspondre les sous-groupes du groupe linéaire avec les stabilisateurs de certaines actions naturelles (sur des formes quadratiques, symplectiques, sur des drapeaux, sur une décomposition en somme directe, *etc.*).

À quoi peuvent servir des générateurs du groupe $\mathrm{GL}(E)$? Qu'apporte la topologie dans cette leçon ? Il est préférable de se poser ces questions avant de les découvrir le jour de l'oral. Certains candidats affirment que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense (et ouvert) dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il est judicieux de préciser les hypothèses nécessaires sur le corps $\mathbb{K}$ ainsi que la topologie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

La présentation du pivot de Gauss et de ses applications se justifient pleinement.

Il faut aussi savoir réaliser $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ et faire le lien entre signature et déterminant. Dans le même ordre d'idée, la théorie des représentations permet d'illustrer, dans les leçons plus robustes, l'omnipotence de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et de son sous-groupe unitaire.

Leçon 107 : Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Il s'agit d'une leçon où théorie et exemples doivent apparaître. Le candidat doit, d'une part, savoir dresser une table de caractères pour des petits groupes. Il doit, d'autre part, savoir tirer des informations sur le groupe à partir de sa table de caractères, et savoir également trouver la table de caractères de certains sous-groupes.

On voit souvent dans les développements qu'un candidat qui sait manier les techniques de base sur les caractères ne sait pas forcément relier ceux-ci aux représentations. Le caractère est un outil puissant, mais il reste un outil, ce n'est pas l'intérêt ultime de la leçon.

Dans le même ordre d'idée, le lemme de Schur est symptomatique d'une confusion : dans le cas où les deux représentations V et V' sont isomorphes, on voit que les candidats confondent isomorphisme de V dans V' avec endomorphisme de V. Par exemple, diagonaliser une application linéaire de V dans V' est une faute avérée, il faut pour cela identifier V et V', ce que le candidat devrait faire de façon consciente et éclairée.

Leçon 108 : Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

C'est une leçon qui demande un minimum de culture mathématique. Peu de candidats voient l'utilité des parties génératrices dans l'analyse des morphismes de groupes ou pour montrer la connexité de certains groupes.

Tout comme dans la leçon 106, la présentation du pivot de Gauss et de ses applications est envisageable.

Leçon 109 : Représentations de groupes finis de petit cardinal.

Il s'agit d'une leçon où le matériel théorique doit figurer, pour ensuite laisser place à des exemples. Les représentations peuvent provenir d'actions de groupes sur des ensembles finis, de groupes d'isométries, d'isomorphismes exceptionnels entre groupes de petit cardinal... Inversement, on peut chercher à interpréter des représentations de façon géométrique, mais il faut avoir conscience qu'une table de caractères provient généralement de représentations complexes et non réelles, *a priori*. Pour prendre un exemple ambitieux, la construction de l'icosaèdre à partir de la table de caractères de $\mathfrak{A}_5$ demande des renseignements sur l'indice de Schur (moyenne des caractères sur les carrés des éléments du groupe).

Leçon 110 : Caractères d'un groupe abélien fini et transformée de Fourier discrète. Applications.

Il s'agit d'une nouvelle leçon qui n'a pas encore trouvé l'affection des candidats.

Pourtant, le sujet et abordable, par exemple : le théorème de structure des groupes abéliens finis, qui a bien entendu une place de choix dans cette leçon. On pourra en profiter pour montrer l'utilisation de la dualité dans ce contexte. Comme application, la cyclicité du groupe multiplicatif d'un corps fini est tout à fait adaptée. D'ailleurs, des exemples de caractères, additifs, ou multiplicatifs dans le cadre des corps finis, sont les bienvenus. Pour les candidats chevronnés, les sommes de Gauss permettent de constater toute l'efficacité de ces objets.

L'algèbre du groupe est un objet intéressant, surtout sur le corps des complexes, où il peut être muni d'une forme hermitienne. On peut l'introduire comme une algèbre de fonctions, munie d'un produit de convolution, mais il est aussi agréable de la voir comme une algèbre qui « prolonge » la mutiplication du groupe.

La transformée de Fourier discrète pourra être vue comme son analogue analytique, avec ses formules d'inversion, sa formule de Plancherel, mais dans une version affranchie des problèmes de convergence, incontournables en analyse de Fourier.

On pourra y introduire la transformée de Fourier rapide sur un groupe abélien d'ordre une puissance de 2 ainsi que des applications à la multiplication d'entiers, de polynômes et éventuellement au décodage de codes via la transformée de Hadamard.

Leçon 120 : Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications.

Cette leçon, souvent choisie par les candidats, demande toutefois une préparation minutieuse.

Tout d'abord, n n'est pas forcément un nombre premier. Il serait bon de connaître les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et, plus généralement, les morphismes de groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Il est nécessaire de bien maîtriser le lemme chinois et sa réciproque. Et pour les candidats plus étoffés, connaître une généralisation du lemme chinois lorsque deux éléments ne sont pas premiers entre eux, faisant apparaître le pgcd et le ppcm de ces éléments.

Il faut bien sûr savoir appliquer le lemme chinois à l'étude du groupe des inversibles, et ainsi, retrouver la multiplicativité de l'indicatrice d'Euler. Toujours dans le cadre du lemme chinois, il est bon de distinguer clairement les propriétés de groupes additifs et d'anneaux, de connaître les automorphismes, les nilpotents, les idempotents...

Enfin, les candidats sont invités à rendre hommage à Gauss en présentant quelques applications arithmétiques des anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, telles que l'étude de quelques équations diophantiennes bien choisies. De même, les applications cryptographiques telles que l'algorithme RSA sont naturelles dans cette leçon.

Leçon 121 : Nombres premiers. Applications.

Il s'agit d'une leçon pouvant être abordée à divers niveaux.

Il y a tant à dire sur la question que le candidat devra fatalement faire des choix. Attention toutefois à celui des développements, ils doivent être pertinents ; l'apparition d'un nombre premier n'est pas suffisant !

La réduction modulo p n'est pas hors-sujet et constitue un outil puissant pour résoudre des problèmes arithmétiques simples. La répartition des nombres premiers est un résultat historique important, qu'il faudrait citer. Sa démonstration n'est bien sûr pas exigible au niveau de l'agrégation.

Quelques résultats sur les corps finis et leur géométrie sont les bienvenus, ainsi que des applications en cryptographie.

Leçon 122 : Anneaux principaux. Applications.

C'est une leçon où les candidats ont tendance à se placer sur un plan trop théorique. Il est possible de présenter des exemples d'anneaux principaux classiques autres que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{K}[X]$ (décimaux, entiers de Gauss ou d'Eisenstein), accompagnés d'une description de leurs irréductibles.

Les applications en algèbre linéaire ne manquent pas, il serait bon que les candidats les illustrent. Par exemple, il est étonnant de ne pas voir apparaître la notion de polynôme minimal parmi les applications.

Le candidat plus cultivé peut donner des exemples d'anneaux non principaux, mais aussi des exemples d'équations diophantiennes résolues à l'aide d'anneaux principaux. A ce sujet, il sera fondamental de savoir déterminer les unités d'un anneau, et leur rôle au moment de la décomposition en facteurs premiers.

On a pu noter dans cette leçon l'erreur répandue que $1+i$ et $1-i$ sont des irréductibles premiers entre eux dans l'anneau factoriel $\mathbb{Z}[i]$.

Leçon 123 : Corps finis. Applications.

Il s'agit d'une leçon comportant un certain nombre d'attendus. En premier lieu, une construction des corps finis doit être connue. Ensuite, les constructions des corps de petit cardinal doivent avoir été pratiquées. Les injections des divers $\mathbb{F}_q$ doivent être connues. Enfin, les applications des corps finis (y compris pour $\mathbb{F}_q$ avec q non premier !) ne doivent pas être oubliées : citons par exemple l'étude de polynômes à coefficients entiers et de leur irréductibilité.

Il sera bon de comprendre l'utilisation des degrés des extensions, et leurs petites propriétés arithmétiques amenées par le théorème de la base téléscopique.

Un candidat qui étudie les carrés dans un corps fini doit savoir aussi résoudre les équations de degré 2.

Le théorème de l'élément primitif, s'il est énoncé, doit pouvoir être utilisé.

Les applications sont nombreuses. S'ils sont bien maîtrisées, alors les codes correcteurs peuvent être mentionés.

Leçon 124 : Anneau des séries formelles. Applications.

C'est une leçon qui doit être illustrée par de nombreux exemples et applications, souvent en lien avec les séries génératrices ; combinatoire, calcul des sommes de Newton, relations de récurrence, nombre de partitions, représentations et séries de Molien, *etc.*

A ce propos, on note que les candidats qui choisissent de présenter en développement les séries de Molien ne savent que rarement interpréter les séries obtenues sur des exemples simples. Ces séries ne font pas que calculer les dimensions de sous-espaces d'invariants, elles suggèrent aussi des choses plus profondes sur la structure de l'algèbre d'invariants.

Leçon 125 : Extensions de corps. Exemples et applications.

Très peu de candidats ont choisi cette leçon. On doit y voir le théorème de la base téléscopique et ses applications à l'irréductibilité de certains polynômes, ainsi que les corps finis. Une version dégradée de la théorie de Galois (qui n'est pas au programme) est très naturelle dans cette leçon.

Leçon 126 : Exemples d'équations diophantiennes.

Il s'agit d'une leçon nouvelle, ou plus exactement d'une renaissance. On y attend les notions de bases servant à aborder les équations de type $ax+by=d$ (identité de Bezout, lemme de Gauss), les systèmes de congruences, mais aussi bien entendu la méthode de descente et l'utilisation de la réduction modulo un nombre premier p.

La leçon peut aussi dériver vers la notion de factorialité, illustrée par des équations de type Mordell, Pell-Fermat, et même Fermat (pour $n=2$, ou pour les nombres premiers de Sophie Germain).

Leçon 127 : Droite projective et birapport.

Il s'agit également d'une leçon récemment introduite et reprenant un titre ancien. Le birapport peut être vu comme un invariant pour l'action du groupe linéaire $\mathrm{GL}(2,\mathbb{K})$ (ou plus finement son quotient projectif $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{K})$) sur l'ensemble $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ des droites du plan vectoriel $\mathbb{K}^2$.

Lorsque le corps $\mathbb{K}$ est le corps des complexes, il ne faudra pas manquer d'en voir les applications à la cocyclicité, et à l'étude des droites et cercles du plan affine euclidien.

On peut s'aider du birapport, sur des corps finis, pour construire des isomorphismes classiques entre groupes finis de petit cardinal.

L'ensemble des droites du plan contenant un point fixe est naturellement une droite projective. Cela permet enfin d'identifier une conique à une droite projective : c'est l'idéal d'une preuve classique du théorème de l'hexagramme de Pascal. Par ailleurs, on pourra remarquer le birapport dans l'expression de la distance hyperbolique sur le demi-plan de Poincaré.

Leçon 140 : Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.

Le bagage théorique est somme toute assez classique, même si parfois, le candidat ne voit pas l'unicité de la décomposition en éléments simples en termes d'indépendance en algèbre linéaire. Ce sont surtout les applications qui sont attendues : séries génératrices (avec la question à la clef : à quelle condition une série formelle est-elle le développement d'une fraction rationnelle), automorphismes de $\mathbb{K}(X)$, version algébrique du théorème des résidus, action par homographies.

Le théorème de Lüroth n'est pas obligatoire et peut même se révéler un peu dangereux si le candidat n'est pas suffisamment préparé aux questions classiques qui l'attendent sur ce sujet.

Leçon 141 : Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

Le jury attend dans cette leçon un bagage théorique permettant de définir corps de rupture, corps de décomposition (la preuve de l'unicité de ce dernier n'est pas exigée), ainsi que des illustrations dans différents types de corps (réel, rationnel, corps finis).

Attention à ne pas croire qu'un polynôme réductible admet forcément des racines (même en dehors du cadre de cette leçon !).

Bien entendu, les corps finis ont une place de choix et il sera instructif de chercher des polynômes irréductibles de degré 2, 3, 4 sur $\mathbb{F}_2$, ou $\mathbb{F}_3$.

Il faut savoir qu'il existe des corps algébriquement clos de caractéristique nulle autres que $\mathbb{C}$; il est bon se savoir montrer que l'ensemble des nombres algébriques sur le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels est un corps algébriquement clos.

Il faut connaître le théorème de la base téléscopique ainsi que les utilisations artithmétiques (utilisation de la divisibilité) que l'on peut en faire dans l'étude de l'irréductibilité des polynômes.

Leçon 142 : Algèbre des polynômes à plusieurs indéterminées. Applications.

La leçon ne doit pas se concentrer exclusivement sur les aspects formels ou uniquement sur les polynômes symétriques.

Les aspects arithmétiques ne doivent pas être négligés. Il faut savoir montrer l'irréductibilité d'un polynôme à plusieurs indéterminées en travaillant sur un anneau de type $A[X]$, où A est factoriel.

Le théorème fondamental sur la structure de l'algèbre des polynômes symétriques est vrai sur $\mathbb{Z}$. L'algorithme peut être présenté sur un exemple.

Les applications aux quadriques, aux relations racines/cœfficients ne doivent pas être délaissées : on peut faire par exemple agir le groupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ sur les polynômes à n indéterminées de degré inférieur à 2.

Leçon 143 : Résultant. Applications.

Le caractère entier du résultant (il se définit sur $\mathbb{Z}$) doit être mis en valeur et appliqué.

La partie application doit montrer la diversité du domaine (par exemple en arithmétique, calcul d'intersection/élimination, calcul différentiel, polynômes annulateurs d'entiers algébriques).

Il ne faut pas perdre de vue l'application linéaire sous-jacente $(U, V) \mapsto AU + BV$ qui lie le résultant et le pgcd de A et B.

Leçon 144 : Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications

Il s'agit d'une leçon au spectre assez vaste. On peut y traiter de méthodes de résolutions, de théorie des corps (voire théorie de Galois si affinités), de topologie (continuité des racines) ou même de formes quadratiques. Il peut être pertinent d'introduire la notion de polynôme scindé, de citer le théorème de d'Alembert-Gauss et des applications des racines (valeurs propres, *etc.*). On pourra parler des applications de la réduction au calcul d'approximations de racines.

Notons le lien solide entre la recherche des racines d'un polynôme et la réduction des matrices. Les valeurs propres de la matrice compagnon d'un polynôme permet d'entretenir ce lien. Les problèmes de localisation des valeurs propres, comme les disques de Gershgorin, sont tout à fait appropriés à ce contexte.

Leçon 150 : Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

Cette leçon demande un certain recul. Les actions ne manquent pas et selon l'action, on pourra dégager d'une part des invariants (rang, matrices échelonnées réduites), d'autre part des algorithmes. On peut aussi, si l'on veut aborder un aspect plus théorique, faire apparaître à travers ces actions quelques décompositions célèbres, ainsi que les adhérences d'orbites, lorsque la topologie s'y prête.

On pourra aussi travailler sur des corps finis et utiliser le dénombrement dans ce contexte.

Leçon 151 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

Dans cette leçon, il est important de bien connaître les théorèmes fondateurs de la théorie des espaces vectoriels de dimension finie en ayant une idée de leurs preuves. Ces théorèmes semblent simples car ils ont été très souvent pratiqués, mais leur preuve demande un soin particulier, ce qui rend la leçon plus difficile qu'on ne le croit.

Des questions élémentaires comme « un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie, est-il aussi de dimension finie ? » peuvent dérouter un candidat.

Les diverses caractérisations du rang trouvent bien leur place ainsi que, pour les candidats plus chevronnés, l'utilisation du degré d'une extension dans la théorie des corps.

Leçon 152 : Déterminant. Exemples et applications.

Il s'agit encore d'une leçon où les résultats abondent et où le candidat devra faire des choix. On doit pouvoir, dans cette leçon, commencer par définir correctement le déterminant. Beaucoup de candidats entament la leçon en disant que le sous-espace des formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n est de dimension 1, ce qui est fort à propos. Toutefois, il est essentiel de savoir le montrer.

Il faut que le plan soit cohérent ; si le déterminant n'est défini que sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, il est délicat de définir $\det(A - XI_n)$ avec A une matrice carrée.

L'interprétation du déterminant comme volume est essentielle.

Le calcul explicite est important, toutefois, le jury ne peut se contenter que d'un Vandermonde ou d'un déterminant circulant ! De même il est envisageable que des candidats s'intéressent aux calculs de déterminant sur $\mathbb{Z}$ avec des méthodes multimodulaires. Le résultant et les applications simples à l'intersection ensembliste de deux courbes algébriques planes peuvent trouver leur place dans cette leçon.

Il serait bien que la continuité du déterminant trouve une application, ainsi que son caractère polynomial.

Leçon 153 : Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

Cette leçon est souvent choisie pour son lien avec la réduction, toutefois, le jury ne souhaite pas que le candidat présente un catalogue de résultats autour de la réduction, mais seulement ce qui a trait aux polynômes d'endomorphismes.

Il faut consacrer une courte partie de la leçon à l'algèbre $\mathbf{K}[u]$, connaître sa dimension sans hésiter. Les propriétés globales pourront être étudiées par les meilleurs. Le jury souhaiterait voir certains liens entre réduction de l'endomorphisme u et structure de l'algèbre $\mathbf{K}[u]$. Le candidat peut s'interroger sur les idempotents et le lien avec la décomposition en somme de sous-espaces caractéristiques.

Il faut bien préciser que, dans la réduction de Dunford, les composantes sont des polynômes en l'endomorphisme, et en connaître les conséquences théoriques et pratiques.

L'aspect *applications* est trop souvent négligé. On attend d'un candidat qu'il soit en mesure, pour une matrice simple de justifier la diagonalisabilité et de déterminer un polynôme annulateur (voire minimal). Il est souhaitable que les candidats ne fassent pas la confusion entre diverses notions de multiplicité pour une valeur propre λ donnée (algébrique ou géométrique). Enfin, rappelons que pour calculer A^k, il n'est pas nécessaire en général de réduire A (la donnée d'un polynôme annulateur de A suffit bien souvent).

Leçon 154 : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Les candidats doivent s'être interrogés sur les propriétés de l'ensemble des sous-espaces stables par un endomorphisme. Des études détaillées de cas sont les bienvenues, par exemple le cas d'une matrice diagonalisable, le cas d'une matrice nilpotente d'indice maximum.

La décomposition de Frobenius trouve tout à fait sa place dans la leçon. Notons qu'il a été ajouté à l'intitulé la notion de familles d'endomorphismes. Ceci peut déboucher par exemple sur des endomorphismes commutant entre eux ou sur la théorie des représentations.

Leçon 155 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Il faut ici pouvoir donner des exemples naturels d'endomorphismes diagonalisables et des critères de diagonalisabilité.

On peut coir que le calcul de l'exponentielle d'un endomorphisme diagonalisable est immédiat une fois que l'on connaît les valeurs propres et ceci sans diagonaliser la matrice, par exemple à l'aide des projecteurs spectraux.

On peut sur le corps des réels et des complexes donner des propriétés topologiques. Mentionnons que l'affirmation «l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ » nécessite quelques précisions sur le corps $\mathbb{K}$ et la topologie choisie pour $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Sur les corps finis, on a des critères spécifiques de diagonalisabilité. On peut dénombrer les endomorphismes diagonalisables, ou possédant des propriétés données, liées à la diagonalisation.

Le lien peut aussi être fait avec la théorie des représentations et la transformée de Fourier rapide.

Leçon 156 : Exponentielle de matrices. Applications.

C'est une leçon difficile et il faut noter que ce n'est pas une leçon d'analyse. Il faut toutefois pouvoir justifier clairement la convergence de la série exponentielle.

Les questions de surjectivité ou d'injectivité doivent être abordées. Par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle dans l'image $\exp\big(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\big)$? La matrice définie par blocs $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ est-elle dans l'image $\exp\big(\mathcal{M}_4(\mathbb{R})\big)$?

La décomposition de Dunford multiplicative (décomposition de Jordan) de $\exp(A)$ trouve toute son utilité dans cette leçon. Pour les candidats plus aguerris, les sous-groupes à un paramètre du groupe linéaire y sont tout à fait à propos. On peut s'interroger si ces sous-groupes constituent des sous-variétés fermées de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

Notons que l'exponentielle fait bon ménage avec la décomposition polaire dans bon nombre de problèmes sur les sous-groupes du groupe linéaire.

L'étude du logarithme (quand il est défini) trouve toute sa place dans cette leçon. Si l'on traite du cas des matrices nilpotentes, on pourra invoquer le calcul sur les développements limités.

Les applications aux équations différentielles doivent être évoquées sans constituer l'essentiel de la leçon. On pourra par exemple faire le lien entre réduction et comportement asymptotique, mais le jury déconseille aux candidats de proposer ce thème dans un développement.

Les notions d'algèbres de Lie ne sont pas au programme de l'agrégation, on conseille de n'aborder ces sujets qu'à condition d'avoir une certaine solidité sur la question.

Leçon 157 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Il est possible de mener une leçon de bon niveau, même sans la décomposition de Jordan, à l'aide des noyaux itérés. On doit savoir déterminer si deux matrices nilpotentes sont semblables grâce aux noyaux itérés (ou grâce à la décomposition de Jordan si celle-ci est maîtrisée).

Deux endomorphismes trigonalisables qui commutent sont simultanément trigonalisables, mais une grande proportion de candidats pensent à tort que la réciproque est vraie.

Notons que l'étude des nilpotents en dimension 2 débouche naturellement sur des problèmes de quadriques et que l'étude sur un corps fini donne lieu à de jolis problèmes de dénombrement.

Leçon 158 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

C'est une leçon transversale. La notion de signature doit bien sûr figurer dans la leçon et on ne doit surtout pas se cantonner au cas des matrices définies positives. L'action du groupe linéaire sur l'espace des matrices symétriques peut donner un cadre naturel à cette leçon.

Curieusement, il est fréquent que le candidat énonce l'existence de la signature d'une matrice symétrique réelle sans en énoncer l'unicité dans sa classe de congruence.

L'orthogonalisation simultanée est un résultat important de cette leçon. Il faut en connaître les applications géométriques aux quadriques.

On doit faire le lien avec les formes quadratiques et les formes hermitiennes. La partie réelle et la partie imaginaire d'un produit hermitien définissent des structures sur l'espace vectoriel réel sous-jacent.

Leçon 159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

Il est important de bien placer la thématique de la dualité dans cette leçon : celle-ci permet de créer une correspondance féconde entre un morphisme et son morphisme transposé, un sous-espace et son orthogonal (canonique), les noyaux et les images, les sommes et les intersections. Bon nombre de résultats d'algèbre linéaire se voient dédoublés par cette correspondance.

Les liens entre base duale et fonctions de coordonnées doivent être parfaitement connus. Savoir calculer la dimension d'une intersection d'hyperplans via la dualité est important dans cette leçon.

L'utilisation des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes permet facilement d'obtenir les équations d'un sous-espace vectoriel ou d'exhiber une base d'une intersection d'hyperplans. Cette leçon peut être traitée sous différents aspects : géométrique, algébrique, topologique, analytique, *etc.* Il faut que les développements proposés soient en lien direct, comme toujours, avec la leçon ; proposer la trigonalisation simultanée est un peu osé ! Enfin rappeler que la différentielle d'une fonction réelle est une forme linéaire semble incontournable.

Leçon 160 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

Dans cette leçon, les candidats doivent bien prendre conscience que le caractère euclidien de l'espace est essentiel pour que l'endomorphisme soit remarquable. Par exemple, des développements comme le lemme des noyaux ou la décomposition de Dunford n'ont rien à faire ici. En revanche, l'utilisation du fait que l'orthogonal d'un sous-espace stable par un endomorphisme est stable par l'adjoint doit être mis en valeur.

Leçon 161 : Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Applications en dimensions 2 et 3.

La classification des isométries en dimension 2 est exigible. En dimension 3, il faut savoir classifier les rotations et connaître les liens avec la réduction. On peut penser aux applications aux isométries laissant stables certaines objets en dimension 2 et 3.

Leçon 162 : Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

Il semble que cette leçon soit moins choisie par les candidats depuis l'ajout de l'aspect algorithmique dans l'intitulé. A ce sujet, il faut savoir que les techniques liées au simple pivot de Gauss constituent l'essentiel des attendus.

La leçon doit impérativement présenter la notion de système échelonné, avec une définition précise et correcte et situer l'ensemble dans le contexte de l'algèbre linéaire (sans oublier la dualité !).

Pour les candidats chevronnés, les relations de dépendances linéaires sur les colonnes d'une matrice échelonnée sont claires et permettent de décrire simplement les orbites de l'action à gauche de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ sur $M_n(\mathbb{K})$ donnée par $(P, A) \mapsto PA$.

Un point de vue opératoire doit accompagner l'étude théorique et l'intérêt pratique (algorithmique) des méthodes présentées doit être expliqué y compris sur des exemples simples où l'on attend parfois une résolution explicite.

Des discussions sur la résolution de systèmes sur $\mathbb{Z}$ et la forme normale de Hermite peuvent trouver leur place dans cette leçon.

Leçon 170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

Il faut tout d'abord noter que l'intitulé implique implicitement que le candidat ne doit pas se contenter de travailler sur $\mathbb{R}$. Il faut savoir que les formes quadratiques existent sur le corps des complexes et sur les corps finis et il faut savoir les classifier.

On ne doit pas oublier l'interprétation géométrique des notions introduites (lien entre coniques, formes quadratiques, cônes isotropes) ou les aspects élémentaires (par exemple le discriminant de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ et la signature de la forme quadratique $ax^2 + bxy + cy^2$). On ne peut se limiter à des considérations élémentaires d'algèbre linéaire. Les formes quadratiques ne sont pas toutes non dégénérées (la notion de quotient est utile pour s'y ramener).

L'algorithme de Gauss doit être énoncé et pouvoir être pratiqué sur une forme quadratique de $\mathbb{R}^3$. Le lien avec la signature doit être clairement énoncé.

Malheureusement la notion d'isotropie est mal maîtrisée par les candidats, y compris les meilleurs d'entre eux. Le cône isotrope est un aspect important de cette leçon, qu'il faut rattacher à la géométrie différentielle. Il est important d'illustrer cette leçon d'exemples naturels.

Leçon 171 : Formes quadratiques réelles. Exemples et applications.

La preuve de la loi d'inertie de Silvester doit être connue ainsi que l'orthogonalisation simultanée. Le candidat doit avoir compris la signification géométrique des deux entiers r et s composant la signature d'une forme quadratique réelle ainsi que leur caractère classifiant.

La différentielle seconde d'une fonction de plusieurs variables est une forme quadratique importante.

Pour les candidats de bon niveau, l'indicatrice de Schur-Frobenius, sur la possibilité de réaliser une représentation donnée sur le corps des réels, permet une belle incursion de la théorie des représentations dans cette leçon.

Leçon 180 : Coniques. Applications.

La définition des coniques affines non dégénérées doit être connue. Les propriétés classiques des coniques doivent être présentées. Bien distinguer les notions affines, métriques ou projectives, la classification des coniques étant sensiblement différente selon le cas. Souvent le candidat annonce qu'il va « classifier les coniques » mais sans être capable de préciser la nature de cette classification. Plus généralement, il serait bien que les candidats aient réfléchi à ce que l'on entend par « classification » en mathématiques.

On peut se situer sur un autre corps que celui des réels. Le lien entre classification des coniques et classification des formes quadratiques peut être établi à des fins utiles.

Leçon 181 : Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

On attend des candidats qu'ils parlent de coordonnées barycentriques et les utilisent par exemple dans le triangle (coordonnées barycentriques de certains points remarquables). Il est judicieux de parler d'enveloppe convexe, de points extrémaux, ainsi que des applications qui en résultent.

Leçon 182 : Applications des nombres complexes à la géométrie. Homographies

Cette leçon ne saurait rester au niveau de la Terminale.

L'étude des inversions est tout à fait appropriée dans cette leçon, en particulier la possibilité de ramener un cercle à une droite et inversement. La formule de Ptolémée, pour donner un exemple, illustre bien l'utilisation de cet outil.

On peut parler des suites définies par récurrence par une homographie et leur lien avec la réduction dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

Une étude de l'exponentielle complexe et des homographies de la sphère de Riemann est tout à fait appropriée. La réalisation du groupe SU_2 dans le corps des quaternions et ses applications peuvent trouver sa place dans la leçon.

Leçon 183 : Utilisation des groupes en géométrie.

C'est une leçon transversale et difficile, qui peut aborder des aspects variés selon les structures algébriques présentes. D'une part un groupe de transformations permet de ramener un problème de géométrie à un problème plus simple.

D'autre part, les actions de groupes sur la géométrie permettent de dégager des invariants essentiels (angle, birapport). On retrouvera encore avec bonheur les groupes d'isométries d'un solide.

Leçon 190 : Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

Il faut dans un premier temps dégager clairement les méthodes et les illustrer d'exemples significatifs. L'utilisation de séries génératrices est un outil puissant pour le calcul de certains cardinaux. Le jury s'attend à ce que les candidats sachent calculer des cardinaux classiques et certaines probabilités ! L'introduction des corps finis (même en se limitant aux cardinaux premiers) permet de créer un lien fécond avec l'algèbre linéaire.

5.2.3 Leçons d'Analyse et Probabilités

Probabilités et Analyse complexe

Le jury rappelle que le chapitre des probabilités a vocation à se développer dans l'enseignement secondaire et post-baccalauréat. Les candidats à un futur poste d'enseignant de mathématiques doivent maîtriser les notions centrales de ces thématiques. C'est pourquoi le programme 2015 fait apparaître un chapitre 10 intitulé **Probabilités**, séparé de la théorie de l'intégration, mais qui reprend essentiellement les contenus des programmes précédents.

Il est construit autour de quelques notions de base sur l'indépendance, les lois classiques, les moments, les transformées et les convergences. Ces thèmes sont évidemment liés.

Le jury a observé durant cette session 2015 que le nombre de candidats qui ont choisi les leçons de probabilité augmente et que la qualité des prestations aussi ; le jury se félicite de cette évolution, et rappelle aux candidats que les leçons de probabilités ne recèlent pas de piège ou de danger particulier.

Il y a six leçons de probabilités proposées à cette session 2015. Elles pouvaient toutes se traiter à un niveau raisonnable et mettre en jeu des outils qui sont au cœur du programme d'analyse de l'agrégation.

De nombreux développements tournés vers la théorie des probabilités sont possibles. Notons par exemple les différentes versions de la loi des grands nombres ou du théorème central limite.

Enfin, les probabilités interagissent de manière significative avec de nombreuses branches de l'analyse (et plus largement des mathématiques). Le travail sur les leçons précédentes devrait permettre aux candidats d'affermir leurs réflexes en matière de théorie de la mesure et de probabilités, mais aussi d'aborder sous un angle nouveau d'autres items du programme. C'est ainsi que le problème de la détermination d'une variable par ses moments est lié à la théorie des fonctions holomorphes, que l'étude des fonctions caractéristiques prolonge et approfondit celle de la transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$, que la convergence de variables aléatoires permet de retrouver des résultats classiques de l'analyse tels que l'approximation uniforme des fonctions continues par les polynômes de Bernstein.

Rassurons les candidats futurs, il n'est pas question d'exiger d'eux qu'ils connaissent tout cela, mais le rapport vise aussi à donner aux candidats et aux préparateurs des idées de développement de niveau varié.

Le jury s'inquiète, depuis un certain temps, du recul de la connaissance par les candidats de l'analyse complexe et ce depuis plusieurs années. Il n'est pas nécessaire de souligner l'importance et les très nombreuses applications en mathématiques fondamentales ou appliquées. Le jury a bien conscience que l'enseignement de la variable complexe quitte souvent le programme de Licence et se situe aujourd'hui au niveau du M1, sauf dans quelques Universités. Pour autant il est patent que les connaissances sur les fonctions holomorphes, leur comportement au bord du domaine de convergence, les espaces fonctionnels qu'elles constituent, les concepts topologiques qu'elles mettent en œuvre (familles normales, simple connexité) sont globalement en recul. Les candidats en sont sans doute conscients puisqu'ils évitent souvent les leçons correspondantes, pire encore lorsque la variable complexe représente un point important de la leçon (par exemple sur les séries entières) certains candidats annoncent qu'ils feront l'impasse totale sur cette dernière ; ceci n'est pas raisonnable au niveau de l'agrégation et on ne peut imaginer un agrégé de mathématiques du XXI^e siècle ignorant (au moins du point de vue épistémologique) des savoirs acquis du XIX^e.

L'analyse complexe conserve dans le programme de l'agrégation la place centrale que lui impose son importance scientifique. **Les candidats sont invités à en prendre acte sérieusement et à se préparer en conséquence.**

Commentaires généraux

Le jury apprécie que les candidats soient en mesure d'appliquer les résultats élémentaires mais fondamentaux de leur leçon, par exemple : justifier une permutation limite-intégrale ; résoudre une équation différentielle simple ; étudier la convergence d'une suite ou d'une série (numérique, de fonctions, de variables aléatoires).

De nombreux candidats ont présenté au jury des plans raisonnables, suivis d'un développement correctement mené, car soigneusement appris et révisé pendant les trois heures de préparation. Cependant, la première question du jury a souvent révélé une incompréhension réelle du sujet traité. Rappelons aux candidats qu'ils peuvent s'attendre, après leur plan, à quelques questions portant sur un cas particulièrement simple d'application du théorème présenté, ou sur des situations proches qui soulignent l'utilité des hypothèses ou la portée des arguments de la démonstration qu'ils viennent de développer. Si ces questions restent sans réponse, le jury sera conduit à la conclusion que le candidat n'a fait que restituer mécaniquement quelques pages apprises à la va-vite et sa note s'en ressentira. Il est attendu des candidats qu'ils aient compris les notions mathématiques au programme de l'agrégation. Les candidats ne sont pas tenus de savoir établir complètement chacun des résultats de leur plan, en revanche il leur est demandé d'avoir une idée raisonnable des arguments employés dans les preuves. Par exemple : mentionner le théorème de Cauchy-Lipschitz dans la leçon "Théorèmes du point fixe" suppose de savoir transformer un problème de Cauchy en équation à point fixe !

Il est légitime qu'un candidat ignore certains résultats, le jury ne prétend pas à l'omniscience et ne l'attend pas des candidats. Cependant, un candidat qui se montre capable de proposer des pistes de solutions aux questions qu'on lui pose impressionne très favorablement le jury. **Il faut donc apprendre, mais surtout comprendre**.

Il est également souhaitable que les candidats gardent à l'esprit la nature des objets qu'ils sont en train de manipuler : quantités numériques, variables muettes, indéterminées, inconnues, paramètres, vecteurs, fonctions, opérateurs.... Cela est assez sensible en analyse où par exemple, la question "à quel espace appartiennent les deux termes de votre équation ?" peut se révéler embarrassante. Le calcul différentiel est particulièrement délicat à cet égard, et on recommande aux candidats qui préparent l'agrégation de s'astreindre à la rigueur dans les leçons correspondantes.

Le jury observe enfin que d'assez nombreux candidats, dont le niveau est convenable et qui ont soigneusement préparé l'agrégation, ont répété une petite quinzaine de développements choisis pour leur caractère bien classique et répartis de façon à couvrir une bonne moitié des leçons possibles. Cette stratégie parfois excessive peut conduire à des hors-sujets, les développements ayant un lien trop ténu avec le sujet de la leçon pour le jury. Il faut souligner qu'un développement pertinent et un peu original est bien récompensé. Les candidats sont donc invités à sortir des sentiers battus : une petite prise de risque sera reconnue et appréciée.

En dépit des intitulés, beaucoup de leçons manquent d'exemples et se cantonnent pour l'essentiel à des généralités théoriques. Ainsi la leçon relative aux espaces vectoriels normés doit comporter quelques calculs de normes subordonnées, la leçon sur les séries doit être illustrée par des exemples d'études de convergence et d'évaluations asymptotiques.

Enfin, le jury apprécierait que les candidats fassent plus de dessins !

5.2.4 Commentaires sur les leçons d'Analyse et Probabilités

Voici quelques points plus spécifiques concernant les leçons :

201 : Espaces de fonctions ; exemples et applications.

C'est une leçon riche où le candidat devra choisir soigneusement le niveau auquel il souhaite se placer. Les espaces de fonctions continues sur un compact (par exemple l'intervalle $[0,1]$) offrent des exemples élémentaires et pertinents. Dans ce domaine, le jury attend une maîtrise du fait qu'une limite uniforme de fonctions continues est continue. Il est regrettable de voir des candidats, qui auraient eu intérêt à se concentrer sur les espaces de fonctions continues ou bien de classe $\mathcal{C}^1$ et les bases de la convergence uniforme, proposer en développement le théorème de Riesz-Fischer dont il ne maîtrise visiblement pas la démonstration. Toutefois pour des candidats solides, ces espaces offrent de belles possibilités.

Enfin, les candidats ambitieux pourront aborder les espaces de fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbf{C}$.

Signalons que des candidats proposent assez régulièrement une version incorrecte du théorème de Müntz pour les fonctions continues. La version correcte dans ce cadre est

$$\overline{\mathrm{Vect}\{1, \mathrm{x}^{\lambda_\mathrm{n}}\}} = C([0,1];\mathbf{R}) \Longleftrightarrow \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\lambda_n} = +\infty.$$

Des candidats aguerris peuvent développer la construction et les propriétés de l'espace de Sobolev $H_0^1(]0,1[)$, ses propriétés d'injection dans les fonctions continues, et évoquer le rôle de cet espace dans l'étude de problèmes aux limites elliptiques en une dimension. Ce développement conduit naturellement à une illustration de la théorie spectrale des opérateurs compacts auto-adjoints.

202 : Exemples de parties denses et applications.

Il ne faut pas négliger les exemples élémentaires comme par exemple les sous-groupes de $\mathbf{R}$ et leurs applications. Cette leçon permet aussi d'explorer les questions d'approximations de fonctions par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Au delà des exemples classiques, les candidats plus ambitieux peuvent aller jusqu'à la résolution d'équations aux dérivées partielles par séries de Fourier.

203 : Utilisation de la notion de compacité.

Il est important de ne pas concentrer la leçon sur la compacité générale (confusion générale entre *utilisation de la notion compacité* et *notion de compacité*). Néanmoins, on attend des candidats une présentation synthétique de la compacité. Des exemples d'applications comme le théorème de Heine et le théorème de Rolle doivent y figurer et leur démonstration être connue.

Des exemples significatifs d'utilisation comme le théorème de Stone-Weierstrass, des théorèmes de point fixe, voire l'étude qualitative d'équations différentielles, sont tout-à fait envisageables. Le rôle de la compacité pour des problèmes d'existence d'extremums mériterait d'être davantage étudié (lien avec la coercivité en dimension finie).

Les candidats solides peuvent aussi enrichir leur leçon par des exemples tels que l'étude des opérateurs à noyau continu.

Pour les candidats ambitieux, les familles normales de fonctions holomorphes fournissent des exemples fondamentaux d'utilisation de la compacité. Les opérateurs auto-adjoints compacts sur l'espace de Hilbert relèvent également de cette leçon, et on pourra développer par exemple leurs propriétés spectrales.

204 : Connexité. Exemples et applications.

Le rôle clef de la connexité dans le passage du local au global doit être mis en évidence dans cette leçon. Il est important de présenter des résultats naturels dont la démonstration utilise la connexité ; par exemple, diverses démonstrations du théorème de d'Alembert-Gauss. On distinguera bien connexité et connexité par arcs, mais il est pertinent de présenter des situations où ces deux notions coïncident.

205 : Espaces complets. Exemples et applications.

Les candidats devraient faire apparaître que l'un des intérêts essentiels de la complétude est de fournir des théorèmes d'existence en dimension infinie, en particulier dans les espaces de fonctions. Rappelons que l'on attend des candidats une bonne maîtrise de la convergence uniforme. Le théorème de Cauchy-Lipschitz, mal maîtrisé par beaucoup de candidats, est un point important de cette leçon. Les espaces L^p sont des exemples pertinents qui ne sont pas sans danger pour des candidats aux connaissances fragiles.

On ne s'aventurera pas à parler du théorème de Baire sans application pertinente et maîtrisée. Rappelons à ce propos que la démonstration détaillée de l'existence d'une partie dense de fonctions continues dérivables en aucun point est réservée aux candidats solides.

206 : Théorèmes de point fixe. Exemples et applications.

Il faut préparer des contre-exemples pour illustrer la nécessité des hypothèses des théorèmes énoncés .

Les applications aux équations différentielles sont importantes. Répétons que la maîtrise du théorème de Cauchy-Lipschitz est attendue.

Pour l'analyse de convergence des méthodes de point fixe, les candidats ne font pas suffisamment le lien entre le caractère localement contractant de l'opérateur itéré et la valeur de la différentielle au point fixe. La méthode de Newton, interprétée comme une méthode de point fixe, fournit un exemple où cette différentielle est nulle, la vitesse de convergence étant alors de type quadratique. L'étude de méthodes itératives de résolution de systèmes linéraires conduit à relier ce caractère contractant à la notion de rayon spectral.

Pour les candidats solides, il est envisageable d'admettre le théorème de point fixe de Brouwer et d'en développer quelques conséquences comme le théorème de Perron-Frobenius.

207 : Prolongement de fonctions. Exemples et applications.

Il ne faut pas hésiter à commencer par des exemples très simples tel que le prolongement en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}\cdot$ Les candidats exploitent rarement toutes les potentialités de cette leçon très riche. Le jury se réjouirait aussi que les candidats abordent les notions de solution maximale pour les équations différentielles ordinaires et maîtrisent le théorème de sortie des compacts.

Le prolongement analytique relève bien sûr de cette leçon ainsi que le prolongement de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur un segment en fonctions de la même classe, le théorème de Tietze sur l'extension des fonctions continues définies sur un sous-ensemble fermé d'un espace métrique et la transformation de Fourier sur L^2.

En ce qui concerne le théorème d'Hahn-Banach, le candidat n'en donnera la version en dimension infinie que s'il peut s'aventurer sans dommage sur le terrain délicat et très souvent mal maîtrisé du lemme de Zorn. Il vaut mieux disposer d'applications pertinentes autres que des résultats classiques abstraits sur les duaux topologiques.

208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

La justification de la compacité de la boule unité en dimension finie doit être donnée. Le théorème d'équivalence des normes en dimension finie, ou le caractère fermé de tout sous-espace de dimension finie d'un espace normé, sont des résultats fondamentaux à propos desquels les candidats doivent se garder des cercles vicieux.

Une telle leçon doit bien sûr contenir beaucoup d'illustrations et d'exemples. Lors du choix de ceux-ci (le jury n'attend pas une liste encyclopédique), le candidat veillera à ne pas mentionner des exemples pour lequel il n'a aucune idée sur leur pertinence et à ne pas se lancer dans des développements trop sophistiqués.

L'analyse des constantes de stabilité pour l'interpolation de Lagrange fournit un exemple non trivial et peu présenté.

209 : Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications.

Cette leçon comporte un certain nombre de classiques. Les polynômes d'interpolation de Lagrange, les polynômes de Bernstein sont des classiques tout comme le théorème général de Stone-Weierstrass. En ce qui concerne le théorème de Weierstrass par les polynômes de Bernstein, un candidat plus ambitieux pourra donner une estimation de la vitesse de convergence (avec le module de continuité), et éventuellement en montrer l'optimalité. Il n'est pas absurde de voir la formule de Taylor comme une approximation locale d'une fonction par des polynômes. Comme la leçon 202, elle permet aux candidats plus ambitieux d'aller jusqu'à la résolution d'équations aux dérivées partielles (ondes, chaleur, Schrödinger) par séries de Fourier.

213 : Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

Il est important de faire la différence entre base algébrique et base hilbertienne. De plus, la formule de la projection orthogonale sur un sous espace de dimension finie d'un espace de Hilbert doit absolument être connue de même que l'interprétation géométrique de la méthode de Gramm-Schmidt. Il faut connaître quelques critères simples pour qu'une famille orthogonale forme une base hilbertienne et illustrer la leçon par des exemples de bases hilbertiennes (polynômes orthogonaux, séries de Fourier, ...). Le théorème de projection sur les convexes fermés (ou sur un sous-espace vectoriel fermé) d'un espace de Hilbert H est régulièrement mentionné. Les candidats doivent s'intéresser au sens des formules $x = \sum_{n\geqslant 0}(x|e_n)e_n$ et $||x||^2 = \sum_{n\geqslant 0}(x|e_n)^2$ en précisant les hypothèses sur la famille $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et en justifiant la convergence.

La notion d'adjoint d'un opérateur continu peut illustrer agréablement cette leçon.

Pour des candidats solides, le programme permet d'aborder la résolution, et l'approximation, de problèmes aux limites en dimension 1 par des arguments exploitant la formulation variationnelle de ces équations. Plus généralement, l'optimisation de fonctionnelles convexes sur les espaces de Hilbert devrait être plus souvent explorée.

Enfin, pour les plus valeureux, le théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints compacts peut être abordé.

214 : Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications.

Il s'agit d'une belle leçon qui exige une bonne maîtrise du calcul différentiel. Même si le candidat ne propose pas ces thèmes en développement, on est en droit d'attendre de lui des idées de démonstration de ces deux théorèmes fondamentaux. Il est indispensable de savoir mettre en pratique le théorème des fonctions implicites au moins dans le cas de deux variables réelles. On attend des applications en géométrie différentielle (notamment dans la formulation des multiplicateurs de Lagrange). Rappelons que les sous-variétés sont au programme.

215 : Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

Cette leçon requiert une bonne maîtrise de la notion de différentielle première et de son lien avec les dérivés partielles. Une bonne maîtrise du théorème de différentiation composée est attendue. L'énoncé doit être connu et compris ; il faut pouvoir l'appliquer dans des situations simples. Signalons aussi que cette application pose souvent problème lorsque l'une des fonctions en jeu est une fonction réelle de variable réelle, comme lorsque que l'on calcule la différentielle de l'application $x \mapsto \|x\|$ pour la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

La notion de différentielle seconde est attendue au moins pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ ainsi que les applications classiques quant à l'existence d'extremums locaux.

217 : Sous-variétés de $\mathbf{R}^n$. Exemples.

Cette leçon n'a pas eu beaucoup de succès, c'est bien dommage. Elle ne saurait être réduite à un cours de géométrie différentielle abstraite ; ce serait un contresens. Le jury attend une leçon concrète, montrant une compréhension géométrique locale. Aucune notion globale n'est exigible, ni de notion de variété abstraite. Le candidat doit pouvoir être capable de donner plusieurs représentations locales (paramétriques, équations, ...) et d'illustrer la notion d'espace tangent sur des exemples classiques. Le jury invite les candidats à réfléchir à la pertinence de l'introduction de la notion de sous-variétés. L'illustration de la leçon par des dessins est la bienvenue.

Le théorème des extremums liés devient assez transparent lorsqu'on le traite par les sous-variétés. Les groupes classiques donnent des exemples utiles de sous-variétés.

218 : Applications des formules de Taylor.

Il faut connaître les formules de Taylor des polynômes et certains développements très classiques. En général, le développement de Taylor d'une fonction comprend un terme de reste qu'il est crucial de savoir analyser. Le candidat doit pouvoir justifier les différentes formules de Taylor proposées ainsi que leur intérêt. Le jury s'inquiète des trop nombreux candidats qui ne savent pas expliquer clairement ce que signifient les notations o ou O qu'ils utilisent.

De plus la différence entre l'existence d'un développement limité à l'ordre deux et l'existence de dérivée seconde doit être connue.

Il y a de très nombreuses applications en géométrie et probabilités (par exemple le théorème central limite). On peut aussi penser à la méthode de Laplace, du col, de la phase stationnaire ou aux inégalités $||f^{(k)}|| \leqslant 2^{k(n-k)/2}||f||^{1-k/n}||f^{(n)}||^{k/n}$ (lorsque f et sa dérivée n-ième sont bornées). On soignera particulièrement le choix des développements.

219 : Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

Il faut bien faire la distinction entre propriétés locales (caractérisation d'un extremum) et globales (existence par compacité, par exemple). Dans le cas important des fonctions convexes, un minimum local est également global. Les applications de la minimisation des fonctions convexes sont nombreuses et elles peuvent illustrer cette leçon.

L'étude des algorithmes de recherche d'extremums y a toute sa place : méthode de gradient, preuve de la convergence de la méthode de gradient à pas optimal, ... Le cas particulier des fonctionnelles sur $\mathbf{R}^n$ de la forme $\frac{1}{2}(Ax|x) - (b|x)$, où A est une matrice symétrique définie positive, devrait être totalement maîtrisé. Les candidats devraient aussi être amenés à évoquer les problèmes de type moindres carrés et les équations normales qui y sont attachées. Enfin, les problèmes de minimisation sous contrainte amènent à faire le lien avec les extremums liés, la notion de multiplicateur de Lagrange et, là encore, des algorithmes peuvent être présentés et analysés.

220 : Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'études des solutions en dimension 1 et 2.

C'est l'occasion de rappeler une nouvelle fois que le jury s'alarme des nombreux défauts de maîtrise du théorème de Cauchy-Lipschitz. Il est regrettable de voir des candidats ne connaître qu'un énoncé pour les fonctions globalement lipschitziennes ou plus grave, mélanger les conditions sur la variable de temps et d'espace. La notion de solution maximale et le théorème de sortie de tout compact sont nécessaires. Bien évidemment, le jury attend des exemples d'équations différentielles non linéaires.

Le lemme de Gronwall semble trouver toute sa place dans cette leçon mais est curieusement rarement énoncé. L'utilisation du théorème de Cauchy-Lipschitz doit pouvoir être mise en œuvre sur des exemples concrets. Les études qualitatives doivent être préparées et soignées.

Pour les équations autonomes, la notion de point d'équilibre permet des illustrations de bon goût comme par exemple les petites oscillations du pendule. Trop peu de candidats pensent à tracer et discuter des portraits de phase.

Enfin, il n'est pas malvenu d'évoquer les problématiques de l'approximation numérique dans cette leçon par exemple autour de la notion de problèmes raides et de la conception de schémas implicites pour autant que la candidat ait une maîtrise convenable de ces questions.

221 : Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

On attend d'un candidat qu'il sache déterminer rigoureusement la dimension de l'espace vectoriel des solutions (dans le cas de la dimension finie, bien sûr)

Le cas des systèmes à cœfficients constants fait appel à la réduction des matrices qui doit être connue et pratiquée. L'utilisation des exponentielles de matrices doit pouvoir s'expliquer. Dans le cas général, certains candidats évoquent les généralisations de l'exponentielle (résolvante) via les intégrales itérées. Les problématiques de stabilité des solutions et le lien avec l'analyse spectrale devraient être exploitées.

222 : Exemple d'équations aux dérivées partielles linéaires.

Cette nouvelle leçon peut être abordée en faisant appel à des techniques variées et de nombreux développements pertinents peuvent être construits en exploitant judicieusement les éléments les plus classiques du programme. Le candidat ne doit pas hésiter à donner des exemples très simples (par exemple les équations de transport).

Les techniques d'équations différentielles s'expriment par exemple pour traiter $\lambda u - u'' = f$ avec des conditions de Dirichlet en $x = 0$, $x = 1$ ou pour analyser l'équation de transport par la méthode des caractéristiques.

Les séries de Fourier trouvent dans cette leçon une mise en pratique toute désignée pour résoudre l'équation de la chaleur, de Schrödinger ou des ondes dans le contexte des fonctions périodiques. La transformée de Fourier permet ceci dans le cadre des fonctions sur $\mathbf{R}^d$.

Le point de vue de l'approximation numérique donne lieu à des développements originaux, notamment autour de la matrice du laplacien et de l'analyse de convergence de la méthode des différences finies.

Des développements plus sophistiqués se placeront sur le terrain de l'analyse hilbertienne avec le théorème de Lax-Milgram, l'espace de Sobolev $H_0^1(]0,1[)$, jusqu'à la décomposition spectrale des opérateurs compacts, ou encore sur celui des distributions avec l'étude de solutions élémentaires d'équations elliptiques.

223 : Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications

Le théorème de Bolzano-Weierstrass doit être cité et le candidat doit être capable d'en donner une démonstration. On attend des candidats qu'ils parlent des limites inférieure et supérieure d'une suite réelle (bornée), et qu'ils en maîtrisent le concept.

226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples et applications.

Le jury attend d'autres exemples que la traditionnelle suite récurrente $u_{n+1} = \sin(u_n)$. Les suites homographiques réelles ou complexes fournissent des exemples intéressants, rarement évoqués.

Cette leçon doit être l'occasion d'évoquer les problématiques de convergence d'algorithmes, d'approximation de solutions de problèmes linéaires et non linéaires : dichotomie, méthode de Newton, algorithme du gradient, méthode de la puissance, méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires, schéma d'Euler, …

L'aspect vectoriel est souvent négligé. Par exemple, le jury attend des candidats qu'ils répondent de façon pertinente à la question de la généralisation de l'algorithme de Newton dans $\mathbf{R}^2$.

228 : Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

Cette leçon permet des exposés de niveaux très variés. Les théorèmes de base doivent être maîtrisés et illustrés par des exemples intéressants, par exemple le théorème des valeurs intermédiaires pour la dérivée. Le jury s'attend à ce que le candidat connaisse et puisse calculer la dérivée des fonctions usuelles. Les candidats doivent disposer d'un exemple de fonction dérivable de la variable réelle qui ne soit pas continûment dérivable. La stabilité par passage à la limite des notions de continuité et de dérivabilité par passage à la limite doit être comprise par les candidats.

Pour les candidats aguerris, la dérivabilité presque partout des fonctions lipschitziennes relève de cette leçon. Les applications du théorème d'Ascoli (par exemple les opérateurs intégraux à noyau continu, le théorème de Peano, ...), sont les bienvenues.

Pour les candidats qui maîtrisent la notion de dérivée au sens des distributions tempérées, l'étude de la dérivée au sens des distributions de la primitive d'une fonction intégrable est un résultat intéressant.

229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

Les propriétés de continuité et de dérivabilité à gauche et à droite des fonctions convexes de la variable réelle sont attendues. Il est souhaitable d'illustrer la présentation de la convexité par des dessins clairs, même si ces dessins ne peuvent remplacer un calcul. On notera que la monotonie concerne (à ce niveau) les fonctions réelles d'une seule variable réelle, mais que la convexité concerne également les fonctions définies sur une partie convexe de $\mathbb{R}^n$, qui fournissent de beaux exemples d'utilisation.

Pour les candidats solides, la dérivabilité presque partout des fonctions monotones est un résultat remarquable (dont la preuve peut être éventuellement admise). L'espace vectoriel engendré par les fonctions monotones (les fonctions à variation bornée) relève de cette leçon.

Pour les candidats aguerris, la dérivation au sens des distributions fournit les caractérisations les plus générales de la monotonie et de la convexité et les candidats bien préparés peuvent s'aventurer utilement dans cette direction.

230 : Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

De nombreux candidats commencent leur plan par une longue exposition des conditions classiques assurant la convergence ou la divergence des séries numériques. Sans être véritablement hors sujet, cette exposition ne doit pas former l'essentiel de la matière de la leçon. Le thème central de la leçon est en effet le comportement asymptotique des restes et sommes partielles (équivalents, ...) et leurs applications diverses, comme par exemple des résultats d'irrationalité, voire de transcendance. Enfin on rappelle que la transformation d'Abel trouve toute sa place dans cette leçon.

232 : Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.

Trop de candidats se limitent au simple cas où X est une variable scalaire. Il serait bon d'envisager les extensions des méthodes classiques dans le cas vectoriel. Au delà de la méthode de Newton, d'intéressants développements peuvent s'intéresser à la résolution de systèmes linéaires, notamment par des méthodes itératives. À propos de la version bidimensionnelle de la méthode de Newton, il convient de comprendre la généralisation en dimension supérieure de la division par la dérivée.

233 : Analyse numérique matricielle : résolution approchée de systèmes linéaires, recherche de vecteurs propres, exemples.

Cette leçon puise une bonne part de son contenu dans le programme complémentaire de l'oral, commun aux différentes options. Les notions de norme matricielle et de rayon spectral sont bien sûr centrales pour ce sujet où le rôle du conditionnement dans l'étude de sensibilité des solutions de systèmes linéaires doit être bien identifié. L'analyse de convergence des méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires, en identifiant leurs avantages par rapport aux méthodes directes, trouve naturellement sa place dans cette leçon, tout comme l'étude d'algorithmes de recherche d'éléments propres, avec la méthode de la puissance (ou la méthode QR) et des applications à des matrices vérifiant les hypothèses des théorèmes de Perron-Frobenius. Le cas particulier des matrices symétriques définies positives doit amener à faire le lien avec les problèmes de minimisation et les méthodes de gradient. On notera d'ailleurs que de tels développements peuvent aussi être exploités avec bonheur dans la leçon 226.

Les techniques d'analyse permettent aussi l'investigation des propriétés spectrales de matrices et la localisation de valeurs propres de matrices (théorème de Gershgörin, suites de Sturm). Le jury encourage les candidats à illustrer leur propos d'exemples pertinents issus de la théorie de l'interpolation ou de la résolution approchée de problèmes aux limites, incluant l'analyse de stabilité de méthodes numériques.

234 : Espaces L^p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.

Le jury a apprécié les candidats sachant montrer qu'avec une mesure finie $L^2 \subset L^1$ (ou même $L^p \subset L^q$ si $p \geqslant q$). Il est important de pouvoir justifier l'existence de produits de convolution (exemple $L^1 \star L^1$). Par ailleurs, les espaces associés à la mesure de comptage sur $\mathbf{N}$ ou $\mathbf{Z}$ fournissent des exemples pertinents non triviaux à propos desquels des développements peuvent être proposés comme la complétude ou pour les candidats plus solides la description du dual.

236 : Illustrater par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables .

Dans cette leçon, il est souhaitable de présenter des utilisations du théorème des résidus, ainsi que des exemples faisant intervenir les intégrales multiples. On peut aussi penser à l'utilisation du théorème d'inversion de Fourier ou du théorème de Plancherel. Le calcul du volume de la boule unité de $\mathbf{R}^n$ ne devrait pas poser de problèmes insurmontables.

239 : Fonctions définies par une intégrales dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Cette leçon peut être enrichie par des études et méthodes de comportements asymptotiques. Les différentes transformations classiques (Fourier, Laplace, ...) relèvent aussi de cette leçon.

240 : Produit de convolution, Transformation de Fourier. Applications.

Cette leçon nécessite une bonne maîtrise de questions de base telle que la définition du produit de convolution de deux fonctions de L^1. En ce qui concerne la transformation de Fourier, elle ne doit pas se limiter à une analyse algébrique de la transformation de Fourier. C'est bien une leçon d'analyse, qui nécessite une étude soigneuse des hypothèses, des définitions et de la nature des objets manipulés. Le lien entre la régularité de la fonction et la décroissance de sa transformée de Fourier doit être fait, même sous des hypothèses qui ne sont pas minimales.

La formule d'inversion de Fourier pour une fonction L^1 dont la transformée de Fourier est aussi L^1 ainsi que les inégalités de Young sont attendues ainsi que l'extension de la transformée de Fourier à l'espace L^2 par Fourier-Plancherel. Des exemples explicites de calcul de transformations de Fourier paraissent nécessaires.

Les candidats solides peuvent aborder ici la résolution de l'équation de la chaleur, de Schrödinger pour des fonctions assez régulières, ou la détermination des solutions élémentaires du Laplacien ou de l'opérateur $k^2 - \frac{d^2}{dx^2}$.

La transformation de Fourier des distributions tempérées ainsi que la convolution dans le cadre des distributions tempérées trouvent leur place ici mais sont réservées aux candidats aguerris. On peut aussi considérer l'extension de la transformée de Fourier à la variable complexe, riche d'applications par exemple dans la direction du théorème de Paley-Wiener.

241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

Une fois les résultats généraux énoncés, on attend du candidat qu'il évoque les séries de fonctions particulières classiques : séries entières, série de Fourier. On pourra éventuellement s'intéresser aussi aux séries de Dirichlet.

243 : Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

Le théorème d'Abel (radial ou sectoriel) trouve toute sa place mais doit être agrémenté d'exercices pertinents. Il est regrettable de voir beaucoup de candidats qui maîtrisent raisonnablement les classiques du comportement au bord du disque de convergence traiter cette leçon en faisant l'impasse sur la variable complexe. C'est se priver de beaux exemples d'applications ainsi que du théorème de composition, pénible à faire dans le cadre purement analytique et d'ailleurs très peu abordé. Le jury attend aussi que le candidat puisse donner des arguments justifiant qu'une série entière en 0 dont le rayon de convergence est R est développable en série entière en un point z_0 intérieur au disque de convergence et de minorer le rayon de convergence de cette série.

245 : Fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications.

Les conditions de Cauchy-Riemann doivent être parfaitement connues et l'interprétation de la différentielle en tant que similitude directe doit être comprise. La notation $\int_\gamma f(z)dz$ a un sens précis, qu'il faut savoir expliquer. Par ailleurs, même si cela ne constitue pas le cœur de la leçon, il faut connaître la définition d'une fonction méromorphe (l'ensemble des pôles doit être une partie fermée discrète).

Pour les candidats aguerris, cette leçon offre beaucoup de possibilités, notamment en lien avec la topologie du plan.

246 : Série de Fourier. Exemples et applications.

Les différents modes de convergence (L^2, Fejer, Dirichlet, ...) doivent être connus. Il faut avoir les idées claires sur la notion de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux (elles ne sont pas forcément continues). Dans le cas d'une fonction continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux on peut conclure sur la convergence normale de la série Fourier sans utiliser le théorème de Dirichlet.

Il est souhaitable que cette leçon ne se réduise pas à un cours abstrait sur les cœfficients de Fourier. La résolution des équations de la chaleur, de Schrödinger et des ondes dans le cadre de fonctions assez régulières peuvent illustrer de manière pertinente cette leçon.

249 : Suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes.

La notion d'indépendance ainsi que les théorèmes de convergence (loi des grands nombres et théorème central limite) doivent être rappelés. La loi binômiale doit être évoquée et le lien avec la leçon expliqué.

Il peut être intéressant de donner une construction explicite d'une suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes.

Certains candidats plus aguerris pourront s'intéresser au comportement asymptotique de marches aléatoires (en utilisant par exemple le lemme de Borel-Cantelli), ou donner des inégalités de grandes déviations.

254 : Espaces de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ et distributions tempérées. Dérivation et transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ et $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$.

Rappelons une fois de plus que les attentes du jury sur ces leçons restent modestes. Elles se placent au niveau de ce qu'un cours de première année de master sur le sujet peut contenir. Aucune subtilité topologique portant sur l'espace des distributions tempérées n'est attendue. Par contre, on attend du candidat qu'il comprenne le rôle fondamental joué par la dualité dans la définition des opérations sur les distributions tempérées. Il faut aussi savoir faire le lien entre décroissance de la transformée de Fourier et régularité de la fonction.

Le fait que la transformée de Fourier envoie $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ dans lui même avec de bonnes estimations des semi-normes doit être compris et la formule d'inversion de Fourier maîtrisée dans ce cadre.

Le passage à $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ repose sur l'idée de dualité qui est le cœur de cette leçon. Des exemples de calcul de transformée de Fourier peuvent être données, classiques comme la gaussienne ou $(1+x^2)^{-1}$ et d'autres liées à la théorie des distributions comme la détermination de la transformée de Fourier d'une constante.

Cette leçon ne doit pas se réduire à une dissertation abstraite sur le dual topologique d'un espace de Fréchet séparable. Le candidat doit maîtriser des exemples comme la valeur principale, pouvoir calculer leur dérivée et comprendre ce qu'est la transformée de Fourier d'une fonction constante.

Les candidats ambitieux peuvent par exemple déterminer la transformée de Fourier de la valeur principale, la solution fondamentale du laplacien, voire résoudre l'équation de la chaleur ou de Schrödinger.

260 : Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.

Le jury attend des candidats qu'ils donnent la définition des moments centrés, qu'ils rappellent les implications d'existence de moments. Les inégalités classiques (de Markov, de Bienaymé-Chebychev, de Jensen et de Cauchy-Schwarz) pourront être données, ainsi que les théorèmes de convergence (loi des grands nombres et théorème central limite).

Le comportement des moyennes pour une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées n'admettant pas d'espérance pourra être étudié.

La notion de fonction génératrice des moments pourra être présentée.

261 : Fonction caractéristique et transformée de Laplace d'une variable aléatoire. Exemples et applications.

Le jury attend l'énoncé du théorème de Lévy et son utilisation dans la démonstration du théorème central limite.

Les candidats pourront présenter l'utilisation de la fonction caractéristique pour le calcul de lois de sommes de variables aléatoires indépendantes et faire le lien entre la régularité de la fonction caractéristique et l'existence de moments.

Enfin la transformée de Laplace pourra être utilisée pour établir des inégalités de grandes déviations.

262 : Mode de convergence d'une suite de variables aléatoires. Exemples et applications.

Les implications entre les divers modes de convergence, ainsi que les réciproques partielles doivent être connues. Des contre-exemples aux réciproques sont attendus par le jury.

Les théorèmes de convergence (lois des grands nombres et théorème central limite) doivent être énoncés.

Les candidats plus aguerris pourront présenter le lemme de Slutsky (et son utilisation pour la construction d'intervalles de confiance).

263 : Variables aléatoires à densité. Exemples et applications.

Le jury attend des candidats qu'ils rappellent la définition d'une variable aléatoire à densité et que des lois usuelles soient présentées, en lien avec des exemples classiques de modélisation.

Le lien entre l'indépendance et la convolution pourra être étudié.

Les candidats pourront expliquer comment fabriquer n'importe quelle variable aléatoire à partir d'une variable uniforme sur $[0, 1]$ et l'intérêt de ce résultat pour la simulation informatique.

Pour aller plus loin, certains candidats pourront aborder la notion de vecteurs gaussiens et son lien avec le théorème central limite.

264 : Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Le jury attend des candidats qu'ils rappellent la définition d'une variable aléatoire discrète et que des lois usuelles soient présentées, en lien avec des exemples classiques de modélisation. Le lien entre variables aléatoires de Bernoulli, binômiale et de Poisson doit être discuté.

Les techniques spécifiques aux variables discrètes devront être abordées (comme par exemple la caractérisation de la convergence en loi). La notion de fonction génératrice pourra être abordée.

Pour aller plus loin, les candidats ambitieux pourront étudier les chaînes de Markov à espaces d'états finis ou dénombrables.

5.2.5 Remarques sur l'épreuve de leçon de mathématiques - Option D

Dans cette épreuve, le candidat tire un couple de sujets au sein d'une liste d'une quarantaine de sujets d'algèbre et d'analyse extraite de la liste générale des autres options du concours. **Il n'y a donc plus nécessairement un sujet d'algèbre et un sujet d'analyse !** Il peut y avoir deux sujets d'algèbre ou deux sujets d'analyse, par exemple : *Loi binomiale* et *Fonctions monotones*. Le programme précise en effet :

> *Les candidats se verront proposer deux sujets, dans un corpus d'algèbre, de géométrie, d'analyse et de probabilités.*

Il est donc impératif que les candidats ajustent leur préparation à cette organisation.

Le jury a interrogé les candidats dans le même esprit que dans les autres options et les critères d'évaluation étaient strictement identiques.

Notons toutefois que lorsqu'ils avaient le choix, les candidats ont le plus souvent préféré les sujets d'algèbre à ceux d'analyse. Nous conseillons vivement aux futurs candidats de cette option de ne pas négliger leur formation en analyse et probabilités.

Les remarques détaillées concernant cette épreuve ne sont pas différentes des remarques concernant les épreuves de leçon des autres options, et le lecteur est invité à se reporter à la section du rapport consacrée à ce point.

5.3 Épreuves orales Option D : Informatique

5.3.1 Remarques sur l'épreuve de leçon d'Informatique - Option D

Les sujets des leçons se répartissent en quatre grands domaines, bien identifiés : algorithmique (avec par exemple la leçon 902 : « *Diviser pour régner : exemples et applications* »), calculabilité et complexité (avec par exemple la leçon 928 : « *Problèmes NP-complets : exemples de réductions* »), langages et automates (avec par exemple la leçon 910 : « *Langages algébriques. Exemples et applications* »), et logique et preuves (avec par exemple la leçon 919 : « *Unification : algorithmes et applications* »).

De manière générale, le jury a apprécié la qualité de certaines leçons présentées, notamment parmi les leçons les plus avancées, ce qui confirme le bon travail des préparations spécifiques en amont du concours. Ceci est particulièrement net dans les plans des présentations proposées. Beaucoup de candidats cernent bien le sujet de leurs leçons et proposent des développements intéressants.

A contrario, le jury a constaté que des candidats ont choisi l'option D apparemment au hasard, et ne comprenaient même pas les intitulés des leçons. L'épreuve de la leçon est une épreuve difficile, qui couvre des domaines variés couvrant largement le champ de la science informatique. Elle ne peut être réussie que si elle est préparée sérieusement et sur une période longue, et *il serait illusoire de choisir cette option par défaut, sans préparation*.

Le niveau constaté est assez hétérogène, ce qui conduit à une grande dispersion des notes. Le jury n'hésite pas à utiliser toute l'étendue de la plage de notation.

Organisation de la leçon : Le jury rappelle qu'il s'agit bien d'une épreuve d'*informatique fondamentale*, et non pas d'outils mathématiques pour l'informatique. Il appartient au candidat de montrer la pertinence des outils mathématiques qu'il développe vis-à-vis des objectifs du thème informatique développé dans la leçon.

La présentation d'outils mathématiques pour eux-mêmes, en particulier lorsqu'il s'agit d'outils sophistiqués comme ceux de la théorie de la calculabilité ou de la théorie des types, s'apparente donc à un *hors-sujet*. Ce point avait déjà été souligné dans les précédents rapports et les titres des leçons ont été affinés en conséquence. Les titres des leçons concernant des modèles formels de l'informatique sont maintenant libellés en mentionnant explicitement *exemples et applications*, ce qui devrait ramener le candidat aux réels attendus de l'épreuve.

Les deux questions-clés de cette épreuve sont toujours les mêmes :
— à quoi cet outil mathématique sert-il dans le cadre informatique considéré ? Pouvez-vous décrire quelques exemples pertinents de son application concrète ?
— la complexité ou le coût de son utilisation sont-ils bien compensés par la qualité supplémentaire d'information qu'il permet d'obtenir ?

Ces questions sont très souvent posées par le jury, sous une forme ou une autre. Le jury invite les candidats à se préparer tout particulièrement à gérer ce type de questions, centrales dans la pédagogie de l'informatique au niveau des lycées et des classes préparatoires.

Enfin, il faut rappeler que lors de la présentation de son plan, le candidat doit proposer au moins deux développements : le jury est attentif d'une part à ce que ces développements entrent strictement dans le cadre de la leçon, et que d'autre part ils ne se réduisent pas à des exemples triviaux. Tout hors sujet est sévèrement pénalisé.

Interaction avec le jury : Une large partie de l'épreuve est consacrée à l'interaction avec le jury. En informatique, il s'agit plutôt d'explorer de manière plus approfondie les notions qui ont été présentées, les domaines connexes, et surtout les *exemples d'application* de ces notions.

L'interaction est conduite sous la forme d'un *dialogue* avec le candidat. Le jury respecte le niveau choisi par le candidat : les questions s'ajustent à ce niveau. De même, toute digression du candidat sur un domaine connexe à celui de la leçon conduira le jury à tester les connaissances du candidat sur ce domaine : les connaissances solides seront récompensées, mais un manque de maîtrise sur des notions choisies par le candidat lui-même seront pénalisées.

Ce long temps d'interaction doit être considéré comme une *occasion privilégiée* pour le candidat de montrer ses connaissances à lui, ou à elle, de guider le jury dans la direction adéquate. Il est indispensable que les candidats s'entraînent à ce type d'exercice avec leurs préparateurs.

5.3.2 Commentaires sur quelques leçons d'Informatique

Voici quelques points plus spécifiques concernant les leçons.

Les leçons 908, *Automates finis. Exemples et applications.* et 909 ont été regroupées. Il en est de même pour les leçons 910, *Langages algébriques. Exemples et applications.* et 911, *Automates à pile. Exemples et applications.*

901 : Structures de données : exemples et applications.

Le mot *algorithme* ne figure pas dans l'intitulé de cette leçon, même si l'utilisation des structures de données est évidemment fortement liée à des questions algorithmiques.

La leçon doit donc être orientée plutôt sur la question du choix d'une structure de données que d'un algorithme. Le jury attend du candidat qu'il présente différents types abstraits de structures de données en donnant quelques exemples de leur usage avant de s'intéresser au choix de la structure concrète. Le candidat ne peut se limiter à des structures linéaires simples comme des tableaux ou des listes, mais doit présenter également quelques structures plus complexes, reposant par exemple sur des implantations à l'aide d'arbres.

902 : Diviser pour régner : exemples et applications.

Cette leçon permet au candidat de proposer différents algorithmes utilisant le paradigme *diviser pour régner*. Le jury attend du candidat que ces exemples soient variés et touchent des domaines différents.

Un calcul de complexité ne peut se limiter au cas où la taille du problème est une puissance exacte de 2, ni à une application directe d'un théorème très général recopié approximativement d'un ouvrage de la bibliothèque de l'agrégation.

903 : Exemples d'algorithmes de tri. Complexité.

Sur un thème aussi classique, le jury attend des candidats la plus grande précision et la plus grande rigueur.

Ainsi, sur l'exemple du tri rapide, il est attendu du candidat qu'il sache décrire avec soin l'algorithme de partition et en prouver la correction et que l'évaluation des complexités dans le cas le pire et en moyenne soit menée avec rigueur.

On attend également du candidat qu'il évoque la question du tri en place, des tris stables, ainsi que la représentation en machine des collections triées.

Le jury ne manquera pas de demander au candidat des applications non triviales du tri.

906 : Programmation dynamique : exemples et applications.

Même s'il s'agit d'une leçon d'exemples et d'applications, le jury attend des candidats qu'ils présentent les idées générales de la programmation dynamique et en particulier qu'ils aient compris le caractère générique de la technique de mémoïsation. Le jury appréciera que les exemples choisis par le candidat couvrent des domaines variés, et ne se limitent pas au calcul de la longueur de la plus grande sous-séquence commune à deux chaînes de caractères.

Le jury ne manquera pas d'interroger plus particulièrement le candidat sur la question de la correction des algorithmes proposés et sur la question de leur complexité en espace.

907 : Algorithmique du texte : exemples et applications.

Cette leçon devrait permettre au candidat de présenter une grande variété d'algorithmes et de paradigmes de programmation, et ne devrait pas se limiter au seul problème de la recherche d'un motif dans un texte, surtout si le candidat ne sait présenter que la méthode naïve.

De même, des structures de données plus riches que les tableaux de caractères peuvent montrer leur utilité dans certains algorithmes, qu'il s'agisse d'automates ou d'arbres par exemple.

Cependant, cette leçon ne doit pas être confondue avec la *909 : Langages rationnels. Exemples et applications* ni avec la *910 : Langages algébriques. Exemples et applications.*

La compression de texte peut faire partie de cette leçon si les algorithmes présentés contiennent effectivement des opérations comme les comparaisons de chaînes : la compression LZW, par exemple, ressortit davantage à cette leçon que la compression de Huffman.

909 : Langages rationnels. Exemples et applications.

Des applications dans le domaine de la compilation entrent naturellement dans le cadre de ces leçons.

915 : Classes de complexité. Exemples.

Le jury attend que le candidat aborde à la fois la complexité en temps et en espace. Il faut naturellement exhiber des exemples de problèmes appartenant aux classes de complexité introduites, et montrer les relations d'inclusion existantes entre ces classes.

Le jury s'attend à ce que le caractère strict ou non de ces inclusions soit abordé, en particulier le candidat doit être capable de montrer la non-appartenance de certains problèmes à certaines classes.

Parler de décidabilité dans cette leçon serait hors sujet.

916 : Formules du calcul propositionnel : représentation, formes normales, satisfiabilité. Applications.

Le jury attend des candidats qu'ils abordent les questions de la complexité de la satisfiabilité.

Pour autant, les applications ne sauraient se réduire à la réduction de problèmes NP-complets à SAT.

Une partie significative du plan doit être consacrée à la représentation des formules et à leurs formes normales.

917 : Logique du premier ordre : syntaxe et sémantique.

La question de la syntaxe dépasse celle de la définition des termes et des formules. Elle comprend aussi celle des règles de la démonstration.

Le jury attend donc du candidat qu'il présente au moins un système de preuve et les liens entre syntaxe et sémantique, en développant en particulier les questions de correction et complétude.

920 : Réécriture et formes normales. Exemples.

Au-delà des propriétés standards (terminaison, confluence) des systèmes de réécriture, le jury attend notamment du candidat qu'il présente des exemples sur lesquels l'étude des formes normales est pertinente dans des domaines variés : calcul formel, logique, etc.

Un candidat ne doit pas s'étonner que le jury lui demande de calculer des paires critiques sur un exemple concret.

Lorsqu'un résultat classique comme le lemme de Newman est évoqué, le jury attend du candidat qu'il sache le démontrer.

927 : Exemples de preuve d'algorithme : correction, terminaison.

Le jury attend du candidat qu'il traite des exemples d'algorithmes récursifs et des exemples d'algorithmes itératifs.

En particulier, le candidat doit présenter des exemples mettant en évidence l'intérêt de la notion d'invariant pour la correction partielle et celle de variant pour la terminaison des segments itératifs.

Une formalisation comme la logique de Hoare pourra utilement être introduite dans cette leçon, à condition toutefois que le candidat en maîtrise le langage.

928 : Problèmes NP-complets : exemples et réduction

L'objectif ne doit pas être de dresser un catalogue le plus exhaustif possible ; en revanche, pour chaque exemple, il est attendu que le candidat puisse au moins expliquer clairement le problème considéré, et indiquer de quel autre problème une réduction permet de prouver sa NP-complétude.

Les exemples de réduction seront autant que possible choisis dans des domaines variés : graphes, arithmétique, logique, etc. Un exemple de problème NP-complet dans sa généralité qui devient P si on contraint davantage les hypothèses pourra être présenté, ou encore un algorithme P approximant un problème NP-complet.

Si les dessins sont les bienvenus lors du développement, le jury attend une définition claire et concise de la fonction associant, à toute instance du premier problème, une instance du second ainsi que la preuve rigoureuse que cette fonction permet la réduction choisie.

Chapitre 6

Épreuve orale de modélisation

6.1 Organisation des épreuves de Modélisation

Deux textes au choix sont proposés à l'épreuve de modélisation. Le jury souhaite rappeler ce qu'il attend des candidats dans cette épreuve. Les remarques concernant l'organisation de l'épreuve de modélisation s'appliquent à toutes les options, y compris à l'épreuve d'« analyse des systèmes informatiques » qui en est la version pour l'option D (informatique). Des remarques supplémentaires, spécifiques à cette épreuve, seront données plus loin, dans le cadre de la partie du rapport consacrée à l'option informatique.

Les textes sont surmontés du bandeau suivant :

> *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Il vous est conseillé de construire un exposé évitant la paraphrase et mettant en lumière vos connaissances, à partir des éléments du texte. Vous êtes libre d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des pistes de réflexion, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte ; vous n'êtes pas tenu de les suivre. Le propos devra être illustré par des traitements ou des simulations numériques sur ordinateur, ou, à défaut, des propositions de telles illustrations. Le jury souhaiterait que le plan de la présentation soit annoncé au début de l'exposé.*

et se terminent par le texte suivant :

> *Les pistes de réflexion suivantes ne sont qu'indicatives : vous n'êtes pas obligé de les suivre. Vous pouvez choisir d'étudier certains des points proposés, de façon plus ou moins approfondie, mais aussi toute autre question à votre initiative. Vos investigations comporteront une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats. À défaut, si vos traitements ou simulations numériques n'ont pas abouti, il est conseillé d'expliquer ce que vous auriez souhaité mettre en œuvre.*

L'interrogation dure 1 heure et 5 minutes, pendant laquelle le candidat gère comme il le désire le tableau et les illustrations informatiques qu'il entend présenter. Le candidat doit préparer un exposé d'environ 40 minutes, les 25 minutes restantes étant occupées par les questions du jury.

Le texte est court, environ 5 pages, motivé par un problème concret. Il peut présenter des arguments rapides, voire heuristiques (signalés comme tels). Il ne contient pas d'assertion délibérément trompeuse et se conclut par une liste de suggestions.

Le candidat dispose pendant sa préparation et l'interrogation d'un ordinateur dont la configuration est décrite sur le site de l'agrégation de mathématiques, à l'adresse `http://www.agreg.org`.

6.2 Recommandations du jury, communes aux options A, B, C

6.2.1 Recommandations pour l'exposé

Recommandations du jury, communes aux 3 options

Le jury tient à souligner les attentes partagées entre les trois options A (Probabilités et Statistiques), B (Calcul Scientifique) et C (Calcul Formel).

Dans cette épreuve, le candidat est appelé à **faire preuve d'initiative** pour s'exprimer et manifester ses qualités pédagogiques et de synthèse. Le texte fourni est un point de départ pour construire et exposer un traitement mathématique d'un problème «concret» en s'appuyant sur les éléments, généralement partiels, disséminés dans le texte. La présentation doit s'appuyer sur un dosage cohérent et harmonieux entre introduction motivée de modèles, preuves mathématiques, illustrations informatiques, critiques éventuelles du texte, réponses aux questions et mise en lumière de connaissances. Il n'y a pas de «format type» et des prestations très différentes, dans leur forme et leur contenu, sur un même texte, éventuellement traité de façon partielle mais en profondeur, peuvent conduire également à des notes élevées.

Comme le candidat se le voit rappeler en début d'épreuve, il doit exposer son travail à un public qui n'est pas censé connaître le texte, et ce de façon à le lui faire comprendre. Le jury, tout en étant conscient des difficultés du concours, attend un minimum d'aisance au tableau, la manifestation d'une certaine volonté de capter l'attention de l'auditoire et un discours clair et précis. Il est recommandé aux candidats de consacrer une partie de leur temps de préparation à s'interroger sur la stratégie d'exploitation du tableau et d'utilisation de l'outil informatique qui leur permettra de mettre au mieux en valeur leurs connaissances et leur compréhension du texte ou d'une partie de celui-ci. En début d'épreuve, il est demandé au candidat d'annoncer **le plan** qui va structurer sa présentation. Répondre à cette requête ne peut s'improviser et doit faire l'objet d'une réflexion préalable durant la préparation. Le jury regrette de ne pas voir davantage de dessins (soignés) ou schémas explicatifs qui peuvent rendre l'argumentation plus claire et convaincante. La capacité à revenir sur le problème de départ et à conclure quant à l'efficacité de l'approche mathématique proposée pour y répondre est une qualité très appréciée. La rigueur et la clarté de l'organisation, la gestion du temps, la pertinence des choix opérés parmi les différentes questions soulevées par le texte sont des éléments de l'évaluation. Les qualités de synthèse sont aussi appelées à s'exprimer : il vaut mieux indiquer les étapes cruciales d'un raisonnement que de se lancer dans un long calcul fastidieux qu'on aura du mal à mener à bien. À un survol superficiel de l'intégralité du texte sans apport mathématique ou critique scientifique, le candidat doit préférer une discussion fouillée d'une portion du texte, bâtie sur des arguments mathématiques solides, des simulations pertinentes accompagnées de commentaires de bon aloi.

Le candidat est invité à mobiliser ses connaissances, sur des aspects variés du programme, pour enrichir son propos, en étayant les arguments seulement esquissés dans le texte par des **énoncés précis.** Il est totalement illusoire de chercher à impressionner le jury par une logorrhée de mots savants : les textes proposés peuvent être discutés en exploitant un bagage technique qui n'utilise pas les éléments les plus sophistiqués du programme. Quoi qu'il en soit, le jury ne manque pas de s'attarder sur toute notion amenée par le candidat durant sa présentation et il est toujours dommageable de s'aventurer sur des terrains méconnus. Bien plus qu'une démonstration de virtuosité technique, le jury attend que le candidat montre sa maîtrise d'énoncés relativement simples «en situation» : c'est là que réside une des difficultés principales de l'épreuve. Nombre de candidats éprouvent des difficultés à **formaliser** précisément des notions de base du programme ou à mettre en œuvre certaines de leurs connaissances en algèbre, géométrie, et analyse pour l'étude des modèles. *A contrario*, utiliser une portion excessive du temps de parole pour recycler un développement d'une leçon d'analyse ou de mathématiques générales en s'éloignant des enjeux du texte est considéré comme un hors sujet sévérement sanctionné. La paraphrase pure et simple d'amples portions du texte ne constitue en aucun cas un exposé satisfaisant. Les textes fournissent souvent des esquisses de démonstrations qui sont précisément destinées à être complétées et commentées. Le jury n'est pas dupe des candidats qui tentent de faire semblant de connaître une notion ou d'avoir compris un point du texte ou une démonstration. Il ne se laisse pas tromper non plus par les candidats qui font des indications du texte un argument d'autorité, tentative maladroite de masquer des insuffisances techniques. Un regard critique («il faudrait prouver que... mais je n'ai pas réussi à le faire», «les hypothèses du théorème de XXX que je connais pour aborder des problèmes similaires ne sont pas satisfaites dans le cas présent»...) est une attitude bien plus payante.

Enfin, le jury s'alarme de l'extrême faiblesse des connaissances en **algèbre linéaire**, les manipulations et raisonnements les plus élémentaires sont excessivement laborieux (calcul matriciel, certains candidats semblant découvrir qu'il puisse exister des matrices non carrées, résolution de systèmes linéaires, norme de matrices, décomposition spectrale et réduction).

Illustration informatique

Le jury rappelle son fort attachement à cet aspect de l'épreuve, dont les ambitions sont clairement délimitées. Il ne s'agit en aucun cas, et pour aucune des 3 options, d'un exercice de programmation. L'objectif est d'être capable d'utiliser l'outil informatique pour illustrer, de façon pertinente, le contenu du texte. La réalisation de cet objectif constitue une part incompressible de la note finale attribuée à l'épreuve. Une très bonne évaluation peut résulter d'une exploitation judicieuse de programmes simples, reposant largement sur les routines standards des logiciels fournis. À ce propos il n'est évidemment pas réaliste de découvrir ces logiciels le jour de l'épreuve : la configuration informatique utilisée pour le concours et sa documentation sont accessibles et téléchargeables sur le site officiel de l'agrégation et permettent de se familiariser avec l'environnement offert pour l'épreuve. La forme et la nature des illustrations proposées n'obéissent à aucun format préétabli. En revanche, elles doivent faire la preuve d'une véritable réflexion scientifique et être agrémentées de commentaires, sur les résultats et les méthodes. Même si les simulations ne sont pas abouties («ça ne marche pas»), le jury sait valoriser la démarche suivie lorsqu'elle est clairement argumentée et permettrait, avec des aménagements mineurs, de mettre en évidence des aspects intéressants du texte.

6.3 Option A : probabilités et statistiques

Le niveau de la session 2015 de ce concours en ce qui concerne l'option A a été légèrement meilleur à celui de 2014. Comme lors des dernières sessions, on doit cependant regretter que de nombreux candidats, par manque de préparation ou de connaissances, aient présenté des exposés bien trop courts ou bien trop vides. Un nombre non négligeable de candidats ont montré un bon, voire un très bon niveau, mais il semble clair que le niveau des candidats ne se répartit pas selon une loi gaussienne.

Cette épreuve de modélisation, pour ce qui concerne ici l'option A, doit permettre au candidat de mettre en avant diverses qualités : les connaissances mathématiques, la réflexion et la mise en perspective de ses connaissances, l'aptitude à appliquer des mathématiques à des problèmes concrets de modélisation, la pertinence du choix des illustrations informatiques et les qualités pédagogiques de mise en forme d'un exposé construit et cohérent. La capacité du candidat à répondre aux questions qui lui sont posées fait partie intégrante de l'évaluation de cette leçon. Comme pour l'ensemble des oraux, le caractère dynamique de l'exposé apporte une valeur ajoutée conséquente sur l'évaluation.

Le jury tient à rappeler que l'exposé doit être construit par le candidat en s'appuyant sur le contenu du texte et des suggestions qui y sont présentes, mais que la paraphrase simple des résultats avec un suivi linéaire de la structure du texte ne saurait constituer un exposé satisfaisant. Les textes ne sont en général que survolés dans leurs premières parties, qui reprennent souvent des notions simples du programme, alors que l'intérêt scientifique se situe dans les dernières parties du texte qui permettent aux candidats de montrer une étendue de connaissances et une faculté d'adaptation à des contextes mathématiques moins classiques que l'on est en droit d'attendre d'un bon candidat à l'agrégation. Les candidats se contentant d'un survol verbeux du texte sans aucunement rentrer dans les détails techniques ne peuvent que laisser une très mauvaise impression au jury, qui attend au moins le développement précis d'une preuve non triviale proposée dans les suggestions du texte.

Connaissance du programme

Les textes proposés comportent souvent les deux aspects probabiliste et statistique. Cependant il n'est pas impossible de se voir proposer le choix entre deux textes où l'aspect statistique est plus marqué : il est donc nécessaire que les candidats fassent un effort de formation et de culture statistique plus poussé qu'ils ne l'ont montré au cours de cette session et des précédentes. La part importante de la statistique dans l'enseignement des mathématiques, part qui devrait encore s'accroître dans les années futures, justifie que les futurs professeurs soient bien formés à la démarche statistique. De plus, lors de la discussion avec le candidat, le jury peut interroger celui-ci sur la totalité du programme. En particulier, il est systématique que le jury pose des questions de nature statistique à partir des textes à coloration probabiliste et inversement.

Il ne faut pas non plus que les candidats oublient que statistique et probabilités font appel à des résultats issus d'autres domaines des mathématiques. Ainsi le jury attend une utilisation pertinente de notions d'algèbre (en particulier linéaire), de géométrie et d'analyse dans l'exposé du candidat. La modélisation stochastique faisant appel à toutes les connaissances des mathématiques, le candidat doit montrer qu'il en est conscient et capable de les appliquer à bon escient.

Contenu théorique en probabilités-statistique

Le jury s'attend au moins à un socle de connaissances minimales que ce soit en probabilités ou en statistique : les différentes notions de convergence, l'indépendance entre variables aléatoires, la loi forte des grands nombres et le théorème de la limite centrale, les notions d'estimation et de test paramétriques... Ceci n'est finalement maitrisé que par peu de candidats. Ne parlons pas des différents modes de convergence des chaînes de Markov ou des martingales ou la mise en place de tests statistiques paramétriques qui ne sont généralement pas connus. Rappelons que certains points du programme (intervalles de confiance, théorème limite central...) figurent désormais au programme du lycée et doivent donc être maîtrisés par de futurs enseignants.

Le jury attend également des candidats la connaissance des techniques classiques de calcul utilisées en probabilités-statistiques (calcul d'une loi image par changement de variable, utilisation de la fonction caractéristique pour la convergence en loi, utilisation de la notion de conditionnement pour calculer une espérance, détermination d'un estimateur par moindres carrés...). Le jury regrette que certains candidats connaissent des théorèmes très abstraits de la théorie de la mesure avec des mots très savants (boréliens, mesure image, théorème de transfert, ergodicité, etc) sans être capables de calculer une espérance pour une loi usuelle. L'épreuve demande une réelle appropriation d'un langage, celui des probabilités et de la statistique, et de techniques très spécifiques, qui est fort peu compatible avec une préparation superficielle ou uniquement théorique.

À titre de satisfaction, on notera lors de cette session des progrès en ce qui concerne la connaissance de la notion de mesure invariante pour les chaînes de Markov, l'utilisation du lemme de Slutsky, la construction des intervalles de confiance et l'obtention de l'estimateur par maximum de vraisemblance.

Modélisation et mise en œuvre informatique

Il est rappelé que même si la plupart des textes s'appuient sur des problèmes issus de sciences autres que les mathématiques, aucune connaissance dans ces domaines n'est exigée par le jury. Discuter la modélisation proposée par un texte consiste donc avant tout à dégager les comportements qualitatifs du modèle mathématique proposé, la manière dont il dépend d'éventuels paramètres et, à un niveau tout à fait élémentaire, s'il semble apte à rendre compte des phénomènes qu'il est censé représenter. Le jury s'attend à ce que le candidat ne se contente pas d'un exposé qualitatif et développe, fût-ce partiellement, certains aspects purement mathématiques du texte. A contrario, les interprétations qualitatives du comportement des modèles sont parfois absentes des exposés. Pourtant, montrer que l'on comprend un modèle ne se réduit pas à prouver un théorème.

On rappelle que les traitements ou les simulations numériques doivent illustrer un des phénomènes du modèle, illustration à la fois qualitative et quantitative par exemple par la réalisation de tests ou d'intervalles de confiance pour l'estimation, ou bien par le graphe de l'évolution d'une suite de variables aléatoire pour exhiber son éventuelle convergence. Enfin, de nombreux textes sont assortis d'un jeu de données numériques sur lequel le candidat est invité à mettre en œuvre des procédures de test ou d'estimation : trop peu de candidats traitent effectivement ces données alors que cela constitue une réelle plus-value pour la présentation du texte par le candidat.

6.4 Option B : Calcul scientifique

Un certain nombre de candidats admissibles ne semblaient pas être au fait des modalités, ni des attentes de l'épreuve et ne maîtrisaient tout simplement pas les notions de base du programme général intervenant dans les textes. A contrario, des candidats qui avaient manifestement préparé l'épreuve y ont obtenu des notes très honorables, sans pour autant faire preuve d'une virtuosité technique particulière. Afin d'aborder sereinement les textes proposés dans l'option B, un minimum d'aisance est requis avec les notions suivantes :

- Connaître le théorème de Cauchy-Lipschitz (le cas C^1 est souvent suffisant) et être en mesure de l'appliquer pour des systèmes différentiels simples,
- Construire, analyser et mettre en œuvre la méthode d'Euler explicite,
- Connaître les principes des méthodes directes de résolution de systèmes linéaires (pivot de Gauss, LU), notion de conditionnement, éléments propres de matrices, analyser et mettre en œuvre la méthode de la puissance,
- Analyser et mettre en œuvre la méthode de Newton (cas vectoriel),
- Construire la matrice correspondant à la discrétisation par différences finies de $(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2})$ et connaître ses propriétés,
- Etre capable d'énoncer et appliquer le théorème des extrêma liés (typiquement pour des problèmes de minimisation de fonctionnelles convexes sur $\mathbb{R}^N$ avec contraines linéaires), analyser et mettre en œuvre un algorithme du gradient.

Le jury souligne que les textes exploitent ces notions dans leurs versions les plus élémentaires et ne requièrent aucun raffinement technique. Il est aussi rappelé que de nombreux textes représentatifs de l'épreuve ont été rendus publics et sont disponibles sur le site `agreg.org`. Les candidats peuvent ainsi se familiariser avec le format des textes, se faire une idée des attentes de l'épreuve et s'entraîner avec l'environnement informatique du concours.

Dans l'épreuve de modélisation, un certain nombre de candidats, bien que disposant d'un bagage technique modeste, ont su tirer leur épingle du jeu et obtenir des notes très honorables :

- en se montrant capable d'identifier comment un théorème classique pouvait répondre à une question soulevée par le texte, énonçant clairement ce théorème et l'appliquant au contexte précis du texte,

— en commentant de manière pertinente la mise en équations évoquée par le texte,
— en proposant une illustration d'un fait discuté par le texte (la convergence vers un état stationnaire, l'apparition de structures particulières...).

Le jury de l'option B rappelle qu'une illustration réalisée avec les routines de base des logiciels fournis est tout à fait satisfaisante si elle est clairement présentée, motivée et discutée. Si `Scilab`, `Python` ou `Octave` sont certainement les logiciels les mieux adaptés, le jury relève qu'un certain nombre de candidats a pu fournir des résultats tout à fait convaincants avec un logiciel comme `XCas` ou `Sage`.

En ce qui concerne l'option de Calcul Scientifique, le jury émet les recommandations spécifiques suivantes :

— Analyse des équations différentielles ordinaires et calcul différentiel : La dérivation de fonctions de $\mathbf{R}^m$ dans $\mathbf{R}^n$ ne devrait pas poser de difficulté au niveau de l'agrégation. Les formules de développements de Taylor contiennent généralement un terme de reste, dont l'analyse est un point souvent crucial. Les candidats devraient faire preuve d'automatismes à la vue de la moindre équation différentielle ordinaire. Par exemple, un texte indiquant «la solution de l'équation différentielle [...] est définie pour tout temps et reste positive» doit amener à : 1) citer le théorème de Cauchy-Lipschitz, 2) expliquer comment il s'applique dans le contexte présent [1], 3) établir des estimations sur la solution, 4) en déduire la positivité de la solution et le caractère non borné du temps d'existence. Trop de candidats sont pris en défaut sur la notion de solution maximale.
— Schémas numériques pour les équations différentielles : Le jury considère la description des schémas d'Euler comme un élément central du programme de l'option. Les candidats doivent être capables de présenter clairement les principes guidant l'écriture de ces schémas et l'analyse de leurs propriétés de convergence, ainsi que les avantages et inconvénients des méthodes explicites et implicites. Trop rares sont les candidats capables de formaliser correctement une définition de la convergence d'un schéma numérique, qui est trop souvent confondue avec la consistance du schéma. La confusion récurrente entre l'approximation X_n et l'évaluation $X(t_n)$ de la solution exacte au temps t_n, l'incapacité à relier le nombre de points de discrétisation et le pas Δt témoignent d'une compréhension déficiente du sujet. Afin de limiter des confusions coupables, le jury recommande instamment de prohiber toute utilisation de symboles comme $\simeq$, $\approx$ ou bien pire $\sim$, pour relier l'évaluation de la solution aux points de discrétisation et les éléments de la suite numérique définie par le schéma. La mise en œuvre de ces méthodes peut être l'occasion de discuter des difficultés potentielles liées à la stabilité et aux contraintes portant sur le pas de temps. Attribuer l'intérêt de la notion de stabilité aux «erreurs machines» traduit une interprétation erronée des enjeux du calcul scientifique.
— Equations aux dérivées partielles : Le jury précise que les textes qui évoquent des problèmes d'équations aux dérivées partielles peuvent être abordés avec des outils rudimentaires et ne nécessitent *a priori* aucune connaissance sur la théorie des distributions, bien que ces notions aient intégré le programme commun, ni ne réclament de dextérité particulière d'analyse fonctionnelle. Le jury a été quelque peu surpris que des candidats à cette épreuve découvrent la matrice associée à la discrétisation de $(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2})$ par différences finies le jour de l'oral.
— Algèbre linéaire : des lacunes profondes et inquiétantes sont trop régulièrement relevées. Au grand étonnement du jury, de nombreux candidats ne font pas le lien entre matrices symétriques et formes quadratiques. Les raisonnements liés à la réduction des matrices sont trop souvent extrêmement laborieux et les méthodes pratiques de calcul (résolution de systèmes, déterminant, inverse...) méconnues.

Les candidats qui ont choisi l'option B ne doivent pas hésiter à s'appuyer sur leurs connaissances spécifiques pour proposer des développements originaux dans les leçons d'analyse et

1. détailler explicitement la fonction $(t, X) \in [0, T] \times \mathbf{R}^n \mapsto f(t, X) \in \mathbf{R}^n$ qui permet de mettre le problème sous la forme $X'(t) = f(t, X(t))$, distinguer la variable vectorielle X et la fonction $X : t \mapsto X(t)$ sont malheureusement des obstacles majeurs pour une grande proportion des candidats.

de mathématiques générales, en centrant leur propos sur des problématiques motivées par les préoccupations du calcul scientifique (approximation de solutions d'équations linéaires ou non linéaires, d'équations différentielles, convergence d'algorithmes, analyse matricielle,...).

6.5 Option C : Algèbre et Calcul formel

Généralités

La ligne directrice du calcul formel est la recherche de l'*effectivité*, puis de l'*efficacité* (souvent en temps, parfois en espace) du calcul algébrique, en allant des aspects les plus élémentaires (calcul avec les entiers, les polynômes, les entiers modulo, les séries formelles) aux aspects plus avancés (élimination, géométrie effective, codes correcteurs d'erreur). La quasi-totalité des sujets posés dans le cadre de l'option rentrent totalement dans l'une ou l'autre, souvent les deux, de ces grandes problématiques. Cette "grille de lecture" peut accompagner la lecture des candidats, et la construction de leur exposé de façon utile espérons-le ; et, rêvons tout haut, d'expliquer non seulement *ce que* le texte fait, mais aussi *pourquoi* il le fait. La capacité à percevoir ces problématiques fait la différence entre bonnes et excellentes prestations, et peut aussi expliquer les notes honorables de certains candidats dont le niveau mathématique était pourtant limité.

Construction de l'exposé

Comme dans tout oral, la construction de l'exposé doit être une préoccupation importante des candidats. Le jury préfèrera toujours un traitement approfondi d'une partie, même modeste, du texte à un survol général sans réelle compréhension ni contribution personnelle. Cela ne dispense pas d'une réflexion permettant de produire un tout **cohérent** et **intelligible** par un public qui, dans l'esprit de l'épreuve, découvre le texte à travers l'exposé du candidat. Que penserait un tel public face à un enseignant qui se contente d'une brève introduction à la problématique avant de s'engager dans un long tunnel de théorèmes énoncés sans lien avec le problème de départ ? Ce d'autant plus qu'ils ne sont, dans ce cas, que rarement prouvés autrement que par la répétition des éléments de démonstration, souvent fragmentaires, donnés dans le texte.

Néanmoins, dans l'ensemble, les candidats semblent avoir perçu la nécessité d'utiliser, au mieux, le temps qui leur est consacré. Le jury apprécie de voir de plus en plus de candidats qui se sont appropriés le texte et en donnent une présentation pertinente et autre qu'un paraphrasage linéaire.

Les candidats ayant le réflexe de se saisir, seuls, d'une question de complexité, sont perçus très positivement par le jury. Pour prendre un exemple, quand le texte parle de cryptographie, comparer le coût du système proposé et le coût d'une attaque, même naïve, est une initiative intéressante et actuellement inexistante. Une telle étude est beaucoup plus à sa place qu'un exposé détaillé de RSA plaqué sur un texte qui n'en parle pas – la mention rapide de RSA dans un texte introduisant un système de chiffrement pour comparer des complexités restant bien sûr pertinente. Plus largement, une réflexion minimale sur les ordres de grandeur (est-ce qu'un calcul faisable représente $10^1, 10^{10}, 10^{100}, 10^{1000}$ opérations élémentaires) permettrait souvent de mieux situer les problèmes soulevés par un texte, ou de proposer des valeurs de paramètres réalistes quand ce sujet n'est pas évoqué par le texte.

Illustration informatique

Si un bel effort est produit par la majorité des candidats, le jury observe tout de même une certaine régression par rapport à 2014 : un certain nombre de candidats préfèrent ne pas toucher à l'outil informatique. Si les candidats pensent ainsi consacrer plus de temps à l'analyse du texte et la préparation de leur exposé oral cette stratégie n'est en aucun cas payante, bien au contraire.

Le principal défaut de l'illustration est le fait qu'elle soit souvent perçue comme une corvée, plutôt que comme un outil permettant d'aider à la compréhension du texte, ou de mettre ce dernier en valeur : mener des calculs du texte à l'aide du logiciel choisi (cela impose d'en connaître les limites, de savoir les expliquer, de se limiter si nécessaire à un cas particulier), étudier des exemples ou mener une étude expérimentale, comparer une méthode présentée dans le texte avec la solution implantée dans le système choisi, etc. Le jury est souvent surpris de voir des candidats développer de longs et fastidieux calculs au tableau alors qu'ils auraient pu utiliser l'outil informatique et ainsi gagner en temps et en clarté.

Aspects mathématiques

Les remarques de l'année 2014 s'appliquent intégralement à la session 2015, et on renvoie le lecteur à ce rapport, en ajoutant ici quelques remarques complémentaires.

— pour beaucoup de candidats le réflexe "pivot de Gauss" ne vient qu'en réponse à des questions concernant les systèmes linéaires, mais son utilisation pour le calcul de déterminants ou de rang est parfois une découverte pour les candidats – cela devrait être une connaissance de base, ou, à défaut, une acquisition indispensable d'un travail de préparation à l'épreuve de modélisation C. Notons également que le coût de cet algorithme reste inconnu de l'écrasante majorité des candidats.

— tout comme l'an passé, le jury déplore chez beaucoup de candidats une méconnaissance des notions théoriques et effectives les plus élémentaires sur les corps finis.

— Si la connaissance du résultant a progressé ces dernières années, son utilisation pour l'élimination reste confuse. Beaucoup de candidats le voient comme un critère d'existence d'un facteur commun et ne pensent plus (surtout dans le cas des polynômes à une variable) au PGCD qui est un objet bien plus simple à appréhender.

— Les codes correcteurs sont une partie limitée du programme, et très peu de connaissances sont exigibles (et exigées). Néanmoins, il est bon de s'y être un peu frotté pour se familiariser avec les problématiques sous-jacentes, typiquement qu'un bon code correcteur se décrit de façon compacte (et est donc en général linéaire), a une grande dimension et grande distance minimale (par rapport à sa longueur) et, aussi et surtout un algorithme de décodage efficace – rappelons que ce second point n'est pas vrai d'un code linéaire "quelconque". Il faut s'être confronté à ces faits pour comprendre les questions que se pose presque tout texte sur les codes... et signalons que la méconnaissance des corps finis est généralement rédhibitoire pour ce sujet.

— Les attentes du jury en termes de complexité sont limitées mais il est attendu d'un candidat qu'il sache estimer le coût de certaines procédures élémentaires : évaluation, produits de polynômes, pivot de Gauss etc...

Enfin, même s'il s'agit d'une épreuve plus appliquée ou moins académique que les deux autres épreuves orales, cela ne dispense en aucun cas les candidats de faire preuve de la rigueur mathématique requise – quand on utilise un théorème, la capacité à en restituer un jeu d'hypothèses correct est une qualité indispensable. Par jeu d'hypothèses correct, on entend que :

— le théorème soit vrai

— et qu'il s'applique effectivement au contexte considéré.

Rappelons que la minimisation des hypothèses n'est que très rarement une préoccupation dans l'épreuve.

Les candidats qui ont choisi l'option C ne doivent pas hésiter à s'appuyer sur leurs connaissances spécifiques pour proposer des développements originaux dans les leçons d'analyse et de mathématiques générales, en centrant leur propos sur des problématiques motivées par les préoccupations d'algèbre effective.

6.6 Option D : Modélisation et Analyse de Systèmes Informatiques

Commentaires généraux

Le jury a apprécié le travail accompli pour la préparation de cette épreuve par les meilleurs candidats. Il a interrogé les candidats dans le même esprit que dans les autres options et les critères d'évaluation étaient largement identiques sauf en ce qui concerne l'exercice de programmation. Le lecteur est invité à se reporter à la section du rapport consacrée à l'épreuve de modélisation pour les remarques générales sur la structure de cette épreuve. Nous ne détaillons ici que les aspects spécifiques à cette épreuve dans l'option Informatique.

Exposé des motivations

Beaucoup de candidats omettent la phase indispensable d'introduction et de motivation. C'est au candidat d'introduire le sujet du texte et de motiver la présentation qui va suivre. Cette motivation sera le plus souvent l'évocation de situations concrètes dans lesquelles on a besoin d'outils informatiques spécifiques. Ces situations peuvent être proposées par le texte lui-même, mais elles peuvent aussi être tirées de l'expérience personnelle du candidat. Toute contribution personnelle à ce niveau est toujours très appréciée !

Présentation du texte

Il est attendu des candidats qu'ils soient fidèles à l'esprit du texte. Il ne s'agit pas qu'il traite l'intégralité des points du texte, mais que le traitement qu'il choisit d'en faire soit cohérent : il doit par exemple expliquer pourquoi il a choisi de développer certains points, et pas certains autres.

Particulièrement dans le cadre de l'option D, il est attendu une prise en compte soigneuse de l'ensemble de la démarche de modélisation, qu'on peut décomposer en quatre phases :
- partir d'une situation concrète, non nécessairement de nature informatique ;
- en proposer un modèle, mathématique et informatique ;
- travailler dans ce modèle, pour implémenter, expérimenter, décider d'un compromis sur la complexité en temps ou en espace, etc. ;
- revenir à la situation concrète de départ, se demander comment le modèle a permis de mieux analyser cette situation.

On attend, en particulier, que le candidat ne néglige pas l'étape de modélisation, ni la dernière (retour à la situation concrète).

Le jury est spécialement attentif aux questions liées à l'évaluation du coût, ainsi qu'aux compromis de la modélisation concernant la précision, la complexité, etc.

Concernant la troisième phase, de travail dans le modèle, il est rappelé que le candidat n'est pas dans le cadre d'une leçon : il ne doit pas se lancer dans une succession de démonstrations mathématiques, mais insister sur la variété des techniques qui peuvent être appliquées, et dont il doit être capable de développer en détail l'une ou l'autre à la demande du jury. Dans cette partie de l'épreuve, il ne s'agit pas de détailler toutes les preuves. Toute tentative de ramener cette épreuve à une leçon sera détectée et sanctionnées par le jury.

Exercice de programmation informatique

Au cours de l'exposé, le candidat présente son *exercice de programmation*. Nous donnons quelques recommandations spécifiques à cette partie de l'épreuve à la fin de ce rapport.

Cette partie de l'épreuve a été globalement satisfaisante, les candidats ayant généralement bien compris l'importance qui y est attachée. Elle dure environ 10 minutes. Le candidat choisit librement dans le temps d'exposé le moment où présenter son exercice de programmation, de façon qu'il s'intègre au mieux à la présentation. Si l'exercice n'a pas été présenté au bout d'une trentaine de minutes, le jury lui rappellera de le faire.

Le plus souvent, les candidats le placent dès que les notions nécessaires ont été introduites dans l'exposé. Cette introduction doit être soignée et complète, afin d'éviter tant les allers-retours du terminal au tableau que les discours approximatif devant l'écran.

La session 2015 a vu une augmentation sensible des compétences informatiques des candidats. Rares sont les candidats qui ne sont pas en mesure de présenter un exercice de programmation cohérent. Il est donc regrettable que les candidats n'utilisent pas davantage l'outil informatique pour illustrer leur présentation et se limitent souvent au seul exercice de programmation.

Cette présentation au jury doit être faite que le programme fonctionne — ce que l'on espère ! — ou pas. C'est seulement dans un deuxième temps que le candidat lance une exécution. Dans tous les cas, le jury évalue la qualité générale du code réalisé. Cette évaluation interactive permet à un candidat réactif de repérer une erreur, voire de la corriger, de recompiler et de relancer l'exécution.

Interaction avec le jury

Cette dernière partie de l'épreuve est un *dialogue*, bidirectionnel.

Certes, le candidat répond aux questions du jury, mais il doit prendre conscience que ses réponses orientent les questions. Au-delà du sujet du texte, le jury n'interrogera que sur ce que le candidat aura évoqué de lui-même. Inversement, si le candidat s'écarte du texte proposé, le jury s'attend à ce qu'il puisse répondre aux questions qu'invariablement il lui posera sur ces points. Cependant, le candidat est bienvenu s'il fait intervenir des connaissances personnelles non abordées par le texte.

Dans cette dernière partie de l'épreuve, le jury souhaite pouvoir aborder de nombreuses questions : **il est donc attendu des réponses brèves et non pas des développements de type leçon.** Les questions du jury porteront au moins autant sur la démarche globale de modélisation et la compréhension des différentes approches du texte que sur l'étude technique des diverses propositions.

Il sera apprécié que la présentation des différentes approches souligne leurs avantages et inconvénients respectifs, en terme de coût, d'adéquation au problème, de complexité, de précision. . .

Une partie de la discussion pourra être consacrée à l'exercice de programmation, pour discuter avec le candidat de la cohérence de sa programmation : choix du langage, style de programmation (fonctionnel ou impératif) utilisation des structures de contrôle et en particulier des boucles, découpage du problème en fonctions. . .

6.6.1 Remarques spécifiques sur l'exercice de programmation.

Voici quelques recommandations plus précises concernant l'exercice de programmation. Elles sont motivées par les présentations des candidats de cette année. Nous espérons qu'elles seront utiles pour les candidats des années à venir.

Il s'agit d'un exercice de pédagogie et non pas de virtuosité. Le critère principal d'évaluation est la qualité pédagogique de la présentation du programme au jury et non pas la complexité du codage ou la virtuosité dans l'utilisation des aspects avancés du langage. Une question fréquente du jury sera : comment expliqueriez-vous ceci à une classe de terminale ?

Installation technique

Le candidat dispose d'un poste informatique analogue à celui utilisé pour la préparation. Les fichiers qu'il a préparés sont installés sur ce poste en début d'interrogation. Le jury suit la présentation, mais il ne dispose ni de clavier ni de souris : le candidat est donc le seul à contrôler ce qui est présenté, sans interférence possible.

Présentation du programme

D'une manière générale, le candidat doit proposer un code lisible et mettre en valeur ses connaissances en programmation et sa maîtrise du langage et de l'environnement de programmation utilisés. À titre de repère, la partie centrale du code devrait tenir sur un écran.

Les candidats sont invités à présenter le schéma algorithmique et les structures de données utilisés avant de lancer leur programme. Par contre, il est inutile de descendre dans les détails les plus triviaux du code. Le jury pourra demander au candidat d'évaluer la complexité de son implémentation ou de discuter de choix alternatifs de conception. La possibilité de modification au vol d'un paramètre ou des données est appréciée pour la vérification de la correction.

Choix des données d'exécution

Il est demandé aux candidats d'exécuter leurs programmes sur différents jeux de données, et il est souhaitable qu'ils aient anticipé ce point. La manière dont ces jeux de données sont choisis devra être justifiée par la démonstration de divers aspects du comportement du programme. Les candidats sont souvent interrogés sur leurs critères de choix.

Le candidat doit être capable de repérer des résultats erronés produits par son programme. Ne pas s'apercevoir que son programme renvoie des résultats absurdes est évidemment pénalisé ! Le jury invite donc les candidats à réfléchir aux ordres de grandeur des résultats attendus.

Choix du langage

Le candidat choisit son langage. Cette année, le langage majoritaire pour l'épreuve de modélisation reste Caml mais le jury a vu un nombre croissant de présentations qui utilisaient Python, langage autorisé depuis 2014.

Ce choix peut orienter les questions, car l'implémentation d'un problème peut être plus facile dans certains langages qui permettent de manipuler les structures de données directement, par exemple les listes pour Caml. Mais un candidat qui utilise ces facilités doit pouvoir les justifier. Par exemple, la différence ensembliste entre deux listes étant prédéfinie dans les bibliothèques de Caml, on attend du candidat qui l'utiliserait qu'il puisse expliquer l'implémentation de cette fonction et la complexité des opérations concernées.

L'exercice est soigneusement spécifié dans les textes proposés. Il doit être conduit dans l'un des langages proposés : un candidat qui n'utilise pas les langages proposés reçoit la note 0 à l'exercice de programmation, même si ce langage est disponible sur le poste informatique (Maple, Scilab, etc.)

Style de programmation

La *lisibilité* et l'*élégance* de l'expression du programme dans le langage choisi sont particulièrement appréciées par le jury. Il est essentiellement attendu que le style de programmation des programmes soit *cohérent* : utilisation de structures d'itération (bornées `for` ou non-bornées `while`), initialisation des variables, découpage plus ou moins fin en fonctions auxiliaires, etc. **Les critères d'arrêt des boucles et des récursions doivent être parfaitement maîtrisés.** Toutes les quantités présentes dans les programmes doivent être définies par des constantes symboliques facilement modifiables à la demande du jury.

Certains langages favorisent une programmation récursive ou itérative. Le candidat peut utiliser le mode de programmation qu'il préfère, pourvu que ce soit de manière cohérente avec les autres choix de conception. Il est bien sûr attendu du candidat qu'il sache passer d'une programmation récursive à une programmation itérative et réciproquement dans les cas simples, par exemple en présence de *récursivité terminale*.

Entrées-sorties

Certains candidats passent beaucoup de temps à programmer des entrées *interactives* au clavier. Ce n'est pas nécessaire et souvent inutilement complexe, notamment en C (appel par référence dans la fonction `scanf`, etc.). Il est recommandé de coder le jeu de données dans une procédure d'initialisation qui pourra être facilement modifiée à la demande du jury.

Assertions de correction

Il est très souvent demandé aux candidats d'exécuter leurs programmes sur les cas limites de leurs spécifications, sauf si ces cas ont été explicitement exclus dans la présentation préalable : liste vide pour les algorithmes de tri, nombres négatifs pour des algorithmes de factorisation, etc. Il sera d'ailleurs bien apprécié que le candidat garde les parties délicates de son programme par des assertions, par exemple à l'aide de la fonction `assert` de la bibliothèque C ou de levée d'exception `failwith` de Caml. C'est particulièrement indiqué pour les accès aux tableaux passés en paramètre en C.

Recompilation

Dans le cas d'une programmation en C, il sera systématiquement demandé au candidat de recompiler son programme avec le niveau maximal d'avertissement :

```
gcc -Wall prog.c -o prog
```

Un programme qui produit des avertissements sera pénalisé et le candidat devra le corriger pendant l'interrogation. La même chose sera vérifiée en Caml ou Java. En particulier, les *pattern-matching* de Caml doivent être exhaustifs et les fonctions internes à une séquence doivent retourner la valeur `()` du type `unit`.

Organisation de la préparation

Il est souvent demandé combien de temps un candidat devrait consacrer à la préparation de l'exercice de programmation au sein des heures de préparation. Ceci dépend bien sûr des capacités du candidat et de l'organisation de son exposé. Cependant, il faut noter que la présentation de cette partie ne dure que 10 minutes sur les 40 minutes d'exposé. Il est donc indiqué d'y passer au plus un quart du temps de préparation, soit entre une demi-heure et une heure, afin de ne pas empiéter sur la préparation du reste de l'épreuve.

Respect de la spécification

Le candidat doit respecter la spécification qui est donnée dans l'énoncé. C'est seulement dans un deuxième temps qu'il peut, s'il le souhaite, présenter un programme implémentant une autre spécification. Il devra alors expliquer pourquoi il le fait. Le fait que l'exercice proposé dans l'énoncé soit trivial ou inintéressant n'est évidemment pas une explication suffisante ! Ces extensions sont alors considérées et évaluées comme des développements au choix du candidat. Par exemple, des simulations simples ont pu servir à exposer un développement. Elles doivent mettre en valeur d'autres capacités du candidat que sa *virtuosité* en programmation pure qui n'est absolument pas l'objectif de l'épreuve. Ces présentations complémentaires peuvent utiliser l'ensemble des outils présents sur le poste informatique, Maple et Scilab par exemple.

Chapitre 7

Annexe 1 : Leçons d'oral (options A, B et C) proposées en 2015

Leçons d'algèbre et géométrie

101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

102 Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.

103 Exemples et applications des notions de sous-groupe distingué et de groupe quotient.

104 Groupes finis. Exemples et applications.

105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

107 Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbf{C}$-espace vectoriel.

108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

109 Représentations de groupes finis de petit cardinal.

110 Caractères d'un groupe abélien fini et transformée de Fourier discrète. Applications

120 Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

121 Nombres premiers. Applications.

122 Anneaux principaux. Exemples et applications.

123 Corps finis. Applications.

124 Anneau des séries formelles. Applications.

125 Extensions de corps. Exemples et applications.

126 Exemples d'équations diophantiennes.

127 Droite projective et birapport.

140 Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.

141 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

142 Algèbre des polynômes à plusieurs indéterminées. Applications.

143 Résultant. Applications.

144 Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.

150 Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

151 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

152 Déterminant. Exemples et applications.

153 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

154 Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

155 Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

156 Exponentielle de matrices. Applications.

157 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

158 Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

---

159 Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

---

160 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

---

161 Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Applications en dimensions 2 et 3.

---

162 Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

---

170 Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

---

171 Formes quadratiques réelles. Exemples et applications.

---

180 Coniques. Applications.

---

181 Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

---

182 Applications des nombres complexes à la géométrie.

---

183 Utilisation des groupes en géométrie.

---

190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

Leçons d'analyse et probabilités

❁ ❁ ❁

201 Espaces de fonctions : exemples et applications.

---

202 Exemples de parties denses et applications.

---

203 Utilisation de la notion de compacité.

---

204 Connexité. Exemples et applications.

---

205 Espaces complets. Exemples et applications.

---

206 Théorèmes de point fixe. Exemples et applications.

---

207 Prolongement de fonctions. Exemples et applications.

---

208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

---

209 Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications.

---

213 Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

---

214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications.

---

215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

---

217 Sous-variétés de $\mathbf{R}^n$. Exemples.

---

218 Applications des formules de Taylor.

---

219 Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications

---

220 Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2.

---

221 Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

---

222 Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires.

---

223 Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

---

224 Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

---

226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples et applications.

---

228 Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.

---

229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

---

230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

---

232 Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.

---

233 Analyse numérique matricielle : résolution approchée de systèmes linéaires, recherche de vecteurs propres, exemples.

---

234 Espaces L^p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.

---

235 Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.

---

236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.

---

239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

---

240 Produit de convolution, transformation de Fourier. Applications.

---

241 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

---

243 Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

---

244 Fonctions développables en série entière, fonctions analytiques. Exemples.

---

245 Fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbf{C}$. Exemples et applications.

---

246 Séries de Fourier. Exemples et applications.

---

247 Exemples de problèmes d'interversion de limites.

---

249 Suites de variables de BERNOULLI indépendantes.

---

253 Utilisation de la notion de convexité en analyse.

---

254 Espaces de SCHWARTZ $S(\mathbf{R}^d)$ et distributions tempérées. Dérivation et transformation de FOURIER dans $S(\mathbf{R}^d)$ et $S'(\mathbf{R}^d)$.

---

260 Espérance, variance et moments de variables aléatoires.

---

261 Fonction caractéristique et transformée de Laplace d'une variable aléatoire. Exemples et applications.

---

262 Modes de convergence d'une suite de variables aléatoires. Exemples et applications.

---

263 Variables aléatoires à densité. Exemples et applications.

---

264 Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Chapitre 8

Annexe 2 : Leçons de mathématiques pour l'informatique et leçons d'informatique proposées en 2015

Leçons de mathématiques pour l'informatique

❁ ❁ ❁

104 Groupes finis. Exemples et applications.

---

105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

---

106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

---

108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

---

120 Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

---

121 Nombres premiers. Applications.

---

123 Corps finis. Applications.

---

141 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

---

150 Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

---

151 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

---

152 Déterminant. Exemples et applications.

---

153 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

---

157 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

---

159 Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.

---

162 Systèmes d'équations linéaires ; opérations, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

---

170 Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

---

181 Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

---

182 Applications des nombres complexes à la géométrie.

---

183 Utilisation des groupes en géométrie.

---

190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

---

203 Utilisation de la notion de compacité.

---

206 Théorèmes de point fixe. Exemples et applications.

---

208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

---

214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications.

---

215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

---

218 Applications des formules de TAYLOR.

---

219 Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications

---

220 Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2.

---

221 Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

---

223 Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

---

224 Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

---

226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples et applications.

---

229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

---

230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

---

232 Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.

---

236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.

---

239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

---

240 Produit de convolution, transformation de Fourier. Applications.

---

243 Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

---

246 Séries de Fourier. Exemples et applications.

---

260 Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.

---

264 Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Leçons d'informatique

901 Structures de données : exemples et applications.

902 Diviser pour régner : exemples et applications.

903 Exemples d'algorithmes de tri. Complexité.

906 Programmation dynamique : exemples et applications.

907 Algorithmique du texte : exemples et applications.

909 Langages rationnels. Exemples et applications.

910 Langages algébriques. Exemples et applications.

912 Fonctions récursives primitives et non primitives. Exemples.

913 Machines de Turing. Applications.

914 Décidabilité et indécidabilité. Exemples.

915 Classes de complexité : exemples.

916 Formules du calcul propositionnel : représentation, formes normales, satisfiabilité. Applications.

917 Logique du premier ordre : syntaxe et sémantique.

918 Systèmes formels de preuve en logique du premier ordre : exemples.

919 Unification : algorithmes et applications.

920 Réécriture et formes normales. Exemples.

921 Algorithmes de recherche et structures de données associées.

922 Ensembles récursifs, récursivement énumérables. Exemples.

923 Analyses lexicale et syntaxique : applications.

924 Théories et modèles en logique du premier ordre. Exemples.

---

925 Graphes : représentations et algorithmes.

---

926 Analyse des algorithmes : complexité. Exemples.

---

927 Exemples de preuve d'algorithme : correction, terminaison.

---

928 Problèmes NP-complets : exemples de réductions

Chapitre 9

Annexe 3 : Le programme 2015

Le programme des épreuves de l'agrégation n'est pas rédigé comme un plan de cours. Il décrit un ensemble de connaissances que le candidat doit maîtriser. Il comporte des répétitions lorsque des notions interviennent naturellement à plusieurs endroits.

D'une façon générale, les candidats doivent connaître des applications qui illustrent les notions générales. Le programme en propose ainsi un certain nombre. Il ne s'agit que de simples suggestions d'applications possibles, qui peuvent être complétées ou remplacées par d'autres.

Dans les titres 1 à 5 qui suivent, tous les corps (notés $\mathbf{K}$ en général) sont supposés commutatifs.

9.1 Algèbre linéaire

9.1.1 Espaces vectoriels

1. Espaces vectoriels, applications linéaires. Produit d'espaces vectoriels. Sous-espaces, image et noyau d'une application linéaire. Espaces quotients. Somme de sous-espaces, somme directe, supplémentaires. Familles libres, génératrices ; bases. Algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel E, groupe linéaire $GL(E)$.
2. Sous-espaces stables d'un endomorphisme. Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres.
3. Représentations linéaires d'un groupe et d'une algèbre. Irréductibilité. En dimension finie : exemples de décomposition d'une représentation linéaire en somme directe de sous-représentations, lemme de Schur.

9.1.2 Espaces vectoriels de dimension finie

1. Espaces vectoriels de dimension finie. Existence de bases : isomorphisme avec $\mathbf{K}^n$. Existence de supplémentaires d'un sous-espace. Rang d'une application linéaire, rang d'un système de vecteurs. Espace dual. Rang d'un système d'équations linéaires. Transposée d'une application linéaire. Base duale. Bidualité. Orthogonalité.
2. Applications multilinéaires. Déterminant d'un système de vecteurs, d'un endomorphisme. Groupe spécial linéaire $SL(E)$. Orientation d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.
3. Matrices à coefficients dans un corps. Opérations matricielles. Rang d'une matrice. Représentations matricielles d'une application linéaire. Changement de base.

   Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice. Méthode du pivot de Gauss. Notion de matrices échelonnées. Application à la résolution de systèmes d'équations linéaires, au calcul de déterminants, à l'inversion des matrices carrées, à la détermination du rang d'une matrice, à la détermination d'équations définissant un sous-espace vectoriel.

Extension élémentaire de ces notions aux matrices à coefficients dans un anneau commutatif.

4. Sous-espaces stables d'un endomorphisme, lemme des noyaux. Polynôme caractéristique, polynômes annulateurs d'un endomorphisme, polynôme minimal. Théorème de Cayley-Hamilton. Diagonalisation, trigonalisation, applications. Sous-espaces caractéristiques, décomposition de Dunford. Exponentielle des matrices réelles ou complexes.

9.2 Groupes et géométrie

Les différentes notions de théorie des groupes introduites dans les paragraphes suivants seront illustrées et appliquées dans des situations géométriques.

1. Groupes, morphismes de groupes. Produit direct de groupes. Sous-groupes. Sous-groupe engendré par une partie. Ordre d'un élément. Sous-groupes distingués (ou normaux), groupes quotients. Opération d'un groupe sur un ensemble. Stabilisateur d'un point, orbites, espace quotient. Formule des classes. Classes de conjugaison. Application à la détermination des groupes d'isométries d'un polyèdre régulier en dimension 3.
2. Groupes cycliques. Groupes abéliens de type fini. Groupe des racines complexes n-ièmes de l'unité, racines primitives.
3. Groupe des permutations d'un ensemble fini. Décomposition d'une permutation en produit de transpositions, en produit de cycles à supports disjoints. Signature. Groupe alterné. Application : déterminants.
4. Définition des groupes classiques d'automorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie : groupe général linéaire, groupe spécial linéaire ; groupe orthogonal, groupe spécial orthogonal ; groupe unitaire, groupe spécial unitaire.
5. Représentations d'un groupe fini sur un $\mathbf{C}$-espace vectoriel.
   Cas d'un groupe abélien. Orthogonalité des caractères irréductibles. Groupe dual. Transformée de Fourier. Convolution. Application : transformée de Fourier rapide.
   Cas général. Théorème de Maschke. Caractères d'une représentation de dimension finie. Fonctions centrales sur le groupe, base orthonormée des caractères irréductibles. Exemples de représentations de groupes de petit cardinal.

9.3 Anneaux, corps, polynômes et fractions rationnelles

1. Anneaux (unitaires), morphisme d'anneaux, sous-anneaux. L'anneau $\mathbf{Z}$ des entiers relatifs. Produit d'anneaux. Idéaux d'un anneau, anneaux quotients. Idéaux premiers, idéaux maximaux d'un anneau commutatif. Notion de module sur un anneau commutatif, d'algèbre (associative ou non) sur un anneau commutatif.
2. Algèbre des polynômes à une ou plusieurs indéterminées sur un anneau commutatif. Polynômes homogènes. Polynômes symétriques.

   Décomposition en polynômes homogènes. Tout polynôme symétrique s'exprime en fonction des polynômes symétriques élémentaires.
3. Séries formelles à une indéterminée à coefficients dans un corps. Addition, multiplication, composition, éléments inversibles.
4. Corps, sous-corps. Caractéristique. Extension de corps. Corps des fractions d'un anneau intègre. Le corps $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels. Le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels. Le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes. Théorème de d'Alembert-Gauss.

5. Divisibilité dans les anneaux commutatifs intègres. Éléments irréductibles, éléments inversibles, éléments premiers entre eux. Anneaux factoriels. Plus grand diviseur commun, plus petit multiple commun.

   Factorialité de $A[X]$ quand A est un anneau factoriel. Anneaux principaux. Théorème de Bézout. Anneaux euclidiens. Algorithme d'Euclide. Cas de l'anneau $\mathbf{Z}$ et de l'algèbre $\mathbf{K}[X]$ des polynômes sur le corps $\mathbf{K}$. Polynômes irréductibles. Exemples : polynômes cyclotomiques dans $\mathbf{Q}[X]$, critère d'Eisenstein.
6. Congruences dans $\mathbf{Z}$. Nombres premiers. Étude de l'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et de ses éléments inversibles. Théorème chinois et applications.
7. Racines d'un polynôme, multiplicité. Polynôme dérivé. Éléments algébriques et transcendants. Extensions algébriques. Corps algébriquement clos. Corps de rupture et corps de décomposition. Corps finis.
8. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé. Sommes de Newton. Résultant. Discriminant. Application à l'intersection ensembliste de deux courbes algébriques planes.
9. Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps. Décomposition en éléments simples. Cas réel et complexe. Dérivée logarithmique d'un polynôme et applications.

9.4 Formes bilinéaires et quadratiques sur un espace vectoriel

1. Formes bilinéaires. Formes bilinéaires alternées. Formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques, forme polaire d'une forme quadratique (en caractéristique différente de 2). Éléments orthogonaux, interprétation géométrique. Formes non dégénérées. Adjoint d'un endomorphisme. Représentation matricielle, changement de base. Rang d'une forme bilinéaire.
2. Orthogonalité. Sous-espaces isotropes. Décomposition d'une forme quadratique en somme de carrés. Théorème d'inertie de Sylvester. Classification dans le cas de $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Procédés d'orthogonalisation.
3. Espaces vectoriels euclidiens, espaces vectoriels hermitiens. Isomorphisme d'un espace vectoriel euclidien avec son dual. Supplémentaire orthogonal. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Norme. Bases orthonormales.
4. Groupe orthogonal, groupe spécial orthogonal. Exemple de générateurs du groupe orthogonal : décomposition d'un automorphisme orthogonal en produit de réflexions. Endomorphismes symétriques, endomorphismes normaux. Diagonalisation d'un endomorphisme symétrique. Réduction simultanée de deux formes quadratiques réelles, l'une étant définie positive. Décomposition polaire dans $GL(n, \mathbf{R})$. Espaces vectoriels euclidiens de dimension 2 ou 3 : groupe des rotations ; produit mixte ; produit vectoriel.
5. Angles en dimension 2 : angles de vecteurs, angles de droites. Théorème de l'angle inscrit. Cocyclicité.
6. Groupe unitaire, groupe spécial unitaire. Diagonalisation des endomorphismes normaux. Décomposition polaire dans $GL(n, \mathbf{C})$.

9.5 Géométries affine, projective et euclidienne

Tous les espaces considérés dans ce chapitre sont de dimension finie.

1. Espace affine et espace vectoriel associé. Application affine et application linéaire associée. Sous-espaces affines, barycentres. Repères affines, équations d'un sous-espace affine. Groupe affine, notion de propriété affine. Groupe des homothéties-translations, affinités. Parties convexes, enveloppe convexe d'une partie d'un espace affine réel, points extrémaux.

Projection sur un convexe fermé.

2. Droite projective réelle ou complexe : groupe des homographies, birapport.
3. Isométries d'un espace affine euclidien. Groupe des isométries d'un espace affine euclidien. Déplacements, antidéplacements. En dimension 2 : classification des isométries, similitudes directes et indirectes. En dimension 3 : rotations.
4. Groupe des isométries laissant stable une partie du plan ou de l'espace. Polygones réguliers. Relations métriques dans le triangle. Utilisation des nombres complexes en géométrie plane.
5. Coniques et quadriques

   Application des formes quadratiques à l'étude des coniques propres du plan affine euclidien et des quadriques de l'espace affine euclidien de dimension 3. Classification des coniques.

   Intersection de quadriques et résultant.

   Propriétés géométriques (affines et métriques) des coniques. Définition par foyer et directrice, définition bifocale.

9.6 Analyse à une variable réelle

1. Nombres réels

   Le corps **R** des nombres réels. Topologie de **R**. Sous-groupes additifs de **R**. Droite numérique achevée. Suites de nombres réels : convergence, valeur d'adhérence. Limites inférieure et supérieure. Suites de Cauchy. Complétude de **R**. Théorème de Bolzano-Weierstrass. Parties compactes de **R**. Parties connexes de **R**.

   Convergence des séries à termes réels. Séries géométriques, séries de Riemann. Séries à termes positifs. Sommation des relations de comparaison. Comparaison d'une série et d'une intégrale. Estimations des restes. Convergence absolue. Produits de séries. Séries alternées.
2. Fonctions définies sur une partie de **R** et à valeurs réelles

   (a) Continuité

   Limite, continuité à droite, à gauche, continuité.

   Opérations algébriques sur les fonctions continues. Théorème des valeurs intermédiaires, image d'un segment. Étude de la continuité des fonctions monotones. Continuité d'une fonction réciproque.

   (b) Dérivabilité

   Dérivée en un point, dérivée à droite, à gauche. Fonctions dérivables. Opérations algébriques sur les fonctions dérivables. Dérivée d'une fonction composée. Dérivabilité d'une fonction réciproque.

   Théorèmes de Rolle et des accroissements finis. Application au sens de variation d'une fonction.

   Dérivées d'ordre supérieur. Applications de classe $\mathscr{C}^k$, de classe $\mathscr{C}^k$ par morceaux. Formule de Leibniz. Formule de Taylor avec reste intégral, formule de Taylor-Lagrange, formule de Taylor-Young.

   Calcul de développements limités et de développements asymptotiques.
3. Intégrale sur un segment des fonctions continues par morceaux et calcul de primitives

   Propriétés de l'intégrale : linéarité, relation de Chasles, positivité. Sommes de Riemann. Primitives d'une fonction continue. Changement de variable. Intégration par parties. Méthodes usuelles de calcul d'intégrales.
4. Intégrales généralisées. Intégrales absolument convergentes. Intégration des relations de comparaison. Intégrales semi-convergentes.

5. Suites et séries de fonctions

   Convergence simple, convergence uniforme. Continuité et dérivabilité de la limite. Cas des séries de fonctions : convergence normale.

   Théorèmes d'approximation de Weierstrass polynomial et de Weierstrass trigonométrique.
6. Fonctions usuelles

   Fonctions polynômes, fonctions rationnelles. Logarithmes. Exponentielles. Fonctions puissances. Fonctions circulaires et hyperboliques. Fonctions circulaires et hyperboliques réciproques.
7. Convexité

   Fonctions convexes d'une variable réelle. Continuité et dérivabilité des fonctions convexes. Caractérisations de la convexité.
8. Suites définies par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$. Étude graphique. Points fixes attractifs. Points fixes répulsifs.
9. Polynôme d'interpolation de Lagrange.
10. Méthodes d'approximation

    Approximation quadratique : polynômes orthogonaux.
11. Méthodes de résolution approchée des équations $f(x) = 0$: dichotomie, méthode de Picard, méthode de Newton. Estimation de l'erreur pour la méthode de Newton.
12. Intégration numérique : méthode des trapèzes, de Simpson ; estimation de l'erreur.

9.7 Analyse à une variable complexe

1. Séries entières

   Rayon de convergence. Propriétés de la somme d'une série entière sur son disque de convergence : continuité, dérivabilité par rapport à la variable complexe, primitives.

   Fonctions analytiques sur un ouvert. Principe des zéros isolés. Opérations algébriques sur les fonctions analytiques. Composition.

   Exponentielle complexe ; propriétés. Extension des fonctions circulaires au domaine complexe.

   Développement en série entière des fonctions usuelles.
2. Fonctions d'une variable complexe

   Fonctions holomorphes. Conditions de Cauchy-Riemann. Intégrale d'une fonction continue le long d'un chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Primitives d'une fonction holomorphe sur un ouvert étoilé. Déterminations du logarithme.

   Indice d'un chemin fermé $\mathscr{C}^1$ par morceaux par rapport à un point.

   Formules de Cauchy. Analyticité d'une fonction holomorphe. Principe du prolongement analytique. Principe du maximum.

   Singularités isolées. Séries de Laurent. Fonctions méromorphes. Théorème des résidus.

   Suites et séries de fonctions holomorphes.

9.8 Calcul différentiel

1. Topologie de $\mathbf{R}^n$

   Parties ouvertes, fermées. Voisinages. Parties compactes. Théorème de Bolzano-Weierstrass.

   Parties connexes. Normes usuelles. Limites. Applications continues. Complétude de $\mathbf{R}^n$.

2. Fonctions différentiables

   Applications différentiables sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Différentielle (application linéaire tangente). Dérivée selon un vecteur.

   Dérivées partielles. Opérations algébriques sur les applications différentiables. Composition d'applications différentiables. Théorème des accroissements finis. Applications de classe $\mathscr{C}^1$.

   Matrice jacobienne. Applications de classe $\mathscr{C}^k$. Dérivées partielles d'ordre k. Interversion de l'ordre des dérivations. Formule de Taylor avec reste intégral, formule de Taylor-Young.

   Étude locale des applications à valeurs dans $\mathbf{R}$. Développements limités. Recherche des extremums locaux.

   Difféomorphismes. Théorème d'inversion locale. Théorème des fonctions implicites.

3. Équations différentielles

   Équations différentielles sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$, de la forme $X' = f(t, X)$. Théorème de Cauchy-Lipschitz. Solutions maximales. Problème de l'existence globale. Dépendance par rapport aux conditions initiales.

   Portrait de phase, comportement qualitatif.

   Systèmes différentiels linéaires.

   Méthode de variation de la constante. Cas des coefficients constants. Équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à un.

9.9 Calcul intégral

1. Définition des espaces mesurables, tribu produit, cas particulier des tribus boréliennes. Définition d'une mesure, cas particuliers de la mesure de comptage, de la mesure de Lebesgue (construction admise) et des mesures de probabilité. Définition d'une fonction mesurable ; opérations élémentaires sur les fonctions mesurables.

2. Intégration

   Intégrale des fonctions mesurables positives, théorème de convergence monotone. Lemme de Fatou. Fonctions intégrables, théorème de convergence dominée. Fonctions intégrables à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie. Continuité, dérivabilité, holomorphie d'une intégrale dépendant d'un paramètre. Espaces L^p, où $1 \leqslant p \leqslant \infty$: inégalités de Minkowski, Hölder et Jensen. Théorème de Fubini.

   Changement de variables dans une intégrale multiple. Calculs d'aires de domaines plans et de volumes.

   Convolution. Régularisation et approximation par convolution.

3. Analyse de Fourier

   Séries de Fourier des fonctions localement intégrables périodiques d'une variable réelle. Lemme de Riemann-Lebesgue. Produit de convolution de fonctions périodiques. Théorèmes de Dirichlet et de Fejer. Théorie L^2 : convergence en moyenne quadratique, formule de Parseval.

9.10 Probabilités

1. Définition d'un espace probabilisé : événements, tribus, mesure de probabilité. Indépendance d'événements et de tribus. Loi du 0-1, lemmes de Borel-Cantelli.
2. Probabilités conditionnelles : définition, formule des probabilités totales et théorème de Bayes.
3. Variables aléatoires, loi d'une variable aléatoire : loi discrète et loi absolument continue. Fonction de répartition et densité.

4. Exemples de variables aléatoires : variable de Bernoulli, binomiale, de Poisson, uniforme, exponentielle, de Gauss.
5. Espérance et variance d'une variable aléatoire à valeurs réelles, théorème de transfert.
6. Indépendance de variables aléatoires. Loi conditionnelle d'une variable par rapport à une autre.
7. Transformations exponentielles de lois : fonction caractéristique, transformée de Laplace, fonction génératrice. Liens avec l'indépendance et la convolution, application aux sommes de variables aléatoires indépendantes.
8. Convergences de suites de variables aléatoires : en probabilité, dans L^p, presque sûrement, en loi.
9. Inégalité de Markov, inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Loi faible des grands nombres, applications en statistiques.
10. Théorème de Lévy, théorème central limite, applications en statistiques.

9.11 Analyse fonctionnelle

1. Topologie et espaces métriques

   Topologie d'un espace métrique. Topologie induite.

   Suites. Valeurs d'adhérence. Limites. Applications continues. Homéomorphismes.

   Produit fini d'espaces métriques.

   Compacité. Connexité. Composantes connexes. Connexité par arcs.

   Propriétés métriques : applications lipschitziennes, applications uniformément continues.

   Espaces métriques complets. Théorème du point fixe pour les applications contractantes.
2. Espaces vectoriels normés sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

   Topologie d'un espace vectoriel normé. Normes équivalentes. Cas des espaces de dimension finie. Espaces de Banach. Séries absolument convergentes dans un espace de Banach.

   Applications linéaires continues, norme.

   Norme de la convergence uniforme. Espace des fonctions continues bornées sur un espace métrique, à valeurs dans un espace Banach.

   Étude de la compacité de parties d'un espace vectoriel normé : théorème de Riesz ; théorème d'Ascoli.

   Complétude des espaces L^p, où $1 \leqslant p \leqslant \infty$.
3. Espaces de Hilbert

   Projection sur un convexe fermé. Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel fermé.

   Dual d'un espace de Hilbert.

   Cas des espaces L^2.

   Bases hilbertiennes (dans le cas séparable). Exemples de bases : fonctions trigonométriques, polynômes orthogonaux.

   Exemples d'applications linéaires continues entre espaces de Hilbert.

   Théorème de Lax Milgram. Espace $H_0^1(]0,1[)$ et application au problème de Dirichlet en dimension 1 : $u - \frac{d}{dx}(a\frac{d}{dx}u) = f$ avec $f \in L^2(]0,1[)$, $a \in L^\infty(]0,1[)$ essentiellement positive et minorée par $m > 0$.
4. Espace de Schwartz $S(\mathbf{R}^d)$ des fonctions à décroissance rapides sur $\mathbf{R}^d$.

   Normes $N_p(f)$ (sup des normes uniformes des produits des dérivées partielles itérées d'ordre inférieur à p de f par les monômes de degré inférieur à p).

   Espace $S'(\mathbf{R}^d)$ des distributions tempérées.

   Dérivation des distributions tempérées.

Cas particulier des distributions à support compact dans $\mathbf{R}^d$. Solution fondamentale du Laplacien.
Convolution de distributions dans le cas où l'une d'entre elles est à support compact.
Transformation de Fourier dans S et dans S'.
Transformation de Fourier sur les espaces $L^1(\mathbf{R}^d)$ et $L^2(\mathbf{R}^d)$.

9.12 Géométrie différentielle

Sous-variétés de $\mathbf{R}^n$. Définitions équivalentes : graphe local, paramétrisation locale, équation locale. Espace tangent. Notions métriques : longueur d'un arc, paramétrisation normale, courbure d'un arc en dimensions 2 et 3. Gradient.
Tracé de courbes usuelles.
Surfaces dans $\mathbf{R}^3$: position par rapport au plan tangent.
Définition de la divergence d'un champ de vecteurs.
Extremums locaux d'une fonction définie sur une sous-variété (extremums liés), multplicateurs de Lagrange.

ÉPREUVES ÉCRITES

Les épreuves écrites comportent deux épreuves :

A. Composition de mathématiques générales

Le programme de cette épreuve est constitué par les titres 1 à 12 ci-dessus.

B. Composition d'analyse et probabilités

Le programme de cette épreuve est constitué par les titres 1 à 12 ci-dessus.

ÉPREUVES ORALES

Les candidats ont le choix entre quatre options :

Option A : probabilité et statistiques
Option B : calcul scientifique
Option C : algèbre et calcul formel
Option D : informatique

Épreuves orales des options A, B, C

1re Épreuve : Épreuve d'Algèbre et Géométrie

2e Épreuve : Épreuve d'Analyse et Probabilités

Le programme de ces deux épreuves, communes aux options A, B et C, est constitué des titres 1 à 12 et du programme complémentaire ci-dessous.

Programme complémentaire pour les épreuves orales options, A, B, C et D

— Résolution de systèmes d'équations linéaires ;
  Normes subordonnées, notion de conditionnement, rayon spectral, décomposition LU, méthode de Jacobi. Exemple d'opérateurs aux différences finies. Lien avec l'optimisation de fonctionnelles convexes en dimension finie, méthode du gradient à pas constant pour les systèmes linéaires symétriques définis positifs, moindres carrés. Recherche d'éléments propres : méthode de la puissance, décomposition en valeurs singulières, théorème de Gershgörin-Hadamard.
— Méthode numérique pour la résolution de systèmes d'équations non linéaires. Méthode de Newton : définition, vitesse de convergence, estimation de l'erreur.
— Intégration numérique : méthode des rectangles, des trapèzes, de Simpson ; estimation de l'erreur.
— Équations différentielles ordinaires. Stabilité des points critiques. Aspects numériques du problème de Cauchy : méthodes d'Euler explicite et implicite, consistance, stabilité, convergence, ordre.

3e Épreuve : Épreuve de Modélisation

L'épreuve porte sur le programme constitué des titres 1 à 12, du programme complémentaire ci-dessus, d'un programme commun aux options A, B et C (explicité ci-dessous) et sur un programme spécifique à l'option choisie.

L'épreuve consiste en un exposé de modélisation mathématique construit en partant d'un texte proposé par le jury. Le programme définit un cadre de théories mathématiques et de techniques d'application adaptées pour l'épreuve. Ce programme comporte une partie commune aux options A, B et C et, pour chacune de ces options, une partie spécifique.

Modélisation : programme de la partie commune aux options A, B, C

À partir de la session 2015, seuls les logiciels libres seront disponibles. Le site de l'agrégation externe de mathématiques (`agreg.org`) et le rapport du Jury préciseront suffisamment à l'avance la liste des logiciels disponibles et la nature de leur environnement.

À l'aide d'un ou plusieurs de ces logiciels, les candidats devront montrer leur capacité à :

- mettre en œuvre avec précision et rigueur les concepts et outils mathématiques au programme,
- distinguer les représentations exactes ou approchées des objets mathématiques
- estimer le coût et les limitations d'algorithmes simples : complexité, précision
- analyser la pertinence des modèles.

Le programme de cette partie comprend les méthodes numériques, probabilistes, statistiques et symboliques citées dans les programmes des épreuves écrites, dans le programme complémentaire pour l'oral et celles citées dans les paragraphes suivants.

1. Calcul numérique et symbolique
   Utilisation des logiciels au programme : simulation, intégration, différentiation, calcul de sommes et d'intégrales, résolution d'équations algébriques et différentielles.
2. Probabilités discrètes : tirages uniformes ; échantillons.
3. Chaînes de Markov homogènes à espace d'états finis : définition, irréductibilité, apériodicité.

4. Validation et précision des résultats.

   Méthodes numériques : notion de conditionnement des systèmes linéaires.

   Précision du schéma numérique d'Euler explicite à pas constant.

   Moyenne et variance empirique.

   Méthode de Monte Carlo : vitesse de convergence ; applications au calcul d'intégrales multiples (exemple : calcul de volumes).
5. Moindres carrés linéaires (sans contraintes).

Programme spécifique de l'option A

1. Utilisation de lois usuelles (voir section 10.4, loi géométrique) pour modéliser certains phénomènes aléatoires. Exemples : temps d'attente ou durée de vie, erreurs de mesure, sondages... Méthodes de simulation de variables aléatoires.
2. Chaînes de Markov à espace d'états finis. Classification des états. Convergence vers une loi stationnaire (théorème ergodique et théorème central limite admis).

   Chaînes de Markov homogènes à espace d'états dénombrable, transience, récurrence positive ou nulle, exemple de la marche aléatoire simple.
3. Lois de Poisson, exponentielle et Gamma, construction et propriétés du processus de Poisson sur $\mathbb{R}_+$.
4. Espérance conditionnelle, définition des martingales, temps d'arrêt. Exemples d'utilisation des théorèmes de convergence presque sûre et L^2 des martingales à temps discret.
5. Échantillons, moments empiriques, loi et fonction de répartition empiriques.
6. Applications des théorèmes de convergences à l'estimation (lois des grands nombres, théorème central limite, utilisation du lemme de Slutsky). Définition et construction d'intervalles de confiance.
7. Estimation paramétrique. Estimation par maximum de vraisemblance : définition et exemples.
8. Vecteurs gaussiens : définition, simulation en dimension 2, théorème de Cochran. Théorème central limite dans $\mathbb{R}^n$.
9. Modèle linéaire gaussien : calculs par moindres carrés, régression linéaire simple ou multiple, exemples d'utilisation.
10. Tests paramétriques (test du rapport de vraisemblance). Tests d'ajustement (tests du χ^2, tests de Kolmogorov-Smirnov). Exemples d'utilisation.

Programme spécifique de l'option B.

1. Équations différentielles ordinaires. Espaces de phase. Étude qualitative. Stabilité des points critiques.

   Aspects numériques du problème de Cauchy : mise en œuvre des méthodes d'Euler, utilisation de la méthode de Runge-Kutta 4.
2. Notions élémentaires sur les équations aux dérivées partielles classiques en dimension un.

   Équation de transport (advection) linéaire : méthode des caractéristiques.

   Équations des ondes et de la chaleur : résolution par transformée de Fourier et séparation des variables. Aspects qualitatifs élémentaires.

   Équations elliptiques.

   Exemples de discrétisation de problèmes aux limites en dimension un par la méthode des différences finies : notions de consistance, stabilité, convergence, ordre.

3. Optimisation et approximation

   Interpolation de Lagrange.

   Extremums des fonctions réelles de n variables réelles : multiplicateurs de Lagrange. Mise en œuvre de l'algorithme de gradient à pas constant.

   Méthode des moindres carrés et applications.

Programme spécifique de l'option C.

1. Représentation et manipulation des entiers longs, flottants multiprécision, nombres complexes, polynômes, éléments de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et des corps finis. Addition, multiplication, division, extraction de racine carrée.
2. Algorithmes algébriques élémentaires.

   Exponentiation ($n \mapsto a^n$, pour $n \in \mathbf{N}$), algorithme d'Euclide étendu.

   Test de primalité de Fermat.
3. Matrices à coefficients dans un corps.

   Méthode du pivot de Gauss, décomposition LU. Calcul du rang, du déterminant.

   Exemples de codes correcteurs linéaires : codes de répétition, codes de Hamming binaires.
4. Matrices à coefficients entiers.

   Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes. Application aux systèmes linéaires sur $\mathbf{Z}$ et aux groupes abéliens de type fini.
5. Polynômes à une indéterminée.

   Évaluation (schéma de Horner), interpolation (Lagrange, différences finies).

   Localisation des racines dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$: majoration en fonction des coefficients.
6. Polynômes à plusieurs indéterminées.

   Résultants, élimination ; intersection ensembliste de courbes et de surfaces algébriques usuelles.
7. Estimation de la complexité des algorithmes précités dans le pire des cas. Aucune formalisation d'un modèle de calcul n'est exigée.

Épreuves de l'option D : informatique

1re Épreuve : Mathématiques

Le programme de cette épreuve est constitué des titres 1 à 12 et du programme complémentaire de l'oral. Les candidats se verront proposer deux sujets, dans un corpus d'algèbre, de géométrie, d'analyse et de probabilités.

2e Épreuve : Informatique Fondamentale

Le programme de cette épreuve est constitué des titres 13 à 16 ci-après.

3e Épreuve : Analyse de système informatique

Le programme de cette épreuve est constitué des titres 13 à 16 ci-après.

Deux textes décrivant une classe de systèmes informatiques sont proposés au candidat qui doit choisir l'un des deux. La compréhension de ces textes et leur exploitation dans cette épreuve requièrent les connaissances en informatique correspondant aux matières enseignées en L1-L2 de Maths-Info ou dans l'option informatique des classes préparatoires auxquelles s'ajoutent celles du programme.

L'objectif de l'épreuve est d'évaluer la capacité des candidats à mettre en place un processus d'analyse d'un système informatique dans un contexte applicatif. Ce processus s'appuie sur les notions au programme.

Les langages informatiques C, Caml, Python et Java seront disponibles pour cette épreuve et sa préparation. Le rapport du Jury précisera la nature de l'environnement logiciel.

Programme spécifique de l'option D.

L'ensemble du programme correspond à 250h de formation (cours et/ou TD et/ou TP) de niveau Licence et première année de Master, à partir des acquis des deux premières années de Licence ou de l'option informatique des classes préparatoires. L'objectif de cette option est de s'assurer que les candidats maîtrisent les fondements essentiels et structurants de la science informatique.

Le programme n'est pas rédigé comme un plan de cours, il décrit les notions que les candidats doivent maîtriser.

Le programme n'impose aucun langage de programmation particulier. Les candidats doivent maîtriser au moins un langage et son environnement de programmation parmi CAML, Java ou C.

9.13 Algorithmique fondamentale

Cette partie insiste sur les notions de preuve et de complexité des algorithmes. Elle est relativement indépendante de tout langage de programmation, mais le candidat doit être capable de mettre en oeuvre sur machine les structures de données et les algorithmes étudiés.

1. Structures de données. Types abstraits : définition des tableaux, listes, piles, files, arbres, graphes (orientés et non orientés), ensembles, dictionnaires, file de priorité. Interface abstraite et implantation (implémentation) concrète.
2. Schémas algorithmiques classiques : approche gloutonne, diviser pour régner, programmation dynamique. Exemples : algorithme de Dijkstra, tri-fusion, plus longue sous-séquence commune.
3. Complexité. Analyse des algorithmes : relations de comparaison O, Θ et Ω. Analyse dans le pire cas. Exemple d'analyse en moyenne : recherche d'un élément dans un tableau.
4. Preuve d'algorithmes : correction, terminaison. Méthodes de base : assertions, pré-post conditions, invariants et variants de boucles, logique de Hoare, induction structurelle.
5. Algorithmes de tri et de recherche. Méthodes de tri par comparaison (tri-fusion, tri-tas, tri rapide), arbre de décision et borne inférieure du tri par comparaisons. Méthodes de recherche séquentielle et dichotomique. Arbres binaires de recherche. Arbres équilibrés : définition, relation entre la taille et la hauteur, maintien de l'équilibre.
6. Algorithmes de graphes. Parcours de graphes : algorithmes de parcours en largeur, en profondeur, algorithme de Dijkstra. Arbres couvrants : algorithmes de Prim et de Kruskal. Fermeture transitive.

9.14 Automates et langages

1. Automates finis. Langages reconnaissables. Lemme d'itération. Existence de langages non reconnaissables. Automates complets. Automates déterministes. Algorithme de déterminisation. Propriétés de clôture des langages reconnaissables.
2. Expressions rationnelles. Langages rationnels. Théorème de Kleene.

3. Automate minimal. Résiduel d'un langage par un mot. Algorithme de minimisation.
4. Utilisation des automates finis : recherche de motifs, analyse lexicale.
5. Langages algébriques. Lemme d'Ogden. Existence de langages non algébriques. Grammaires algébriques. Propriétés de clôture des langages algébriques.
6. Automates à pile. Langages reconnaissables par automates à pile.
7. Utilisation des automates à pile : analyse syntaxique. Grammaires LL(1).

9.15 Calculabilité, décidabilité et complexité

1. Définition des fonctions primitives récursives ; schémas primitifs (minimisation bornée). Définition des fonctions récursives ; fonction d'Ackerman.
2. Définitions des machines de Turing. Équivalence entre classes de machines (exemples : nombre de rubans, alphabet). Équivalence avec les fonctions récursives.
3. Universalité. décidabilité, Indécidabilité. Théorème de l'arrêt. Théorème de Rice. Réduction de Turing. Définitions et caractérisations des ensembles récursifs, récursivement énumérables.
4. Complexité en temps et en espace : classe P. Machines de Turing non déterministes : classe NP. Acceptation par certificat. Réduction polynomiale. NP-complétude. Théorème de Cook.

9.16 Logique et démonstration

1. Calcul propositionnel : syntaxe et sémantique. Tables de vérité, tautologies, formes normales, forme clausale. Théorème de complétude du calcul propositionnel.
2. Logique du premier ordre : aspects syntaxiques. Langages, termes, formules. Variables libres et variables liées, substitutions, capture de variables.
3. Réécriture : filtrage syntaxique du premier ordre, définition de l'unification syntaxique. Confluence, confluence locale, formes normales, paires critiques, lemme de Newman, algorithme de complétion de Knuth-Bendix.
4. Logique du premier ordre : systèmes formels de preuve. Calcul des séquents, déduction naturelle. Algorithme d'unification des termes. Preuves par résolution.
5. Logique du premier ordre : aspects sémantiques. Interprétation d'une formule dans un modèle. Validité, satisfiabilité. Théories cohérentes, théories complètes. Théories décidables, indécidables. Exemples de théories : égalité, arithmétique de Peano. Théorème de complétude du calcul des prédicats du premier ordre.

Chapitre 10

Annexe 4 : La bibliothèque de l'agrégation

ABELSON H. **SUSSMAN G. J.** **SUSSMAN J.**	Structure and interpretation of computer programs	MIT PRESS
AEBISCHER B.	L2 Analyse fonctions de plusieurs variables et géométrie analytique	VUIBERT
AEBISCHER B.	L3 Géometrie	VUIBERT
AHUÉS M. **CHATELIN F.**	Exercices de valeurs propres de matrices	MASSON
ALBERT L. **Collectif**	Cours et exercices d'informatique	VUIBERT
ALDON G.	Mathématiques dynamiques	HACHETTE
ALESSANDRI M.	Thèmes de géométrie	DUNOD
ALLAIRE G.	Analyse numérique et optimisation	EDITIONS DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ALLOUCHE J. P. **SHALLIT J.**	Automatic sequences theory, applications, generalizations	CAMBRIDGE
AMAR E. **MATHERON É.**	Analyse complexe	CASSINI

ANDLER M. **BLOCH J. D.** **MAILLARD B.**	Exercices corrigés de Mathématiques — Tome 1A - Topologie — Tome 1B - Fonctions numériques — Tome 2 - Suites et séries numériques — Tome 3 - Analyse fonctionnelle — Tome 5 - Algèbre générale, polynômes — Tome 6 - Algèbre linéaire, première partie — Tome 7 - Algèbre linéaire, deuxième partie	ELLIPSES
ANDREWS G.	Number Theory	DOVER
APPLE A.W.	Modern compiler implementation — in C — in Java — in ML	CAMBRIGDE
ARIBAUD F. **VAUTHIER J.**	Mathématiques. Première année de DEUG	ESKA
ARNAUDIES J-M. **BERTIN J.**	Groupes, Algèbres et Géométrie — Tome I — Tome II	ELLIPSES
ARNAUDIES J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus d'analyse	DUNOD
ARNAUDIES J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus d'algèbre bilinéaire et géométrie du cours de Mathématiques tome 4	DUNOD
ARNAUDIES J-M. **FRAYSSE H.**	Cours de Mathématiques — 1. Algèbre — 2. Analyse — 3. Compléments d'analyse — 4. Algèbre bilinéaire et géométrie	DUNOD
ARNOLD V.	Chapitre supplémentaire de la théorie des équations différentielles ordinaires	MIR
ARNOLD V.	Équations différentielles ordinaires	MIR
ARNOLD V.	lectures on partial differential equations	SPINGER

ARNOLD A. **GUESSARIAN I.**	Mathématiques pour l'informatique	EdiSciences
ARTIN E.	Algèbre géométrique	Gauthier-Villars
ARTIN E.	Algèbre géométrique	Gabay
ARTIN M.	Algebra	Prentice Hall
AUBIN J.P.	Analyse fonctionnelle appliquée — Tome 1 — Tome 2	PUF
AUTEBERT J. M.	Calculabilité et décidabilité	Masson
AUTEBERT J. M.	Théorie des langages et des automates	Masson
AUDIN M.	Géométrie de la licence à l'agrégation	Belin
AVANISSIAN V.	Initiation à l'analyse fonctionnelle	PUF
AVEZ A.	Calcul différentiel	Masson
BAASE S. **VAN GELDER A.**	Computer algorithms Introduction to design & analysis	Addison Wesley
BADOUEL E. **BOUCHERON S.** **DICKY A., PETIT A.** **SANTHA M., WEIL P., ZEITOUN M.**	Problèmes d'informatique fondamentale	Springer
BACAER N.	Histoires de mathématiques et de populations	Cassini
BAJARD J.C.	Exercices d'Algorithmique	ITP
BAKHVALOV N.	Méthodes numériques	MIR

BARANGER J.	Analyse numérique	HERMANN
BARBE Ph. **LEDOUX M.**	Probabilité (De la licence à l'agrégation)	BELIN
BARRET M. **BENIDIR M.**	Stabilité des filtres et des systèmes linéaires	DUNOD
BASILI B. **PESKINE C.**	Algèbre	DIDEROT, ÉDITEUR ARTS ET SCIENCES
BASS J.	Cours de Mathématiques — Tome 1 — Tome 2	MASSON
BHATIA R.	Matrix Analysis	SPRINGER
BAUER F. L.	Decrypted secrets. Methods and maxims of cryptology	SPRINGER
BENDER C. **ORSZAG S.**	Advanced mathematical methods for scientists and engineers	MC GRAW HILL
BENIDIR M. **BARRET M.**	Stabilité des filtres et des systèmes linéaires	DUNOD
BENOIST J. et Alii	Math L2, Cours complet avec 700 tests et exercices corrigés	PEARSON EDUCATION
BENOIST J. **SALINIER A.**	Exercices de calcul intégral	DUNOD
BENZONI-GAVAGE S.	Calcul différentiel et équations différentielles	DUNOD
BERCU B. **CHAFAI D.**	Modélisation stochastique et simulation	DUNOD
BERGER M. **GOSTIAUX B.**	Géométrie différentielle	ARMAND COLIN
BERGER M. **BERRY J-P.** **PANSU P.** **SAINT RAYMOND X.**	Problèmes de géométrie commentés et rédigés	CÉDIC/NATHAN

BERGER M.	Géométrie — Index — 1. Action de groupes, espaces affines et projectifs — 2. Espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères — 3. Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes — 4. Formes quadratiques, quadriques et coniques — 5. La sphère pour elle-même, géométrie hyperbolique, l'espace des sphères	Cédic/Nathan
BERGER M.	Géométrie tome 2	Nathan
BERGER M.	Géométrie vivante	Cassini
BERLINE N. **SABBAH C.**	Groupes finis, journées X-UPS 2000	Editions de l'X
BHATIA R.	Matrix analysis 1	Springer
BICKEL P.J. **DOKSUM K.A.**	Mathematical statistics	Prentice Hall
BIDEGARAY B. **MOISAN L.**	Petits problèmes de mathématiques appliquées et de modélisation	Springer
BIGGS NORMAN L.	Discrete mathematics	Oxford Science Publications
BLANCHARD A.	Les corps non commutatifs	PUF
BILLINGSLEY P.	Probability and measure	Copyrighted Material
BOAS R.	A primer of real functions	Mathematical association of America
BOISSONAT J.D. **YVINEC M.**	Géométrie algébrique	Ediscience

BON J.L.	Fiabilité des systèmes	MASSON
BONNANS J.F. **GILBERT J.C.** **LEMARECHAL C.** **SAGASTIZABAL C.** **PENNEQUIN D.**	Optimisation numérique	SPRINGER
BONY J.M.	Cours d'analyse	EDITIONS DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
BONY J.M.	Méthodes mathématiques pour les sciences physiques	EDITIONS DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
BOUALEM H. **BROUZET J.C.** **ELSNER B.** **KACZMAREK L.**	Mathématique L1	PEARSON EDUCATION
BOURBAKI N.	Éléments de Mathématique — Topologie générale, chapitres V à X — Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à VII — Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à III — Fascicule XIII Intégration, chapitres I à IV	HERMANN
BOURGADE P.	Annales des Olympiades internationales de mathématiques 1976-2005	CASSINI
BOUVIER A. **RICHARD D.**	Groupes	HERMANN
BREMAUD P.	Introduction aux probabilités	SPRINGER
BREZIS H.	Analyse fonctionnelle, théorie et applications	MASSON
BRIANE M. **PAGES G.**	Théorie de l'intégration Cours et exercices, 3ème édition	VUIBERT
BROUSSE P.	Mécanique MP - PC.- Spéciales A. A'. B. B'.	ARMAND COLIN

BRUCE J.W. **GIBLIN P.J.** **RIPPON P.J.**	Microcomputers and Mathematics	CAMBRIDGE
CABANE R. **LEBOEUF C.**	Algèbre linéaire — 1. Espaces vectoriels , Polynômes — 2. Matrices et réduction	ELLIPSES
CABANNES H.	Cours de Mécanique générale	DUNOD
CALAIS J.	Éléments de théorie des anneaux	PUF
CALAIS J.	Éléments de théorie des groupes	PUF
CANDELPERGHER B.	Calcul intégral	CASSINI
CANDELPERGHER B.	Théorie des probabilités	CALVAGE ET MOUNET
CALDERO P. **GERMONI J.**	Histoires hédonistes de groupes et de géométries	CALVAGE ET MOUNET
CARREGA J.C.	Théorie des corps	HERMANN
CARTAN H.	Calcul différentiel (1971)	HERMANN
CARTAN H.	Cours de calcul différentiel (1977)	HERMANN
CARTAN H.	Formes différentielles	HERMANN
CARTAN H.	Théorie élémentaire des fonctions analytiques	HERMANN
CARTON O.	Langages formels, calculabilité et complexité	VUIBERT
CASTLEMAN K.R.	Digital image processing	PRENTICE HALL
CASTI J.L.	Realty Rules : Picturing the world in mathematics I	WILEY INTERSCIENCE

CASTI J.L.	Realty Rules : Picturing the world in mathematics II	WILEY INTERSCIENCE
CHABAT B.	Introduction à l'analyse complexe	MIR
CHAMBERT-LOIR A.	Algèbre corporelle	EDITIONS DE L'X
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.** **MAILLOT V.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Analyse 1 (seconde édition revue et corrigée)	MASSON
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation — Analyse 2 — Analyse 3	MASSON
CHARLES J. **MBEKHTA M.** **QUEFFELEC H.**	analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs	DUNOD
CHARPENTIER E. **NIKOLSKI N.**	Leçons de mathématiques d'aujourd'hui — Vol 1 — Vol 2 — Vol 3 — Vol 4	ELLIPSES
CHARLES J. **MBEKHTA M.** **QUEFFELEC H.**	Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs	ELLIPSES
CHATELIN F.	Valeurs propres de matrices	MASSON
CHILDS L.	A concrete introduction to Higher Algebra	SPRINGER VERLAG
CHOQUET G.	Cours d'analyse Tome II : Topologie	MASSON
CHOQUET G.	L'enseignement de la géométrie	HERMANN
CHOIMET D. **QUEFFELEC H.**	Analyse mathématique	CASSINI
CHRISTOL G. **PILIBOSSIAN P.** **YAMMINE S.**	— Algèbre 1 — Algèbre 2	ELLIPSES

CIARLET P.G.	Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation	MASSON
CIARLET P.G.	Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation	DUNOD
COGIS O. **ROBERT C.**	Au-delà des ponts de Könisberg. Théorie des graphes. Problèmes, théorie, algorithmes	VUIBERT
COHN P.M.	Algebra Volume 1	JOHN WILEY
COLLET H. **GIRARD B.** **PERRIER C.**	Mathématique BTS industriel	NATHAN
COLLET P.	Modeling binary data	CHAPMAN AND HALL
COLMEZ P.	Éléments d'algèbre et d'analyse	EDITIONS DE L'X
COMBROUZE A.	Probabilités et statistiques	PUF
CORI R. **LASCAR D.**	Logique mathématique — 1. Calcul propositionnel, algèbre de Boole, calcul des prédicats — 2. Fonctions récursives, théorème de Gödel, théorie des ensembles, théorie des modèles	DUNOD
CORMEN T. H. **LEISERSON C. E.** **RIVEST R. L.** **STEIN C.**	Introduction à l'algorithmique	DUNOD
COTRELL M. **GENON-CATALOT V.** **DUHAMEL C.** **MEYRE T.**	Exercices de probabilités	CASSINI
COURANT R. **HILBERT D.**	Methods of Mathematical Physics — Volume 1 — Volume 2	JOHN WILEY

COUSINEAU G. **MAUNY M.**	Approche fonctionnelle de la programmation	EDISCIENCE
COXETER H.S.M.	Introduction to Geometry	JOHN WILEY
COX D.A.	Galois Theory	WILEY INTERSCIENCE
CVITANOVIC P.	Universality in Chaos	INSTITUTE OF PHYSICS PUBLISHING
DACUNHA-CASTELLE D. **DUFLO M.**	— Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe — Exercices de Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe	MASSON
DACUNHA-CASTELLE D. **REVUZ D.** **SCHREIBER M.**	Recueil de problèmes de calcul des probabilités	MASSON
DAMPHOUSSE P.	Petite introduction à l'algorithmique	ELLIPSES
DANTZER J.F.	Mathématiques pour l'agrégation interne	VUIBERT
DARTE A. **VAUDENAY S.**	Algorithmique et optimisation	DUNOD
DAVID R. **NOUR K.** **RAFFALI C.**	Introduction à la logique Théorie de la démonstration	DUNOD
DE KONNINCK J.M. **MERCIER A.**	Introduction à la théorie des nombres	MODULO
DEHEUVELS P.	L'intégrale	PUF
DEHEUVELS P.	L'intégrale	QUE-SAIS-JE ? PUF
DEHEUVELS R.	Formes quadratiques et groupes classiques	PUF
DEHORNOY P.	Mathématiques de l'informatique	DUNOD

DEHORNOY P.	Complexité et décidabilité	Springer
DELCOURT J.	Théorie des groupes	Dunod
DELTHEIL R. **CAIRE D.**	Géométrie et compléments	Jacques Gabay
DEMAILLY J.P.	Analyse numérique et équations différentielles	PU Grenoble
DEMAZURE M.	Catastrophes et bifurcations	Ellipses
DEMAZURE M.	Cours d'algèbre : primalité, divisibilité, codes	Cassini
DEMAZURE M.	Cours d'algèbre	Cassini
DEMBO A. **ZEITOUNI O.**	Large deviations techniques and applications	Springer
DESCHAMPS **WARUSFEL** **MOULIN, RUAUD** **MIQUEL, SIFRE**	Mathématiques, cours et exercices corrigés — 1ère année MPSI, PCSI, PTSI — 2ème année MP, PC, PSI	Dunod
DESCOMBES R.	Éléments de théorie des nombres	PUF
DESPRÉS B.	Lois de conservations euleriennes, lagrangiennes et méthodes numériques	Springer
DEVANZ C. **ELHODAIBI M.**	Exercices corrigés de Mathématiques posés à l'oral des Ensi, Tome 2	Ellipses
DI MENZA L.	Analyse numérique des équations aux dérivées partielles	Cassini
DIEUDONNÉ J.	Algèbre linéaire et géométrie élémentaire	Hermann
DIEUDONNÉ J.	Calcul infinitésimal	Hermann

DIEUDONNÉ J.	Sur les groupes classiques	Hermann
DIEUDONNÉ J.	Éléments d'Analyse. — Fondements de l'analyse moderne — Éléments d'Analyse Tome 2.	Gauthier-Villars
DIXMIER J.	Cours de Mathématiques du premier cycle — Première année — Deuxième année	Gauthier-Villars
DOWEK G. **LEVYH J.-J**	Introduction à la théorie des langages de programmation	Editions de l'X
DRAPPER N. **SCHMITH H.**	Applied regression analysis	Wiley
DUBUC S.	Géométrie plane	PUF
DUCROCQ A. **WARUSFEL A.**	Les Mathématiques, plaisir et nécessité Un parcours guidé dans l'univers des mathématiques	Vuibert
DUGAC P.	Histoire de l'analyse. Autour de la notion de limite et de ses voisinages	Vuibert
DUTERTRET G.	Initiation à la cryptographie	PUF
DYM H. **Mac KEAN H.P.**	Fouriers series and integrals	Academics Press
EBBINGHAUS, HERMES **HIRZEBRUCH** **KOECHER** **LAMOTKE, MAINZER** **NEUKIRSCH, PRESTEL,** **REMMERT**	Les Nombres	Vuibert
EIDEN J.D.	Géométrie analytique classique	Calvage et Mounet
EL HAJ LAAMRI	Mesures, intégration et transformée de Fourier des fonctions	Dunod

EL KACIMI ALAOUI A. **QUEFFÉLEC H.** **SACRÉ C.** **VASSALLO V.**	Quelques aspects des mathématiques actuelles	Ellipses
ENGEL A.	Solutions d'expert — Vol 1 — Vol 2	Cassini
EPISTEMON L. **(OVAERT J.L.** **VERLEY J.L.)**	Exercices et problèmes — Analyse. Volume 1 — Algèbre.	Cédic/Nathan
EXBRAYAT J.M. **MAZET P.**	Notions modernes de mathématiques — Algèbre 1 : Notions fondamentales de la théorie des ensembles — Analyse 1 : Construction des espaces fondamentaux de l'analyse — Analyse 2 : Éléments de topologie générale	Hatier
FADDEEV D. **SOMINSKI I.**	Recueil d'exercices d'Algèbre Supérieure	MIR
FAIRBANK X. **BEEF C.**	POX - Exercices posés au petit oral de l'X	Ellipses
FARAUT J.	Analyse sur les groupes de Lie	Calvage et Mounet
FARAUT J. **KHALILI E.**	Arithmétique Cours, Exercices et Travaux Pratiques sur Micro-Ordinateur	Ellipses
FELLER W.	An introduction to probability theory and its applications — Volume 1 — Volume 2	John Wiley
FERRIER J.P.	Mathématiques pour la licence	Masson
FILBET F.	Analyse numérique	Dunod

FLORY G.	Exercices de topologie et analyse avec solutions — Tome 1 - Topologie — Tome 2 - Fonctions d'une variable réelle — Tome 3 - Fonctions différentiables, intégrales multiples — Tome 4 - Séries, équations différentielles	Vuibert
FONTANEZ F. **RANDÉ B.**	Les clefs pour les Mines	Calvage et Mounet
FRANCHINI J. **JACQUENS J-C.**	Mathématiques Spéciales — Algèbre — Analyse 1 — Analyse 2	Ellipses
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Algèbre 1	Cassini
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Algèbre 2	Cassini
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Algèbre 3	Cassini
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Analyse 1	Cassini
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Analyse 2	Cassini
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Analyse 3	Cassini
FRANCINOU S. **GIANELLA H.**	Exercices de Mathématiques Algèbre 1	Masson
FRENKEL J.	Géométrie pour l'élève-professeur	Hermann
FRESNEL J.	Géométrie algébrique	UFR Maths Bordeaux

FRESNEL J.	Géométrie	IREM de Bordeaux
FRESNEL J.	Groupes	Hermann
FRESNEL J. **MATIGNON M.**	Algèbre et géométrie	Hermann
FRESNEL J.	Méthodes modernes en géométrie	Hermann
FUHRMANN P.	A polynomial approach to linear algebra	Springer
FULTON W.	Algebraic Topology A first course	Springer
GABRIEL P.	Matrices, géométrie, algèbre linéaire	Cassini
GANTMACHER F.R.	Théorie des matrices — Tome 1 — Tome 2	Dunod
GAREY M. **JOHNSON D.**	Computers and intractability	Freeman
GARLING D.J.H.	Inequalities : a journey into linear analysis	Cambridge
GATHEN (von zur) J. **GERHARD .J**	Modern computer algebra	Cambridge University press
GENET J.	Mesure et intégration. Théorie élémentaire. Cours et exercices résolus	Vuibert
GHIDAGLIA J.M.	Petits problèmes d'analyse	Springer
GINDIKIN S.	Histoires de mathématiciens et de physiciens	Cassini
GRANGON Y.	Informatique, algorithmes en Pascal et en langage C	Dunod
GRENIER J.P.	Débuter en algorithmique avec Matlab et Scilab	Ellipses

GOBLOT R.	Algèbre commutative	Masson
GOBLOT R.	Thèmes de géométrie	Masson
GODEMENT R.	Analyse — Tome 1 — Tome 2 — Tome 3	Springer
GODEMENT R.	Cours d'Algèbre	Hermann
GOLUB G.H. **VAN LOAN C.F.**	Matrix computations	Wiley
GONNORD S. **TOSEL N.**	Thèmes d'Analyse pour l'agrégation — Topologie et Analyse fonctionnelle — Calcul différentiel	Ellipses
GOSTIAUX B.	Cours de mathématiques spéciales — Tome 1 - Algèbre — Tome 2 - Topologie et analyse réelle — Tome 3 - Analyse fonctionnelle et calcul différentiel — Tome 4 - Géométrie affine et métrique — Tome 5 - Géométrie : arcs et nappes	PUF
GOUDON Th.	Intégration	Ellipses
GOURDON X.	Les maths en tête, mathématiques pour M' — Algèbre — Analyse	Ellipses
GRAHAM R. **KNUTH D.** **PATASHNIK O.**	Concrete mathematics	Adison-Wesley
GRAMAIN A.	Géométrie élémentaire	Hermann
GRAMAIN A.	Intégration	Hermann
GRANJON Y.	Informatique, algorithmes en pascal et en C	Dunod

GRENIER J.P.	Debutér en algorithmique avec Matlab et Scilab	Ellipses
GREUB W.	Linear Algebra	Springer Verlag
GRIMMET G. **WELSH D.**	Probability (an introduction)	Oxford
GUJARATI D. N.	Basic Econometrics	Wiley
GUSFIELD D.	Algorithms on strings, trees and sequences	Cambridge university press
HABSIEGER L. **MARTEL V.**	Exercices corrigés posés à l'oral des ENSI Tome 1 Analyse	Ellipses
HALMOS P.	Problèmes de mathématiciens petits et grands	Cassini
HAMMAD P.	Cours de probabilités	Cujas
HAMMAD P. **TARANCO A.**	Exercices de probabilités	Cujas
HAMMER R. **HOCKS M.** **KULISH U.** **RATZ D.**	C++ toolbox for verified computing	Springer
HARDY G.H. **WRIGH E.M.**	An introduction to the theory of numbers	Oxford
HAREL D.	Computer LTD. What they really can't do	Oxford
HAREL D. **FELDMAN Y.**	Algorithmics. The spirit of computing	Addison Wesley
HENNEQUIN P.L. **TORTRAT A.**	Théorie des probabilités et quelques applications	Masson
HENRICI P.	Applied and Computational Complex Analysis — Volume 1 — Volume 2 — Volume 3	Wiley-Interscience

HERVE M.	Les fonctions analytiques	PUF
HINDRY M.	Arithmétique	Calvage et Mounet
HIRSCH F. **LACOMBE G.**	Eléments d'analyse fonctionnelle	Masson
HOCHART **SCIUTO**	Algèbre Analyse Géométrie (MPSI/PCSI)	Vuibert
HOPCROFT J.E. **MOTWANI R.** **ULLMAN J. D.**	Introduction to automata theory, Languages and Computation	Addison Wesley
HOUZEL C.	Analyse mathématique : cours et exercices	Belin
HUBBARD J. **HUBERT F.**	Calcul scientifique T1	Vuibert
HUBBARD J. **HUBERT F.**	Calcul scientifique T2	Vuibert
INGRAO B.	Coniques projectives, affines et métriques	Calvage et Mounet
IRELAND K. **ROSEN M.**	A Classical Introduction to Modern Numbers Theory	Springer Verlag
ISAAC R.	Une initiation aux probabilités (Trad. R. Mansuy)	Vuibert-Springer
ITARD J.	Les nombres premiers	Que sais-je ? PUF
JACOBSON N.	Basic Algebra — Tome I — Tome II	Freeman and Co
JACOD J. **PROTTER P.**	L'essentiel en théorie des probabilit és	Cassini
KAHANE J.P. **GILLES P.**	Séries de Fourier et ondelettes	Cassini
KATZNELSON Y.	An Introduction to Harmonic Analysis	Dover

KERBRAT Y. **BRAEMER J-M.**	Géométrie des courbes et des surfaces	HERMANN
KERNIGHAN B. **RITCHIE D.**	Le langage C	DUNOD
KNUTH D.E.	The art of computer programming — Volume 1 : Fundamental algorithms — Volume 2 : Seminumerical algorithms — Volume 3 : Sorting and Searching	ADDISON-WESLEY
KOBLITZ N.	A course in number theory and cryptography quantite1	
KOLMOGOROV A. **FOMINE S.**	Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle	ELLIPSES
de KONNINCK J.M. **MERCIER A.**	Introduction à la théorie des nombres	MODULO
KÖRNER T.W.	Fourier analysis	CAMBRIDGE
KÖRNER T.W.	Exercises for Fourier analysis	CAMBRIDGE
KREE P.	Introduction aux Mathématiques et à leurs applications fondamentales M.P.2	DUNOD
KRIVINE H.	Exercices de Mathématiques pour physiciens	CASSSINI
KRIVINE J.L.	Théorie axiomatique des ensembles	PUF
KRIVINE J.L.	Théorie des ensembles	CASSINI
KUNG J.P.S. **ROTA G-C.** **YAN C.H.**	Combinatorics : the Rota way	CAMBRIDGE
LACOMME P. **PRINS C.** **SEVAUX M.**	Algorithmes de graphes	EYROLLES
LACROIX Y. **MAZLIAK L.**	Probbilités, variables aléatoires...Niveau M1	ELLIPSES

LADEGAILLERIE Y.	Géométrie affine, projective, euclidienne et analagmatique	PUF
LAFONTAINE J.	Introduction aux variétés différentielles	PUF
LALEMENT R.	Logique, réduction, résolution	MASSON
LANG S.	Algèbre linéaire — Tome 1 — Tome 2	INTEREDITIONS
LANG S.	Algebra	ADDISON-WESLEY
LANG S.	Linear Algebra	ADDISON-WESLEY
LAROCHE F.	Escapades arithmétiques	ELLIPSES
LASCAR D.	La théorie des modèles en peu de maux	CASSINI
LASCAUX Th. **THÉODOR R.**	ănalyse matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur, tomes 1 et 2	DUNOD
LAVILLE G.	Courbes et surfaces	ELLIPSES
LAVILLE G.	Géométrie pour le CAPES et l'Agrégation	ELLIPSES
LAX P. D.	Funnctional analysis	WILEY
LAX P. D.	Linear Algebra	WILEY
LE BRIS G.	Maple Sugar : une initiation progressive à Maple	CASSINI
LEBOEUF C. **GUEGAND J.** **ROQUE J.L.** **LANDRY P.**	Exercices corrigés de probabilités	ELLIPSES

LEBORGNE D.	Calcul différentiel et géométrie	PUF
LEBOSSÉ C. **HÉMERY C.**	Géométrie. Classe de Mathématiques	Jacques Gabay
LEHMANN D. **SACRÉ C.**	Géométrie et topologie des surfaces	PUF
LEHNING H. **JAKUBOWICZ D.**	Mathématiques supérieures et spéciales 2 : Dérivation	Masson
LEHNING H.	Mathématiques supérieures et spéciales — Tome 1 : Topologie — Tome 3 : Intégration et sommation — Tome 4 : Analyse en dimension finie — Tome 5 : Analyse fonctionnelle	Masson
LEICHTNAM E. **SCHAUER X.**	Exercices corrigés de mathématiques posés aux oraux X-ENS — Tome I - Algèbre 1 — Tome 2 - Algèbre et géométrie — Tome 3 - Analyse 1 — Tome 4 - Analyse 2	Ellipses
LELONG-FERRAND J. **ARNAUDIES J.M.**	Cours de Mathématiques — Tome 1 pour M-M' : Algèbre — Tome 1 pour A-A' : Algèbre — Tome 2 : Analyse — Tome 3 : Géométrie et cinématique — Tome 4 : Equations différentielles, intégrales multiples	Dunod
LELONG-FERRAND J.	Géométrie différentielle	Masson
LELONG-FERRAND J.	Les fondements de la géométrie	PUF
LESIEUR L. **MEYER Y.** **JOULAIN C.** **LEFEBVRE J.**	Algèbre linéaire, géométrie	Armand Colin
LION G.	Algèbre pour la licence Cours et exercices (2ème édition)	Vuibert
LION G.	Géométrie du plan Cours complet avec 600 exercices résolus	Vuibert

LOTHAIRE M.	Algebraic combinatorics on words	CAMBRIDGE
MAC LANE S. **BIRKHOFF G.**	Algèbre — 1 : Structures fondamentales — 2 : Les grands théorèmes	GAUTHIER-VILLARS
MACKI J. **STRAUSS A.**	Introduction to optimal control theory	SPRINGER
MAKAROV B.M. **GOLUZINA M.G.** **LODKIN A.A.** **PODKORYTOV A.N.**	Problèmes d'analyse réelle	CASSINI
MALLIAVIN M. P. **WARUSFEL A.**	Algèbre linéaire et géométrie classique. Exercices	MASSON
MALLIAVIN M. P.	Les groupes finis et leurs représentations complexes	MASSON
MALLIAVIN P.	Géométrie différentielle intrinsèque	HERMANN
Manuels Matlab	— Using Matlab version 5 — Using Matlab version 6 — Statistics Toolbox — Using Matlab Graphics	
MANSUY R. **RANDÉ B.**	Les clefs pour l' X	CALVAGE ET MOUNET
MANSUY R. **MNEIMNÉ R.**	Algèbre linéaire réduction des endomorphismes	VUIBERT
MARCE S. **DEVAL-GUILLY E.**	Problèmes corrigés des ENSI	ELLIPSES
MARCO J.P. **et Alii**	ANALYSE L3	PEARSON
MASCART H. **STOKA M.**	Fonctions d'une variable réelle — Tome 2 : Exercices et corrigés — Tome 3 : Exercices et corrigés — Tome 4 : Exercices et corrigés	PUF

MAURY B.	Analyse fonctionnelle, Exercices et problèmes corrigés	ELLIPSES
MAWHIN J.	Analyse : fondements, technique, évolutions	DE BOECK UNIVERSITÉ
MAZET P.	Algèbre et géométrie pour le CAPES et l'Agrégation	ELLIPSES
MENEZES A.J. **van OORSCHOT P.C.** **VANSTONA S.A.**	Handbook of applied cryptography	CRC PRESS
MERKIN D.	Introduction to the theory of stability	SPRINGER
MÉTIVIER M.	Notions fondamentales de la théorie des probabilités	DUNOD
MÉTIVIER M.	Probabilités : dix leçons d'introduction. École Polytechnique	ELLIPSES
MEUNIER P.	Agrégation interne de Mathématiques Exercices d'oral corrigés et commentés — Tome 2	PUF
MEUNIER P.	Algèbre avec applications à l'algorithmique et à la cryptographie	ELLIPSES
MIGNOTTE M.	Algèbre concrète, cours et exercices	ELLIPSES
MIGNOTTE M.	Mathématiques pour le calcul formel	PUF
MITCHELL J. C.	Concepts in programming languages	CAMBRIDGE
MNEIMNÉ R.	Eléments de géométrie : action de groupes	CASSINI
MNEIMNÉ R.	Réduction des endomorphismes	CALVAGE ET MOUNET
MNEIMNÉ R. **TESTARD F.**	Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques	HERMANN

MOISAN J. **VERNOTTE A.** **TOSEL N.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales Analyse : suites et séries de fonctions	Ellipses
MOISAN J. **VERNOTTE A.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales Analyse : topologie et séries	Ellipses
MONIER J.M.	Cours de mathématiques — Analyse 1 MPSI, PCSI, PTSI — Analyse 2 MPSI, PCSI, PTSI — Analyse 3 MP, PSI, PC, PT — Analyse 4 MP, PSI, PC, PT — Algèbre 1 MPSI, PCSI, PTSI — Algèbre 2 MP, PSI, PC, PT — Exercices d'analyse MPSI — Exercices d'analyse MP — Exercice d'algèbre et géométrie MP	Dunod
MUTAFIAN C.	Le défi algébrique — Tome 1 — Tome 2	Vuibert
NAGEL E. **NEWMAN J. R.** **GÖDEL K.** **GIRARD J. Y.**	Le théorème de Gödel	Seuil
NAUDIN P. **QUITTE C.**	Algorithmique algébrique avec exercices corrigés	Masson
NEVEU J.	Base mathématique du calcul des probabilités	Masson
NIVEN I.	Irrational numbers	Mathematical Association of America
NORRIS J.R.	Markov chains	Cambridge
OŔOURKE J.	Computational géométrie in C (second édition)	Cambridge
OPREA J.	Differential geometry	Prentice hall
OUVRARD J.Y.	— Probabilités 1 (capes, agrégation) — Probabilités 2 (maîtrise, agrégation)	Cassini

PAPADIMITRIOU C.H.	Computational complexity	Pearson Education
PAGES G. **BOUZITAT C.**	En passant par hasard ... Les probabilités de tous les jours	Vuibert
PAPINI O. **WOLFMANN J.**	Algèbre discrète et codes correcteurs	Springer
PARDOUX E.	Processus de Markov et applications	Dunod
PEDOE D.	Geometry- A comprehensive course	Dover
PERKO L.	Differential equation and dynamical systems	Springer
PERRIN D.	Cours d'Algèbre	Ellipses
PERRIN D.	Cours d'Algèbre	ENSJF
PERRIN D.	Mathématiques d'école	Cassini
PERRIN-RIOU B.	Algèbre, arithmétique et MAPLE	Cassini
PETAZZZONI B.	Seize problèmes d'informatique	Springer
PETROVŠEK **WILF** **ZEILBERGER**	A=B	A.K. Peters
PEVZNER P.	Computational molecular biology- an algorithmic approach	MIT press
PÓLYA G. **SZEGÖ G.**	Problems and Theorems in Analysis — Volume I — Volume II	Springer Verlag
POMMELLET A.	Agrégation de Mathématiques. Cours d'Analyse	Ellipses

POUNDSTONE.	Le dilemme du prisonnier	Cassini
PRASOLOV V.	Polynomials	Springer
PRASOLOV V.	Problèmes et théorèmes d'algèbre linéaires	Cassini
PREPARATA F.P. **SHAMOS M.I.**	Computational géométrie - an introduction	Springer
PRESS W. **FLANNERY B.** **TEUKOLSKI S.** **VETTERLING W.**	Numerical recipes in Pascal	Cambridge
PUTZ J.F.	Maple animation	Chapman and Hall
QUATERONI A. **SACCO R.** **SALERI F.**	Méthodes numériques	Springer
QUATERONI A. **SALERI F.** **GERVASIO P.**	Calcul scientifique	Springer
QUEFFELEC H. **ZUILY C.**	Éléments d'analyse	Dunod
RALSTON A. **RABINOWITCH P**	A first curse in numerical analysis	Internatinal Student Edition
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Cours de Mathématiques spéciales — 1- Algèbre — 2- Algèbre et applications à la géométrie — 3- Topologie et éléments d'analyse — 4- Séries et équations différentielles — 5- Applications de l'analyse à la géométrie	Masson
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Exercices avec solutions — Algèbre — Analyse 1 — Analyse 2	Masson
RAMIS J.P. **WARUSFEL A.**	Mathématiques - Tout en un pour la licence	Dunod

RAO C.R.	Linear statistical inference and its application	Wiley
RANDÉ B.	Les carnets indiens de Srinivasa Ramanujan	Cassini
RANDÉ B. **TAIEB F.**	Les clefs pour l'X	Calvage Mounet
RANDÉ B. **MANSUY R.**	Les clefs pour l'X (2)	Calvage Mounet
REINHARDT F. **SOEDER H.**	Atlas des mathématiques	Livre de Poche
REMMERT R.	Classical topics in complex function theory	Springer
RIDEAU F.	Exercices de calcul différentiel	Hermann
RIESZ F. **NAGY SZ. B.**	Leçons d'analyse fonctionnelle	Gauthier- Villars
RIO E.	Théorie asymptotique des processus aléatoires faiblement dépendants	Springer
ROBERT C.	Contes et décomptes de la statistique - Une initiation par l'exemple	Vuibert
ROLLAND R.	Théorie des séries 2- Séries entières	Cédic/Nathan
ROMBALDI J.E.	Thèmes pour l'agrégation de mathématiques	EDP Sciences
ROMBALDI J.E.	Analyse matricielle	EDP Sciences
ROUDIER H.	Al èbre linéaire. Cours et exercices	Vuibert
ROMBALDI J.E.	Analyse matricielle	EDP Sciences
ROUSSEAU Y. **SAINT-AUBIN Y.**	Mathématiques et technologie	Springer (Sumat)

ROUVIÈRE F.	Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation	CASSINI
ROUX C.	Initiation à la théorie des graphes	ELLIPSES
RUAUD J.F. **WARUSFEL A.**	Exercices de Mathématiques Algèbre 3	MASSON
RUDIN W.	Analyse réelle et complexe	MASSON
RUDIN W.	Functional analysis	MC GRAW HILL
RUDIN W.	Real and complex analysis	MC GRAW HILL
SA EARP R. **TOUBIANA E.**	Introduction à la Géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann	CASSINI
SAINSAULIEU L.	Calcul scientifique	DUNOD
SAINT RAYMOND J.	Topologie, calcul différentiel et variable complexe	CALVAGE ET MOUNET
SAKAROVITCH J.	Eléments de théorie des automates	VUIBERT
SAKS S. **ZYGMUND A.**	Fonctions analytiques	MASSON
SAMUEL P.	Géométrie projective	PUF
SAMUEL P.	Théorie algébrique des nombres	HERMANN
SARMANT M.C. **MERLIER T.** **PILIBOSSIAN Ph.** **YAMMINE S.**	Analyse 1	ELLIPSES
SAUVAGEOT F.	Petits problèmes de géométrie et d'algèbre	SPRINGER
SAUX PICARD P.	Cours de calcul formel - Algorithmes fondamentaux	ELLIPSES

SAVIOZ J.C.	Algèbre linéaire, cours et exercices	Vuibert
SCHATZMAN M.	Analyse numérique, une approche mathématique	Dunod
SCHNEIER B.	Applied cryptography	Wiley
SCHWARTZ L.	Analyse — I Topologie générale et analyse fonctionnelle — II Calcul différentiel et équations différentielles	Hermann
SCHWARTZ L.	Cours d'Analyse — Tome 1 — Tome 2	Hermann
SCHWARTZ L.	Méthodes Mathématiques pour les sciences physiques	Hermann
SEDGEWICK R.	Algorithms	Addison Wesley
SEDGEWICK R.	Algorithmes en Java	Pearson Education
SEDGEWICK R.	Algorithmes en langage C	Dunod
SEGUINS PAZZIS (de) C.	Invitation aux formes quadratiques	Calvage et Mounet
SELBERHERR S. **STIPPEL H.** **STRASSER E.**	Simulation of semi-conductor devices and processes	Springer
SERRE D.	Les matrices, théorie et pratique	Dunod
SERRE J.P.	Cours d'arithmétique	PUF
SERVIEN Cl.	— Analyse 3 — Analyse 4	Ellipses
SHAPIRO H.N.	Introduction to the theory of numbers	Dover

SIDLER J.C.	Géométrie Projective	Dunod
SIPSER M.	Introduction to the theory of computation	Thomson C. T.
SKANDALIS G.	Topologie et analyse	Dunod
STANLEY R.P.	Enumerative combinatorics Volume I	Waddworth and Brooks
STEWART I.	Galois theory	Chapman and Hall
STROUSTRUP B	Le langage C++	Pearson Education
SZPIRGLAS A. et Alii	Algèbre L3	Pearson
SZPIRGLAS A.	Exercices d'algèbre	Cassini
TAUVEL P.	Cours de Géométrie	Dunod
TAUVEL P.	Cours d'algè bre	Dunod
TAUVEL P.	Corps commutatifs et théorie de Galois	Calvage et Mounet
TAUVEL P.	Mathématiques générales pour l'agrégation	Masson
TAUVEL P.	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Algèbre 2	Masson
TENENBAUM G. WU J.	Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres T 2	S. M. F.
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres T 1	S. M. F.
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres	Institut Elie Cartan

TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres	Belin
TENENBAUM G. **MENDÈS-FRANCE M.**	Les nombres premiers	Que sais-je ? PUF
TESTARD F.	Analyse mathématique	Calvage et Mounet
TISSERON C.	Géométries affine, projective et euclidienne	Hermann
TISSIER A.	Mathématiques générales : exercices avec solutions	Bréal
TITCHMARSH E.C.	The theory of functions	Oxford
TORTRAT A.	Calcul des probabilités et introduction aux processus aléatoires	Masson
TRIGNAN J.	Constructions géométriques et courbes remarquables	Vuibert
TRUFFAULT B.	Exercices de géométrie élémentaires	IREM des Pays de Loire
TURING A **GIRARD J. Y.**	La Machine de Turing	Seuil
VALIRON G.	Cours d'analyse mathématique — I Théorie des fonctions — II Équations fonctionnelles - Applications	Masson
VAUQUOIS B.	Outils Mathématiques. Probabilités	Hermann
VAUTHIER J. **PRAT J-J.**	Cours d'Analyse Mathématique de l'Agrégation	Masson
VAZIRANI V.V.	Algorithmes d'approximation	Springer
VINBERG E. B.	A course in algebra	AMS
WAGSCHAL C.	Fonctions holomorphes - Équations différentielles	Hermann

WAGSCHAL C.	Distributions, analyse microlocale, équations aux dérivées partielles	Hermann
WARIN B.	L'algorithmique, votre passeport informatique pour la programmation	Ellipses
WARUSFEL A.	Structures algébriques finies	Classiques Hachette
WARUSFEL, ATTALI COLLET, GAUTIER NICOLAS	Mathématiques — Analyse — Arithmétique — Géométrie — Probabilités	Vuibert
WATERMAN M.S.	Introduction to computational biology	Chapman and hall / CRC
WEST D. B.	Introduction to graph theory	Prentice Hell
WHITTAKER E.T. WATSON G.N.	A course of modern analysis	Cambridge
WILF H.	Generatingfunctionology	Academic Press
WILF H.	Algorithms and complexity	A.K. Peters
WILLEM M.	Analyse fonctionnelle élémentaire	Cassini
WILLEM M.	Principes d'analyse fonctionnelle	Cassini
WINSKEL G.	The formal semantics of programming languages	MIT Press
YALE P.B.	Geometry and Symmetry	Dover
YGER A. WEIL J-A et Alii	Matématiques appliquées L3	Pearson
YOUNG D.M. GREGORY R.T.	A survey of numerical mathematics	Dover

ZAVIDOVIQUE M.	Un max de math	CALVAGE ET MOUNET
ZÉMOR G.	Cours de cryptographie	CASSINI
ZUILY Cl. **QUEFFELEC H.**	Éléments d'analyse pour l'agrégation	MASSON
ZUILY Cl. **QUEFFELEC H.**	Analyse pour l'agrégation	DUNOD
ZUILY Cl. **QUEFFELEC H.**	Problèmes de distributions	CASSINI
ZUILY Cl.	Éléments de distributions et d' équations aux dérivées partielles	DUNOD