MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

DIRECTION GÉNÉRALE DES RESSOURCES HUMAINES

RAPPORT DE JURY DE CONCOURS

AGRÉGATION DE MATHÉMATIQUES
CONCOURS EXTERNE

Session 2013

LES RAPPORTS DES JURYS DE CONCOURS SONT ÉTABLIS SOUS LA RESPONSABILITÉ DES PRÉSIDENTS DE JURY

Table des matières

Chapitre 1

Composition du jury

DIRECTOIRE

TOROSSIAN Charles, Président	PARIS	Inspecteur général de l'Éducation nationale
FOULON Patrick, Président délégué	AIX-MARSEILLE	Professeur des Universités
BURBAN Anne, Vice-présidente	PARIS	Inspectrice générale de l'Éducation nationale
CHEMIN Jean-Yves, Vice-président	PARIS	Professeur des Universités
CHENO Laurent, Vice-président	PARIS	Inspecteur général de l'Éducation nationale
YEBBOU Johan, Secrétaire général	PARIS	Inspecteur général de l'Éducation nationale
BOISSON François, Directoire	PARIS	Professeur de Chaire supérieure
GOUDON Thierry, Directoire	NICE	Directeur de recherches INRIA
RUPPRECHT David, Directoire	TOULOUSE	Professeur agrégé

JURY

ABERGEL Luc	PARIS	Professeur de Chaire supérieure
ABGRALL Rémi	BORDEAUX	Professeur des Universités
ABGRALL Sophie	BORDEAUX	Professeure agrégée
AEBISCHER Bruno	BESANCON	Professeur agrégé
ALBERT Luc	NICE	Professeur de Chaire supérieure
APPEL Walter	LYON	Professeur de Chaire supérieure
BACHMANN Florence	AIX-MARSEILLE	Professeure agrégée
BARANI Jean Pierre	LYON	Professeur de Chaire supérieure
BARDET Jean-Marc	PARIS	Professeur des Universités
BASSON Arnaud	PARIS	Professeur agrégé
BAUMANN Pierre	STRASBOURG	Chargé de recherches CNRS
BAYLE Vincent	TOULOUSE	Professeur agrégé

BEAUCHARD Karine	VERSAILLES	Chargée de recherches CNRS
BEAULIEU Anne	CRETEIL	Maître de conférences des Universités
BECHATA Abdellah	VERSAILLES	Professeur agrégé
BECKER Marc	NICE	Professeur de Chaire supérieure
BEGYN Arnaud	TOULOUSE	Professeur agrégé
BERNICOT Frédéric	NANTES	Chargé de recherches CNRS
BIOLLEY Anne-Laure	PARIS	Professeure agrégée
BLANLOEIL Vincent	STRASBOURG	Maître de conférences des Universités
BOLDO Sylvie	VERSAILLES	Chargée de recherches INRIA
BONNAILLIE-NOEL Virginie	RENNES	Chargée de recherches CNRS
BOREL Agnès	AIX-MARSEILLE	Professeure de Chaire supérieure
BOREL Laetitia	VERSAILLES	Professeure agrégée
BOUALEM Hassan	MONTPELLIER	Maître de conférences des Universités
BOUGE Luc	CRETEIL	Professeur des Universités
BOULMEZAOUD Tahar-Zamène	VERSAILLES	Maître de conférences des Universités
BREMONT Julien	PARIS	Maître de conférences des Universités
BROUZET Robert	MONTPELLIER	Maître de conférences des Universités
BURGUET David	PARIS	Chargé de recherches CNRS
BUSE Laurent	NICE	Chargé de recherches INRIA
BUTUCEA Cristina	CRETEIL	Professeure des Universités
CADORET Anna	VERSAILLES	Professeure associée, École Polytechnique
CALADO Bruno	PARIS	Professeur agrégé
CALDERO Philippe, Armand	LYON	Maître de conférences des Universités
CHABANEL Nicolas	PARIS	Directeur de recherches CNRS
CHAINAIS Claire	LILLE	Professeure des Universités
CHALENDAR Isabelle	LYON	Maître de conférences des Universités
CHARDIN Marc	PARIS	Chargé de recherches CNRS
CHEVALLIER Marie-Elisabeth	STRASBOURG	Professeure de Chaire supérieure
CHOMETTE Thomas	PARIS	Professeur agrégé
COURANT Judicael	LYON	Professeur agrégé
COUVREUR Alain	VERSAILLES	Chargé de recherches INRIA
CREPEAU Emmanuelle	VERSAILLES	Maître de conférences des Universités
D'ANGELO Yves	ROUEN	Professeur des Universités
DAMBRINE Marc	BORDEAUX	Professeur des Universités
DE SEGUINS PAZZIS Clément	VERSAILLES	Professeur agrégé
DEVULDER Christophe	ORLEANS-TOURS	Professeur de Chaire supérieure
DOUMERC Yan	LILLE	Professeur agrégé
DROUHIN Catherine	VERSAILLES	Professeure de Chaire supérieure
DUJARDIN Guillaume	LILLE	Chargé de recherches INRIA
DUTRIEUX Yves	VERSAILLES	Maître de conférences des Universités
FAKHI-SOUCHU Saâdia	PARIS	Professeure agrégée
FISCHLER Stéphane	VERSAILLES	Maître de conférences des Universités
FLON Stéphane	VERSAILLES	Professeur agrégé
FONTAINE Philippe	POITIERS	Professeur de Chaire supérieure
FONTAINE Hélène	LYON	Professeure de Chaire supérieure
FRANCINOU Serge	PARIS	Professeur de Chaire supérieure
FRICKER Christine	VERSAILLES	Directrice de recherches INRIA
GALAGHER Isabelle	PARIS	Professeure des Universités
GARAY Mauricio	VERSAILLES	Professeur agrégé
GERMAIN Cyril	PARIS	Professeur agrégé
GODEFROY Gilles	PARIS	Directeur de recherches CNRS

GRIVAUX Sophie	LILLE	Chargée de recherches CNRS
HAAS Bénédicte	PARIS	Maître de conférences des Universités
HADIJI Rejeb	CRETEIL	Maître de conférences des Universités
HANROT Guillaume	LYON	Professeur des Universités
HARDOUIN Cécile	VERSAILLES	Maître de conférences des Universités
HENRI Michel	PARIS	Professeur de Chaire supérieure
HERAU Frédéric	NANTES	Professeur des Universités
HMIDI Taoufik	RENNES	Maître de conférences des Universités
ISAIA Jérome	NICE	Professeur de Chaire supérieure
JULG Pierre	ORLEANS-TOURS	Professeur des Universités
KASPEREK Xavier	NICE	Professeur agrégé
KOSTYRA Marie-Laure	STRASBOURG	Professeure agrégée
KRELL Nathalie	RENNES	Maître de conférences des Universités
LAFITTE Christophe	PARIS	Professeur agrégé
LAFITTE Pauline	VERSAILLES	Professeure des Universités
LAMBOLEY Jimmy	PARIS	Maître de conférences des Universités
Le FLOCH Matthieu	RENNES	Professeur agrégé
LE MERDY Sylvie	RENNES	Professeure agrégée
LECUE Guillaume	VERSAILLES	Chargé de recherches CNRS
LEFEVRE Pascal	LILLE	Professeur des Universités
LEGER Jean-Christophe	VERSAILLES	Maître de conférences des Universités
LESCOT Paul	ROUEN	Professeur des Universités
LEVY-VEHEL Jacques	VERSAILLES	Directeur de recherches INRIA
LODS Véronique	PARIS	Professeure de Chaire supérieure
MANSUY Roger	PARIS	Professeur agrégé
MARCHE Claude	VERSAILLES	Directeur de recherches INRIA
MARIANI Charles-Pierre	PARIS	Professeur agrégé
MARINO Alexandre	MONTPELLIER	Professeur agrégé
MATHERON Etienne	LILLE	Professeur des Universités
MATRINGE Nadir	POITIERS	Maître de conférences des Universités
MENOZZI Stéphane	VERSAILLES	Professeur des Universités
MERLE Eric	PARIS	Professeur de Chaire supérieure
MESTRE Jean françois	PARIS	Professeur des Universités
MICHEL Julien	POITIERS	Professeur des Universités
MONAT Pascale	GRENOBLE	Professeure de Chaire supérieure
MONIER Marie	PARIS	Professeure agrégée
MONNIAUX Sylvie	AIX-MARSEILLE	Maître de conférences des Universités
MONS Pascal	PARIS	Professeur de Chaire supérieure
MOREAU Anne	POITIERS	Maître de conférences des Universités
NOBLE Pascal	LYON	Maître de conférences des Universités
NODET Maëlle	GRENOBLE	Maître de conférences des Universités
ORGOGOZO Fabrice	VERSAILLES	Chargé de recherches CNRS
PENNEQUIN Denis	PARIS	Maître de conférences des Universités
PUCHOL Pierre	VERSAILLES	Professeur de Chaire supérieure
RECHER François	LILLE	Maître de conférences des Universités
REZZOUK Marc	ROUEN	Professeur de Chaire supérieure
RHODES Rémi	PARIS	Maître de conférences des Universités
RISLER Jean-Jacques	PARIS	Professeur des Universités
RITZENTHALER Christophe	AIX-MARSEILLE	Chargé de recherches CNRS
RIVOLLIER Damien	NANCY-METZ	Professeur agrégé
ROUX Raphaël	PARIS	Maître de conférences des Universités

SCHABANEL Nicolas	PARIS	Directeur de recherches CNRS
SEURET Stéphane	PARIS	Maître de conférences des Universités
SIDANER Sophie	PARIS	Professeure de Chaire supérieure
SIMON Thomas	LILLE	Professeur des Universités
STOLTZ Gilles	PARIS	Chargé de recherches CNRS
SUFFRIN Franck	STRASBOURG	Professeur de Chaire supérieure
THERY Laurent	NICE	Chargé de recherches INRIA
TOSEL Nicolas	PARIS	Professeur de Chaire supérieure
TOSEL Emmanuelle	PARIS	Professeure de Chaire supérieure
TROTABAS Denis	MONTPELLIER	Professeur agrégé
TU Jean-Louis	NANCY-METZ	Professeur des Universités
VALETTE Bruno	NICE	Maître de conférences des Universités
VIAL Grégory	LYON	Professeur des Universités
VINCENT Christiane	NANCY-METZ	Professeure de Chaire supérieure
WATTIEZ Johann	VERSAILLES	Professeur agrégé
WEILL Mathilde	PARIS	Professeure agrégée
ZEGHIB Ghani	LYON	Directeur de recherches CNRS
ZINSMEISTER Michel	ORLEANS-TOURS	Professeur des Universités
ZWALD Laurent	GRENOBLE	Maître de conférences des Universités

Chapitre 2

Déroulement du concours et statistiques

2.1 Déroulement du concours

Les épreuves écrites se sont déroulées selon le calendrier suivant :

- Épreuve de mathématiques générales : mercredi 27 mars 2013
- Épreuve d'analyse et probabilités : jeudi 28 mars 2013

La liste d'admissibilité a été publiée le mardi 4 juin 2013.

L'oral s'est déroulé du vendredi 21 juin au samedi 6 juillet 2013 à l'École Nationale de Commerce, 70 boulevard Bessières. La liste d'admission a été publiée le lundi 8 juillet 2013.

L'oral était composé de 5 séries de trois jours avec une journée de pause le dimanche 30 juin. Durant les 15 jours d'interrogation, 9 commissions ont travaillé en parallèle, impliquant en permanence 108 interrogateurs, 4 membres du directoire ou remplaçants et 30 surveillants ou appariteurs. Dans chaque salle d'interrogation, les candidats disposaient d'un tableau blanc suffisant large (ainsi que de feutres couleurs) et d'un projecteur connecté à un ordinateur fixe pour l'épreuve de modélisation.

Les candidats admissibles ont reçu une convocation papier, indiquant leurs jours de passage. Pour connaître ses horaires précis, il fallait se connecter sur le site sécurisé de l'agrégation de mathématiques, en indiquant son numéro de candidat. L'application a été fermée la veille du début des oraux. Seuls quelques candidats hésitants n'ont pas réussi à éditer leurs horaires et ont dû se présenter à 6h45 le premier jour de convocation sur les lieux du concours, sous peine d'être déclarés non présents.

Le jury considère que le fait d'éditer sa convocation horaire, est un signal fort de présence à l'oral.

Depuis 2006 le concours propose quatre options. Les options A,B,C ne diffèrent que par les épreuves de modélisation alors que les trois épreuves orales de l'option D (informatique) sont spécifiques.

En 2013 comme dans les sessions précédentes, on peut constater que dans les options A, B et C, le nombre d'inscrits est similaire ; ils sont toujours – et c'est bien compréhensible – nettement inférieurs dans l'option D, mais cette dernière est en forte progression par rapport à 2012, ce qui a obligé le jury à organiser une série supplémentaire durant l'oral.

Dans les options A, B et C les rapports admis/présents sont quasiment identiques. Cela veut clairement dire que le choix de l'option n'a guère d'influence sur la réussite au concours et elle ne doit pas être l'objet d'une stratégie de dernière minute de la part des candidats. Le choix de l'option doit être mis en cohérence par rapport à la formation académique ; chaque option ouvre des champs applicatifs des mathématiques qui trouveront leur impact dans le futur métier du professeur agrégé.

Nous continuons, tant que ces options ne sont pas stabilisées, à ne pas fournir de statistiques détaillées par option.

Le nom officiel, « concours externe de recrutement de professeurs agrégés stagiaires », montre clairement que, par le concours d'agrégation, le ministère recrute des professeurs agrégés destinés, selon leur statut, à l'enseignement secondaire (lycées d'enseignement général et technologique et, exceptionnellement, collèges) ou à l'enseignement supérieur (universités, instituts universitaires de technologie, Grandes Écoles, classes préparatoires aux Grandes Écoles, sections de techniciens supérieurs).

Les candidats qui ont été admis à un concours de recrutement sont nommés professeurs agrégés stagiaires à la rentrée scolaire de l'année au titre de laquelle est organisé le recrutement et classés, dès leur nomination, selon les dispositions du décret du 5 décembre 1951 susvisé. Ils sont affectés dans une académie par le ministre chargé de l'Éducation nationale dans des conditions fixées par arrêté de ce dernier. Le stage a une durée d'un an. Au cours de leur stage, les professeurs stagiaires bénéficient d'une formation dispensée, dans le cadre des orientations définies par l'État, sous la forme d'actions organisées à l'université, d'un tutorat, ainsi que, le cas échéant, d'autres types d'actions d'accompagnement. Les modalités du stage et les conditions de son évaluation sont arrêtées par le ministre chargé de l'Éducation nationale.

La note de service 2013-061 du 17 avril 2013, relative à l'affectation des lauréats des concours du second degré en qualité de professeur stagiaire, explique en détail les conditions d'un éventuel report de stage accordé aux lauréats du concours de l'agrégation qui souhaitent poursuivre des études doctorales. Notons que le Master Recherche entre en général dans la catégorie "études doctorales". Cependant, lorsqu'un lauréat de l'agrégation est, suite à sa demande, nommé stagiaire et affecté en académie, l'annulation de sa nomination ne peut se faire sans l'accord du recteur concerné. Notons enfin que le lauréat peut demander à effectuer son stage en tant qu'ATER ou doctorant contractuel ou en classes préparatoires aux grandes écoles (sur proposition de l'Inspection générale) selon les modalités de la note de service.

Le programme, la nature des épreuves écrites et orales, font l'objet de publications sur le site officiel de Ministère de l'Education nationale à l'adresse http ://www.education.gouv.fr/pid63/siac2.html.

Le programme pour la session 2015 sera publié fin 2013 ou début 2014. Les candidats sont invités à consulter le site officiel de l'agrégation externe de mathématiques, à l'adresse www.agreg.org où se trouvent aussi tous les renseignements pratiques concernant les sessions à venir.

Épreuve « Agir en fonctionnaire de l'état de manière éthique et responsable ».

Les modalités de la session 2011 ont été reconduites et seront maintenues pour la session 2014. Suivant l'option choisie, elle est cumulée soit à l'épreuve "Algèbre et Géométrie" soit à l'épreuve "Mathématiques pour l'Informatique". Les contenus pour cette nouvelle épreuve sont précisés dans le paragraphe suivant.

Les candidats se verront remettre un sujet comportant plusieurs courts extraits de textes officiels en relation avec les connaissances décrites dans le point 1 de l'arrêté du 12 mai 2010 fixant le contenu de la compétence « Agir en fonctionnaire de l'Etat et de façon éthique et responsable » et une liste de suggestions utilisables par le candidat pour préparer son exposé. Des données supplémentaires utiles à la préparation pourront être fournies aux candidats.

Modification légère du programme de l'agrégation à partir de la session 2014 et 2015.

Les modifications pour le programme 2014, annoncées fin 2012, portent sur les sections concernant la géométrie et les probabilités (programme d'écrit et d'oral).

Par ailleurs, à partir de la session 2015, seuls des logiciels libres seront proposés pour les épreuves de modélisation (options A, B, C). La liste précise et actualisée de ces logiciels est disponible sur le site de l'agrégation. À ce jour la liste est la suivante : Scilab, Octave, Sage, Maxima, Xcas, R.

Pour la session 2014, le logiciel Sage sera installé à titre expérimental avec le "Sagebook".

Il est prévu par ailleurs, à partir de la session 2015, une modification légère du programme spécifique de l'oral ; le corpus commun de modélisation légèrement modifié fera partie intégrante du corpus commun de l'oral.

2.2 Statistiques et commentaires généraux sur la session 2013

2.2.1 Commentaires généraux

Après la diminution sensible du nombre de postes entre les concours 2005 (388 postes) et 2008 (252 postes), ce nombre a été revu chaque année légèrement à la hausse.

La session 2013 consacre une rupture nette, puisque 391 postes ont été ouverts (+ 83 postes) représentant une hausse de plus de 25% par rapport à la session 2012, ce qui nous ramène au niveau de l'année 1998. Il est à noter que dans les années à venir, ce haut niveau devrait être maintenu.

Le nombre d'inscrits et celui des présents remontent de manière sensible depuis 2010 et nous assistons cette année à une forte croissance par rapport à 2012, puisque nous avons enregistré près de 10% d'inscrits et 20% de présents supplémentaires aux écrits.

Concernant les inscrits, le niveau atteint en 2013 est clairement historique, toutefois ces inscriptions ont été enregistrées en juin et juillet 2012, c'est à dire avant l'oral de la session 2012. Il en résulte une forte déperdition (plus de 50%). Les dates d'inscription au concours 2014 revenant à l'automne, on peut penser que la déperdition sera moindre l'an prochain.

Il faut noter que, dans ce rapport, les 1323 présents et comptabilisés à l'écrit de la session 2013 ne prennent pas en compte les personnes qui ont passé les épreuves dans le cadre des conventions internationales qui lient la France le Maroc et la Tunisie. Ce chiffre comptabilise uniquement les candidats qui ont passé les deux écrits et peut donc différer d'autres chiffres disponibles sur Internet ou sur le site du Ministère de l'Education nationale. Par exemple on a comptabilisé 1461 personnes (français ou UE) qui ont passé au moins un écrit et 1627 avec les candidats marocains et tunisiens.

L'écrit de l'agrégation sert aussi d'écrit pour les agrégations de mathématiques en Tunisie et au Maroc ; il n'y a pas de différence pour les barres d'admissibilité pour les étudiants de ces deux pays avec la barre fixée par le jury français. L'augmentation sensible du nombre d'admissibles cette année a permis à nos collègues de prendre plus d'admissibles.

Au-delà de ces chiffres prometteurs d'une inversion de tendance, la baisse très nette du nombre d'étudiants suivant une préparation exigeante et difficile inquiète non seulement le jury mais aussi toute la communauté éducative. Le président du jury a réuni le 13 février 2013, sous couvert de la SMF l'ensemble des formateurs intervenant dans les universités lors d'une réunion à l'ENS pour faire un point d'étape sur toutes ces questions. Force est de constater que le nombre d'étudiants préparant l'agrégation externe n'est pas suffisant (entre 200 et 300 en flux annuel), en particulier dans certaines ENS ou des universités prestigieuses.

Il semble toutefois que la chute des étudiants présents aux écrits (environ 400) se soit arrêtée, mais nous restons encore à la moitié du nombre de présents de 2007. Quant aux normaliens, le chiffre des présents est identique à celui de l'an passé.

Enfin, le nombre de présents par poste est passé pour la troisième session consécutive sous la barre de 4 et se situe à près de 3,5. De fait cette année et pour la première fois depuis 1997, le jury n'a pas attribué tous les postes.

Seuls 323 postes sur les 391 proposés ont été attribués, ramenant la sélectivité du concours à 4, qui semble être un seuil qui garantit la qualité du recrutement et son adéquation eu égard aux missions du professeur agrégé telles qu'elles sont définies sur le site du MEN ; *les professeurs agrégés participent aux actions d'éducation, principalement en assurant un service d'enseignement et assurent le suivi individuel et l'évaluation des élèves. Ils contribuent à conseiller les élèves dans le choix de leur projet d'orientation. Ils enseignent dans les classes préparatoires aux grandes écoles, dans les classes des lycées, dans les établissements de formation et exceptionnellement dans les classes des collèges.*

À l'issue de la délibération d'écrit portant sur deux épreuves (Mathématiques générales et Analyse-Probabilités), 675 candidats ont été déclarés admissibles ; le premier admissible avait une moyenne de 19,875/20 et le dernier une moyenne de 6,5/20. Notons que la forte hausse du nombre de places au concours (+25%) s'est traduite par une forte hausse du nombre d'admissibles (+18%) et du nombre de membres dans le jury (+15%).

Les moyennes des présents sur les épreuves écrites furent de 6,48/20 et 6,83/20 pour Mathématiques générales et Analyse-Probabilités. En revanche, pour les admissibles, les moyennes étaient respectivement de 10,48/20 et 10,33/20.

Finalement, à l'issue des épreuves orales, 323 postes ont été pourvus ; le premier admis a eu une moyenne de 18,28/20, le dernier admis une moyenne de 7,95/20. Notons toutefois que la moyenne générale des admis se situe à 11,16/20 tandis que celle des candidats présents à l'ensemble des épreuves orales était de 8,84/20.

On résume dans le tableau ci-dessous les barres d'admissions durant les 6 précédentes années [1] :

Année	Nombre de postes attribués	Barre d'admission
2013	323	7,95/20
2012	308	8,1/20
2011	288	9,33/20
2010	263	9,8/20
2009	252	10,15/20
2008	252	10,1/20

2.2.2 Données statistiques diverses

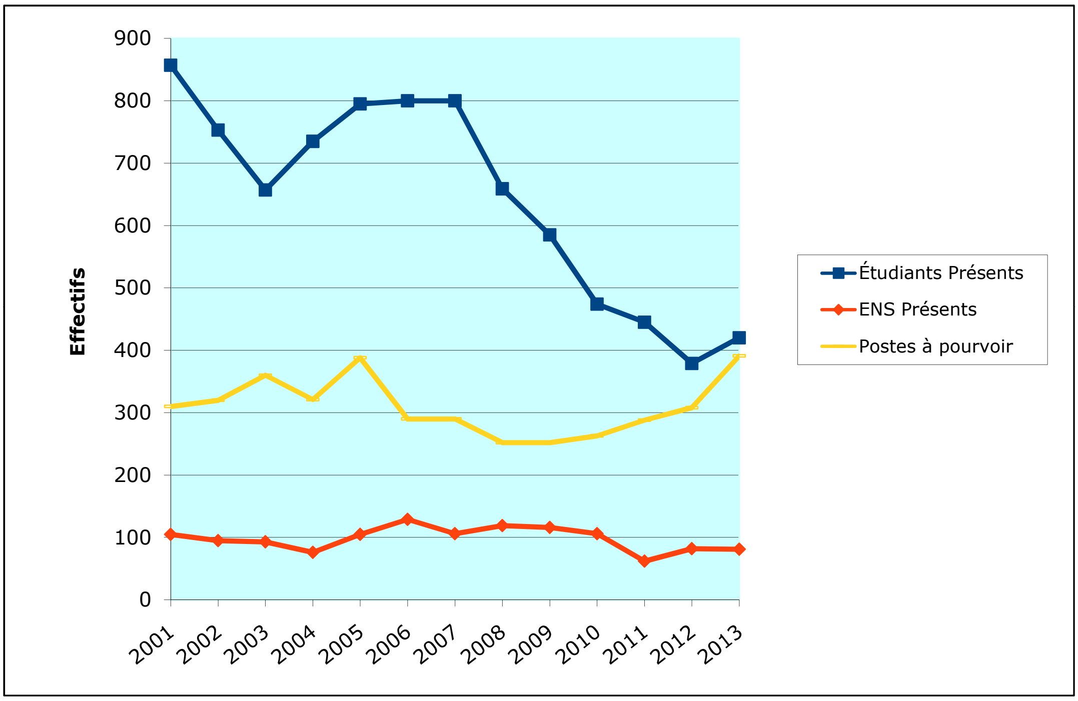
On trouvera dans les pages qui suivent différents tableaux et graphiques constituant le bilan statistique du concours selon différents critères (géographie, genre, catégorie professionnelle, âge). Dans les tableaux, sauf mention du contraire *tous les pourcentages sont calculés par rapport aux présents aux écrits.*

Effectifs détaillés

Année	Total Inscrits	Total Présents	Étudiants Présents	ENS Présents	Postes à pourvoir	Présents par poste
2001	**2663**	**1828**	857	105	310	**5,9**
2002	**2343**	**1584**	753	95	320	**5,0**
2003	**2217**	**1463**	657	93	360	**4,1**
2004	**2333**	**1470**	735	76	321	**4,6**
2005	**2560**	**1644**	795	105	388	**4,2**
2006	**2849**	**1853**	800	129	290	**6,4**
2007	**2801**	**1722**	800	106	290	**5,9**
2008	**2491**	**1579**	659	119	252	**6,3**
2009	**2351**	**1384**	585	116	252	**5,5**
2010	**2332**	**1177**	474	106	263	**4,5**
2011	**2500**	**1124**	445	62	288	**3,9**
2012	**2673**	**1163**	379	82	308	**3,78**
2013	**2923**	**1393**	420	81	391	**3,56**

Évolution du nombre de présents aux deux épreuves d'écrit

1. Nous profitons de ce tableau pour signaler une coquille dans le rapport 2012 sur la barre d'admission, qui reprenait malencontreusement celle de 2011.



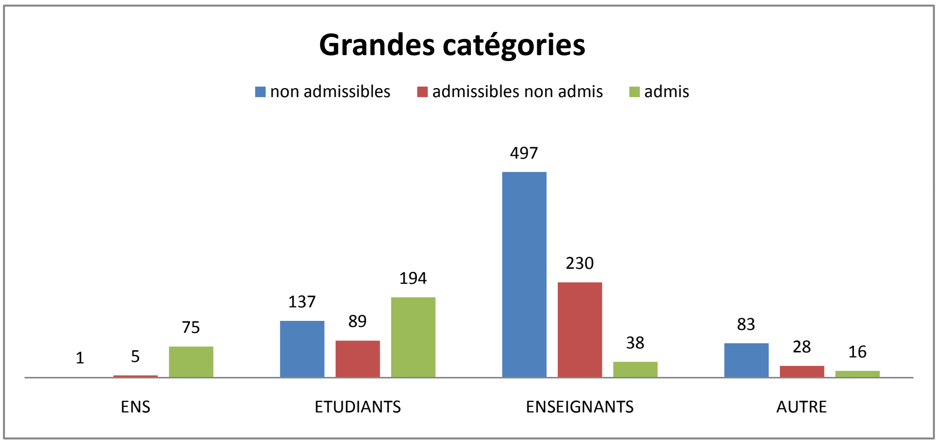
Évolution du nombre de présents

Professions et Diplômes

Catégories	Inscrits	Présents écrit	Admissibles	Présents Oral	Admis oral	% admissibles	% admis	admis/présents oral
ELEVE D'UNE ENS	104	81	80	76	75	98,8%	92,6%	98,7%
ETUDIANT	749	420	283	263	194	67,4%	46,2%	73,8%
ENSEIGNANT DU SUPERIEUR	33	12	4	3	1	33,3%	8,3%	33,3%
CONTRACT ENSEIGNANT SUPERIEUR	21	9	7	7	4	77,8%	44,4%	57,1%
AGREGE	14	3	2	1	1	66,7%	33,3%	100,0%
CERTIFIE	1124	608	226	137	26	37,2%	4,3%	19,0%
STAGIAIRE SITUATION 2E DEGRE	87	38	12	10	3	31,6%	7,9%	30,0%
PLP	52	15	3	3	2	20,0%	13,3%	66,7%
SALARIE SECTEUR PRIVE	186	40	14	11	8	35,0%	20,0%	72,7%
SANS EMPLOI	186	47	18	11	5	38,3%	10,6%	45,5%
CONTRACTUEL 2ND DEGRE	129	33	2	2	1	6,1%	3,0%	50,0%
ENSEIGNANTS DIVERS	154	54	15	9	1	27,8%	1,9%	11,1%
FONCTION PUBLIQUE HORS EN	84	33	9	6	2	27,3%	6,1%	33,3%
TOTAL	2923	1393	675	539	323	48%	23%	60%

Résultat du concours par catégories professionnelles[2]

2. Les catégories professionnelles et les catégories par diplômes listées correspondent aux déclarations des candidats lors de l'inscription : elles ne font l'objet d'aucune vérification et doivent être considérées avec prudence. Les pourcentages sont calculés par rapports aux présents à l'écrit.



Résultat par grandes catégories professionnelles

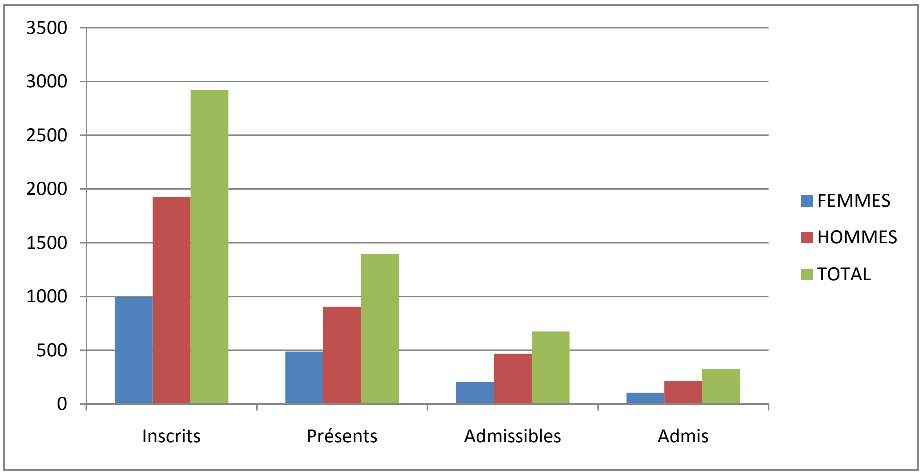
	Inscrits	Présents	Admissibles
DOCTORAT	224	77	32
DIP POSTSECONDAIRE 5 ANS OU +	153	65	14
MASTER	1410	768	402
GRADE MASTER	101	44	12
DIPLOME CLASSE NIVEAU I	49	21	4
ENSEIGNANT TITUL-ANCIEN TITUL CAT A	766	428	136
CPE TITULAIRE - ANCIEN TITULAIRE	3	0	0
ADMIS ECH.REM.CERTIFIE PLP PEPS	45	20	5
DIPLOME D'INGENIEUR (BAC+5)	303	135	45
DIPLOME GRANDE ECOLE (BAC+5)	98	30	14
DISP.TITRE 3 ENFANTS (MERE)	29	16	5
DISP.TITRE 3 ENFANTS (PERE)	31	16	6
DISP.TITRE SPORTIF HAUT NIVEAU	1	0	0
ADMIS ECH.REM PROFESSEUR ECOLE	17	7	0

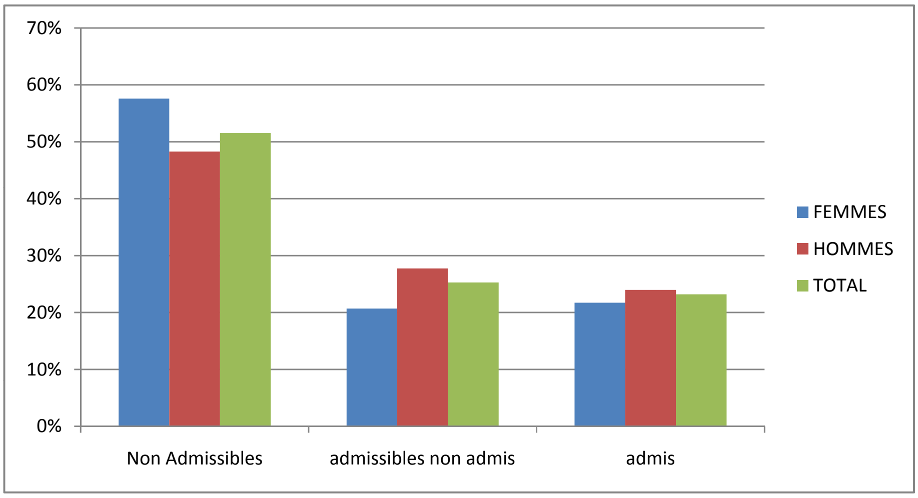
Diplômes des inscrits , présents à au moins une épreuve (y compris tunisiens et marocains) et admissibles (français ou UE uniquement)

Ces résultats par grandes catégories confirment que le concours de l'agrégation externe de mathématiques est un concours de recrutement de nouveaux enseignants ; c'est d'ailleurs sa fonction primaire. La catégorie cumulée des étudiants (ENS et hors ENS) constitue en effet, 83% de l'effectif des admis. On note cependant une différence significative avec les années 2008-2010 ce pourcentage était alors de 92%. Le tarissement du vivier étudiants profite aux professeurs en poste, notamment les professeurs certifiés. L'impact du diplôme sur la performance à l'écrit est nette. Notons le nombre important de docteurs inscrits au concours, mais aussi le peu d'admissibles dans cette catégorie, souvent faute de préparation spécifique.

Répartition selon le genre

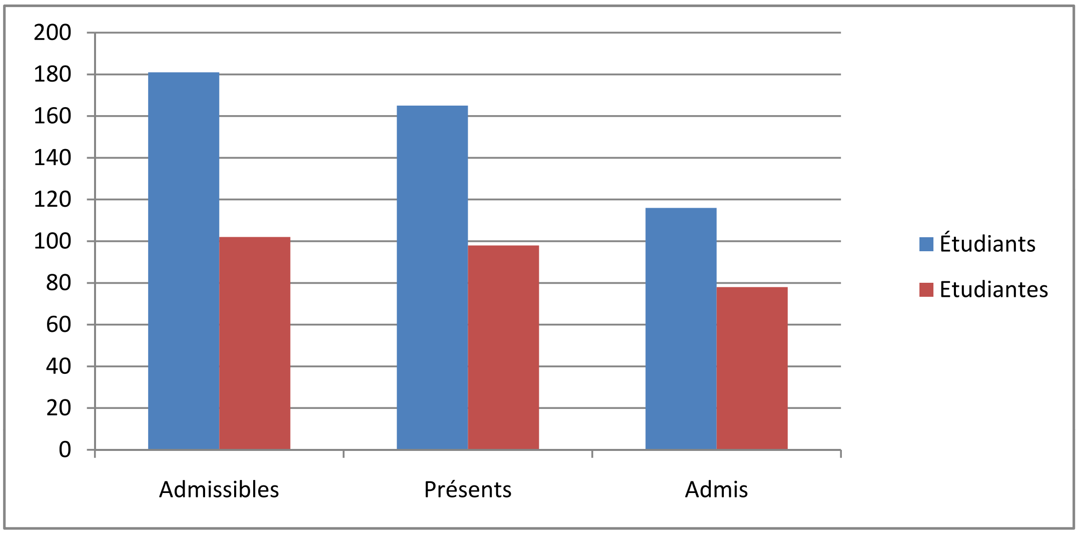
GENRE	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis	% Admissibles	% Admis
FEMMES	997	488	207	106	42,4%	21,7%
HOMMES	1926	905	468	217	51,7%	24,0%
TOTAL	2923	1393	675	323	48,5%	23,2%

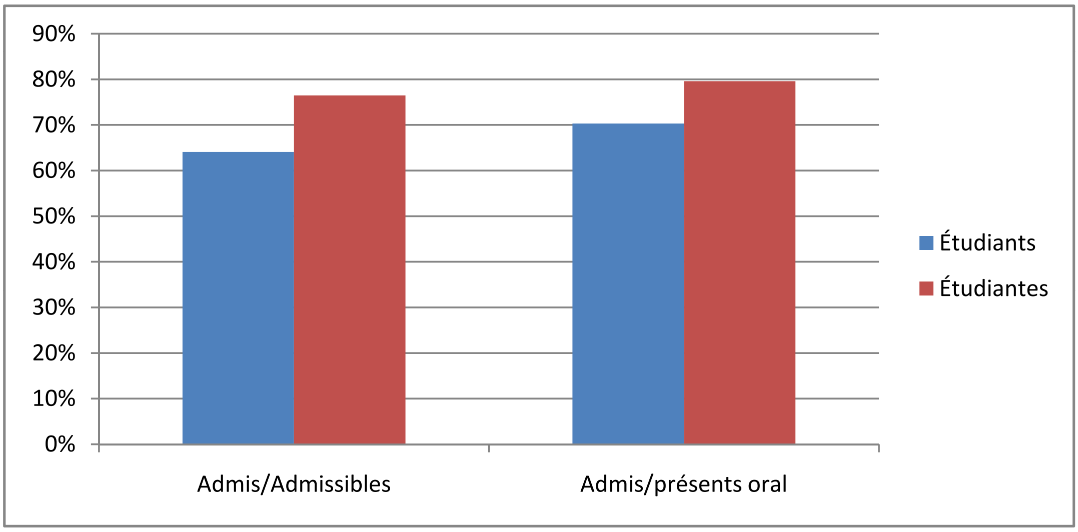




Le rééquilibrage de la parité pour le succès au concours observé depuis 2010 se confirme cette année. Ces pourcentages sont à apprécier en tenant compte du fait que les femmes ne représentent qu'un faible pourcentage parmi les candidats issus d'une ENS. Les tableaux suivants ne concernent que la répartition par genre des étudiants. On constate que les taux de réussite des étudiantes sont meilleurs que ceux des étudiants.

	Admissibles	Présents	Admis	Admis/Admissibles	Admis/présents oral
Étudiants	181	165	116	64%	70%
Etudiantes	102	98	78	76%	80%

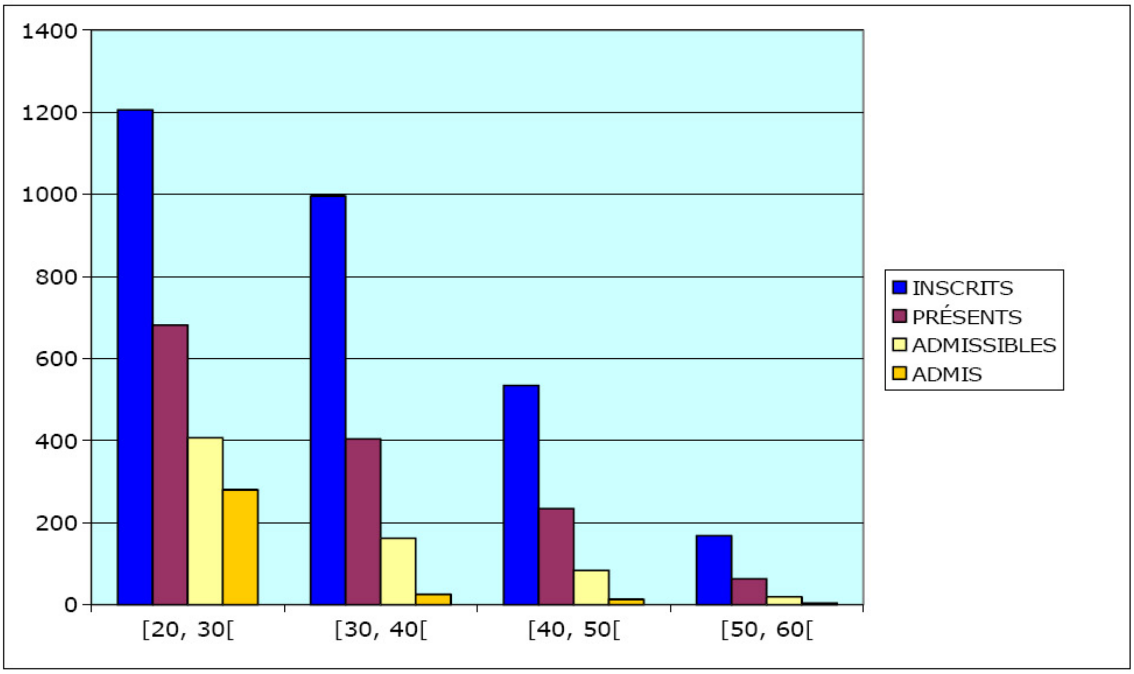




Pourcentages selon le genre

Répartition selon l'âge

TRANCHE D'ÂGE	INSCRITS	PRÉSENTS	ADMISSIBLES	ADMIS
[20, 30[	1206	681	407	280
[30, 40[	996	404	162	25
[40, 50[	534	234	84	13
[50, 60[	168	63	19	4



Répartition par tranches d'âge

Cette répartition par tranches d'âge confirme que l'agrégation externe permet de recruter des jeunes enseignants. Les jeunes constituent en effet l'essentiel des admissibles mais surtout des admis au concours, 87% des reçus ont moins de 30 ans. Cependant des candidats plus avancés en âge se sont aussi présentés avec succès.

Répartition selon l'académie

ACADEMIE	Candidats	Présents	Admissibles	Présents Oral	Admis
AIX-MARSEILLE	163	68	35	28	16
AMIENS	63	38	11	9	5
BESANCON	50	30	18	13	9
BORDEAUX	82	37	21	18	9
CAEN	41	23	10	7	4
CLERMONT-FERRAND	36	15	8	4	2
CORSE	6	3	2	1	1
DIJON	57	36	21	15	8
GRENOBLE	110	67	33	25	18
GUADELOUPE	34	9	1	1	0
GUYANE	8	5	0	0	0
LA REUNION	82	41	12	7	1
N. CALEDONIE	9	3	0	0	0
POLYNESIE	15	4	2	1	0
MAYOTTE	15	7	3	3	0
LILLE	125	48	10	7	4
LIMOGES	27	13	4	3	0
LYON	168	92	61	52	44
MARTINIQUE	36	15	6	5	1
MONTPELLIER	123	54	24	18	6
NANCY-METZ	99	53	19	16	9
NANTES	79	44	24	19	10
NICE	148	39	17	13	7
ORLEANS-TOURS	70	31	12	10	4
POITIERS	79	28	11	10	6
REIMS	42	24	12	9	6
RENNES	121	75	50	43	33
ROUEN	60	34	11	7	3
STRASBOURG	87	48	24	23	13
TOULOUSE	119	60	27	22	13
CRETEIL-PARIS-VERSAIL.	769	349	186	150	91
TOTAL	2923	1393	675	539	323
Hors ENS					
CRETEIL-PARIS-VERSAILLES	720	312	149	116	58
RENNES	100	54	30	23	13
LYON	143	70	39	30	22
ENS seulement					
CRETEIL-PARIS-VERSAILLES	49	37	37	34	33
RENNES	21	21	20	20	20
LYON	25	22	22	22	22

La répartition des lauréats par académie se concentre clairement sur 7 centres (PCV, Rennes, Lyon, Grenoble, Strasbourg, Toulouse, Marseille) qui totalisent 70% des lauréats. Toutefois, toutes les académies assurent une préparation satisfaisante auprès de leurs étudiants.

Chapitre 3

Épreuve écrite de mathématiques générales

3.1 Énoncé

Notations, définitions et attendus

Les calculatrices et documents sont interdits. La qualité de la rédaction sera un facteur important d'appréciation des copies. On invite donc le candidat à produire des raisonnements clairs, complets et concis. Le candidat peut utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes ; il veillera toutefois à préciser la référence du résultat utilisé.

Dans tout ce problème, les corps considérés sont supposés *commutatifs*.

Pour $(n, p) \in (\mathbf{N}^*)^2$ et $\mathbb{K}$ un corps, on note :
- $\mathbb{K}^*$ l'ensemble des éléments non nuls de $\mathbb{K}$;
- $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices à n lignes, p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$;
- $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ la $\mathbb{K}$-algèbre des matrices carrées à n lignes et à coefficients dans $\mathbb{K}$; $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ le groupe de ses éléments inversibles ; $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ le sous-groupe de ses matrices de déterminant 1 ;
- I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$: les matrices de la forme λI_n, avec λ dans $\mathbb{K}$, sont dites **scalaires**.

On identifie, via la base canonique de $\mathbb{K}^n$, l'algèbre $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ à l'algèbre des endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$.

Étant donné $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\mathbb{K}[M]$ la sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ engendrée par M (algèbre des polynômes en M).

Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, et pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on note

$$T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j} \ ,$$

où $E_{i,j}$ est la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls hormis celui en position (i, j), lequel vaut 1.

On admet que $\left\{T_{i,j}(\lambda) \mid (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ i \neq j,\ \lambda \in \mathbb{K}^*\right\}$ est une partie génératrice du groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$.

Définition. On appelle **transvection** de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tout élément $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\mathrm{rang}(M - I_n) = 1$ et dont le polynôme caractéristique $\det(X I_n - M)$ vaut $(X - 1)^n$.

Soit G un groupe (noté multiplicativement) et A une partie de G.

- Le **centralisateur de** A **dans** G, noté $\mathscr{Z}_G(A)$, est le sous-groupe de G constitué des éléments x de G vérifiant :
$$\forall a \in A,\ xa = ax.$$
Le centralisateur d'un élément a de G est défini comme le centralisateur du singleton $\{a\}$ dans G, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de G qui commutent avec a.
- Le **normalisateur de** A **dans** G, noté $\mathscr{N}_G(A)$, est le sous-groupe de G constitué des éléments x de G vérifiant $xAx^{-1} = A$.
- Le **centre** de G est le centralisateur de G dans G. On le note $\mathscr{Z}(G)$.
- Le **groupe dérivé** de G, noté $D(G)$, est le sous-groupe de G engendré par l'ensemble $\left\{xyx^{-1}y^{-1} \mid (x,y) \in G^2\right\}$. On admet que $D(G)$ est un sous-groupe distingué de G.

Un morphisme de groupes $\varphi : G \to H$ est dit **trivial** lorsque son image est le sous-groupe trivial $\{1_H\}$, où 1_H désigne le neutre de H.

Étant donné $\sigma : \mathbb{K} \to \mathbb{L}$ un isomorphisme de corps (c'est-à-dire que $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ sont des corps et que σ est un isomorphisme d'anneaux du premier vers le second) et $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note
$$M^\sigma = \left(\sigma(m_{i,j})\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{L}).$$
On admet que $M \mapsto M^\sigma$ définit alors un isomorphisme d'anneaux de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{L})$ et induit un isomorphisme de groupes de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathrm{SL}_n(\mathbb{L})$.

On admet enfin le résultat classique suivant :

Théorème 0 (admis). Soit $\mathbb{K}$ un corps, et G un sous-groupe distingué de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ contenant une matrice non scalaire. Si $n \geqslant 3$ ou $\mathbb{K}$ possède au moins 5 éléments, alors $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$.

Objectifs

On s'intéresse ici aux trois théorèmes suivants, dus à Schreier et Van der Wærden :

Théorème 1. Soit $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ deux corps, et n et p deux entiers naturels avec $n > p \geqslant 1$. Tout morphisme de groupes de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathrm{SL}_p(\mathbb{L})$ est alors trivial.

Théorème 2. Soit $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ deux corps, et n et p deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2. Si les groupes $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{SL}_p(\mathbb{L})$ sont isomorphes, alors $n = p$ et les corps $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ sont isomorphes.

Théorème 3. Soit $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ deux corps, n un entier naturel supérieur ou égal à 2, et $\Psi : \mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) \to \mathrm{SL}_n(\mathbb{L})$ un isomorphisme de groupes. Il existe alors une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{L})$ et un isomorphisme de corps $\sigma : \mathbb{K} \to \mathbb{L}$ tels que
$$\forall M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{K}),\ \Psi(M) = PM^\sigma P^{-1} \quad \text{ou} \quad \forall M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{K}),\ \Psi(M) = P\left({}^tM^{-1}\right)^\sigma P^{-1}.$$

Structure du sujet

La partie I regroupe plusieurs résultats utilisés dans le reste du problème.

La partie II est consacrée à la démonstration du théorème 1 pour des corps $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ de caractéristique différente de 2.

Dans la partie III, on démontre le cas $n = 2$ du théorème 3 pour des corps $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ de caractéristique différente de 2. Le théorème 2 est enfin démontré dans la partie IV pour des corps $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ de caractéristique différente de 2.

Les parties II et III sont totalement indépendantes l'une de l'autre.

I. Résultats préliminaires

Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ désigne un corps quelconque et n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

I.A. Quelques calculs de commutants

1. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$.
   Montrer que les sous-espaces propres de A sont stables par B.

2. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ des éléments deux à deux distincts du corps $\mathbb{K}$, et $(p_1, \ldots, p_r) \in (\mathbf{N}^*)^r$ une liste d'entiers naturels non nuls telle que $p_1 + \cdots + p_r = n$.
   Montrer que l'algèbre des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec la matrice diagonale par blocs

$$D := \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{p_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_r I_{p_r} \end{bmatrix}$$

   est l'ensemble des matrices diagonales par blocs de la forme

$$\begin{bmatrix} M_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & M_r \end{bmatrix},$$

   où $M_1, \ldots, M_r$ représentent des matrices carrées de formats respectifs $p_1 \times p_1, \ldots, p_r \times p_r$.

3. *Cas d'une matrice compagnon.*
   On se donne ici une liste $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ et l'on considère la matrice compagnon

$$C := \begin{bmatrix} 0 & & (0) & & a_0 \\ 1 & \ddots & & & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ (0) & & 0 & 1 & a_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

   On note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

   (a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   Montrer qu'il existe une liste $(b_0, \ldots, b_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ telle que $Me_1 = \sum_{k=0}^{n-1} b_k C^k e_1$.

   (b) En déduire que l'algèbre des matrices qui commutent à C est $\mathbb{K}[C]$.

4. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ non scalaire.
   En utilisant la question précédente, montrer que l'algèbre des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ qui commutent à A est $\mathbb{K}[A]$. Préciser sa dimension.

I.B. Éléments de structure de $\mathbf{SL}_n(\mathbb{K})$

1. (a) Soit $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. Montrer l'équivalence entre les conditions suivantes :
   (i) M est une transvection.
   (ii) Il existe un λ dans $\mathbb{K}^*$ tel que M soit semblable à $T_{1,2}(\lambda)$.
   (iii) M est semblable à $T_{1,2}(1)$.
   On rappelle que la notion de transvection a été définie en page 2.
   (b) Montrer que toute transvection de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ appartient à $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$.
2. Quels sont les éléments d'ordre 2 du groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$?
3. Déterminer le centralisateur de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Préciser le centre de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$.
4. (a) Montrer que $D\big(\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})\big)$ contient une matrice non scalaire.
   (b) On suppose que $n \geqslant 3$ ou que $\mathbb{K}$ possède au moins 5 éléments.
   Déterminer $D\big(\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})\big)$.

I.C. Dénombrement de $\mathbf{SL}_n(\mathbb{K})$

On suppose ici que $\mathbb{K}$ est fini, de cardinal noté q.

1. Étant donné un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie d, montrer que E est fini et déterminer son cardinal.
2. (a) Montrer que
$$\operatorname{card}\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \prod_{k=0}^{n-1}(q^n - q^k).$$
   Pour ce faire, on pourra par exemple dénombrer les bases de $\mathbb{K}^n$.
   (b) Dénombrer $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$.
   (c) Soit $\mathbb{L}$ un corps tel que les groupes $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{L})$ soient isomorphes. Montrer que $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ sont isomorphes.

II. Le théorème 1 en caractéristique différente de 2

Pour établir le théorème 1 en caractéristique différente de 2, nous procédons par récurrence en définissant, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, la propriété

$\mathscr{H}_n$: "Quels que soient les corps $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ de caractéristique différente de 2, tout morphisme de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathrm{SL}_{n-1}(\mathbb{L})$ est trivial."

Le cas $n = 2$ est immédiat et ne mérite pas de commentaire particulier.

1. Soit H un groupe quelconque, $\mathbb{K}$ un corps, n un entier naturel supérieur ou égal à 3, et $\Psi : \mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) \to H$ un morphisme non trivial. Montrer que toute matrice appartenant à $\operatorname{Ker}\Psi$ est scalaire.
2. *Le cas* $n = 3$.
   Soit $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ deux corps de caractéristique différente de 2, et $\Psi : \mathrm{SL}_3(\mathbb{K}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{L})$ un morphisme.
   (a) Exhiber trois éléments de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{K})$ dont l'ordre divise 2.
   (b) En déduire deux éléments distincts A et B de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{K})$ tels que $\Psi(A) = \Psi(B)$ et $A^2 = B^2 = I_3$.

(c) En déduire que Ψ est trivial.

La propriété $\mathscr{H}_3$ est donc établie.

On fixe désormais un entier naturel $n \geqslant 4$ et l'on suppose $\mathscr{H}_k$ vraie pour tout $k \in [\![2, n-1]\!]$. On fixe deux corps $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ de caractéristique différente de 2 et l'on se donne un morphisme

$$\Psi : \mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) \to \mathrm{SL}_{n-1}(\mathbb{L}).$$

On souhaite montrer que Ψ est trivial.

3. Justifier que l'on ne perd pas de généralité à supposer que le polynôme X^2+1 est scindé sur $\mathbb{L}$.

Jusqu'à la fin de cette partie on fera l'hypothèse que X^2+1 est scindé sur $\mathbb{L}$ et l'on notera i l'une de ses racines dans $\mathbb{L}$ (*on ne la confondra pas avec le nombre complexe bien connu*).

4. Démontrer que pour tout $(p,q) \in [\![1, n-1]\!]^2$ tel que $p > q$, tout morphisme de $\mathrm{SL}_p(\mathbb{K})$ dans $\mathrm{SL}_q(\mathbb{L})$ est trivial.

À partir de cette question, on raisonne par l'absurde en supposant Ψ non trivial. On introduit les matrices

$$J_{\mathbb{K}} := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad A := \begin{bmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & J_{\mathbb{K}} \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{K}).$$

5. (a) Vérifier que $A^4 = I_n$, que A^2 n'est pas scalaire et que A et A^{-1} sont conjugués dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$.

   (b) En déduire qu'il existe trois entiers naturels p, q, r tels que $p+q+2r = n-1$, $r \geqslant 1$, et q pair, ainsi qu'une matrice $P \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{L})$ telle que

$$\Psi(A) = P \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & iI_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -iI_r \end{bmatrix} P^{-1}.$$

   (c) En déduire quatre morphismes $\alpha : \mathrm{SL}_{n-2}(\mathbb{K}) \to \mathrm{GL}_p(\mathbb{L})$, $\beta : \mathrm{SL}_{n-2}(\mathbb{K}) \to \mathrm{GL}_q(\mathbb{L})$, $\gamma : \mathrm{SL}_{n-2}(\mathbb{K}) \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{L})$ et $\delta : \mathrm{SL}_{n-2}(\mathbb{K}) \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{L})$ tels que

$$\forall M \in \mathrm{SL}_{n-2}(\mathbb{K}),\ \Psi\left(\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}\right) = P \begin{bmatrix} \alpha(M) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta(M) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma(M) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta(M) \end{bmatrix} P^{-1}.$$

6. On suppose $n \geqslant 5$. Montrer que α, β, γ et δ sont à valeurs respectivement dans $\mathrm{SL}_p(\mathbb{L})$, $\mathrm{SL}_q(\mathbb{L})$, $\mathrm{SL}_r(\mathbb{L})$ et $\mathrm{SL}_r(\mathbb{L})$, puis qu'ils sont tous triviaux, et conclure le raisonnement par l'absurde dans ce cas.

7. Traiter le cas $n = 4$, puis conclure.

III. Isomorphismes de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{L})$

Dans cette partie, on fixe deux corps $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ de caractéristique différente de 2. On se propose de démontrer que tout isomorphisme du groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{L})$ est de la forme $M \mapsto PM^\sigma P^{-1}$ pour une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{L})$ et un isomorphisme de corps $\sigma : \mathbb{K} \to \mathbb{L}$.

Pour $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{L})$, on notera

$$\varphi_P : M \mapsto PMP^{-1},$$

qui est clairement un automorphisme du groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{L})$ (on ne demande pas de le démontrer).

III.A. Image d'une transvection par un isomorphisme

1. Dans cette question, on suppose $\mathbb{K}$ de caractéristique $p > 0$.
   (a) Comparer les polynômes $(X-1)^p$ et $X^p - 1$ de $\mathbb{K}[X]$.
   (b) Montrer que les transvections de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ sont les éléments d'ordre p de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$.
2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
   Exprimer les sous-espaces propres de PAP^{-1} à l'aide de ceux de A.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$.
   (a) Déterminer le centralisateur de $T_{1,2}(\lambda)$ dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$. On le note $\mathscr{C}$.
   (b) On note $\mathscr{N}$ le normalisateur de $\mathscr{C}$ dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$. Montrer que
   $$\mathscr{N} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha^{-1} \end{bmatrix} \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K} \right\}.$$
   (c) À quelle condition, nécessaire et suffisante, sur $\mathbb{K}$ tous les carrés des éléments de $\mathscr{N} \setminus \mathscr{C}$ sont-ils des matrices scalaires ?
4. Soit $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1, -1\}$.
   (a) Déterminer le centralisateur dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ de la matrice $D := \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{bmatrix}$. On le note $\mathscr{C}'$.
   (b) Déterminer le normalisateur de $\mathscr{C}'$ dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$. On le note $\mathscr{N}'$.
   (c) Déterminer les carrés des éléments de $\mathscr{N}' \setminus \mathscr{C}'$.
5. Soit $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique est irréductible. On se donne $P \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{K}) \setminus \mathbb{K}[A]$ telle que $PAP^{-1} \in \mathbb{K}[A]$.
   (a) Montrer que $\mathbb{K}[A]$ est un corps et que $M \mapsto PMP^{-1}$ définit un automorphisme de la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathbb{K}[A]$.
   (b) Montrer que P^2 et A commutent.
   (c) En remarquant que P^2 et P commutent, en déduire que P^2 est scalaire.
6. Soit $\psi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{K}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{L})$ un isomorphisme de groupes.
   (a) En exploitant les résultats précédents, démontrer que pour toute transvection $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$, il existe une transvection $M' \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{L})$ telle que $\psi(M) = \pm M'$.
   (b) En déduire que ψ envoie toute transvection de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ sur une transvection de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{L})$.
   On pourra vérifier que toute transvection $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ s'écrit $M = T^2$ avec T une transvection.

III.B. Analyse des isomorphismes de $\mathbf{SL_2}(\mathbb{K})$ sur $\mathbf{SL_2}(\mathbb{L})$

Dans toute cette partie, on se donne un isomorphisme $\psi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{K}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{L})$. On souhaite prouver le résultat annoncé en début de partie III.
On introduit trois sous-ensembles de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$:

$$\mathscr{E}_+(\mathbb{K}) := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid x \in \mathbb{K} \right\}; \quad \mathscr{E}_-(\mathbb{K}) := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix} \mid x \in \mathbb{K} \right\} \quad \text{et} \quad \mathscr{D}_{\mathbb{K}} := \left\{ \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{K}^* \right\}.$$

On définit de mÍme les sous-ensembles $\mathscr{E}_+(\mathbb{L})$, $\mathscr{E}_-(\mathbb{L})$ et $\mathscr{D}_{\mathbb{L}}$ de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{L})$.
On introduit les matrices

$$J_{\mathbb{K}} := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad J_{\mathbb{L}} := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{L}).$$

1. (a) Soit T_1 et T_2 deux transvections de $\mathscr{M}_2(\mathbb{L})$ ne commutant pas.
   Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{L})$ telle que $PT_1P^{-1} \in \mathscr{E}_+(\mathbb{L})$ et $PT_2P^{-1} \in \mathscr{E}_-(\mathbb{L})$.

   (b) En déduire qu'il existe $P_1 \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{L})$ telle que l'isomorphisme $\psi_1 := \varphi_{P_1} \circ \psi$ vérifie

$$\psi_1(\mathscr{E}_+(\mathbb{K})) = \mathscr{E}_+(\mathbb{L}) \quad \text{et} \quad \psi_1(\mathscr{E}_-(\mathbb{K})) = \mathscr{E}_-(\mathbb{L}). \tag{3.1}$$

2. (a) Déterminer les matrices $Q \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ telles que

$$Q\mathscr{E}_+(\mathbb{K})Q^{-1} = \mathscr{E}_-(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad Q\mathscr{E}_-(\mathbb{K})Q^{-1} = \mathscr{E}_+(\mathbb{K}).$$

   On pourra introduire la matrice $QJ_{\mathbb{K}}$.

   (b) En déduire qu'il existe un $\lambda \in \mathbb{L}^*$ tel que :

$$\psi_1(J_{\mathbb{K}}) = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda^{-1} \\ \lambda & 0 \end{bmatrix}.$$

   On fixe un tel λ dans la suite de cette question.

   (c) On pose $P_2 := \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Montrer que l'isomorphisme $\psi_2 := \varphi_{P_2} \circ \psi_1$ vérifie simultanément (3.2) et $\psi_2(J_{\mathbb{K}}) = J_{\mathbb{L}}$.

Nous allons maintenant mettre en évidence un isomorphisme de corps $\sigma : \mathbb{K} \to \mathbb{L}$ tel que $\psi_2(M) = M^\sigma$ pour tout $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$.

3. (a) En utilisant le résultat de 2.(a), montrer que ψ_2 induit une bijection de $\mathscr{D}_{\mathbb{K}}$ sur $\mathscr{D}_{\mathbb{L}}$.

   (b) En déduire un isomorphisme de groupes $\beta : (\mathbb{K}^*, \times) \to (\mathbb{L}^*, \times)$ tel que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}^*,\ \psi_2\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \beta(\lambda) & 0 \\ 0 & \beta(\lambda)^{-1} \end{bmatrix}.$$

   On prolonge β en une bijection de $\mathbb{K}$ sur $\mathbb{L}$ en posant $\beta(0) := 0$.

4. Montrer qu'il existe un isomorphisme de groupes $\alpha : (\mathbb{K}, +) \to (\mathbb{L}, +)$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{K},\ \psi_2\left(\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha(x) \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

   et vérifier alors que

$$\forall x \in \mathbb{K},\ \psi_2\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha(x) & 1 \end{bmatrix}.$$

5. (a) Soit $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ telle que $c \neq 0$.
   Mettre en évidence une décomposition $M = A\,B\,C\,J_{\mathbb{K}}$
   avec $(A, B, C) \in \mathscr{D}_{\mathbb{K}} \times \mathscr{E}_-(\mathbb{K}) \times \mathscr{E}_+(\mathbb{K})$.
   (b) En déduire que $\beta = \alpha$.
6. Conclure.

IV. Le théorème 2 en caractéristique différente de 2

Dans toute cette partie, on fixe deux entiers naturels m et n supérieurs ou égaux à 2, deux corps $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ de caractéristique différente de 2, et l'on suppose l'existence d'un isomorphisme de groupes $\Psi : \mathrm{SL}_m(\mathbb{K}) \to \mathrm{SL}_n(\mathbb{L})$.

1. Montrer que $m = n$ et que si l'un des corps $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{L}$ est fini, alors ils sont isomorphes.

Jusqu'à la fin du problème, on suppose $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ infinis.

En utilisant Ψ, on se propose de construire un isomorphisme de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{L})$, le résultat final de la partie III permettant alors de conclure.

On suppose $n \geqslant 3$ dans la suite. On introduit la matrice

$$S := \begin{bmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & -I_2 \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{K}).$$

2. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{L})$ et un couple $(k, \ell) \in (\mathbf{N}^*)^2$ tel que $k + \ell = n$ et

$$\Psi(S) = P \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_\ell \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Pour $(a, b) \in (\mathbf{N}^*)^2$, on admet que l'ensemble

$$G_{a,b}(\mathbb{K}) := \big\{(P, Q) \in \mathrm{GL}_a(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_b(\mathbb{K}) : \det(P)\det(Q) = 1\big\},$$

est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_a(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_b(\mathbb{K})$, et l'on définit de mÍme $G_{a,b}(\mathbb{L})$.

3. En considérant les centralisateurs respectifs de S et $\Psi(S)$ dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{L})$, obtenir un isomorphisme de groupes de $G_{n-2,2}(\mathbb{K})$ sur $G_{k,\ell}(\mathbb{L})$.
4. En déduire un isomorphisme de $\mathrm{SL}_{n-2}(\mathbb{K}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ sur $\mathrm{SL}_k(\mathbb{L}) \times \mathrm{SL}_\ell(\mathbb{L})$.
5. En utilisant le Théorème 1, démontrer que $(k, \ell) = (2, n-2)$ ou $(k, \ell) = (n-2, 2)$.
6. Conclure dans le cas où $n \neq 4$.
7. Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2, et G un sous-groupe distingué de $\mathrm{SL}_p(\mathbb{K}) \times \mathrm{SL}_p(\mathbb{K})$, distinct de $\mathrm{SL}_p(\mathbb{K}) \times \mathrm{SL}_p(\mathbb{K})$ et non-abélien.
   Montrer qu'il existe un sous-groupe G' de $\mathscr{Z}\big(\mathrm{SL}_p(\mathbb{K})\big)$ tel que $G = \mathrm{SL}_p(\mathbb{K}) \times G'$ ou $G = G' \times \mathrm{SL}_p(\mathbb{K})$. En déduire la structure de $D(G)$.
8. Conclure.

Fin du problème

3.2 Rapport sur l'épreuve écrite de mathématiques générales

3.2.1 Objet du problème

Le problème de Mathématiques Générales 2013 proposait d'étudier les morphismes entre groupes spéciaux linéaires. Plus spécifiquement, on y démontrait qu'étant donné deux corps (commutatifs) $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ de caractéristique différente de 2, et deux entiers naturels n et p :
- Si $n > p$ alors tout morphisme de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ vers $\mathrm{SL}_p(\mathbb{L})$ est trivial.
- Si $n > 1$ et $p > 1$, alors l'existence d'un isomorphisme de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathrm{SL}_p(\mathbb{L})$ implique que $n = p$ et que $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ soient isomorphes.

On explicitait enfin tous les isomorphismes entre $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ et $\mathrm{SL}_2(\mathbb{L})$, moyennant la connaissance des isomorphismes éventuels de $\mathbb{K}$ sur $\mathbb{L}$.

Comme annoncé dans le préambule, ces résultats se généralisent à des corps (commutatifs) arbitraires, et l'on dispose d'une description explicite de tous les isomorphismes de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathrm{SL}_n(\mathbb{L})$, lorsque n est un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 2. On pouvait d'ailleurs, compte tenu de l'énoncé du Théorème 3, s'étonner de l'absence d'isomorphismes du type $M \mapsto P({}^tM^{-1})^\sigma P^{-1}$ dans l'énoncé du résultat final de la partie III. C'est tout de suite moins étonnant si l'on a en tête que ${}^tM^{-1}$ est la comatrice de M lorsque M est de déterminant 1, et que lorsque M est dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$, on a $\mathrm{Com}(M) = KMK^{-1}$ pour la matrice $K := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Signalons que l'énoncé du Théorème 0 n'était pas optimal : en effet, il s'applique aussi à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_4)$. En revanche, il est bien connu que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2)$, égal à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ et isomorphe au groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$, possède exactement un sous-groupe distingué non trivial (et par ailleurs sa seule matrice scalaire est I_2), tandis que le groupe dérivé de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ est isomorphe au groupe quaternionique $\mathbb{H}_8$ et contient évidemment des matrices non scalaires. Dans la pratique, cela n'a semble-t-il perturbé aucun candidat, d'autant plus que dans le cas $n = 2$ le théorème 0 n'était utilisé que pour des corps infinis.

Terminons cet exposé liminaire par une brève note historique : les résultats obtenus dans ce problème sont des conséquences assez faciles des théorèmes de Schreier et van der Waerden sur les isomorphismes entre groupes projectifs spéciaux linéaires [2]. Bien que la simplicité de ces derniers groupes, sauf dans les cas bien connus de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_2)$ et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3)$, a sans aucun doute motivé les auteurs suscités, les résultats sur les groupes spéciaux linéaires sont légèrement plus esthétiques : ils ne souffrent en effet d'aucune exception, alors que le théorème original de Schreier et van der Waerden en comporte une liée à l'isomorphie « exceptionnelle » des groupes projectifs $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$ et $\mathrm{PSL}_3(\mathbb{F}_2)$. Pour un exposé complet sur la question, ainsi qu'une preuve plus conceptuelle et géométrique de ces énoncés, nous renvoyons à l'excellent [1].

[1] J. Dieudonné, La géométrie des groupes classiques. Springer, Berlin, 1955.

[2] O. Schreier, B. L. van der Waerden, Die Automorphismen der projektiven Gruppen, *Abhandlungen aus dem mathematischen seminar der Hamburgischen Universität*, **6** (1928), 303-322.

3.2.2 Rapport sur la correction de copies

Généralités

Ce long problème visait prioritairement à évaluer la capacité des candidats à mobiliser leurs savoirs de base en algèbre linéaire pour résoudre des questions touchant à la structure des groupes spéciaux linéaires. Quelques rares questions touchaient à la théorie des extensions de corps.

La partie I contenait presque exclusivement des questions classiques qui doivent faire partir du viatique culturel d'un bon agrégé. Les questions les plus délicates nécessitaient une solide pratique en théorie des groupes et n'ont été résolues avec succès que par une poignée d'excellents candidats.

À part quelques exceptions, les candidats ont concentré leur travail sur les parties I, II et III.A.

Rappelons que l'agrégation externe est un concours de recrutement de professeurs de l'enseignement secondaire et supérieur : la qualité de la présentation et de la rédaction sont donc des éléments très importants de l'appréciation des copies. On attend des raisonnements correctement structurés, les objets étant proprement introduits, les hypothèses clairement formulées tout comme les conclusions, tout cela avec un usage correct des notations mathématiques, de la grammaire et de l'orthographe.

Le jury s'inquiète d'une maîtrise parfois très approximative de la logique par les candidats. Il faut rappeler que l'enseignement des bases du raisonnement logique fait partie des programmes de lycée à partir de la Seconde. On trouve trop souvent des preuves incomplètes des égalités d'ensembles demandées, l'inclusion la moins difficile passant très souvent à la trappe. Chez un nombre non négligeable de candidats, la résolution d'une équation par équivalences n'est pas correctement rédigée, une chaîne d'équivalences se poursuivant souvent par l'affirmation que la propriété en bout de chaîne est vraie !

Il faut signaler un défaut majeur dans un grand nombre de copies : confrontés à des questions touchant à des matrices de petite taille (2 lignes et 2 colonnes, ici), une grande partie des candidats abandonne toute réflexion géométrique pour se jeter à corps perdu dans des calculs impliquant les coefficients des dites matrices. Cela a très souvent donné lieu à des preuves indigestes alors que des raisonnements très élémentaires sur la réduction des endomorphismes permettaient des solutions aussi concises qu'efficaces.

Les candidats doivent enfin être avertis quant à l'utilisation de résultats manifestement en dehors du programme de l'agrégation : l'utilisation de la réduction de Frobenius dans un cas aussi trivial que la réduction des matrices 2×2, ou celle de la réduction de Jordan pour caractériser les matrices de transvection ne sauraient rapporter la totalité des points aux candidats se laissant aller à de telles facilités. Une composante importante du travail d'un enseignant, dans le secondaire comme dans le supérieur, consiste à savoir s'adapter à un corpus restreint d'outillage technique pour démontrer les énoncés qui figurent dans son cours.

Remarques sur les questions abordées

On se limitera aux parties I, II et III.A. Le reste des questions est traité de façon trop sporadique pour que l'on puisse en tirer la moindre généralité.

I.A.

1. Cette question de cours a été très bien réussie dans l'ensemble. Le jury a dû lourdement pénaliser les quelques candidats considérant que le vecteur nul était un vecteur propre de la matrice A.
2. On a relevé un nombre substantiel de fautes logiques : beaucoup de candidats se contentent de prouver l'inclusion non triviale et ne parlent absolument pas de l'autre. Il était parfaitement possible de traiter cette question sans tenir compte de la précédente, mais il était assez peu judicieux de tenter un calcul direct sur les coefficients. Parmi les nombreux candidats qui résolvent la question en calculant par blocs, plusieurs éprouvent des difficultés à indexer correctement les blocs : le bloc situé en position (i, j) ne peut certainement pas être noté M_{p_i,p_j} !
3. (a) Le seul enjeu de la question consistait à reconnaître l'identité $C^k e_1 = e_{k+1}$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$. Pour ce faire, il n'était pas judicieux de tenter un calcul du coefficient en position générale sur la matrice C^k.

   (b) Cette question classique a bien distingué les candidats ayant une solide compréhension de la notion de polynôme de matrices/d'endomorphismes. Trop de candidats se contentent d'expliquer que si M commute à C alors chaque vecteur Me_k est combinaison linéaire des $C^i e_k$: c'est parfaitement insuffisant car il faut s'assurer que les coefficients en question ne dépendent pas de k !

4. Cette question a donné du fil à retordre à bien des candidats. Au lieu de s'appuyer sur un argument de réduction, un trop grand nombre d'entre eux ont tenté de résoudre la question par le biais d'une décomposition de la matrice A en combinaison linéaire de l'identité et d'une matrice compagnon. Une telle stratégie pouvait aboutir mais au prix d'une étude de cas fort longue (essentiellement trois cas à distinguer) et qui n'a quasiment jamais été menée à bien. Signalons que la caractérisation des homothéties par la stabilisation de toutes les droites vectorielles doit faire partie du bagage culturel d'un agrégé.

   Enfin, le calcul de la dimension de $\mathbb{K}[A]$ est rarement justifié avec la précision souhaitée (invoquer le théorème de Cayley-Hamilton pour dire que le polynôme minimal est de degré au plus 2 s'imposait).

I.B.

1. (a) L'ordre d'énonciation des propriétés suggérait une démonstration par implications circulaires ((i) $\Rightarrow$ (ii) puis (ii) $\Rightarrow$ (iii) puis (iii) $\Rightarrow$ (i)). Beaucoup de candidats éprouvent le plus grand mal à s'appuyer sur le polynôme caractéristique d'une transvection pour justifier directement sa similitude avec une matrice de type $T_{i,j}(\lambda)$. Par ailleurs, il n'est pas totalement évident qu'une matrice de la forme $PT_{i,j}(1)P^{-1} - I_2$ soit nécessairement de rang 1 : une explication s'imposait ! Plusieurs candidats écrivent « $(X-a)(X-d)-bc=(X-1)^2$ si et seulement si $a=d=1$ et $bc=0$ » ce qui dénote une confusion certaine entre condition nécessaire et condition suffisante.

   (b) Certains candidats ont été perturbés par cette question facile, pensant pouvoir appliquer la question précédente alors que l'on considérait ici le cas général d'un entier naturel n quelconque. Les candidats sont tenus de respecter la convention de l'énoncé, à savoir que le polynôme caractéristique est unitaire. Le jury a sanctionné lourdement toute imprécision dans les critères de trigonalisation (pour les candidats utilisant une telle méthode).

2. Une difficulté de la question résidait dans la nécessité d'opérer une distinction suivant la caractéristique du corps $\mathbb{K}$. L'essentiel des candidats limite sa discussion, explicitement ou non, à un corps de caractéristique différente de 2 ; le jury a apprécié ceux parmi eux qui ont explicité cette hypothèse. Les méthodes retenues par les candidats sont malheureusement trop souvent exclusivement calculatoires, et trop peu sont ceux qui ont le réflexe de réfléchir en termes géométriques, c'est-à-dire de réduction (voir les remarques générales). Très peu de candidats reconnaissent des matrices de symétrie, en caractéristique différente de 2.

3. Beaucoup de candidats parviennent à conjecturer que le centralisateur de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices scalaires non nulles, mais très peu parmi ceux-là sont en mesure d'en apporter une preuve complète. Le fait, dans une telle situation, de penser à tester la commutation sur une partie génératrice devrait être une méthode bien comprise des candidats. Pour ceux qui raisonnent comme cela à partir des matrices de type $T_{i,j}(\lambda)$, les preuves sont souvent lacunaires. Plusieurs candidats écrivent que $AE_{i,j} = E_{i,j}A$ implique $a_{i,j} = a_{j,i}$, ce qui est tout à fait faux.

4. (a) Une approche saine consiste à tenter de résoudre le problème au brouillon pour $n=2$. À nouveau, la partie génératrice fournie clefs en main doit donner une idée de solution.

   (b) Question bien réussie dans l'ensemble, récompensant les candidats ayant bien lu l'énoncé.

I.C.

1. Les candidats doivent savoir que tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$. Un nombre substantiel de candidats raisonne à l'aide de bases mais on attendait dans ce cas une mention explicite de l'existence et de l'unicité des coordonnées d'un vecteur dans une telle base.

2. (a) Dans cette question très classique, on attendait d'abord que les candidats énoncent clairement une correspondance bijective entre $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et l'ensemble des familles libres à n vecteurs d'un

espace vectoriel de dimension n. Le dénombrement de ces familles libres, par une méthode de construction itérative, est relativement bien compris mais la rédaction est souvent insuffisamment précise.

(b) La justification de la surjectivité du morphisme déterminant n'est pas systématiquement donnée par les candidats.

(c) Bien des candidats ont supposé implicite la finitude de $\mathbb{L}$: le jury attendait *a contrario* une justification précise de cette dernière, ce qu'il a rarement obtenu. Enfin, la croissance stricte de $q \mapsto |\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)|$ est rarement justifiée avec la précision attendue.

II.

1. À l'instar de II.4.(b), il s'agissait essentiellement de bien lire l'énoncé. Cette question a perturbé un grand nombre de candidats qui ont complètement oublié l'énoncé du Théorème 0 à ce stade. De manière inquiétante, on voit un nombre insuffisamment négligeable de candidats considérer que le noyau de Ψ est constitué des matrices d'image nulle par cette application !

2. (a) Question bien réussie. On attendait une mention du fait que $\mathbb{K}$ n'est pas de caractéristique 2 pour justifier que les trois matrices données étaient bien distinctes, si cette hypothèse était nécessaire dans les exemples proposés.

   (b) La question était difficile pour les candidats n'ayant pas réussi à traiter l'essentiel de I.B.2, mais certains ont su s'en sortir quand même.

   (c) Peu de candidats ont le réflexe de construire un élément du noyau à partir de deux éléments A et B de même image par Ψ. Une fois ce principe compris, on pouvait parfaitement résoudre la question sans avoir trouvé les trois matrices demandées en (a). Pour les candidats qui s'appuyaient sur des matrices explicites, on attendait un raisonnement complet et non le traitement d'un seul exemple.

3. Bien des candidats ont été désarçonnés par la formulation de la question, assez inhabituelle dans un problème écrit. Pour répondre à une question de ce type, on peut suggérer le schéma suivant :
   - **Hypothèse :** « Le résultat A demandé est supposé vrai dans le cas restreint H ».
   - **Généralisation :** on s'appuie sur le cas H pour démontrer A dans le cas général.
   - **Conclusion :** « Pour prouver A, on ne perd pas de généralité à supposer H. »

   Pour les candidats utilisant un corps de rupture de X^2+1, on attendait une justification du scindage de ce polynôme sur un tel corps (ce qui est certes classique pour une extension quadratique). Enfin, on attendait que les candidats énoncent que la caractéristique d'un corps est préservée par extension.

4. Le jury a été interloqué de lire dans de nombreuses copies qu'un morphisme de $\mathrm{SL}_p(\mathbb{K})$ dans $\mathrm{SL}_q(\mathbb{L})$, avec $q < p$, se décompose nécessairement en la composée d'une succession de morphismes $\mathrm{SL}_p(\mathbb{K}) \to \mathrm{SL}_{p-1}(\mathbb{L})$, $\mathrm{SL}_{p-1}(\mathbb{L}) \to \mathrm{SL}_{p-2}(\mathbb{L})$, etc.

5. (a) Pour justifier que A^2 n'était pas scalaire, on attendait immanquablement l'argument selon lequel $\mathbb{K}$ n'est pas de caractéristique 2. L'essentiel du travail demandé était d'établir que A était semblable à son inverse via une matrice de passage de déterminant 1. Certains obtiennent la similitude voulue mais avec une matrice de passage qui était visiblement de déterminant -1. Comme A commute avec elle-même, c'était une idée douteuse d'essayer de prendre A pour matrice de passage. Beaucoup de candidats sont tout simplement gênés par la notion même d'éléments conjugués dans un groupe : selon certains, l'égalité $A^{-1} = AAA$ montre que A et A^{-1} sont conjuguées !

   (b) Il s'agissait de montrer que $\Psi(A)$ était diagonalisable grâce au polynôme annulateur X^4-1. Le fait que X^4-1 soit simplement scindé sur $\mathbb{L}$ n'est pas difficile à obtenir mais il est très rarement justifié par les candidats. La difficulté principale résidait dans la démonstration du fait que les sous-espaces propres de $\Psi(A)$ associés respectivement à i et $-i$ étaient de même dimension strictement positive.

(c) Cette question très sélective n'a été réussie que par très peu de candidats qui ont reconnu que la commutation de M avec A permettait, via la question I.A.2, d'obtenir la forme annoncée pour l'image par Ψ des matrices de la forme $\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}$ avec $M \in \mathrm{SL}_{n-2}(\mathbb{K})$.

6. Question redoutable qui, comme la suivante, nécessitait une excellente maîtrise de la théorie des groupes et n'a été réussie que par une poignée de candidats.

III.A.

1. (a) Cette question classique a laissé le jury sur sa faim. L'essentiel des candidats utilise la formule du binôme, mais on relève un grand nombre d'erreurs (oubli des puissances de -1, ou indexation incorrecte). La propriété classique selon laquelle $p \mid \binom{p}{k}$ pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, qui au passage n'est pas vraie pour tout entier p (voir le cas $p = 4$ et $k = 2$), doit être pleinement justifiée. Bien des candidats oublient de rappeler que la caractéristique d'un corps est un nombre premier lorsqu'elle est non nulle. Trop souvent, les candidats écrivent $X^p + (-1)^p = X^p - 1$ sans justification aucune (le cas $p = 2$ était écarté dans l'en-tête de la partie III, mais le résultat restait vrai sans cette hypothèse car $-1 = 1$ dans tout corps de caractéristique 2).

   (b) Un nombre substantiel de candidats parvient à prouver, grâce par exemple à une des caractérisations vues en I.B.1.(a), que toute transvection est d'ordre divisant p, mais l'immense majorité d'entre eux s'arrête là et conclut directement au fait que l'ordre vaut exactement p sans prendre la peine de rappeler que p est premier et que l'ordre en question ne peut valoir 1.

   La réciproque est rarement bien traitée, les candidats sautant sans aucune explication du fait que $(X-1)^p$ soit un polynôme annulateur au fait que le polynôme caractéristique vaille $(X-1)^2$.

2. Cette question parfaitement classique et élémentaire a permis aux candidats ayant bien travaillé leur cours de se mettre en valeur (il est à regretter cependant que très peu d'entre eux aient cherché ensuite à appliquer ce résultat). Les candidats devraient réfléchir avant d'écrire des identités absurdes du type de $E_\lambda(PAP^{-1}) = PE_\lambda(A)P^{-1}$ (cela n'a aucun sens de multiplier des éléments de $E_\lambda(A)$ à droite par P^{-1}).

3. (a) Les calculs effectués sont souvent pénibles, et les raisonnements mal rédigés. On recommande aux candidats d'être méthodiques : commencer par déterminer le commutant dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$, puis sélectionner parmi les matrices trouvées celles qui sont de déterminant 1.

   (b) Les réponses sont très souvent catastrophiques. La définition du normalisateur est très mal digérée dans les copies, beaucoup de candidats le confondant tout bonnement avec le centralisateur (à ce compte-là, on se demande bien pourquoi diable adopter une terminologie différente ...). Beaucoup de candidats tentent un raisonnement par équivalences mais ont le plus grand mal - et c'est fort compréhensible - à caractériser avec des quantificateurs l'appartenance à un normalisateur.

   La complexité de la condition doit conduire à la prudence, et donc à un raisonnement par condition nécessaire puis condition suffisante. Il s'agissait d'une des nombreuses questions où un raisonnement en termes de sous-espaces propres, s'appuyant en particulier sur le résultat de III.A.2, aurait permis de simplifier drastiquement les raisonnements des candidats. On s'étonne tout de même que, le résultat étant donné, même le sens « facile » (prendre un élément de l'ensemble donné et vérifier qu'il appartient bien au normalisateur) soit rarement bien traité : le jury attire l'attention des candidats sur le fait qu'un élément g du normalisateur d'un sous-groupe H d'un groupe G doit vérifier $gHg^{-1} = H$ et pas seulement $gHg^{-1} \subset H$ (l'habitude prise par certains candidats de raisonner sur des groupes finis pourrait expliquer cette erreur).

   (c) À nouveau, beaucoup de candidats ont du mal à maîtriser la logique dans la résolution de cette question. Il valait mieux d'abord prendre un élément quelconque de $\mathscr{N} \setminus \mathscr{C}$ puis étudier à quelle condition son carré est une matrice scalaire (à partir de là, on pouvait envisager plus sereinement de caractériser l'inclusion de l'ensemble des carrés de $\mathcal{N} \setminus \mathcal{C}$ dans l'ensemble des matrices scalaires, à l'aide du cardinal du corps $\mathbb{K}$). Cette première étape a déjà posé des problèmes à bien des candidats, et on a vu beaucoup d'étapes de raisonnement injustifiées, le sort du coefficient supérieur droit dans le carré de la matrice considérée étant très souvent passé sous silence.

4. (a) Trop peu de candidats reconnaissent la situation déjà vue en I.A.2.
   (b) Cette question appelle rigoureusement les mêmes commentaires que III.A.3.(b).
   (c) Question facile pour les candidats étant venus à bout de la précédente.
5. (a) Un nombre substantiel de candidats parvient à rappeler convenablement que l'algèbre $\mathbb{K}[A]$ est isomorphe à $\mathbb{K}[X]/(\mu)$, où μ est le polynôme minimal de A. Malheureusement, d'autres semblent persuadés que $\mathbb{K}[A]$ est isomorphe à $\mathbb{K}[X]/(\chi_A)$, ce qui n'est vrai que si polynôme caractéristique et polynôme minimal de A sont égaux. On attendait une justification correcte de l'irréductibilité de μ. Pour le reste de la question, le jury a été frappé du faible nombre de candidats pouvant énoncer précisément ce qu'est un morphisme d'algèbres (il manque très souvent une ou plusieurs des conditions de la définition d'un tel morphisme). Enfin, le caractère d'automorphisme n'a quasiment jamais été prouvé correctement, l'argument de finitude de dimension manquant systématiquement.
   (b) Question très difficile fleurtant avec la théorie de Galois, et qui n'a été résolue que dans les toutes meilleures copies.
   (c) Il s'agissait de faire le lien avec I.A.4 en raisonnant sur la dimension du commutant de P^2. À nouveau, cette question a posé d'énormes difficultés aux candidats.
6. (a) Question de synthèse très difficile faisant le bilan des questions précédentes de la partie, et qui n'a jamais été résolue.
   (b) Cette question était abordable et plusieurs candidats ont su en tirer profit : les arguments essentiels étaient le fait que toute transvection admet une racine carrée et que le carré d'une transvection est une transvection. Pour les deux raisonnements, on attendait des candidats qu'ils insistent bien sur le fait que $\mathbb{K}$ n'est pas de caractéristique 2, ce qui était absolument crucial ici.

3.3 Corrigé de l'épreuve de mathématiques générales

Dans tout le corrigé, on adoptera la convention $T_{i,j}(0) := I_n$ pour faciliter la rédaction.

I.A. Quelques calculs de commutants

1. Soit λ dans $\mathbb{K}$. Notons $E_\lambda(A)$ le sous-espace propre de A associé à λ. Pour tout $X \in E_\lambda(A)$, on trouve alors, par commutation de A et B :

$$A(BX) = BAX = B(\lambda X) = \lambda(BX)$$

ce qui prouve que $BX \in E_\lambda(A)$. Les sous-espaces propres de A sont donc stables par B.

2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec D. D'après I.A.1, M stabilise les sous-espaces propres de D. Comme les λ_i sont deux à deux distincts, ces sous-espaces propres sont $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{p_1})$, $\text{Vect}(e_{p_1+1}, \dots, e_{p_1+p_2}), \dots, \text{Vect}(e_{p_1+\dots+p_{r-1}+1}, \dots, e_{p_1+p_2+\dots+p_r})$, où $(e_1, \dots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{K}^n$. La stabilisation de ceux-ci par M se traduit alors par le fait que M est diagonale par blocs avec le même format que D, c'est-à-dire qu'il existe des matrices $M_1 \in \mathcal{M}_{p_1}(\mathbb{K}), \dots, M_r \in \mathcal{M}_{p_r}(\mathbb{K})$ telles que

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & M_r \end{bmatrix}.$$

Réciproquement, une matrice d'une telle forme commute évidemment à D (calcul par blocs immédiat). Le résultat demandé est donc établi.

3. (a) Par simple lecture sur la matrice C, on trouve $Ce_k = e_{k+1}$ pour tout $k \in [[1, n-1]]$, d'où $C^k e_1 = e_{k+1}$ pour tout $k \in [[0, n-1]]$. En notant $(b_0, \dots, b_{n-1})$ les coordonnées de Me_1 dans la base canonique, on en déduit
$$Me_1 = \sum_{k=0}^{n-1} b_k.e_{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} b_k C^k e_1.$$
(b) On sait déjà que tout élément de $\mathbb{K}[C]$ commute à C.
Réciproquement, soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutant à C, et $(b_0, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ associé à M comme en (a). Posons $N := M - \sum_{k=0}^{n-1} b_k C^k$. Alors N, somme de M et d'un élément de $\mathbb{K}[C]$, commute encore à C, et de plus $e_1 \in \operatorname{Ker} N$.
Comme N et C commutent, C stabilise $\operatorname{Ker} N$ et donc $\forall k \in [[1, n]],\ e_k = C^{k-1} e_1 \in \operatorname{Ker} N$. Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$, on en déduit $N = 0$ puis $M = \sum_{k=0}^{n-1} b_k C^k \in \mathbb{K}[C]$.
Ainsi le commutant de C est l'algèbre $\mathbb{K}[C]$.

4. Comme A n'est pas scalaire, l'endomorphisme $u : X \mapsto AX$ de $\mathbb{K}^2$ n'est pas une homothétie. Classiquement, cela se traduit par l'existence d'un vecteur $X \in \mathbb{K}^2$ tel que $\mathcal{B} := (X, AX)$ soit libre. Par suite, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{K}^2$ puisque $\dim \mathbb{K}^2 = 2$, et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{bmatrix}$ pour un couple $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. En notant C cette dernière matrice, on déduit de 2.(b) que le commutant de C est $\mathbb{K}[C]$. On en déduit que le commutant de u est $\mathbb{K}[u]$ puis que $\mathscr{C}(A) = \mathbb{K}[A]$ (via les isomorphismes d'algèbres associés à la représentation des endomorphismes dans une base). Enfin, on sait que $\mathbb{K}[A]$ est de dimension finie égale au degré du polynôme minimal de A, donc $\dim \mathbb{K}[A] \leqslant 2$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton. Par ailleurs (I_2, A) est libre car A n'est pas scalaire, et donc $\dim \mathbb{K}[A] \geqslant 2$. En conclusion, $\dim \mathbb{K}[A] = 2$.

I.B. Éléments de structure de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$

1. (a) • Preuve de (i) $\Rightarrow$ (ii). On suppose que M est une transvection. Le polynôme caractéristique de M est $(X-1)^2$, polynôme scindé avec 1 pour unique racine, donc M est trigonalisable avec 1 pour seule valeur propre. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ tels que
$$M = P \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1}.$$
Ainsi M est semblable à $T_{1,2}(\lambda)$. De plus, on sait que $\operatorname{rg}(M - I_2) \neq 0$ et donc $\lambda \neq 0$.
• Preuve de (ii) $\Rightarrow$ (iii). Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Il suffit de remarquer que $T_{1,2}(\lambda)$ est semblable à $T_{1,2}(1)$, ce qui s'obtient en remarquant que pour $D := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, on a
$$D\, T_{1,2}(\lambda)\, D^{-1} = T_{1,2}(1).$$
• Preuve de (iii) $\Rightarrow$ (i). Posons $U := T_{1,2}(1)$, dont le polynôme caractéristique est évidemment $(X-1)^2$. Alors $U - I_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, matrice qui est évidemment de rang 1. Par suite, pour tout $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$,
comme $PUP^{-1} - I_2 = P(U - I_2)P^{-1}$, on trouve $\operatorname{rg}(PUP^{-1} - I_2) = \operatorname{rg}(U - I_2) = 1$, et PUP^{-1} est semblable à U, et a donc même polynôme caractéristique $(X-1)^2$. Ainsi PUP^{-1} est une transvection.

Les conditions (i), (ii) et (iii) sont donc équivalentes.

(b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une transvection. Le polynôme caractéristique de M est $(X-1)^n$, polynôme dont le coefficient constant est $(-1)^n$. Par suite, $(-1)^n \det M = (-1)^n$ et donc $\det M = 1$. Ainsi, toute transvection de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ appartient à $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$.

2. On distingue deux cas.
   - Supposons $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2$. Soit $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ d'ordre 2. Alors $M^2 = I_2$, autrement dit $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ est un polynôme annulateur scindé à racines simples de M (puisque $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2$). Ainsi M est diagonalisable à valeurs propres dans $\{1, -1\}$. Le produit de ces valeurs propres vaut 1 car $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$. Ainsi $M = \pm I_2$. Le cas $M = I_2$ est exclu car M n'est pas d'ordre 1. Ainsi $M = -I_2$. Réciproquement, $-I_2$ est évidemment un élément d'ordre 2 du groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$.
   - Supposons $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = 2$. Soit $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ d'ordre 2. Alors
   $$(M - I_2)^2 = M^2 - 2M + I_2 = 2I_2 = 0.$$
   La matrice M est donc trigonalisable avec 1 pour seule valeur propre possible. Elle est donc semblable à $T_{1,2}(\lambda)$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$. De plus, la nullité de λ entraînerait $M = I_2$ ce qui est faux (M est d'ordre 2). D'après I.B.1.(a), M est une transvection.
   Réciproquement, soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ une transvection. Alors M est semblable à $T_{1,2}(1)$, et un calcul immédiat montre que $T_{1,2}(1)^2 = I_2$ puisque $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = 2$. Par suite, M^2 est semblable à I_2, donc égale à I_2. En revanche $M \neq I_2$ par définition d'une transvection. Enfin, $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ d'après I.B.1.(b). Ainsi M est un élément d'ordre 2 de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$.

   En conclusion : ou bien $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2$ et alors $-I_2$ est l'unique élément d'ordre 2 de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$; ou bien $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = 2$ et alors les éléments d'ordre 2 de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ sont les transvections de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

3. Montrons que le centralisateur de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est $\mathbb{K}^* I_n$.
   Il est déjà immédiat que toute matrice scalaire non nulle est dans ce centralisateur. Réciproquement, soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ commutant à tout élément de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$. Fixons $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. On a évidemment $\det(PT_{1,2}(1)P^{-1}) = \det T_{1,2}(1) = 1$ donc M commute à $PT_{1,2}(1)P^{-1}$ donc aussi à $PT_{1,2}(1)P^{-1} - I_n = PE_{1,2}P^{-1}$. Or, en notant e_1 le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^n$, on a évidemment $\mathrm{Im}\, E_{1,2} = \mathbb{K}e_1$, si bien que $\mathrm{Im}(PE_{1,2}P^{-1}) = \mathbb{K}(Pe_1)$. Notons enfin que pour tout vecteur non nul X de $\mathbb{K}^n$, on peut compléter X en une base de $\mathbb{K}^n$, et alors la matrice Q de cette base dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est inversible et vérifie $Qe_1 = X$. On a ainsi prouvé que M stabilise $\mathbb{K}X$ pour tout $X \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$. Classiquement, cela prouve que l'endomorphisme $X \mapsto MX$ est une homothétie, autrement dit M est scalaire. Enfin, M est évidemment non nulle car inversible. Nous avons donc établi le résultat annoncé.

   Enfin, le centre de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est l'intersection du centralisateur précédent avec $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$, à savoir l'ensemble des matrices scalaires de déterminant 1, autrement dit $\{\lambda.I_n \mid \lambda \in \mathbb{K}, \lambda^n = 1\}$.

4. (a) Posons $A := T_{2,1}(1)$ et $B := T_{1,2}(1)$, qui sont dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ d'après le préambule. Classiquement (A et B étant des matrices d'opérations élémentaires), on a $A^{-1} = T_{2,1}(-1)$ et $B^{-1} = T_{1,2}(-1)$. Calculant par blocs, on trouve alors
   $$ABA^{-1}B^{-1} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} ? & ? \\ -1 & ? \end{bmatrix} & [0] \\ [0] & I_{n-2} \end{bmatrix},$$
   matrice évidemment non scalaire appartenant par construction à $D(\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}))$.

   (b) Comme rappelé dans l'énoncé, $D\big(\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})\big)$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$. La question précédente montre qu'il contient un élément non scalaire. Comme $n \geqslant 3$ ou $\mathbb{K}$ possède au moins 5 éléments, le Théorème 0 montre que $D\big(\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})\big) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$.

I.C. Dénombrement de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$

1. Comme E est de dimension finie d, il existe un isomorphisme, donc une bijection, de $\mathbb{K}^d$ sur E. Or $\mathbb{K}^d$ est fini de cardinal q^d, donc il en est de même pour E.

2. (a) Se donner une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ revient à se donner une famille de n vecteurs de $\mathbb{K}^n$ (les vecteurs colonnes de la matrice). Une telle matrice est inversible si et seulement si la famille de ses colonnes est libre. Une famille $(x_1,\dots,x_n)$ à n vecteurs de $\mathbb{K}^n$ est libre si et seulement si $(x_1,\dots,x_k)$ est libre pour tout $k\in[\![1,n]\!]$. Par suite, une telle famille libre $(x_1,\dots,x_n)$ se construit (de manière unique) de proche en proche :
   - On choisit un premier vecteur non nul x_1 : il y a q^n-1 possibilités d'après la question précédente ;
   - Supposons, pour un $k\in[\![1,n-1]\!]$, avoir construit une famille libre $(x_1,\dots,x_k)$; on souhaite lui rajouter un vecteur x_{k+1} telle que $(x_1,\dots,x_k,x_{k+1})$ soit libre, ce qui revient à choisir arbitrairement x_{k+1} dans $E\setminus \mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_k)$; comme $(x_1,\dots,x_k)$ est libre, $\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_k)$ est de dimension k donc de cardinal q^k. Ainsi, il y a q^n-q^k possibilités pour choisir x_{k+1} dans $\mathbb{K}^n$ tel que $(x_1,\dots,x_k,x_{k+1})$ soit libre.

   Ce procédé itératif de construction montre que le nombre de familles libres à n vecteurs de $\mathbb{K}^n$ est $\prod_{k=0}^{n-1}(q^n-q^k)$. Par suite

$$|\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})|=\prod_{k=0}^{n-1}(q^n-q^k).$$

   (b) Le groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est, par définition, le noyau du morphisme $\det:\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})\to\mathbb{K}^*$. L'image de ce morphisme est $\mathbb{K}^*$ puisque $\det(\mathrm{Diag}(\lambda,1,\dots,1))=\lambda$ pour tout $\lambda\in\mathbb{K}^*$. Par suite,

$$|\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})|=\frac{|\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})|}{|\mathbb{K}^*|}=\frac{1}{q-1}\prod_{k=0}^{n-1}(q^n-q^k).$$

   (c) Comme $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est fini, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{L})$ l'est aussi (et de même cardinal). Or $\mathbb{L}$ s'injecte dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{L})$ via $\lambda\mapsto T_{1,2}(\lambda)$, si bien que $\mathbb{L}$ est également fini. Notons p et q les cardinaux respectifs de $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$. Pour $t\in[2,+\infty[$, posons

$$f(t):=\frac{1}{t-1}\prod_{k=0}^{n-1}(t^n-t^k).$$

   Notons que la fonction f est strictement croissante, donc injective, sur $[2,+\infty[$. En effet, en isolant le dernier terme du produit, on peut récrire

$$f:t\mapsto t^{n-1}\prod_{k=0}^{n-2}t^k(t^{n-k}-1),$$

   et f apparaît donc comme un produit de fonctions strictement croissantes et strictement positives sur $[2,+\infty[$. Comme $f(p)=f(q)$, on en déduit $p=q$. Ainsi $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ sont deux corps finis de même cardinal, donc ils sont isomorphes.

II. Le théorème 1 en caractéristique différente de 2

1. On sait que $\mathrm{Ker}\,\Psi$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$. Comme $n\geqslant 3$, le Théorème 0 indique que si $\mathrm{Ker}\,\Psi$ contient une matrice non scalaire, alors il est égal à $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$, ce qui prouve que Ψ est trivial. Puisque Ψ est non trivial, toute matrice de son noyau est donc scalaire.

2. (a) Les matrices

$$I_3,\quad C:=\mathrm{Diag}(1,-1,-1)\quad\text{et}\quad D:=\mathrm{Diag}(-1,1,-1)$$

   sont évidemment toutes dans $\mathrm{SL}_3(\mathbb{K})$ et ont pour carré I_3, autrement dit leur ordre divise 2. Elles sont bien toutes distinctes puisque $\mathrm{car}(\mathbb{K})\neq 2$.

(b) Soit $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{L})$ telle que $M^2 = I_2$. Alors M est d'ordre 1 ou 2 dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{L})$. On déduit de I.B.2 que $M = \pm I_2$.
Prenons trois matrices A, B et C vérifiant la condition du (a).
Alors $\Psi(A)^2 = \Psi(A^2) = \Psi(I_3) = I_2$ et de même $\Psi(B)^2 = I_2$ et $\Psi(C)^2 = I_2$. Or on vient de voir que l'équation $M^2 = I_2$ a au plus deux solutions dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{L})$. Par suite, deux des trois matrices $\Psi(A)$, $\Psi(B)$ et $\Psi(C)$ sont égales, ce qui répond à la question.

(c) Prenons deux matrices A et B vérifiant la condition précédente. La matrice $D := A^{-1}B$ est alors dans $\mathrm{Ker}\,\Psi$. Si D était scalaire, on aurait $B = \lambda.A$ pour un $\lambda \in \mathbb{K}$ et alors d'une part $\lambda^3 = 1$ en prenant le déterminant, et d'autre part $\lambda^2 = 1$ en élevant les matrices au carré, si bien que $\lambda = \dfrac{\lambda^3}{\lambda^2} = 1$ puis $B = A$, ce qui est absurde. Ainsi, D n'est pas scalaire et appartient à $\mathrm{Ker}\,\Psi$, la contraposée de II.1 assurant alors que Ψ est trivial.

3. Supposons temporairement que pour tout corps $\mathbb{L}'$ de caractéristique différente de 2 et sur lequel X^2+1 est scindé, tout morphisme de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathrm{SL}_{n-1}(\mathbb{L}')$ est trivial.
Introduisons un corps de décomposition $\mathbb{L}'$ de X^2+1 sur $\mathbb{L}$, si bien que X^2+1 est scindé sur $\mathbb{L}'$. En composant Ψ à gauche par l'injection naturelle de $\mathrm{SL}_{n-1}(\mathbb{L})$ dans $\mathrm{SL}_{n-1}(\mathbb{L}')$ (qui est évidemment un morphisme), on obtient un morphisme Ψ' de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathrm{SL}_{n-1}(\mathbb{L}')$, qui est trivial puisque $\mathrm{car}(\mathbb{L}') = \mathrm{car}(\mathbb{L})$ et $\mathrm{car}(\mathbb{L}') \neq 2$. Il s'ensuivrait que Ψ est trivial.
On ne perd donc pas de généralité à supposer que X^2+1 est scindé sur $\mathbb{L}$.

4. Soit $(p,q) \in [\![1, n-1]\!]^2$ tel que $p > q$. En particulier $2 \leqslant p \leqslant n-1$. Soit $\Phi : \mathrm{SL}_p(\mathbb{K}) \to \mathrm{SL}_q(\mathbb{L})$ un morphisme. Comme $q \leqslant p-1$, l'application

$$\theta : \begin{cases} \mathrm{SL}_q(\mathbb{L}) & \longrightarrow \mathrm{SL}_{p-1}(\mathbb{L}) \\ M & \longmapsto \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I_{p-1-q} \end{bmatrix} \end{cases}$$

est évidemment bien définie et évidemment un morphisme. Par suite, $\theta \circ \Phi$ est un morphisme de $\mathrm{SL}_p(\mathbb{K})$ dans $\mathrm{SL}_{p-1}(\mathbb{L})$, l'hypothèse de récurrence montrant alors qu'il est trivial. Par injectivité de θ, on en déduit que Φ est trivial.

5. (a) Un calcul immédiat montre successivement que

$$A^2 = \begin{bmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & -I_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A^4 = I_n.$$

En particulier A^2 n'est pas scalaire puisque $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2$. Posons $K := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Remarquons que

$$A^{-1} = A^{-2}A = \begin{bmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & -J_{\mathbb{K}} \end{bmatrix}$$

et que

$$K J_{\mathbb{K}} K^{-1} = -J_{\mathbb{K}}.$$

Comme $n \geqslant 3$, on peut poser

$$P := \begin{bmatrix} I_{n-3} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & K \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Alors $\det P = -\det K = 1$ et $PAP^{-1} = A^{-1}$, ce qui montre que A et A^{-1} sont conjuguées dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$.

(b) On trouve alors $\Psi(A)^4 = \Psi(A^4) = \Psi(I_n) = I_{n-1}$, si bien que $X^4 - 1$ annule Ψ. Or

$$X^4 - 1 = (X^2 - 1)(X^2 + 1) = (X^2 - 1)(X^2 - i^2) = (X - 1)(X + 1)(X - i)(X + i).$$

Le polynôme scindé $X^4 - 1$ est à racines simples : en effet, son polynôme dérivé est $4X^3$, dont 0 est l'unique racine puisque $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2$, alors que 0 n'est évidemment pas racine de $X^4 - 1$. Il s'ensuit que $\Psi(A)$ est diagonalisable à spectre inclus dans $\{1, -1, i, -i\}$. Cela fournit quatre entiers naturels p, q, r, s et une matrice $P \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{L})$ telle que

$$\Psi(A) = P \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & iI_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -iI_s \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Par suite

$$\Psi(A^{-1}) = \Psi(A)^{-1} = P \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -iI_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & iI_s \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Comme Ψ est un morphisme et A et A^{-1} sont conjuguées dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$, les matrices $\Psi(A)$ et $\Psi(A^{-1})$ sont conjuguées dans $\mathrm{SL}_{n-1}(\mathbb{L})$ et en particulier semblables. La comparaison des dimensions des sous-espaces propres pour la valeur propre i montre alors que $r = s$. Comme $\Psi(A)$ possède $n-1$ colonnes, on en déduit $p + q + 2r = n - 1$.

Comme $\Psi(A)$ est de déterminant 1, il vient $1 = (-1)^q\, i^r\, (-i)^r = (-1)^q (-1)^r (i^2)^r = (-1)^q$, et ainsi q est pair (on utilise là encore l'hypothèse $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2$).

Si $r = 0$, alors $\Psi(A)^2 = I_{n-1}$ et donc $A^2 \in \mathrm{Ker}\,\Psi$. Or A^2 est non scalaire et Ψ est non trivial, donc la question II.1 (ici $n \geqslant 4$) assure que A^2 ne peut appartenir à $\mathrm{Ker}\,\Psi$. On en déduit que $r \geqslant 1$.

(c) Soit $M \in \mathrm{SL}_{n-2}(\mathbb{K})$. Alors la matrice $N := \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}$ commute à A et appartient évidemment à $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$. Par suite, $\Psi(N)$ commute à $\Psi(A)$, et donc $P^{-1}\Psi(N)P$ commute à $P^{-1}\Psi(A)P$. Comme $1, -1, i, -i$ sont deux à deux distincts, le résultat de I.A.2 montre qu'il existe quatre matrices $\alpha(M) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{L})$, $\beta(M) \in \mathcal{M}_q(\mathbb{L})$, $\gamma(M) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{L})$ et $\delta(M) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{L})$ (définies de manière unique) telles que

$$P^{-1}\Psi(N)P = \begin{bmatrix} \alpha(M) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta(M) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma(M) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta(M) \end{bmatrix}$$

autrement dit

$$\Psi\left(\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}\right) = P \begin{bmatrix} \alpha(M) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta(M) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma(M) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta(M) \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Comme Ψ est à valeurs dans $\mathrm{SL}_{n-1}(\mathbb{L})$, on trouve par calcul du déterminant par blocs

$$\det\alpha(M)\det\beta(M)\det\gamma(M)\det\delta(M) = 1.$$

Par suite, $\alpha(M)$, $\beta(M)$, $\gamma(M)$ et $\delta(M)$ sont toutes inversibles. Compte tenu des règles de calcul sur les matrices diagonales par blocs, il est enfin immédiat que les fonctions α, β et δ et γ définies ainsi sur $\mathrm{SL}_{n-2}(\mathbb{K})$ constituent des morphismes respectivement vers $\mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$, $\mathrm{GL}_q(\mathbb{K})$, $\mathrm{GL}_r(\mathbb{K})$ et $\mathrm{GL}_r(\mathbb{K})$.

6. Comme α est un morphisme, il est clair qu'il envoie tout commutateur de $\mathrm{SL}_{n-2}(\mathbb{K})$ sur un commutateur de $\mathrm{GL}_p(\mathbb{L})$, et donc α envoie le groupe dérivé de $\mathrm{SL}_{n-2}(\mathbb{K})$ dans celui de $\mathrm{GL}_p(\mathbb{L})$. Or d'une part on sait que $D(\mathrm{SL}_{n-2}(\mathbb{K})) = \mathrm{SL}_{n-2}(\mathbb{K})$ car $n-2 \geqslant 3$ (voir I.B.4.(b)), et d'autre part le sous-groupe $\mathrm{SL}_p(\mathbb{L})$ contient évidemment tout commutateur de $\mathrm{GL}_p(\mathbb{L})$ (immédiat par multiplicativité du déterminant), donc il contient aussi $D(\mathrm{GL}_p(\mathbb{L}))$. Il s'ensuit que α est à valeurs dans $\mathrm{SL}_p(\mathbb{L})$. De même, β, γ et δ sont à valeurs respectivement dans $\mathrm{SL}_q(\mathbb{L})$, $\mathrm{SL}_r(\mathbb{L})$ et $\mathrm{SL}_r(\mathbb{L})$. Or $p \leqslant n-1-2r \leqslant n-3$, de même $q \leqslant n-3$, et $2r \leqslant n-1$ donne $r \leqslant \dfrac{n-1}{2} \leqslant n-3$ puisque $n \geqslant 5$. On déduit alors de la question II.4 que les morphismes α, β, γ et δ sont tous triviaux. Le choix de $M = \mathrm{Diag}(-1,-1,1,\dots,1)$ assure que $\begin{bmatrix} -I_2 & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{bmatrix}$ est dans le noyau de Ψ, et elle n'est pas scalaire puisque $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2$ (ce choix est possible car $n \geqslant 4$), ce qui contredit la non-trivialité de Ψ d'après II.1. Cela conclut le raisonnement par l'absurde dans le cas où $n \geqslant 5$.

7. On suppose maintenant $n = 4$.
On a donc $0 < 2r \leqslant 3$ d'où $r = 1$. Par suite $p + q = 1$. Puisque q est pair, la seule possibilité est $(p,q) = (1,0)$. Ainsi $p = r = 1$ et $q = 0$, et tous les morphismes α, β, γ et δ sont donc à valeurs dans $\mathbb{K}^*$ ou $\{1\}$. Ces groupes étant abéliens, l'image par α, β, γ et δ de n'importe quel commutateur est 1, et par suite les noyaux de ces morphismes contiennent tous $D(\mathrm{SL}_2(\mathbb{K}))$. Or ce dernier contient une matrice M_0 distincte de l'identité d'après I.B.4.(a). Par suite, $\begin{bmatrix} M_0 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}$ est dans le noyau de Ψ, bien qu'évidemment non scalaire. C'est impossible d'après II.1 car Ψ est supposée non triviale. Cette contradiction achève la démonstration de $\mathcal{H}_n$.
Ce raisonnement par récurrence, initialisé aux rangs 2 et 3, montre donc que $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 2$. Étant donné un entier naturel $p \geqslant 2$ et un entier $q \in [\![1, p-1]\!]$, en appliquant $\mathcal{H}_p$ puis II.4, on obtient que tout morphisme de $\mathrm{SL}_p(\mathbb{K})$ dans $\mathrm{SL}_q(\mathbb{L})$ est trivial, et ce quels que soient les corps $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ de caractéristique différente de 2.

III. Isomorphismes de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{L})$

III.A. Image d'une transvection par un isomorphisme

1. (a) Comme $\mathbb{K}$ est de caractéristique $p > 0$, on peut voir $\mathbb{K}[X]$ comme une $\mathbf{F}_p$-algèbre commutative. En appliquant l'endomorphisme de Frobenius $x \mapsto x^p$ de celle-ci, on trouve
$$(X-1)^p = X^p - 1^p = X^p - 1.$$
(b) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ une transvection. On sait depuis I.B.1.(b) que $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$. D'après I.B.1.(a), il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ tels que $M = PT_{1,2}(1)P^{-1}$, si bien que $M^p = PT_{1,2}(1)^pP^{-1}$. Par calcul classique sur les matrices d'opérations élémentaires $T_{1,2}(1)^p = I_n + (p.1)E_{1,2} = I_2$ puisque $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = p$. Ainsi $M^p = I_2$. Comme p est premier, l'ordre de M est 1 ou p, mais ce n'est pas 1 car $M \neq I_2$ (en effet $\mathrm{rg}(M - I_2) = 1$). Ainsi M est un élément d'ordre p de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$.
Réciproquement, soit M un élément d'ordre p de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$. Alors $X^p - 1 = (X-1)^p$ est annulateur scindé de M, avec 1 pour unique racine. On en déduit que M est semblable à $T_{1,2}(\lambda)$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$, et nécessairement $\lambda \neq 0$ sinon $M = I_2$, matrice d'ordre 1 dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$. En appliquant à nouveau I.B.1.(a), il s'ensuit que M est une transvection.
Ainsi, les transvections de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ sont les éléments d'ordre p de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$.

2. Comme A et PAP^{-1} sont semblables, elles ont même spectre, noté S.
Soit $\lambda \in S$. Pour tout $X \in \mathbb{K}^n$,
$$X \in E_\lambda(PAP^{-1}) \Leftrightarrow PAP^{-1}X = \lambda X \Leftrightarrow A(P^{-1}X) = \lambda P^{-1}X \Leftrightarrow P^{-1}X \in E_\lambda(A) \Leftrightarrow X \in PE_\lambda(A).$$
Ainsi, $E_\lambda(PAP^{-1}) = PE_\lambda(A)$ pour toute valeur propre λ de A.

3. (a) Montrons que
$$\mathscr{C} = \{\epsilon.T_{1,2}(\mu) \mid \epsilon \in \{-1,1\}, \mu \in \mathbb{K}\}.$$
Remarquons d'abord que $\mathscr{C}$ est l'intersection avec $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ du commutant de $T_{1,2}(\lambda)$. Comme $T_{1,2}(\lambda)$ n'est pas scalaire, I.A.4. montre que ce dernier est
$$\mathrm{Vect}(I_2, T_{1,2}(\lambda)) = \mathrm{Vect}(I_2, I_2 + \lambda.E_{1,2}) = \mathrm{Vect}(I_2, E_{1,2}),$$
car $\lambda \neq 0$. Ainsi $\mathscr{C}$ est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux identiques et de déterminant 1, ce qui donne immédiatement le résultat annoncé.

(b) Soit A dans $\mathscr{N}$. Alors $AT_{1,2}(1)A^{-1} \in \mathscr{C}$ et il existe donc $\epsilon \in \{-1,1\}$ et $\mu \in \mathbb{K}$ tels que $AT_{1,2}(1)A^{-1} = \epsilon T_{1,2}(\mu)$. La matrice $AT_{1,2}(1)A^{-1}$ est non scalaire (car c'est le cas de $T_{1,2}(1)$) et donc $\mu \neq 0$. Enfin, $\mathrm{Vect}(e_1)$ est l'unique droite propre pour $T_{1,2}(1)$, et de même pour $\epsilon T_{1,2}(\mu)$. On déduit de III.A.2 que $A\,\mathrm{Vect}(e_1) = \mathrm{Vect}(e_1)$, ce qui montre que A est triangulaire supérieure. Comme $\det A = 1$, on a nécessairement $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha^{-1} \end{bmatrix}$ pour un $\alpha \in \mathbb{K}^*$ et un $\beta \in \mathbb{K}$.

Réciproquement, soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}$. Considérons $A := \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha^{-1} \end{bmatrix}$, qui est évidemment dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$. Par les règles de calculs sur les matrices triangulaires supérieures, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha^{-1} & ? \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$ et donc, pour tout $\epsilon \in \{-1,1\}$ et tout $\mu \in \mathbb{K}$
$$A\big(\epsilon.(I_2 + \mu E_{1,2})\big)A^{-1} = \epsilon.\begin{bmatrix} \alpha\,\alpha^{-1} & ? \\ 0 & \alpha^{-1}\,\alpha \end{bmatrix} = \epsilon.\begin{bmatrix} 1 & ? \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathscr{C}.$$
Ainsi $A\mathscr{C}A^{-1} \subset \mathscr{C}$. Comme de même A^{-1} est triangulaire supérieure et dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$, on trouve $A^{-1}\mathscr{C}A \subset \mathscr{C}$, ce qui permet de conclure à l'égalité $A\mathscr{C}A^{-1} = \mathscr{C}$.
En conclusion, $\mathscr{N}$ est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures et de déterminant 1 de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

(c) D'après ce qui précède, les éléments de $\mathscr{N} \setminus \mathscr{C}$ sont les matrices de la forme $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha^{-1} \end{bmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0,1,-1\}$ et $\beta \in \mathbb{K}$ (de sorte que $\alpha \neq \alpha^{-1}$, autrement dit $\alpha^2 \neq 1$). Soit $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha^{-1} \end{bmatrix}$ une matrice quelconque de $\mathscr{N} \setminus \mathscr{C}$. Alors
$$A^2 = \begin{bmatrix} \alpha^2 & \beta(\alpha + \alpha^{-1}) \\ 0 & \alpha^{-2} \end{bmatrix},$$
si bien que
$$A^2 \text{ scalaire} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 = \alpha^{-2} \\ \beta(\alpha + \alpha^{-1}) = 0. \end{cases}$$
Or
$$\alpha^2 = \alpha^{-2} \Leftrightarrow \alpha^4 = 1 \Leftrightarrow \alpha^2 = \pm 1 \Leftrightarrow \alpha^2 = -1 \quad (\text{car } \alpha^2 \neq 1).$$
De plus, $\alpha^2 = -1$ implique $\alpha + \alpha^{-1} = 0$. Ainsi A^2 est scalaire si et seulement si $\alpha^2 = -1$.
Par suite, tout élément de $\mathscr{N} \setminus \mathscr{C}$ a un carré scalaire si et seulement si tout élément de $\mathbb{K} \setminus \{0,1,-1\}$ est racine de X^2+1. Comme $\mathbb{K}$ est un corps, le polynôme X^2+1 a au plus deux racines donc la condition précédente implique $\mathrm{Card}\,\mathbb{K} \leqslant 5$, et donc $\mathrm{Card}\,\mathbb{K} \in \{3,5\}$ puisque $\mathbb{K}$ n'est pas de caractéristique 2. Réciproquement, la condition est trivialement vérifiée lorsque $\mathbb{K}$ possède 3 ou 5 éléments, car dans ce cas il est isomorphe à $\mathbf{F}_3$ ou à $\mathbf{F}_5$, dans lesquels la vérification de la propriété est directe : en effet, tout élément de $\mathbf{F}_5$ est racine de $X^5 - X = X(X^2-1)(X^2+1)$, tandis que tout élément de $\mathbf{F}_3$ est racine de $X^3 - X = X(X^2-1)$.
En conclusion, tout élément de $\mathscr{N} \setminus \mathscr{C}$ a un carré scalaire si et seulement si $\mathrm{Card}\,\mathbb{K} \leqslant 5$.

4. (a) On a $\alpha \neq \alpha^{-1}$ car $\alpha \notin \{-1, 1\}$.
On peut alors déduire de I.A.2 que les matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ commutant à D sont les matrices diagonales. Ainsi $\mathscr{C}'$ est l'ensemble des matrices diagonales de déterminant 1, à savoir

$$\mathscr{C}' = \left\{ \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta^{-1} \end{bmatrix} \mid \beta \in \mathbb{K}^* \right\}.$$

(b) Posons $J := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, qui est évidemment dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ et d'inverse $J^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, et montrons que

$$\mathscr{N}' = \mathscr{C}' \cup J\mathscr{C}'.$$

Comme les matrices de $\mathscr{C}'$ commutent évidemment deux à deux, on trouve que $\mathscr{C}' \subset \mathscr{N}'$. Par ailleurs, pour tout $\beta \in \mathbb{K}^*$, un calcul immédiat montre que

$$J \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta^{-1} \end{bmatrix} J^{-1} = \begin{bmatrix} \beta^{-1} & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}.$$

Enfin $\beta \mapsto \beta^{-1}$ est une permutation de $\mathbb{K}^*$. On a donc bien $J\mathscr{C}'J^{-1} = \mathscr{C}'$, si bien que $J \in \mathscr{N}'$. Comme $\mathscr{N}'$ est un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$, on en déduit $\mathscr{C}' \cup J\mathscr{C}' \subset \mathscr{N}'$.
Montrons l'inclusion réciproque. Soit $A \in \mathscr{N}'$. Comme $\alpha \neq \alpha^{-1}$, la matrice D a exactement deux sous-espaces propres qui sont $\mathbb{K}e_1$ et $\mathbb{K}e_2$. Or ADA^{-1} appartient à $\mathscr{C}'$, elle est diagonale et non-scalaire (car D est non-scalaire). Ce qui précède s'applique à ADA^{-1} et montre que les sous-espaces propres de D sont $\mathbb{K}e_1$ et $\mathbb{K}e_2$. Or, d'après III.A.2., les sous-espaces propres de ADA^{-1} sont $\mathbb{K}Ae_1$ et $\mathbb{K}Ae_2$. Deux cas peuvent alors se produire :

- ou bien A stabilise $\mathbb{K}e_1$ et $\mathbb{K}e_2$, auquel cas elle est diagonale et donc $A \in \mathscr{C}'$ puisque $\det A = 1$ (cf. calcul de $\mathscr{C}'$) ;
- ou bien A échange $\mathbb{K}e_1$ et $\mathbb{K}e_2$ auquel cas elle est antidiagonale ; comme par ailleurs $\det A = 1$, on trouve alors $A = \begin{bmatrix} 0 & -\beta^{-1} \\ \beta & 0 \end{bmatrix}$ pour un β dans $\mathbb{K}^*$, si bien que $A = J \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta^{-1} \end{bmatrix}$, qui est bien une matrice de $J\mathscr{C}'$.

On a donc prouvé l'égalité

$$\mathscr{N}' = \mathscr{C}' \cup J\mathscr{C}', \quad \text{où } J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(c) Soit $A \in \mathscr{N}' \setminus \mathscr{C}'$. D'après ce qui précède, il existe β dans $\mathbb{K}^*$ tel que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\beta^{-1} \\ \beta & 0 \end{bmatrix}$$

d'où $A^2 = -I_2$ par un calcul immédiat. Comme $\mathscr{N}' \setminus \mathscr{C}'$ est évidemment non vide vu le calcul précédent, l'ensemble des carrés des éléments de $\mathscr{N}' \setminus \mathscr{C}'$ est $\{-I_2\}$.

5. (a) D'après le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme minimal μ de A divise le polynôme caractéristique de A et est donc lui-même irréductible (car il ne peut être constant). Puisque $\mathbb{K}[A]$ est isomorphe à l'anneau quotient $\mathbb{K}[X]/(\mu)$, ceci assure que $\mathbb{K}[A]$ est un corps. On sait que $\varphi : M \mapsto PMP^{-1}$ est un automorphisme de l'algèbre $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. Comme A engendre la sous-algèbre $\mathbb{K}[A]$, l'élément $\varphi(A)$ engendre la sous-algèbre $\varphi(\mathbb{K}[A])$. Comme $\varphi(A) \in \mathbb{K}[A]$ par hypothèses, on en déduit que $\varphi(\mathbb{K}[A]) \subset \mathbb{K}[A]$ et donc φ induit un endomorphisme de l'algèbre $\mathbb{K}[A]$. Cet endomorphisme est évidemment injectif, et c'est donc un automorphisme car $\mathbb{K}[A]$ est de dimension finie comme $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Ainsi $M \mapsto PMP^{-1}$ définit un automorphisme de l'algèbre $\mathbb{K}[A]$.

(b) Notons φ l'automorphisme de l'algèbre $\mathbb{K}[A]$ vu à la question précédente. Montrons que $\varphi^2(A) = A$. Pour cela, on note $X^2 + aX + b$ le polynôme minimal de A (il a une telle forme d'après la question précédente). Comme a et b sont dans $\mathbb{K}$, l'automorphisme de $\mathbb{K}$-algèbre φ doit permuter les racines de $X^2 + aX + b$ dans le corps $\mathbb{K}[A]$. Or la seconde racine (en comptant les ordres de multiplicité) de ce polynôme est nécessairement $A' := -aI_n - A$, qui est bien dans $\mathbb{K}[A]$. On en déduit qu'ou bien $\varphi(A) = A$, ou bien $\varphi(A) = A'$ et $\varphi(A') = A$. Dans tous les cas $\varphi^2(A) = A$, ce qui montre que P^2 commute à A.

(c) La matrice A n'est pas scalaire, sinon son polynôme caractéristique serait réductible. Ainsi (I_2, A) est libre, et l'hypothèse initiale sur P montre alors que (I_2, A, P) est libre. En utilisant la question précédente et la commutation (évidente) de P^2 avec P, on en déduit que le commutant de P^2 dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ est de dimension au moins 3. Le résultat de I.4. montre alors que P^2 est scalaire.

6. (a) Tirons d'abord un bilan de ce qui précède. Pour un élément g d'un groupe G, on définit la propriété :

($\mathscr{Q}$) : En notant $\mathscr{C}$ le centralisateur de g dans G, et $\mathscr{N}$ le normalisateur de $\mathscr{C}$ dans G, il existe dans $\mathscr{N} \setminus \mathscr{C}$ un élément dont le carré n'appartient pas à $\mathscr{Z}(G)$.

Vu la définition de cette propriété ainsi que la définition d'un centralisateur et d'un normalisateur et d'un centre, il va de soi que pour n'importe quel isomorphisme de groupes $f : G \to H$ et n'importe quel g dans G, on a l'équivalence :

$$g \text{ vérifie } \mathscr{Q} \quad \Leftrightarrow \quad f(g) \text{ vérifie } \mathscr{Q}.$$

Examinons le cas particulier du groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$. D'après I.B.3., les matrices scalaires de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ sont celles de son centre, la propriété $\mathscr{Q}$ s'exprimant donc, pour une matrice M de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$, comme suit : "en notant $\mathscr{C}$ le centralisateur de M dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$, et $\mathscr{N}$ le normalisateur de $\mathscr{C}$ dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$, il existe dans $\mathscr{N} \setminus \mathscr{C}$ un élément dont le carré est non scalaire."

Montrons :

(1) que si M vérifie ($\mathscr{Q}$), alors c'est une transvection ou l'opposé d'une transvection ;

(2) que la réciproque est vraie si $\mathbb{K}$ est infini.

En effet :

- Si une matrice M de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ a la propriété ($\mathscr{Q}$), alors c'est le cas pour toute matrice semblable à M (en effet, pour tout $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$, l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est un automorphisme du groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$).
- Pour toute matrice scalaire $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$, la propriété ($\mathscr{Q}$) est trivialement fausse car tout élément de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ centralise M.
- Soit alors $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ non scalaire.
  Si le polynôme caractéristique χ_M de M est irréductible sur $\mathbb{K}$, alors M n'est pas scalaire et son centralisateur dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ est donc $\mathbb{K}[M] \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$; la question III.A.5. montre alors que M ne vérifie pas ($\mathscr{Q}$).
  Supposons maintenant χ_M non irréductible sur $\mathbb{K}$: comme il est de degré 2, il est scindé sur $\mathbb{K}$. S'il est à racines simples, alors M est diagonalisable, et comme elle est de déterminant 1, elle est semblable à $\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{bmatrix}$ pour un α dans $\mathbb{K}^*$; de plus $\alpha \neq \pm 1$ car M n'est pas scalaire ; on déduit alors de la question III.A.4 que M ne vérifie pas ($\mathscr{Q}$).
  Supposons enfin χ_M scindé avec une unique racine α : nécessairement $\alpha^2 = \det M = 1$, donc $\alpha = \pm 1$. Alors M est trigonalisable, non scalaire, avec α comme unique valeur propre, et ainsi il existe un $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que M soit semblable à $T_{1,2}(\lambda)$ ou à $-T_{1,2}(\lambda)$. On a vu que $T_{1,2}(\lambda)$ vérifie ($\mathscr{Q}$) dès que $\mathbb{K}$ est infini. Il en est de même pour $-T_{1,2}(\lambda)$ car elle a évidemment le même centralisateur dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$.

Compte tenu de la caractérisation des transvections donnée en I.B.1.(a), les résultats (1) et (2) plus haut sont établis. On est maintenant en mesure de conclure :

- Supposons $\mathbb{K}$ infini. Soit $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ une transvection. Alors M vérifie $(\mathscr{Q})$, donc $\psi(M)$ aussi, ce qui montre que $\psi(M)$ est une transvection ou l'opposé d'une transvection.
- Supposons $\mathbb{K}$ fini. On déduit alors de I.C.2.(c) que $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ sont isomorphes, et donc qu'ils ont même caractéristique. Enfin ψ conserve l'ordre puisque c'est un isomorphisme de groupes, et le résultat de la question III.1 assure alors que ψ envoie toute transvection sur une transvection.

Dans tous les cas, pour toute transvection M de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$, on peut trouver une transvection M' de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{L})$ telle que $\psi(M) = \pm M'$.

(b) Soit $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ une transvection. D'après I.B.1.(a), il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ tel que $M = PT_{1,2}(1)P^{-1}$. Comme $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2$, un calcul immédiat donne $T_{1,2}(1/2)^2 = T_{1,2}(1)$ et donc $M = N^2$, où $N := PT_{1,2}(1/2)P^{-1}$ est une transvection car $\dfrac{1}{2} \neq 0$.
D'après la question précédente, il existe une transvection T de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{L})$ telle que $\psi(N) = \pm T$, et donc $\psi(M) = \psi(N)^2 = T^2$. À nouveau, on trouve $Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{L})$ telle que $T = QT_{1,2}(1)Q^{-1}$, et alors $T^2 = QT_{1,2}(2)Q^{-1}$ est une transvection d'après I.B.1.(a) puisque $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2$. Ainsi, ψ envoie toute transvection de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ sur une transvection de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{L})$.

III.B. Analyse des isomorphismes de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{L})$

1. (a) La matrice non-scalaire $T_{1,2}(1) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{L})$ admet 1 pour unique valeur propre et le sous-espace propre associé est évidemment de dimension 1. On déduit de I.B.1.(a) qu'il en est de même pour toute transvection T de $\mathscr{M}_2(\mathbb{L})$.
Notons respectivement D_1 et D_2 les droites propres de T_1 et T_2.
Supposons $D_1 = D_2$. Comme T_1 et T_2 stabilisent D_1, elles sont trigonalisables dans une base commune (on prend n'importe quelle base dont le premier vecteur est dans D_1), avec 1 pour unique valeur propre, si bien qu'il existe $(\lambda, \mu, Q) \in \mathbb{L}^2 \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{L})$ tel que $T_1 = QT_{1,2}(\lambda)Q^{-1}$ et $T_2 = QT_{1,2}(\mu)Q^{-1}$. Or $T_{1,2}(\lambda)$ et $T_{1,2}(\mu)$ sont dans $\mathbb{L}[E_{1,2}]$ donc commutent l'une à l'autre : ainsi T_1 et T_2 commutent, ce qui est interdit.
Ainsi $D_1 \neq D_2$ et donc $\mathbb{L}^2 = D_1 \oplus D_2$. En notant $\mathscr{B}$ une base adaptée à cette décomposition, et Q la matrice de $\mathscr{B}$ dans la base canonique, on en déduit que $Q^{-1}T_1Q$ et $Q^{-1}T_2Q$ sont respectivement triangulaire supérieure (car T_1 stabilise D_1) et triangulaire inférieure (car T_2 stabilise D_2), à coefficients diagonaux tous égaux à 1 car 1 est l'unique valeur propre de T_1 et T_2. En notant $P := Q^{-1}$, on a donc bien
$$PT_1P^{-1} \in \mathscr{E}_+(\mathbb{L}) \quad \text{et} \quad PT_2P^{-1} \in \mathscr{E}_-(\mathbb{L}).$$

(b) Posons $T_1 := \psi(T_{1,2}(1))$ et $T_2 := \psi(T_{2,1}(1))$. On a vu en I.B.3.(a) que $T_{1,2}(1)$ et $T_{2,1}(1)$ ne commutent pas, donc T_1 et T_2 non plus (ψ étant un isomorphisme de groupes). De plus III.A.6.(c) montre que T_1 et T_2 sont des transvections. La question précédente fournit donc une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{L})$ telle que
$$PT_1P^{-1} \in \mathscr{E}_+(\mathbb{L}) \quad \text{et} \quad PT_2P^{-1} \in \mathscr{E}_-(\mathbb{L}).$$
Alors $\psi_1 := \varphi_P \circ \psi$ est un isomorphisme de groupes (composé de deux telles fonctions) vérifiant $\psi_1(T_{1,2}(1)) \in \mathscr{E}_+(\mathbb{L})$ et $\psi_1(T_{2,1}(1)) \in \mathscr{E}_-(\mathbb{L})$. Autrement dit, par injectivité de ψ_1, on dispose de deux scalaires λ et μ dans $\mathbb{L}^*$ tels que
$$\psi_1(T_{1,2}(1)) = T_{1,2}(\lambda) \quad \text{et} \quad \psi_1(T_{2,1}(1)) = T_{2,1}(\mu).$$
Fixons enfin α dans $\mathbb{K}^*$. On a vu en III.A.3.(a) que le centralisateur de $T_{1,2}(\alpha)$ dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures avec unique coefficient diagonal, lequel appartient à $\{1, -1\}$. Ainsi $\mathscr{E}_+(\mathbb{K})$ est constitué de I_2 et des transvections commutant avec $T_{1,2}(\alpha)$. De même $\mathscr{E}_-(\mathbb{K})$ est constitué de I_2 et des transvections commutant avec $T_{2,1}(\alpha)$ (on peut par

exemple le déduire de ce qui précède en appliquant l'anti-automorphisme $M \mapsto {}^tM$ de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$). La même caractérisation vaut dans $\mathbb{L}$. Or III.A.6.(c) appliqué à ψ_1 et ψ_1^{-1} montre que ψ_1 envoie l'ensemble des transvections de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ sur l'ensemble des transvections de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{L})$, et enfin ψ_1 conserve la commutation (et la non-commutation) car c'est un isomorphisme de groupes. Vu ce qui précède, on en déduit :

$$\psi_1(\mathscr{E}_+(\mathbb{K})) = \mathscr{E}_+(\mathbb{L}) \quad \text{et} \quad \psi_1(\mathscr{E}_-(\mathbb{K})) = \mathscr{E}_-(\mathbb{L}). \tag{3.2}$$

2. (a) Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Posons $A := \begin{bmatrix} 0 & -\lambda^{-1} \\ \lambda & 0 \end{bmatrix}$, si bien que $\det A = 1$ et $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda^{-1} \\ -\lambda & 0 \end{bmatrix}$. Un calcul direct montre alors que, pour tout $\mu \in \mathbb{K}$,

$$AT_{1,2}(\mu)A^{-1} = T_{2,1}(-\lambda^2\mu) \quad \text{et} \quad AT_{2,1}(\mu)A^{-1} = T_{1,2}(-\lambda^{-2}\mu),$$

ce qui donne $A\mathscr{E}_+(\mathbb{K})A^{-1} = \mathscr{E}_-(\mathbb{K})$ et $A\mathscr{E}_-(\mathbb{K})A^{-1} = \mathscr{E}_+(\mathbb{K})$ car $\mu \mapsto -\lambda^2\mu$ et $\mu \mapsto -\lambda^{-2}\mu$ sont évidemment des permutations de $\mathbb{K}$.

Réciproquement, soit $Q \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ telle que $Q\mathscr{E}_+(\mathbb{K})Q^{-1} = \mathscr{E}_-(\mathbb{K})$ et $Q\mathscr{E}_-(\mathbb{K})Q^{-1} = \mathscr{E}_+(\mathbb{K})$. En particulier, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ tel que $QT_{1,2}(1)Q^{-1} = T_{2,1}(\lambda)$ et $QT_{2,1}(1)Q^{-1} = T_{1,2}(\mu)$. Comme $T_{1,2}(1)$ et $T_{2,1}(1)$ ne sont pas scalaires, on a $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$. Par suite, Q envoie les sous-espaces propres de $T_{1,2}(1)$ sur ceux de $T_{2,1}(\lambda)$ autrement dit $Q\mathrm{Vect}(e_1) = \mathrm{Vect}(e_2)$, et Q envoie les sous-espaces propres de $T_{2,1}(1)$ sur ceux de $T_{1,2}(\mu)$ autrement dit $Q\mathrm{Vect}(e_2) = \mathrm{Vect}(e_1)$. Ceci montre que Q est antidiagonale. Par ailleurs, $\det Q = 1$, d'où l'on tire un $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $Q = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda^{-1} \\ \lambda & 0 \end{bmatrix}$. Ainsi, les matrices $Q \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ vérifiant $Q\mathscr{E}_+(\mathbb{K})Q^{-1} = \mathscr{E}_-(\mathbb{K})$ et $Q\mathscr{E}_-(\mathbb{K})Q^{-1} = \mathscr{E}_+(\mathbb{K})$ sont les matrices de la forme $\begin{bmatrix} 0 & -\lambda^{-1} \\ \lambda & 0 \end{bmatrix}$ pour un $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

(b) La caractérisation précédente vaut évidemment pour $\mathbb{L}$ en lieu et place de $\mathbb{K}$. En particulier $J_{\mathbb{K}}$ vérifie la condition précédente pour le corps $\mathbb{K}$ et donc

$$\begin{aligned}\psi_1(J_{\mathbb{K}})\mathscr{E}_+(\mathbb{L})\psi_1(J_{\mathbb{K}})^{-1} &= \psi_1(J_{\mathbb{K}})\psi_1(\mathscr{E}_+(\mathbb{K}))\psi_1(J_{\mathbb{K}})^{-1} \\ &= \psi_1\big(J_{\mathbb{K}}\mathscr{E}_+(\mathbb{K})J_{\mathbb{K}}^{-1}\big) = \psi_1(\mathscr{E}_-(\mathbb{K})) = \mathscr{E}_-(\mathbb{L}).\end{aligned}$$

On prouve de même que $\psi_1(J_{\mathbb{K}})\mathscr{E}_-(\mathbb{L})\psi_1(J_{\mathbb{K}})^{-1} = \mathscr{E}_+(\mathbb{L})$. On déduit alors de la caractérisation précédente qu'il existe un λ dans $\mathbb{L}^*$ tel que :

$$\psi_1(J_{\mathbb{K}}) = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda^{-1} \\ \lambda & 0 \end{bmatrix}.$$

(c) Comme $\lambda \neq 0$, la matrice P_2 est évidemment inversible d'inverse $P_2^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Un calcul immédiat montre que $P_2\psi_1(J_{\mathbb{K}})P_2^{-1} = J_{\mathbb{L}}$ autrement dit $\psi_2(J_{\mathbb{K}}) = J_{\mathbb{L}}$. De plus, pour tout $\alpha \in \mathbb{L}$,

$$P_2T_{1,2}(\alpha)P_2^{-1} = T_{1,2}(\lambda\alpha) \quad \text{et} \quad P_2T_{2,1}(\alpha)P_2^{-1} = T_{2,1}(\lambda^{-1}\alpha)$$

d'où l'on tire $\varphi_{P_2}(\mathscr{E}_+(\mathbb{L})) = \mathscr{E}_+(\mathbb{L})$ et $\varphi_{P_2}(\mathscr{E}_-(\mathbb{L})) = \mathscr{E}_-(\mathbb{L})$. Comme ψ_1 vérifie (3.2), on en déduit que ψ_2 vérifie aussi (3.2).

3. (a) Soit $M \in \mathscr{D}_{\mathbb{K}}$, que l'on écrit $M = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}$. Alors $M = J_{\mathbb{K}} \times N$ où $N := \begin{bmatrix} 0 & (-\lambda)^{-1} \\ -\lambda & 0 \end{bmatrix}$. On note que N vérifie la propriété du 2.(a), donc le même raisonnement qu'en 2.(b) montre que $\psi_2(N) = \begin{bmatrix} 0 & -\mu^{-1} \\ \mu & 0 \end{bmatrix}$ pour un μ dans $\mathbb{L}^*$ (noter que ψ_2 vérifie encore (1)). Comme $\psi_2(J_{\mathbb{K}}) = J_{\mathbb{L}}$, on en déduit

$$\psi_2(M) = J_{\mathbb{L}} \times \begin{bmatrix} 0 & -\mu^{-1} \\ \mu & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu & 0 \\ 0 & \mu^{-1} \end{bmatrix} \in \mathscr{D}_{\mathbb{L}}.$$

Ainsi $\psi_2(\mathscr{D}_{\mathbb{L}}) \subset \mathscr{D}_{\mathbb{K}}$. Le même raisonnement appliqué à ψ_2^{-1} montre que $\psi_2^{-1}(\mathscr{D}_{\mathbb{L}}) \subset \mathscr{D}_{\mathbb{K}}$. Comme ψ_2 est injective, elle induit une bijection de $\mathscr{D}_{\mathbb{K}}$ sur $\mathscr{D}_{\mathbb{L}}$.

(b) On vérifie aisément que $\theta_{\mathbb{K}} : \lambda \in \mathbb{K}^* \mapsto \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}$ définit un morphisme injectif de $\mathbb{K}^*$ dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ dont l'image est $\mathscr{D}_{\mathbb{K}}$. En particulier, $\mathscr{D}_{\mathbb{K}}$ est un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$. On définit de même $\theta_{\mathbb{L}}$ et on obtient que $\mathscr{D}_{\mathbb{L}}$ est un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{L})$. La question précédente montre que ψ_2 induit un isomorphisme de $\mathscr{D}_{\mathbb{K}}$ sur $\mathscr{D}_{\mathbb{L}}$. Par composition $\beta := \theta_{\mathbb{L}}^{-1} \circ (\psi_2)_{|\mathscr{D}_{\mathbb{K}}} \circ \theta_{\mathbb{K}}$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}^*$ sur $\mathbb{L}^*$, qui par construction vérifie :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}^*, \; \psi_2\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \beta(\lambda) & 0 \\ 0 & \beta(\lambda)^{-1} \end{bmatrix}.$$

4. À nouveau, on vérifie que $\eta_{\mathbb{K}} : x \in \mathbb{K} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ définit un morphisme injectif de $(\mathbb{K}, +)$ dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ dont l'image est $\mathscr{E}_+(\mathbb{K})$. En particulier $\mathscr{E}_+(\mathbb{K})$ est un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$. On définit de même $\eta_{\mathbb{L}}$ et on obtient que $\mathscr{E}_+(\mathbb{L})$ est un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{L})$. La condition (3.2) et l'injectivité de ψ_2 montrent que ψ_2 induit un isomorphisme de $\mathscr{E}_+(\mathbb{K})$ sur $\mathscr{E}_+(\mathbb{L})$. Par composition $\alpha := \eta_{\mathbb{L}}^{-1} \circ (\psi_2)_{|\mathscr{E}_+(\mathbb{K})} \circ \eta_{\mathbb{K}}$ est un isomorphisme de $(\mathbb{K}, +)$ sur $(\mathbb{L}, +)$, qui par construction vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \; \psi_2\left(\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha(x) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Soit $x \in \mathbb{K}$. Un calcul élémentaire montre que $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix} = J_{\mathbb{K}} \begin{bmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} J_{\mathbb{K}}^{-1}$, donc

$$\psi_2\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix}\right) = \psi(J_{\mathbb{K}})\psi_2\left(\begin{bmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\psi(J_{\mathbb{K}})^{-1} = J_{\mathbb{L}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha(-x) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} J_{\mathbb{L}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha(-x) & 1 \end{bmatrix}.$$

Or $-\alpha(-x) = \alpha(x)$ puisque α est un morphisme de groupes. Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{K}, \; \psi_2\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha(x) & 1 \end{bmatrix}.$$

5. (a) On pose $A := \begin{bmatrix} -c & 0 \\ 0 & -c^{-1} \end{bmatrix}$, qui appartient à $\mathscr{D}_2(\mathbb{K})$, si bien que

$$A^{-1} M J_{\mathbb{K}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -ac^{-1} \\ dc & ? \end{bmatrix}.$$

Par suite

$$T_{2,1}(dc)^{-1} A^{-1} M J_{\mathbb{K}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -ac^{-1} \\ 0 & ? \end{bmatrix},$$

et cette dernière matrice, produit de matrices de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$, appartient elle-même à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ donc son coefficient en position $(2,2)$ est 1. Ainsi,

$$T_{2,1}(dc)^{-1} A^{-1} M J_{\mathbb{K}}^{-1} = T_{1,2}(-ac^{-1}).$$

Finalement

$$M = A\, T_{2,1}(dc)\, T_{1,2}(-ac^{-1}) J_{\mathbb{K}} \quad \text{avec } A = \begin{bmatrix} -c & 0 \\ 0 & -c^{-1} \end{bmatrix}.$$

(b) Comme α est un morphisme de groupes, on a $\alpha(0) = 0 = \beta(0)$.
Soit $x \in \mathbb{K}^*$. En appliquant la question précédente, on trouve deux matrices B et C respectivement de $\mathscr{E}_-(\mathbb{K})$ et $\mathscr{E}_+(\mathbb{K})$ telles que

$$T_{1,2}(-x) = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{bmatrix} \times B\,C\,J_{\mathbb{K}}.$$

En appliquant ψ_2, on déduit de la propriété (3.2) qu'il existe B' et C', respectivement dans $\mathscr{E}_-(\mathbb{K})$ et $\mathscr{E}_+(\mathbb{K})$, telles que

$$\psi_2(T_{1,2}(-x)) = \begin{bmatrix} \beta(x) & 0 \\ 0 & \beta(x)^{-1} \end{bmatrix} B'\,C'\,J_{\mathbb{L}}.$$

On voit que le coefficient en position $(1,1)$ de $B'C'$ est 1, si bien que celui en position $(1,2)$ de $\psi_2(T_{1,2}(-x))$ est $-\beta(x)$. Or $\psi_2(T_{1,2}(-x)) = T_{1,2}(\alpha(-x))$, et comme α est un endomorphisme, on en déduit

$$\alpha(x) = -\alpha(-x) = \beta(x).$$

On a donc prouvé que $\beta = \alpha$.

6. On déduit de ce qui précède que α est un isomorphisme d'anneaux de $\mathbb{K}$ sur $\mathbb{L}$. En effet, c'est déjà une bijection et un isomorphisme de groupes, et $\alpha(1) = \beta(1) = 1$.
De plus, la propriété $\forall (x,y) \in \mathbb{K}^2,\ \alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y)$ est évidente sur $(\mathbb{K}^*)^2$ car $\alpha = \beta$, et se déduit de $\alpha(0) = 0$ lorsque x ou y est nul.
On sait alors que $M \mapsto M^\alpha$ définit un isomorphisme de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{L})$. Vu la définition de α, ce morphisme coÔncide avec ψ_2 sur $\mathscr{E}_+(\mathbb{K}) \cup \mathscr{E}_-(\mathbb{K})$, qui est une partie génératrice de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ d'après le résultat admis en préambule. On en déduit :

$$\forall M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{K}),\ \psi_2(M) = M^\alpha$$

autrement dit

$$\forall M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{K}),\ P_2 P_1 \psi(M) P_1^{-1} P_2^{-1} = M^\alpha$$

et ainsi la matrice $Q := (P_2 P_1)^{-1}$ est dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{L})$ et vérifie

$$\forall M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{K}),\ \psi(M) = Q M^\alpha Q^{-1}.$$

C'est le résultat attendu.

IV. Le théorème 2 en caractéristique différente de 2

1. Si $m > n$, alors le théorème 1 - démontré en partie II pour le cas en présence - prouve que Ψ est trivial, ce qui est absurde. On montre de même l'impossibilité d'avoir $n > m$ en remarquant que Ψ^{-1} est un isomorphisme de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{L})$ sur $\mathrm{SL}_m(\mathbb{K})$. Ainsi $m = n$.
Par suite, si $\mathbb{K}$ est fini, alors $\mathbb{L}$ lui est isomorphe (on applique I.C.2.(c)). Le même résultat s'obtient si l'on suppose la finitude de $\mathbb{L}$, en utilisant l'isomorphisme Ψ^{-1}.
Ainsi, $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ sont isomorphes dès que l'un de ces corps est fini.

2. Remarquons que $S^2 = I_n$, donc $\psi(S)^2 = \psi(S^2) = \psi(I_n) = I_n$. Comme $\mathbb{L}$ n'est pas de caractéristique 2, $\psi(S)$ représente une symétrie vectorielle de $\mathbb{L}^n$, ce qui fournit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{L})$ et un couple $(k,\ell) \in \mathbf{N}^2$ tels que $k + \ell = n$ et

$$\psi(S) = P \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_\ell \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Notons que S n'est pas scalaire (car $n \geqslant 3$), donc pas dans le centre de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ (cf. I.B.3) ; comme Ψ est un isomorphisme, $\Psi(S)$ n'est pas dans le centre de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{L})$, donc il est distinct de I_n et de $-I_n$. Ceci assure que $k > 0$ et $\ell > 0$.

3. D'après I.A.2, les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ commutant à S sont les matrices de la forme
$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \quad \text{avec } (A,B) \in \mathscr{M}_{n-2}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_2(\mathbb{K}).$$
Une telle matrice appartient à $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $\det(A)\det(B) = 1$.
L'application $(A,B) \mapsto \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ définit alors clairement un isomorphisme du groupe $G_{n-2,2}(\mathbb{K})$ sur le centralisateur de S dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ (ce dernier étant noté $\mathscr{Z}(S)$). On montre de même que le centralisateur de $S' := \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_\ell \end{bmatrix}$ dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{L})$ est isomorphe à $G_{k,\ell}(\mathbb{L})$. Enfin, $M \mapsto P^{-1}\psi(M)P$ définit un isomorphisme de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathrm{SL}_n(\mathbb{L})$ envoyant S sur S', et il induit donc un isomorphisme de $\mathscr{Z}(S)$ sur $\mathscr{Z}(S')$. Par composition, on en déduit l'existence d'un isomorphisme du groupe $G_{n-2,2}(\mathbb{K})$ sur le groupe $G_{k,\ell}(\mathbb{L})$.

4. Soit $(a,b) \in (\mathbf{N}^*)^2$ tel que $a+b=n$. Montrons que le groupe dérivé de $G_{a,b}(\mathbb{K})$ est $\mathrm{SL}_a(\mathbb{K}) \times \mathrm{SL}_b(\mathbb{K})$.
   - L'application $(P,Q) \mapsto (\det P, \det Q)$ définit clairement un morphisme de $G_{a,b}(\mathbb{K})$ dans le groupe abélien $\mathbb{K}^* \times \mathbb{K}^*$, et son noyau contient donc tout commutateur de $G_{a,b}(\mathbb{K})$. Par suite,
   $$D\big(G_{a,b}(\mathbb{K})\big) \subset \mathrm{SL}_a(\mathbb{K}) \times \mathrm{SL}_b(\mathbb{K}).$$
   - L'application $P \mapsto (P, I_b)$ définit clairement un morphisme de $\mathrm{SL}_a(\mathbb{K})$ dans $G_{a,b}(\mathbb{K})$. Celui-ci induit donc un morphisme entre leurs groupes dérivés. Or $D(\mathrm{SL}_a(\mathbb{K})) = \mathrm{SL}_a(\mathbb{K})$ puisque $\mathbb{K}$ est infini (cf. I.B.4.(b), le cas $a=1$ étant trivial). Ainsi $D(G_{a,b}(\mathbb{K}))$ contient $\mathrm{SL}_a(\mathbb{K}) \times \{I_b\}$, et on montre de même qu'il contient $\{I_a\} \times \mathrm{SL}_b(\mathbb{K})$. Comme $D\big(G_{a,b}(\mathbb{K})\big)$ est un groupe, on en déduit
   $$\mathrm{SL}_a(\mathbb{K}) \times \mathrm{SL}_b(\mathbb{K}) \subset D\big(G_{a,b}(\mathbb{K})\big).$$

   Ainsi $D\big(G_{a,b}(\mathbb{K})\big) = \mathrm{SL}_a(\mathbb{K}) \times \mathrm{SL}_b(\mathbb{K})$, et de même pour le corps $\mathbb{L}$. L'isomorphisme donné par la question précédente induit alors un isomorphisme entre les groupes dérivés respectifs de $G_{n-2,2}(\mathbb{K})$ et $G_{k,\ell}(\mathbb{L})$, autrement dit entre $\mathrm{SL}_{n-2}(\mathbb{K}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ et $\mathrm{SL}_k(\mathbb{L}) \times \mathrm{SL}_\ell(\mathbb{L})$.

5. Si $n=3$, le résultat est immédiat car k et ℓ sont des entiers naturels non nuls de somme 3. On suppose donc $n \geqslant 4$. Fixons un isomorphisme $\Phi : \mathrm{SL}_{n-2}(\mathbb{K}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{K}) \to \mathrm{SL}_k(\mathbb{L}) \times \mathrm{SL}_\ell(\mathbb{L})$,
   - Supposons $k = n-1$. Alors $\mathrm{SL}_\ell(\mathbb{L}) = \{1\}$ et donc $\Phi^{-1} : \mathrm{SL}_{n-1}(\mathbb{L}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{K}) \times \mathrm{SL}_{n-2}(\mathbb{K})$ est un isomorphisme. Comme $n \geqslant 4$, on a $n-1 > 2$, et évidemment $n-1 > n-2$: le théorème 1 montre alors que les composantes de Φ^{-1} sont triviales. Ainsi Φ^{-1} est trivial, ce qui est absurde.
   - De même, l'hypothèse $\ell = n-1$ conduit à une contradiction.
   - Supposons enfin $k < n-2$ et $\ell < n-2$. Alors $\gamma : M \mapsto \Phi(M, I_2)$ définit un morphisme injectif de $\mathrm{SL}_{n-2}(\mathbb{K})$ dans $\mathrm{SL}_k(\mathbb{L}) \times \mathrm{SL}_\ell(\mathbb{L})$. Comme $k < n-2$ et $\ell < n-2$, le théorème 1 appliqué aux composantes de γ montre que γ est trivial, ce qui est absurde.

   Ainsi, l'un des entiers k ou ℓ vaut $n-2$, l'autre valant alors 2 puisque $k+\ell = n$.

6. Étant donné deux groupes G et H, les groupes $G \times H$ et $H \times G$ sont isomorphes (via $(g,h) \mapsto (h,g)$). On dispose donc d'un isomorphisme Φ de $\mathrm{SL}_{n-2}(\mathbb{K}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ sur $\mathrm{SL}_{n-2}(\mathbb{L}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{L})$. Si $n=3$, Ψ peut être vu comme un isomorphisme de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{L})$.
Supposons maintenant $n \geqslant 5$. En notant α et β les composantes du morphisme $M \mapsto \Psi(M, I_2)$, on déduit du théorème 1 que β est trivial (car $n-2 > 2$). Ainsi Ψ envoie $\mathrm{SL}_{n-2}(\mathbb{K}) \times \{I_2\}$ dans $\mathrm{SL}_{n-2}(\mathbb{L}) \times \{I_2\}$. En appliquant le même raisonnement à Ψ^{-1}, on en déduit que Ψ induit un isomorphisme de $\mathrm{SL}_{n-2}(\mathbb{K}) \times \{I_2\}$ sur $\mathrm{SL}_{n-2}(\mathbb{L}) \times \{I_2\}$. En passant au quotient, on en déduit un isomorphisme de $(\mathrm{SL}_{n-2}(\mathbb{K}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{K}))/(\mathrm{SL}_{n-2}(\mathbb{K}) \times \{I_2\})$ sur $(\mathrm{SL}_{n-2}(\mathbb{L}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{L}))/(\mathrm{SL}_{n-2}(\mathbb{L}) \times \{I_2\})$. Ces deux groupes sont respectivement isomorphes à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ et $\mathrm{SL}_2(\mathbb{L})$, d'où un isomorphisme entre ces derniers.

7. On introduit les projections canoniques π_1 et π_2 de $\mathrm{SL}_p(\mathbb{K}) \times \mathrm{SL}_p(\mathbb{K})$ sur $\mathrm{SL}_p(\mathbb{K})$, et les sous-groupes $G_1 := \pi_1(G)$ et $G_2 := \pi_2(G)$ de $\mathrm{SL}_p(\mathbb{K})$. Ce sont des sous-groupes distingués de $\mathrm{SL}_p(\mathbb{K})$ car π_1 et π_2 sont

des morphismes surjectifs. Si G_1 et G_2 ne contenaient que des matrices scalaires, G serait abélien. Quitte à remplacer G par $T(G)$, où T est l'automorphisme d'échange $(g,h) \mapsto (h,g)$, *on ne perd pas de généralité à supposer que G_1 contient une matrice non scalaire, ce que l'on fera dans la suite.* Comme $\mathbb{K}$ est infini et $p \geqslant 2$, il s'ensuit que $G_1 = \mathrm{SL}_p(\mathbb{K})$.

- Montrons qu'alors G contient $\mathrm{SL}_p(\mathbb{K}) \times \{I_p\}$. Soit $A \in \mathrm{SL}_p(\mathbb{K})$. On fixe $B \in \mathrm{SL}_p(\mathbb{K})$ telle que $(A,B) \in G$. Soit $P \in \mathrm{SL}_p(\mathbb{K})$. Alors
$$(P, I_p)(A,B)(P,I_p)^{-1}(A,B)^{-1} = (PAP^{-1}A^{-1}, I_p).$$
Comme G est distingué et contient (A,B), on en déduit qu'il contient tout élément de la forme (M, I_p) avec M commutateur de $\mathrm{SL}_p(\mathbb{K})$. Par suite, G contient $D(\mathrm{SL}_p(\mathbb{K})) \times \{I_p\}$, soit $\mathrm{SL}_p(\mathbb{K}) \times \{I_p\}$ d'après I.B.4.(b).
- Si de plus G_2 contenait une matrice non scalaire, on prouverait de même que $\{I_p\} \times \mathrm{SL}_p(\mathbb{K}) \subset G$, et finalement G contiendrait $\mathrm{SL}_p(\mathbb{K}) \times \mathrm{SL}_p(\mathbb{K})$, ce qui est interdit par hypothèses.
Ainsi, $G_2 \subset \mathscr{Z}(\mathrm{SL}_p(\mathbb{K}))$.
- L'inclusion $G \subset G_1 \times G_2$ est immédiate, et l'inclusion réciproque est vraie gr,ce à la définition de G_2 car on sait déjà que le groupe G contient $G_1 \times \{I_p\}$.

Ainsi $G = \mathrm{SL}_p(\mathbb{K}) \times G'$, où $G' := G_2$ est un sous-groupe de $\mathscr{Z}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{K}))$. Comme en IV.4, on démontre alors que $D(G) = D(\mathrm{SL}_p(\mathbb{K})) \times D(G') = \mathrm{SL}_p(\mathbb{K}) \times \{I_p\}$ car G' est abélien. Ainsi $D(G)$ est isomorphe à $\mathrm{SL}_p(\mathbb{K})$.

8. Supposons $n = 4$. On a construit en IV.5 un isomorphisme Φ de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{L}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{L})$ Le sous-groupe $G := \Phi(\mathrm{SL}_2(\mathbb{K}) \times \{I_2\})$ vérifie clairement les hypothèses de la question précédente car c'est l'image d'un tel sous-groupe par un isomorphisme. On déduit alors de Φ un isomorphisme de $D\big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{K}) \times \{I_2\}\big)$ sur $D(G)$, lesquels sont isomorphes respectivement à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ et à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{L})$ d'après la question précédente. On a ainsi établi un isomorphisme entre $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ et $\mathrm{SL}_2(\mathbb{L})$. Cela achève la démonstration car seul le cas $n = 4$ restait à étudier (le cas $n = 2$, qui a été écarté à partir de la question 2, est trivial). Le théorème 2 est donc établi quels que soient les corps $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ de caractéristique différente de 2.

Chapitre 4

Épreuve écrite d'analyse et probabilités

4.1 Énoncé

Rappels et notations.

Les calculatrices et documents sont interdits. La qualité de la rédaction sera un facteur important d'appréciation des copies. On invite donc le candidat à produire des raisonnements clairs, complets et concis. Le candidat peut utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes ; il veillera toutefois à préciser la référence du résultat utilisé.

L'objet de ce problème est l'étude de quelques propriétés des espaces de Müntz (en tant qu'espaces de Banach) et des fonctions qui appartiennent à ces espaces.

Le problème est constitué de six parties.

La première partie établit divers résultats préliminaires utilisés à partir de la troisième partie. La seconde partie est indépendante de la première.
La troisième partie utilise les deux premières parties. La partie IV est indépendante des parties II et III, exceptée la question 3.a. La partie V n'utilise que des définitions vues dans la partie I. Dans la partie VI, seules les deux dernières questions utilisent des résultats des parties précédentes.

Dans tout le sujet on note $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers positifs ou nuls, $\mathbf{N}^*$ l'ensemble des entiers strictement positifs, $\mathbf{Z}$ l'anneau des entiers relatifs, $\mathbf{R}$ celui des nombres réels et $\mathbf{C}$ celui des complexes muni de sa topologie usuelle.

Dans tout le sujet on considère des $\mathbf{C}$-espaces vectoriels.

L'espace $C([0,1])$ est l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs complexes. Il est muni de la norme uniforme : $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$.
On notera $C(\mathbb{T})$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbf{R}$, à valeurs complexes, qui sont 2π-périodiques. On munit alors cet espace de la norme $\|f\|_{\mathbb{T}} = \sup_{t\in[-\pi,\pi]} |f(t)| = \sup_{t\in\mathbf{R}} |f(t)|$.

Pour $k \in \mathbf{Z}$, on définit la fonction e_k sur $\mathbf{R}$ par $\mathrm{e}_k(t) = \mathrm{e}^{ikt}$. On note alors $\mathscr{T}$ le sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{T})$ des polynômes trigonométriques, c'est ‡ dire le sous-espace vectoriel engendré par les e_k où $k \in \mathbf{Z}$.

Le sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{T})$ constitué des fonctions paires sera noté $C_P(\mathbb{T})$ et le sous-espace vectoriel engendré par les fonctions $t \mapsto \cos(kt)$ où k décrit $\{0,\dots,N\}$ sera noté Γ_N. Ces espaces sont bien sûr également munis de la norme $\|\cdot\|_{\mathbb{T}}$.

Pour $f \in C(\mathbb{T})$ et $k \in \mathbf{Z}$, on notera $\widehat{f}(k)$ le k-ième coefficient de Fourier de f : on a ainsi $\widehat{f}(k) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}_k(-t)\, f(t)\,\mathrm{d}t$.

Dans tout le problème, $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ désignera une suite strictement croissante d'entiers naturels. On identifiera abusivement la suite Λ et le sous-ensemble de $\mathbf{N}$ des valeurs de la suite que l'on notera encore Λ.

Pour $\lambda \in \mathbf{N}$, on définit la fonction polynôme v_λ sur $[0,1]$ par $v_\lambda(t) = t^\lambda$. On notera M_Λ l'espace vectoriel engendré par la suite de fonctions $\left(v_{\lambda_j}\right)_{j\in\mathbf{N}}$ et on notera $\overline{M_\Lambda}$ l'adhérence de M_Λ dans $C([0,1])$ (muni de la norme uniforme).

Soit $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes. Lorsque $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\prod_{j=0}^{N} z_j$ existe, on la note $\displaystyle\prod_{j=0}^{\infty} z_j$. Par convention, un produit indexé par l'ensemble vide vaut 1.

On rappelle que $[0,1]$ n'est pas dénombrable : il n'existe pas de bijection de $[0,1]$ sur une partie de $\mathbf{N}$.

Un espace vectoriel normé X est dit séparable s'il existe une suite dense dans X.

Lorsque T est une application linéaire continue entre deux espaces vectoriels normés $(X,\|\cdot\|_X)$ et $(Y,\|\cdot\|_Y)$, on notera simplement $\|T\|$ sa norme : $\|T\| = \displaystyle\sup_{x\neq 0}\frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X}$. Les deux espaces X et Y sont dits isomorphes lorsque il existe une telle application T qui est de plus bijective avec T^{-1} également continue.

On rappelle le **théorème de Banach-Steinhaus** : soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'applications linéaires continues d'un Banach $(X,\|\cdot\|_X)$ dans un espace vectoriel normé $(Y,\|.\|_Y)$, telle que pour tout $x \in X$, on ait $\displaystyle\sup_{i\in I}\|T_i(x)\|_Y < \infty$. On a alors $\displaystyle\sup_{i\in I}\|T_i\| < \infty$.

La notation X^* désignera le dual (topologique) d'un espace vectoriel normé X, c'est à dire l'espace des formes linéaires continues sur X. On rappelle (Hahn-Banach) que si X est un sous espace vectoriel de Y (espace vectoriel normé) alors, pour tout $\xi \in X^*$, il existe $\tilde{\xi} \in Y^*$ tel que $\tilde{\xi}_{|X} = \xi$ et $\tilde{\xi}\| = \|\xi\|$.

On note c l'espace des suites à termes complexes, convergentes dans $\mathbf{C}$ et c_0 l'espace des suites à termes complexes qui convergent vers 0. Ces deux espaces sont munis de la norme $N_\infty(u) = \displaystyle\sup_{n\in\mathbf{N}}|u_n|$, qui en fait des espaces de Banach. On rappelle que le dual topologique de c_0 est isomorphe à ℓ^1, l'espace des séries absolument convergentes, et que ℓ^1 est séparable.

Lorsque A et B sont deux parties d'un ensemble, on note $A\setminus B$ l'ensemble des éléments de A n'appartenant pas à B.

Partie I : Préliminaires.

Les questions 1, 2 *et* 3 *de cette partie sont indépendantes.*

1. (a) Montrer que $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_1^A \frac{\cos(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ existe.

Soit $N\in\mathbf{N}$. On définit $D_N=\sum\limits_{k=-N}^{N}\mathrm{e}_k$.

(b) Soit $t\in]0,2\pi[$. Montrer que $D_N(t)=\frac{\sin\big((2N+1)t/2\big)}{\sin\big(t/2\big)}$.

Dans toute la suite du problème, on notera $\mathscr{L}_N=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|D_N(t)|\,\mathrm{d}t$.

(c) Montrer que

$$\mathscr{L}_N\geqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|\sin\big((2N+1)x/2\big)|}{x}\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi(2N+1)}\frac{|\sin(x)|}{x}\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi(2N+1)}\frac{1-\cos(2x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

(d) En déduire qu'il existe $\gamma>0$ tel que, pour tout $N\in\mathbf{N}$, $\mathscr{L}_N\geqslant\gamma\ln(N+1)$.

2. On considère une suite décroissante $u=(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de réels strictement positifs telle que la série de terme général u_n converge, avec $u_0=1$.

(a) Montrer que la suite $(nu_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.

Soit s un entier positif non nul, on note $E_s=\left\{n\in\mathbf{N}\,\middle|\,u_n\geqslant\frac{1}{s}\right\}$.

(b) Montrer que E_s est fini, que son cardinal K_s croît vers l'infini et que $E_s=\{0,\dots,K_s-1\}$.

(c) Établir que $\frac{K_s-1}{2s}\leqslant\frac{1}{K_s}\sum\limits_{n\in E_s}nu_n$.

(d) Conclure que $\lim\limits_{s\to+\infty}\frac{K_s}{s}=0$.

3. On introduit l'application T de c dans c_0 qui à $u\in c$ associe la suite

$$(l,u_0-l,\dots,u_k-l,\dots)$$

où l est la limite de u.

(a) Montrer que T est bien définie, linéaire et bijective.

(b) Montrer que T et T^{-1} sont continues.

Partie II : Un produit de Blaschke.

1. Soit $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes.

   (a) Montrer que pour tout $N \in \mathbf{N}$, on a

$$\left|\left[\prod_{j=0}^{N}(1+z_j)\right]-1\right| \leqslant \left[\prod_{j=0}^{N}(1+|z_j|)\right]-1.$$

   (b) Montrer que pour tout $N \in \mathbf{N}$, on a

$$\prod_{j=0}^{N}(1+|z_j|) \leqslant \exp\left(\sum_{j=0}^{N}|z_j|\right).$$

2. Soit $(g_j)_{j\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert $U \subset \mathbf{C}$ telle que la série de terme général g_j converge normalement sur tout compact de U. Montrer que la suite de fonctions $(G_N)_{N\in\mathbf{N}}$ définie, pour $z \in U$, par

$$G_N(z) = \prod_{j=0}^{N}\left(1+g_j(z)\right)$$

converge uniformément sur tout compact de U vers une fonction qui est holomorphe sur U.

Jusqu'à la fin de cette partie II, $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de réels de $]0,1]$ telle que la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} \alpha_n$ converge.

On note $\Omega_1 = \{z \in \mathbf{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) > -1\}$. Pour $z \in \Omega_1$, on définit

$$f_n(z) = \frac{1-\alpha_n z}{1+\alpha_n z}.$$

3(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z) \geqslant 0$, on a $|f_n(z)| \leqslant 1$.

   (b) Montrer que la suite de fonctions $z \mapsto \dfrac{2}{(1+z)^2}\prod_{n=0}^{N} f_n(z)$ converge uniformément sur tout compact de Ω_1 vers une fonction F qui est holomorphe sur Ω_1.

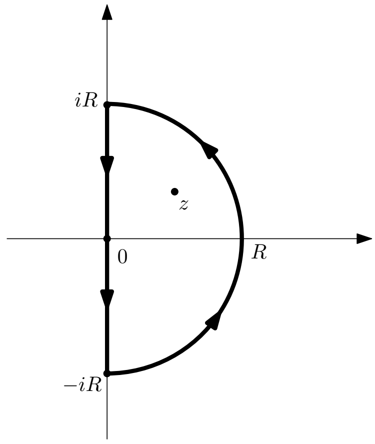
On considère la fonction φ définie sur $\mathbf{R}$ par $\varphi(s) = F(is)$.

   (c) Montrer que la fonction φ est intégrable sur $\mathbf{R}$.

On note $\Omega_0 = \{z \in \mathbf{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

4. On fixe $z \in \Omega_0$. Justifier que $\displaystyle F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(s)}{z - is}\,\mathrm{d}s.$

Indication : on pourra raisonner avec $R > |z|$ et la réunion du segment $[-iR, iR]$ avec un demi-cercle de centre O et de rayon R passant par R comme sur le schema ci-contre.



5.(a) Montrer que pour tout $x \in]0,1]$, l'intégrale $\displaystyle \mu(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s)\mathrm{e}^{-is\ln(x)}\,\mathrm{d}s$ est bien définie et que la fonction $\mu : x \mapsto \mu(x)$ est continue sur $]0,1]$.

(b) Justifier que μ se prolonge par continuité sur $[0,1]$, avec $\|\mu\|_\infty \leqslant 1$.

6. En déduire que pour tout $z \in \Omega_0$, on a $\displaystyle F(z) = \int_0^1 x^{(z-1)}\mu(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie III : Espaces de Müntz et théorème de Clarkson-Erdös.

On rappelle que pour $\lambda \in \mathbf{N}$, la fonction v_λ est définie par $v_\lambda(t) = t^\lambda$ pour $t \in [0,1]$ et que $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ désigne une suite strictement croissante d'entiers que l'on identifie abusivement ‡ son sous-ensemble de valeurs, noté encore Λ.

1. On suppose que $\lambda_0 = 0$ et, dans cette question 1 uniquement, que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\lambda_n}$ diverge.

Soit $k \in \mathbf{N}\setminus\Lambda$. On pose $Q_0 = v_k$ et on définit alors par récurrence, pour $n \in \mathbf{N}$:

$$Q_{n+1}(0) = 0 \quad \text{et, pour } x \in]0,1], \quad Q_{n+1}(x) = (\lambda_{n+1} - k)x^{\lambda_{n+1}}\int_x^1 Q_n(t)\,t^{-1-\lambda_{n+1}}\,\mathrm{d}t.$$

(a) Calculer Q_1 et montrer que $\displaystyle\|Q_1\|_\infty \leqslant \left|1 - \frac{k}{\lambda_1}\right|$.

(b) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $Q_n - v_k$ appartient à l'espace vectoriel engendré par $v_{\lambda_1}, \ldots, v_{\lambda_n}$.

(c) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a $\displaystyle\|Q_n\|_\infty \leqslant \prod_{j=1}^{n}\left|1 - \frac{k}{\lambda_j}\right|$.

(d) En déduire que $v_k \in \overline{M_\Lambda}$.

(e) Conclure que $C([0,1]) = \overline{M_\Lambda}$.

On suppose que λ_0 est désormais quelconque (nul ou pas) et, dans toute la suite de cette partie III, que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\lambda_n}$ converge.

Pour $p \in \mathbf{N}$, on note $\displaystyle\rho_p(\Lambda) = \sum_{\substack{\lambda_n > p \\ n\in\mathbf{N}}} \frac{1}{\lambda_n}$ ·

D'autre part, pour $s \in \mathbf{N}$, on désignera par $N_s(\Lambda)$ le cardinal de l'ensemble des entiers $n \in \mathbf{N}$ tels que $\lambda_n \leqslant s$.

2.(a) Justifier que $\displaystyle\lim_{s\to+\infty} \frac{N_s(\Lambda)}{s} = 0$.

(b) Que vaut $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \rho_p(\Lambda)$? On justifiera la réponse.

3. En utilisant les résultats de la partie II (*on pourra relier* α_n et λ_n), montrer qu'il existe une fonction μ_Λ, continue et bornée par 1 sur $[0,1]$, telle que, pour tout $m \in \mathbf{N}$:

$$\int_0^1 x^m \mu_\Lambda(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{(m+2)^2} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n - m}{\lambda_n + m + 2} \cdot$$

4.(a) Montrer que pour tout $P \in M_\Lambda$, on a $\displaystyle\int_0^1 P(x)\,\mu_\Lambda(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

(b) En déduire que pour tout $q \in \mathbf{N} \setminus \Lambda$,

$$\inf\left\{\|v_q - P\|_\infty\,;\, P \in M_\Lambda\right\} \geqslant \left|\int_0^1 x^q \mu_\Lambda(x)\,\mathrm{d}x\right|.$$

5. Dans cette question 5, on fixe $m \in \mathbf{N}$.

(a) Établir $\displaystyle\sum_{\substack{\lambda_n > 2m \\ n\in\mathbf{N}}} \ln\left(\frac{\lambda_n + m + 2}{\lambda_n - m}\right) \leqslant 4(m+1)\rho_{2m}(\Lambda)$.

On définit $\theta(x) = x \ln\left(\dfrac{3\,\mathrm{e}}{x}\right)$ pour $x > 0$ et $\theta(0) = 0$.

(b)(i) Justifier que pour tout entier $k \geqslant 1$, on a $k! \geqslant k^k\,\mathrm{e}^{-k}$.

(ii) En déduire que

$$\prod_{\substack{m<\lambda_n\leqslant 2m \\ n\in\mathbf{N}}} \frac{\lambda_n - m}{\lambda_n + m + 2} \geqslant \frac{\widetilde{N}!}{(3m+2)^{\widetilde{N}}} \geqslant \exp\Big(-(m+1)\theta\big(\widetilde{N}/(m+1)\big)\Big)$$

où $\widetilde{N} = N_{2m}(\Lambda) - N_m(\Lambda)$.

Pour $m \geqslant 1$ on pose $\widehat{N} = N_{m-1}(\Lambda)$ et on admet que l'on obtient de même la minoration :

$$\prod_{\substack{\lambda_n<m \\ n\in\mathbf{N}}} \frac{m - \lambda_n}{\lambda_n + m + 2} \geqslant \exp\Big(-(m+1)\theta(\widehat{N}/(m+1))\Big).$$

6. (a) Prouver l'existence d'une suite $(\gamma_m)_{m\in\mathbf{N}}$ vérifiant $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} \gamma_m = 0$ et, pour tout $m \in \mathbf{N}$,

$$\inf\left\{\|v_m - P\|_\infty\,;\, P\in M_{\Lambda\setminus\{m\}}\right\} \geqslant \mathrm{e}^{-(m+1)\gamma_m}.$$

(b) En déduire que pour tout $m\in\mathbf{N}\setminus\Lambda$, on a $v_m\notin\overline{M_\Lambda}$.

7.(a) Soit $\varepsilon>0$. Montrer qu'il existe $\beta_\varepsilon>0$ (qui ne dépend que de ε et de Λ) tel que pour tout $P\in M_\Lambda$ et tout $k\in\mathbf{N}$:

$$|a_k|\leqslant \beta_\varepsilon(1+\varepsilon)^{\lambda_k}\|P\|_\infty$$

où P s'écrit $\sum\limits_{i\in\mathbf{N}} a_i v_{\lambda_i}$ (avec tous les a_i nuls à partir d'un certain rang).

Indication : on pourra appliquer la question 6.(a) avec $m=\lambda_k$.

Soit $f\in\overline{M_\Lambda}$, limite d'une suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de M_Λ où, pour chaque $n\in\mathbf{N}$, le polynôme P_n s'écrit $\sum\limits_{i\in\mathbf{N}} a_{n,i}v_{\lambda_i}$ (avec pour tout $n\in\mathbf{N}$, les $a_{n,i}$ nuls à partir d'un certain rang en i).

(b) Montrer que pour i fixé, la suite $(a_{n,i})_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un nombre complexe a_i.

(c) En déduire que pour tout $x\in[0,1[$, on a $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{+\infty} a_i x^{\lambda_i}$.

8. **Théorème de Clarkson-Erdös** :

(a) Soit $f\in C([0,1])$. Pour $r\in[0,1[$, on définit $f_r\in C([0,1])$ par $f_r(t)=f(rt)$ pour tout $t\in[0,1]$. Montrer que $\lim\limits_{\substack{r\to1\\ r<1}}\|f_r-f\|_\infty=0$.

(b) Prouver que $\overline{M_\Lambda}$ est exactement l'espace des fonctions f, continues sur $[0,1]$, telles qu'il existe une suite de nombres complexes $(a_i)_{i\in\mathbf{N}}$ vérifiant

$$\forall x\in[0,1[,\qquad f(x)=\sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^{\lambda_i}.$$

Partie IV : Être ou ne pas être à dual séparable.

1. Soient $S=[a,b]$ un segment (avec $a<b$) de $[0,1]$ et V un sous-espace vectoriel fermé de $C([0,1])$ tel que toute fonction de V est de classe C^1 sur S.

Pour $(x,y)\in S^2$ avec $x\neq y$, on pose $\xi_{x,y}(f)=\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ où $f\in V$.

(a) Justifier que $\xi_{x,y}\in V^*$.

(b) Démontrer que pour tout $f\in V$, on a

$$\sup_{\substack{x,y\in S\\ x\neq y}} |\xi_{x,y}(f)|<+\infty.$$

(c) En déduire qu'il existe $\mathcal{N}(S)>0$ vérifiant, pour tout $f\in V$ et tout $(x,y)\in S^2$:

$$|f(x)-f(y)|\leqslant \mathcal{N}(S)|x-y|.\|f\|_\infty.$$

(d) Soit $(t_l)_{0\leqslant l\leqslant L}$ une suite finie de points de S tels que $0 < t_{l+1} - t_l \leqslant \dfrac{1}{\mathcal{N}(S)}$ pour $0 \leqslant l < L$, vérifiant aussi $t_0 = a$ et $t_L = b$. Montrer que

$$\forall f \in V, \qquad \sup_{t\in S}|f(t)| \leqslant \sup_{0\leqslant l\leqslant L}|f(t_l)| + \frac{1}{2}\|f\|_\infty.$$

2. Soit F_0 un sous-espace vectoriel fermé de $C([0,1])$ tel que toute fonction de F_0 est de classe C^1 sur le segment $[0,1]$. Montrer que F_0 est de dimension finie.

3. Soit X_0 un sous-espace vectoriel fermé de $C([0,1])$ tel que toute fonction de X_0 est de classe C^1 sur l'intervalle $[0,1[$.

(a) Donner un exemple d'un tel espace X_0 de dimension infinie.

Indication : on pourra appliquer les résultats de la partie III.

On fixe une suite $(a_j)_{j\in\mathbf{N}}$ de $[0,1[$, strictement croissante vers 1, ainsi qu'une suite $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $[0,1]$, strictement croissante vers 1 et une suite d'entiers $(n_j)_{j\in\mathbf{N}}$ strictement croissante vers l'infini telles que $s_0 = a_0 = 0$ et

$$\forall j \in \mathbf{N}, \quad s_{n_j} = a_j \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \{n_j,\dots,n_{j+1}-1\}, \qquad s_{n+1} - s_n \leqslant \frac{1}{\mathcal{N}\big([a_j, a_{j+1}]\big)}.$$

(b) Soit $J : \left| \begin{array}{ccc} X_0 & \longrightarrow & c \\ f & \longmapsto & \big(f(s_n)\big)_{n\in\mathbf{N}} \end{array}\right.$

Montrer que l'application J est bien définie et satisfait : $\|f\|_\infty \leqslant 2N_\infty(J(f)) \leqslant 2\|f\|_\infty$ pour tout $f \in X_0$.

(c) En déduire que X_0 est isomorphe à un sous-espace de c puis que X_0 est isomorphe à un sous-espace Z_0 de c_0.

(d) Justifier que X_0^* est isomorphe à Z_0^* puis en déduire que X_0^* est séparable.

Indication : on pourra notamment s'appuyer sur le théorème de Hahn-Banach.

4. On souhaite montrer par l'absurde que $C([0,1])^*$ n'est pas séparable. On suppose l'existence d'une suite $(\omega_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dense dans $C([0,1])^*$.

Pour $x \in [0,1]$ et $f \in C([0,1])$, on note $\delta_x : f \mapsto f(x)$, l'évaluation de f en x.

(a) Justifier que $\delta_x \in C([0,1])^*$ et que pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$ avec $x \neq y$, on a

$$\|\delta_x - \delta_y\|_{C([0,1])^*} = 2.$$

Soit χ l'application qui à $x \in [0,1]$ associe un entier $n \in \mathbf{N}$ tel que $\|\delta_x - \omega_n\|_{C([0,1])^*} < 1$.

(b) Justifier que l'on définit ainsi une application injective χ de $[0,1]$ dans $\mathbf{N}$, puis conclure.

Partie V : Normes de projections.

Soit $N \in \mathbf{N}$.

1. Pour $x \in \mathbf{R}$ et $f \in C_P(\mathbb{T})$, on définit : $\Phi_N(f)(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} D_N(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$.

   (a) Montrer que l'on définit ainsi une projection Φ_N de $C_P(\mathbb{T})$ sur Γ_N.

   (b) Montrer que $\|\Phi_N\| = \mathscr{L}_N$.

On associe à $f \in C(\mathbb{T})$ la fonction $\check{f} \in C(\mathbb{T})$ définie par $\check{f}(t) = f(-t)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, et $\Psi(f) = \dfrac{1}{2}\big(f + \check{f}\big) \in C_P(\mathbb{T})$.

2. Soit P une projection continue de $C_P(\mathbb{T})$ sur Γ_N. L'application $\widetilde{P} = P \circ \Psi$ est donc définie sur $C(\mathbb{T})$. Pour $a \in \mathbf{R}$, on définit l'endomorphisme τ_a de $C(\mathbb{T})$, pour $f \in C(\mathbb{T})$ et $t \in \mathbf{R}$ par, $\tau_a(f)(t) = f(t+a) + f(t-a)$.

   (a) Montrer que pour tout $f \in C(\mathbb{T})$ et tout $x \in \mathbf{R}$, l'intégrale

$$Q(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big(\widetilde{P}\big(\tau_y(f)\big)\Big)(x-y)\,\mathrm{d}y$$

est bien définie.

   (b) Justifier que pour tout $f \in \mathscr{T}$, on a : $Q(f) = \widehat{f}(0) + \Phi_N \circ \Psi(f)$.

   (c) En déduire que $2\|P\| + 1 \geqslant \mathscr{L}_N$.

3. Soit $\mathscr{R}$ une projection continue de $C([0,1])$ sur l'espace des fonctions polynômes de degré au plus N, c'est à dire l'espace vectoriel engendré par $v_0, v_1, \dots, v_N$. Montrer que l'on a $2\|\mathscr{R}\| + 1 \geqslant \mathscr{L}_N$.

Indication : on pourra considérer $\rho(x) = \dfrac{1+\cos(x)}{2}$ et l'application qui à un polynôme h de degré au plus N associe $h \circ \rho \in \Gamma_N$.

4. Soient m, n deux entiers strictement positifs et $\mathscr{R}$ une projection continue de $C([0,1])$ sur l'espace vectoriel engendré par les fonctions polynômes $v_0, v_n, v_{2n}, \dots, v_{mn}$. Montrer que l'on a $2\|\mathscr{R}\| + 1 \geqslant \mathscr{L}_m$.

Partie VI : Un exemple dû à D. Newman.

L'objet de cette partie est de construire un espace de Müntz non complémenté dans $C([0,1])$.

1. Soit $d \geqslant 1$ un entier. Prouver l'existence d'un réel $\Delta(d) \geqslant d$ tel que, pour tout polynôme P de degré au plus d :

$$\|P'\|_\infty \leqslant \Delta(d)\|P\|_\infty.$$

2. Soient $n > m \geqslant 1$ et P et Q des polynômes de degré au plus m avec $Q(0) = 0$.

   (a) On suppose que $P(X) + Q(X^n) = 0$. Montrer que $P = 0$.

   (b) On suppose que $\|P(X) + Q(X^n)\|_\infty = 1$. Soit $x_n = 1 - \dfrac{\ln(n)}{n}$.

      (i) Montrer que pour tout $x \in [0, x_n]$, on a

$$|P(x)| \leqslant 1 + \frac{\Delta(m)}{n}(1 + \|P\|_\infty).$$

      (ii) En déduire que pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$|P(x)| \leqslant \Delta(m)\frac{\ln(n)}{n}\|P\|_\infty + 1 + \frac{\Delta(m)}{n}(1 + \|P\|_\infty).$$

(c) Conclure que

$$\|P(X)+Q(X^n)\|_\infty \geqslant \left(1-\Delta(m)\frac{2+\ln(n)}{n}\right)\|P\|_\infty .$$

On admet l'existence d'une suite d'entiers naturels (non nuls) vérifiant la condition de récurrence :

$$n_1 = 2 \qquad \text{et} \qquad \frac{n_{j+1}}{2+\ln\left(n_{j+1}\right)} \geqslant (j+1)^2\Delta(jn_j) \quad \text{où } j \geqslant 1.$$

On admet que l'on a pour tout $j \in \mathbf{N}^*$, $n_{j+1} > jn_j$. On note dans la suite de cette partie

$$\Lambda = \{0\} \cup \bigcup_{m\geqslant 1} n_m\{1,\dots,m\} = \left\{0, n_1, n_2, 2n_2, n_3, 2n_3, 3n_3, n_4, \dots\right\}.$$

3. Soit $(P_j)_{j\geqslant 1}$ une suite de polynômes tels que, pour tout $j \geqslant 1$, $P_j(0) = 0$ et P_j est de degré au plus j. On note pour $j \geqslant 1$:

$$S_j(X) = \sum_{i=1}^{j} P_i\left(X^{n_i}\right).$$

Montrer que pour tous $k \geqslant j \geqslant 1$, on a $\|S_k\|_\infty \geqslant \dfrac{k+1}{2k}\|S_j\|_\infty$.

4. Établir que, pour tout $f \in \overline{M_\Lambda}$, il existe une unique suite $(P_j)_{j\geqslant 1}$ de polynômes tels que, pour tout $j \geqslant 1$, $P_j(0) = 0$ et P_j est de degré au plus j, vérifiant

$$\forall x \in [0,1[, \qquad f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{\infty} P_i\left(x^{n_i}\right)$$

et (avec les notations précédentes) pour tout $j \geqslant 1$,

$$\|S_j\|_\infty \leqslant 2\|f - f(0)\|_\infty.$$

5. Conclure qu'il n'existe aucune projection continue de $C([0,1])$ sur $\overline{M_\Lambda}$.

4.2 rapport sur l'épreuve écrite d'analyse et probabilités

4.2.1 Objet du problème

Ce problème faisait appel à diverses parties du programme d'analyse (analyse élémentaire, analyse complexe, analyse fonctionnelle, transformation de Fourier,...). L'énoncé était long mais permettait justement aux candidats de s'exprimer sur des registres différents. La partie I, préliminaire, était subdivisée en trois questions indépendantes plutôt élémentaires, dont les résultats étaient destinés à être utilisés ultérieurement dans divers endroits du problème. La partie II établissait la contruction d'un produit de type Blaschke (dans le cadre du demi-plan droit), que l'on exprimait ensuite via une représentation intégrale. Dans la partie III, on établit le théorème classique de Müntz-Szász dans le cadre de l'espace $C([0,1])$, et le théorème de Clarkson-Erdös : ainsi, lorsque la série des $1/\lambda_n$ converge, non seulement l'espace vectoriel engendré par les monômes x^{λ_n} n'est pas dense mais la fermeture de l'espace engendré consiste exactement en les fonctions continues sur $[0,1]$ développables en série entières (avec rayon de convergence 1 au moins) dont le développement ne fait intervenir que les termes en puissance λ_n. La partie IV s'intéressait alors aux espaces fermés de fonctions continues sur $[0,1]$, qui sont aussi de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1[$. Ces espaces ont des propriétés bien différentes de $C([0,1])$: ils se plongent dans un sous-espace de c_0 donc possèdent un dual séparable, propriété que ne possède pas $C([0,1])$. Dans la partie V, on montre d'abord que toute projection de l'espace des fonctions continues 2π-périodiques sur l'espace des polynômes trigonométriques de degré au plus n possède une norme supérieure à la norme de la projection naturelle (donc au nombre de Lebesgue $\mathscr{L}_n$). On en déduisait ensuite une minoration de la norme de toute projection de l'espace $C([0,1])$ sur l'espace des polynômes de degré au plus n. Enfin, dans la partie VI, on faisait la construction (due à D. Newman) d'un espace de Müntz qui n'était l'image d'aucune projection (bornée) de $C([0,1])$.

On pourra par exemple consulter :

[1] Peter Borwein, Tamás Erdélyi, Polynomials and polynomial inequalities. Graduate Texts in Mathematics, 161. Springer-Verlag, New York, 1995.

[2] Donald J. Newman, A Müntz space having no complement. J. Approx. Theory 40 (1984), no. 4, 351-354.

[3] Walter Rudin, Analyse réelle et complexe. Masson, Paris, 1980.

4.2.2 Commentaires généraux

Rappelons que les candidats doivent commencer par lire attentivement la partie "Rappels et notations".

Partie I. Cette partie ne comportait que des questions élémentaires, faisant appel à des compétences exigibles à de futurs agrégés en mathématiques. Une grande partie des questions a été abordée par l'ensemble des candidats. La première question consistait à justifier de façon courte et élémentaire la divergence de l'intégrale sur $\mathbf{R}^+$ de la valeur absolue du sinus cardinal. On obtenait aussi une estimation de la vitesse de divergence. La question 1.a a été souvent traitée à l'aide d'une intégration par partie, mais la justification de la convergence (absolue) de l'intégrale qui apparaissait alors a trop souvent été mal justifiée. Le calcul du noyau de Dirichlet a été en général bien fait mais très souvent, dans leur calcul sur la somme des termes d'une suite géométrique, les candidats ont oublié de justifier que la raison était différente de 1. La question 1.c a généralement été correctement traitée. L'estimation asymptotique du 1.d s'en déduisait rapidement, ce qu'une bonne proportion de candidats ont vu mais ils ont très rarement su justifier la minoration générale.

Dans la question 2., on s'intéressait à la taille d'ensembles de niveaux d'une suite décroissante de réels positifs dont la série converge. De façon surprenante, le 2.a n'a presque jamais été traité. Par contre le reste de la question (2.b et 2.c) a souvent été fait, même si le fait "$K_s \to +\infty$" n'a pas souvent été correctement justifié (souvent les candidats invoquent $u_n \to 0$ alors que la raison est la stricte positivité des u_n). Relativement peu de candidats ont su conclure (2.d).

La dernière question exhibait un isomorphisme (bicontinu) entre les espaces c et c_0. Cette question a révélé le manque d'aisance des candidats sur les espaces normés. La linéarité de la limite est souvent oubliée. Cette linéarité est aussi souvent occultée lors de la justification de la continuité.

Partie II. Trop de candidats ne maitrisent pas l'inégalité triangulaire, ou bien utilisent des inégalités sur des complexes. La question 1 a souvent été abordée. Le développement du produit au 1.a. a rarement été correctement écrit (le plus souvent des “$\cdots$” se sont substitués aux termes manquants). Un raisonnement par récurrence permettait de contourner cette difficulté. Par contre le 1.b. a très souvent été correctement fait.

La question 2. a rarement été comprise, et très peu de candidats pensent à considérer le critère de Cauchy. Trop souvent les candidats se contentent de majorer un produit partiel (en module) pour en justifier la convergence, ce qui consituait une faute importante.

Le 3.a., pourtant très simple, n'a pas toujours été proprement rédigé.

Si le recours à la formule de Cauchy dans la question 4. a été considéré, de fréquentes erreurs ou imprécisions sont apparues.

Invoquer la transformée de Fourier au 5. permettait de résoudre immédiatement la question, mais ceci a été très rare. Ainsi le 5.b. (Riemann-Lebesgue) n'est essentiellement jamais correctement traité.

Partie III. Le début de cette partie a souvent été abordée de façon raisonnable, notamment sur les premières questions (1.a à 1.e.) mais la rédaction n'a pas toujours été correcte ou suffisamment rigoureuse.

Les candidats abordant sérieusement le reste de la partie III se sont fait plus rares. La plupart des questions étaient techniques mais simples. Toutefois, quelques questions (6.a. par exemple) demandaient un peu plus de recul.

Partie IV. Une petite partie des candidats se sont attaqués au début de cette partie, qui était de nature plus abstraite. On note des confusions entre dual topologique et dual algébrique (malgré les précisions au début du problème), ou des difficultés à mettre en œuvre correctement le théorème de Banach-Steinhaus. Dans la question 1.b., de nombreux candidats pensent à appliquer un théorème des accroissements finis, mais malheureusement, même dans de “bonnes” copies, trop souvent dans une version avec égalité (fausse pour une fonction à valeurs complexes). La seconde moitié de cette partie est bien plus rarement abordée.

Les parties V et VI ne sont essentiellement jamais sérieusement abordées.

4.3 Corrigé de l'épreuve d'analyse et probabilités

PARTIE I.

1. (a) La fonction $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{x}$ est continue sur $[1,+\infty[$ donc est localement intégrable : pour tout $A>1$, on a l'existence de $\displaystyle\int_1^A \frac{\cos(x)}{x}\,dx$.

On effectue une intégration par parties pour obtenir

$$\int_1^A \frac{\cos(x)}{x}\,dx = \frac{\sin(A)}{A} - \frac{\sin(1)}{1} + \int_1^A \frac{\sin(x)}{x^2}\,dx.$$

D'une part, $\dfrac{\sin(A)}{A}$ tend clairement vers 0 quand A tend vers l'infini puisque la fonction sinus est bornée.

D'autre part, l'intégrale de $\dfrac{\sin(x)}{x^2}$ sur $[1,+\infty[$ est absolument convergente d'après le critère de Riemann (sinus bornée et $2>1$!), a fortiori convergente .

Variante de rédaction : invoquer le théorème d'Abel (qui dans le contexte se justifierait par une intégration par parties) : toute primitive de cosinus est bornée et $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ est décroissante vers 0.

(b) Soit $t\in]0,2\pi[$. On a une somme de termes successifs d'une suite géométrique de raison $\mathrm{e}^{it}\neq 1$:

$$\begin{aligned} D_N(t) &= \sum_{k=-N}^{N}\left(\mathrm{e}^{it}\right)^k\\ &= \frac{\left(\mathrm{e}^{it}\right)^{-N}-\left(\mathrm{e}^{it}\right)^{N+1}}{1-\mathrm{e}^{it}}\\ &= \frac{\left(\mathrm{e}^{-i(N+1/2)t}\right)-\left(\mathrm{e}^{i(N+1/2)t}\right)}{\left(\mathrm{e}^{-it/2}\right)-\left(\mathrm{e}^{it/2}\right)}\\ &= \frac{\sin\left((2N+1)\,t/2\right)}{\sin\left(t/2\right)}. \end{aligned}$$

Variante de rédaction : Pour $n\geq 1$, on a $\sin(t/2).D_N(t)=\sin(t/2).\left(1+2\sum_{k=1}^{N}\cos\left(kt\right)\right)$ donc

$$\sin(t/2).D_N(t)=\sin(t/2)+\sum_{k=1}^{N}\left[\sin\left((2k+1)\,t/2\right)-\sin\left((2k-1)\,t/2\right)\right]=\sin\left((2N+1)\,t/2\right).$$

Remarque. $\mathscr{L}_N$ est bien définie : c'est l'intégrale sur un segment d'une fonction continue (module, en fait valeur absolue, d'un polynôme trigonométrique).

(c) On a

$$\mathscr{L}_N=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|\sin\left((2N+1)x/2\right)|}{|\sin(x/2)|}\,dx\geqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|\sin\left((2N+1)x/2\right)|}{x}\,dx$$

puisque $|\sin(x/2)|\leqslant x/2$ pour tout réel positif x.

La seconde inégalité (qui est une égalité) résulte immédiatement du changement de variable homothétique $x\mapsto(2N+1)x/2$, qui laisse invariant $\dfrac{dx}{x}\cdot$

Enfin pour tout réel x, on a $|\sin(x)|\geqslant\left(\sin(x)\right)^2$ (car $|\sin(x)|\leqslant 1$) et on a donc $|\sin(x)|\geqslant\dfrac{1-\cos(2x)}{2}$ d'où l'on déduit la dernière inégalité demandée en intégrant.

(d) Comme $\dfrac{1-\cos(2x)}{2}\geqslant 0$, on a donc (d'après c.) pour $N\in\mathbf{N}$

$$2\pi\mathscr{L}_N\geqslant\int_1^{\pi(2N+1)}\frac{1-\cos(2x)}{x}\,dx=\ln\left(\pi(2N+1)\right)-\int_1^{\pi(2N+1)}\frac{\cos(2x)}{x}\,dx$$

Or $\displaystyle\int_1^{\pi(2N+1)}\frac{\cos(2x)}{x}\,dx=\int_2^{2\pi(2N+1)}\frac{\cos(t)}{t}\,dt$ a une limite quand N tend vers l'infini d'après la question 1.a.

On en déduit que pour tout entier $N\geqslant 1$, la suite $\mathscr{L}_N/\ln(N+1)$ est minorée par $\dfrac{1}{2\pi\ln(N+1)}\left(\ln(N+1)+b_N\right)$, où (b_n) est bornée. Ainsi, $\underline{\lim}\dfrac{\mathscr{L}_N}{\ln(N+1)}\geqslant\dfrac{1}{2\pi}\cdot$

De plus, la suite $\left(\mathscr{L}_N/\ln(N+1)\right)_{N\geqslant 1}$ est une suite à termes strictement positifs puisque $\mathscr{L}_N$ est l'intégrale d'une fonction continue positive non identiquement nulle. D'où l'existence de $\gamma>0$ tel que, pour tout $N\geqslant 1$, $\mathscr{L}_N\geqslant\gamma\ln(N+1)$. Pour $N=0$, c'est encore trivialement vrai.

Variante : on pouvait aussi conclure autrement (sans utiliser 1.a mais au prix de quelques manipulations) en écrivant

$$2\pi\mathscr{L}_N\geqslant\int_{\pi/4}^{\pi/4+\pi N}\frac{1-\cos(2x)}{x}\,dx=\ln\left(1+4N\right)-\int_{\pi/2}^{\pi/2+2N\pi}\frac{\cos(x)}{x}\,dx$$

puis en montrant que

$$\int_{\pi/2}^{\pi/2+2N\pi}\frac{\cos(t)}{t}\,dt\leq 0.$$

En effet, pour $N\geq 1$, on a $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi/2+2N\pi}\frac{\cos(t)}{t}\,dt=\sum_{k=0}^{N-1}\int_{\pi/2+2k\pi}^{\pi/2+2(k+1)\pi}\frac{\cos(t)}{t}\,dt$

or, via Chasles et un changement de variable $t\mapsto t-\pi$:

$$\int_{\pi/2+2k\pi}^{\pi/2+2(k+1)\pi}\frac{\cos(t)}{t}\,dt=\int_{\pi/2+2k\pi}^{\pi/2+(2k+1)\pi}\left(\frac{\cos(t)}{t}-\frac{\cos(t)}{t+\pi}\right)dt=-\int_{\pi/2+2k\pi}^{\pi/2+(2k+1)\pi}\frac{\pi|\cos(t)|}{t(t+\pi)}\,dt\leq 0.$$

Autre variante de rédaction : on pouvait aussi utiliser des techniques très classiques (mais plus longues) utilisant des idées similaires à la variante précédente pour minorer directement la seconde intégrale de la série d'inégalités de la question précédente puis faire une comparaison à la somme partielle de la série harmonique (dont on montre que celle-ci se comporte en $\log(N)$).

2. (a) Pour $n\in\mathbf{N}$, on note $\mathbb{T}ilden$ la partie entière de $n/2$ et on considère la somme $\mathscr{U}_n=\sum_{k=\mathbb{T}ilden}^{n}u_k$. D'une part, $\mathscr{U}_n\geqslant(n-\mathbb{T}ilden+1)u_n\geqslant nu_n/2$ puisque la suite $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ décroît. D'autre part, $\mathscr{U}_n$ tend vers 0 puisque la série converge (par exemple parce qu'il s'agit d'une tranche de Cauchy ou, directement, parce que $\mathscr{U}_n$ est majoré par le reste partiel d'ordre $\mathbb{T}ilden$ de la série, puisque $u_k\geqslant 0$). Enfin, le théorème d'encadrement permet de conclure (puisque $nu_n\geqslant 0$).

Variante de rédaction : (de la même fa

con mais moins parachutée) Pour tout $\varepsilon>0$, il existe n_0 tel que pour tout $n>n_0$, on ait $\sum_{k=n_0+1}^{n}u_k\leq\varepsilon$. Ainsi par décroissance de la suite : $(n-n_0)u_n\leq\varepsilon$ ou encore $nu_n\leq\varepsilon+n_0u_n$. Comme la suite $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ converge vers 0 (terme général d'une série convergente), il existe $N_0>n_0$ tel que, pour tout $n>N_0$, $nu_n\leq 2\varepsilon$.

Autre variante de rédaction : en supposant que la conclusion soit fausse, il existe $\varepsilon_0>0$ et une extaction $\varphi:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ telle que pour tout $n\in\mathbf{N}$, on ait $u_{\varphi(n)}\geq\dfrac{\varepsilon_0}{\varphi(n)}\cdot$

Mais alors, par décroissance de la suite, $\displaystyle\sum_{k=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1}u_k\geq\left(\varphi(n+1)-\varphi(n)\right)\frac{\varepsilon_0}{\varphi(n+1)}$; or on peut toujours supposer que $\varphi(n+1)\geq 2\varphi(n)$ donc $\displaystyle\sum_{k=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1}u_k\geq\frac{\varepsilon_0}{2}\cdot$ Ceci empêche la série de converger : soit en niant le critère de Cauchy ; soit en constatant par resommation sur n (i.e. somme par paquets de termes positifs) que la série divergerait vers l'infini.

(b) Soit s un entier non nul, $E_s=\left\{n\in\mathbf{N}\,|\,u_n\geqslant\dfrac{1}{s}\right\}$. On remarque que $0\in E_s$ puisque $u_0=1$.

(i) Puisque la suite $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ converge vers 0 (terme général d'une série convergente, ou encore d'après a.), il existe n_s tel que $u_n < \frac{1}{s}$ dès que $n \geqslant n_s$. Donc l'ensemble $E_s \subset \{0,\dots,n_s\}$ est fini.

(ii) On remarque que $K_s \geqslant 1$. Puisque $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ décroît, si $n \in E_s$, alors tout $m \leqslant n$ appartient aussi à E_s donc E_s est un intervalle d'entiers contenant 0. Ainsi, $E_s = \{0,\dots,m_s\}$: son cardinal est m_s+1 donc $m_s = K_s - 1$.

(iii) Enfin, $E_s \subset E_{s+1}$ donc $K_s \leqslant K_{s+1}$. La suite $(K_s)_{s\geqslant 1}$ est croissante mais n'est pas bornée : cela repose sur le fait que tous les u_n sont strictement positifs et on peut, par exemple, invoquer le fait que tout $n \in \mathbf{N}$ appartient à E_s (donc $K_s \geqslant n$) pour $s \geqslant 1/u_n$. Ainsi $(K_s)_{s\geqslant 1}$ est croissante vers l'infini.

(c) $\displaystyle\sum_{n\in E_s} nu_n \geqslant \frac{1}{s}\sum_{n\in E_s} n$ par définition. Or $\displaystyle\sum_{n\in E_s} n = \sum_{n=0}^{K_s-1} n = \frac{1}{2}K_s\big(K_s-1\big)$. D'où le résultat.

(d) On a $\displaystyle 0 \leqslant \frac{K_s-1}{2s} \leqslant \frac{1}{K_s}\sum_{n=0}^{K_s-1} nu_n$ et K_s tend vers l'infini. Le théorème de Cesàro donne la convergence de $\displaystyle\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} nu_n$ vers $\lim nu_n = 0$ (cf 2.a), a fortiori $\displaystyle\frac{1}{K_s}\sum_{n=0}^{K_s-1} nu_n$ tend vers 0. D'où $\displaystyle\lim_{s\to+\infty}\frac{K_s}{s} = 0$.

Variante de rédaction : on pouvait aussi conclure directement (sans utiliser 2.c) en remarquant que $\displaystyle\frac{(K_s-1)}{s} \leq (K_s-1)u_{(K_s-1)}$ car $K_s - 1 \in E_s$.

3. (a) La suite $(u_k - l)_k$ est bien définie et convergente vers 0. La linéarité est claire dès que l'on a mentionné que l'application associant à une suite sa limite est linéaire.

T est injective car son noyau est réduit à $\{0\}$: si $T(u) = 0$ alors $l = 0$ et pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a $u_k = u_k - l = 0$ donc $u = 0$.

Soit $y \in c_0$. On pose $l = y_0$ et pour $k \in \mathbf{N}$, on pose $u_k = y_{k+1} + y_0 = y_{k+1} + l$. La suite u converge vers l puisque $y \in c_0$. De plus $T(u) = y$. Donc T est aussi surjective.

(b) Notons que pour tout $u \in c$ et tout $n \in \mathbf{N}$, on a $|u_n| \leqslant N_\infty(u)$ donc par passage à la limite : $|l| \leqslant N_\infty(u)$. Pour la continuité (de cette application linéaire) :

$$\forall u \in c, \qquad N_\infty\Big(T(u)\Big) = \max\big(|l|, \sup_{k\in\mathbf{N}} |u_k - l|\big) \leqslant 2N_\infty(u)$$

ainsi T est continue avec $\|T\| \leqslant 2$.

T est donc une application linéaire bijective continue entre d'espaces vectoriels normés. Comme ces espaces sont des Banach, on pourrait invoquer le théorème d'isomorphisme de Banach pour conclure à la continuité de T^{-1} mais ici, cette continuité est facile à obtenir directement :

$$\forall y \in c_0, \qquad N_\infty\Big(T^{-1}(y)\Big) = \sup_{k\in\mathbf{N}} |y_{k+1} + y_0| \leqslant 2N_\infty(y)$$

donc T^{-1} est continue avec $\|T^{-1}\| \leqslant 2$.

PARTIE II.

1. (a) On rappelle qu'un produit $\displaystyle\prod_{j=0}^{N}(1+X_j)$ se développe sous la forme

$$\prod_{j=0}^{N}(1+X_j) = \sum_{A\subset\{0,\dots,N\}}\prod_{i\in A} X_i$$

Ainsi
$$\left|\prod_{j=0}^{N}(1+z_j)-1\right|=\left|\sum_{\substack{A\subset\{0,\dots,N\}\\ A\neq\emptyset}}\prod_{i\in A}z_i\right|\leqslant\sum_{\substack{A\subset\{0,\dots,N\}\\ A\neq\emptyset}}\prod_{i\in A}|z_i|=\prod_{j=0}^{N}(1+|z_j|)-1.$$

Variante de rédaction : On pose $P_N=\prod_{j=0}^{N}(1+z_j)$ et on va montrer le résultat par récurrence :

$$\mathscr{H}_N:\quad |P_N-1|\leqslant\left[\prod_{j=0}^{N}(1+|z_j|)\right]-1.$$

$\mathscr{H}_0$ est trivialement vraie.

Supposons que $\mathscr{H}_N$ soit vraie où $N\in\mathbf{N}$. On a

$$P_{N+1}-1=(1+z_{N+1})P_N-1=P_N-1+z_{N+1}P_N.$$

Ainsi
$$|P_{N+1}-1|\leqslant|P_N-1|+|z_{N+1}|.|P_N|\leqslant\left[\prod_{j=0}^{N}(1+|z_j|)\right]-1+|z_{N+1}|.|P_N|$$

puisque $\mathscr{H}_N$ est vraie.

D'autre part, $|P_N|\leqslant\prod_{j=0}^{N}(1+|z_j|)$. En regroupant les termes, on conclut que $\mathscr{H}_{N+1}$ est vraie.

(b) Pour tout $N\in\mathbf{N}$, on a $\prod_{j=0}^{N}(1+|z_j|)=\exp\left(\sum_{j=0}^{N}\ln(1+|z_j|)\right)\leqslant\exp\left(\sum_{j=0}^{N}|z_j|\right)$ en utilisant que $\ln(1+x)\leqslant x$ pour $x\geqslant 0$.

2. Soit K un compact inclus dans U. Pour tous entiers $N'>N$ et tout $z\in K$, on a

$$|G_{N'}(z)-G_N(z)|=|G_N(z)|.\left|\prod_{j=N+1}^{N'}\big(1+g_j(z)\big)-1\right|$$

Or, d'après la question 1.b : $|G_N(z)|\leqslant\exp\left(\sum_{j=0}^{N}|g_j(z)|\right)\leqslant\exp\left(\sum_{j=0}^{\infty}\|g_j\|_{\infty,K}\right)$ où $\|g_j\|_{\infty,K}$ désigne le sup du module de g_j sur le compact K (qui est bien défini puisque les fonctions g_j sont holomorphes donc continues sur le compact K). L'hypothèse de convergence normale sur K donne donc l'existence de $C_K>0$ telle que
$$\forall z\in K,\qquad |G_N(z)|\leqslant C_K.$$

D'autre part, d'après la question 1.a puis la question 1.b, on a

$$\left|\prod_{j=N+1}^{N'}\big(1+g_j(z)\big)-1\right|\leqslant\left[\prod_{j=N+1}^{N'}(1+|g_j(z)|)\right]-1\leqslant\exp\left(\sum_{j=N+1}^{N'}\|g_j\|_{\infty,K}\right)-1.$$

Fixons $\varepsilon>0$. L'hypothèse de convergence normale sur K donne l'existence d'un entier $N_K>0$ tel que, dès que $N'>N\geqslant N_K$: $\sum_{j=N+1}^{N'}\|g_j\|_{\infty,K}\leqslant\ln(1+\varepsilon/C_K)$

Ainsi pour $N'>N\geqslant N_K$, on a
$$\forall z\in K,\qquad |G_{N'}(z)-G_N(z)|\leqslant\varepsilon.$$

La suite $(G_N)_{N\in\mathbf{N}}$ est donc uniformément de Cauchy sur K.

Conclusion : la suite $(G_N)_{N\in\mathbf{N}}$ de fonctions holomorphes sur U converge uniformément sur tout compact de U. En particulier, pour tout $z\in U$, $G(z)=\lim G_N(z)$ existe et la fonction G ainsi définie sur U est holomorphe, par convergence uniforme sur tout compact.

3. (a) Pour tout $n\in\mathbf{N}$ et tout $z\in\mathbf{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z)\geqslant 0$, on a

$$|f_n(z)|^2=\frac{1-2\alpha_n\mathrm{Re}(z)+\alpha_n^2|z|^2}{1+2\alpha_n\mathrm{Re}(z)+\alpha_n^2|z|^2}$$

car α_n est réel. Comme $\alpha_n\mathrm{Re}(z)\geqslant 0$, on obtient $|f_n(z)|\leqslant 1$.

Variante de rédaction (géométrique) : l'axe imaginaire Δ est la médiatrice de $[-1,1]$. Comme $\mathrm{Re}(\alpha_n z)\geqslant 0$, $\alpha_n z$ est dans le demi-plan droit délimité par Δ donc à une distance (usuelle) de -1 plus grande par rapport à 1. Ainsi $|-1-\alpha_n z|\geqslant|1-\alpha_n z|$ donc $|f_n(z)|\leqslant 1$.

(b) On applique les résultats de la question 2. avec $U=\Omega_1$, $g_0(z)=\dfrac{2}{(1+z)^2}-1$ et $g_j=f_{j-1}-1$ pour $j\geqslant 1$. On note que les fonctions g_j sont holomorphes sur Ω_1. En fait f_n est holomorphe sur $\mathbf{C}\setminus\{-1/\alpha_n\}$ et $-\dfrac{1}{\alpha_n}\leqslant -1$.

La série des α_n converge donc il existe n_0 tel que $\forall n\geqslant n_0$, $\alpha_n\leqslant 1/2$.

Il suffit donc de montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{j\geqslant n_0}(f_j-1)$ converge normalement sur tout compact (les fonctions g_j sont holomorphes sur Ω_1, la convergence normale sur tout compact de $\sum g_j$ ne dépend pas des premiers termes).

Fixons un compact $K\subset\Omega_1$.

On a, pour tout $z\in K$ et tout $n\geqslant n_0$:

$$|f_n(z)-1|=\left|\frac{-2\alpha_n z}{1+\alpha_n z}\right|=\frac{2\alpha_n|z|}{|1+\alpha_n z|}.$$

Par compacité, il existe $C_K>0$ tel que $\forall z\in K,\quad |z|\leqslant C_K$.

Par ailleurs, $|1+\alpha_n z|\geqslant\mathrm{Re}(1+\alpha_n z)=1+\alpha_n\mathrm{Re}(z)\geqslant 1-\alpha_n\geqslant 1/2$.

Ainsi $\sup\limits_{z\in K}|f_n(z)-1|\leqslant 4C_K.\alpha_n$ donc la série $\sum\limits_{j\geqslant n_0}(f_j-1)$ converge normalement sur K (puisque $\sum\alpha_n$ converge).

(c) Comme F est holomorphe sur Ω_1, la fonction φ est continue sur $\mathbf{R}$. De plus, pour tout $s\in\mathbf{R}$:

$$|\varphi(s)|=\lim_{N\to+\infty}\frac{2}{1+s^2}\prod_{n=0}^{N}|f_n(is)|\leqslant\frac{2}{1+s^2}$$

puisque $|f_n(is)|\leqslant 1$ (cf 3.a).

Or $s\mapsto\dfrac{2}{1+s^2}$ admet une primitive (2 arctan en l'occurrence) ayant des limites (finies) en l'infini. Ainsi φ est intégrable sur $\mathbf{R}$.

4. On applique la formule de Cauchy à F en $z\in\Omega_0$, avec le contour γ_R suggéré par l'énoncé (on note que l'indice de z relativement à γ_R vaut 1) :

$$F(z)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_R}\frac{F(w)}{w-z}\,dw=-\frac{1}{2i\pi}\int_{-R}^{R}\frac{F(is)}{is-z}\,i\,ds+\frac{1}{2i\pi}\int_{C_R}\frac{F(w)}{w-z}\,dw$$

où C_R est le demi-cercle droit de centre O, de rayon R (orienté positivement).

En ce qui concerne le premier terme : l'intégrande est continu sur $\mathbf{R}$ (noter que $z-is\neq 0$ car $\mathrm{Re}(z)>0$) et bornée par $|\varphi(s)|$ dès que $|s|\geqslant|z|+1$ (alternativement, on peut préférer le borner par $|\varphi(s)|/\mathrm{Re}(z)$ pour tout

$s \in \mathbf{R}$) donc $s \mapsto \dfrac{\varphi(s)}{z-is}$ est intégrable sur $\mathbf{R}$ d'après la question précédente. Ainsi, ce premier terme a une limite quand R tend vers l'infini : $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(s)}{z-is}\,ds$.

Quant à l'autre terme : pour tout $w \in C_R$, on a, dès que $R > 1$:

$$\left|\frac{F(w)}{w-z}\right| \leqslant \frac{2}{|w-z|.|1+w|^2} \leqslant \frac{2}{(R-|z|).(R-1)^2}$$

donc

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{C_R} \frac{F(w)}{w-z}\,dw\right| \leqslant \frac{\pi R}{2\pi}\cdot\frac{2}{(R-|z|).(R-1)^2} \sim \frac{1}{R^2}$$

qui converge vers 0 quand R tend vers l'infini.

Ainsi le passage à la limite quand R tend vers l'infini donne $F(z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(s)}{z-is}\,ds$.

5. (a) Il s'agit de la transformée de Fourier $\mathscr{F}(\varphi)$ de φ en $\ln(x)$, d'une fonction intégrable sur $\mathbf{R}$ ($\varphi \in L^1(\mathbf{R})$ d'après 3.c). Donc μ hérite des propriétés de telles fonctions.

(b) Le lemme de Riemann-Lebesgue nous donne $\lim\limits_{x\to 0^+} \mu(x) = \lim\limits_{y\to-\infty} \mathscr{F}(\varphi)(y) = 0$. Ainsi μ se prolonge par continuité avec $\mu(0) = 0$. De plus, pour tout $x \in]0,1]$, on a

$$|\mu(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|\,dt \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1+t^2}\,dt = 1.$$

donc $\|\mu\|_\infty \leqslant 1$.

6. Pour tout $z \in \Omega_0$, on a $F(z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(s)}{z-is}\,ds$ d'après la question 4.

Mais $\dfrac{1}{z-is}$ s'écrit aussi $\displaystyle\int_0^1 x^{z-is-1}\,dx = \int_0^1 x^{z-1}\mathrm{e}^{-is\ln(x)}\,dx$.

La fonction $\left|\begin{array}{ccc}]0,1]\mathbb{T}imes\mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ (x,s) & \longmapsto & \mathrm{e}^{(z-is-1)\ln(x)}\varphi(s) \end{array}\right.$ est continue (donc mesurable) et intégrable (dans $L^1(]0,1]\mathbb{T}imes\mathbf{R})$) d'après Fubini-Tonelli puisque

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}}\left(\int_0^1 |x^{z-is-1}|.|\varphi(s)|\,dx\right)ds &= \int_{\mathbf{R}}\left(\int_0^1 x^{\mathrm{Re}(z)-1}.|\varphi(s)|\,dx\right)ds \\ &= \frac{1}{\mathrm{Re}(z)}\int_{\mathbf{R}} |\varphi(s)|\,ds \leqslant \frac{2\pi}{\mathrm{Re}(z)} < \infty \end{aligned}$$

Ainsi, d'après Fubini, on a

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^1\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s)x^{z-1}\mathrm{e}^{-is\ln(x)}\,ds\right)dx = \int_0^1\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s)\mathrm{e}^{-is\ln(x)}\,ds\right)x^{z-1}\,dx.$$

Mais pour tout $x \in]0,1]$, on a $\mu(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s)\mathrm{e}^{-is\ln(x)}\,ds$ d'où la relation finale.

PARTIE III

1. (a) Pour $x \in]0,1]$, on a $Q_1(x) = (\lambda_1 - k)x^{\lambda_1}\left[\dfrac{t^{k-\lambda_1}}{k-\lambda_1}\right]_x^1 = x^k - x^{\lambda_1}$.

Comme $k \geqslant 1$, on a $\nu_k(0) = 0$. Finalement, $Q_1 = \nu_k - \nu_{\lambda_1}$.

Puisque Q_1 est nulle en 0 et en 1, la fonction $|Q_1|$ admet un maximum en un point $c \in]0,1[$ vérifiant

$$Q_1'(c) = kc^{k-1} - \lambda_1 c^{\lambda_1 - 1} = 0$$

donc $kc^k = \lambda_1 c^{\lambda_1}$ donc $\|Q_1\|_\infty = \left|\frac{k}{\lambda_1}c^k - c^k\right| = \left|1 - \frac{k}{\lambda_1}\right| c^k \leqslant \left|1 - \frac{k}{\lambda_1}\right|$.

Variante de rédaction : on pouvait aussi majorer l'expression intégrale de Q_1 et raisonner comme dans la question 1.c.

(b) On va montrer le résultat par récurrence : $\mathscr{H}_n$: " $Q_n - \nu_k \in \mathrm{vect}\{\nu_{\lambda_1}, \dots, \nu_{\lambda_n}\}$ ".

$\mathscr{H}_1$ est trivialement vraie (cf 1.a).

Supposons que $\mathscr{H}_n$ soit vraie où $n \geqslant 1$. On a donc $Q_n(x) = x^k + \sum_{j=1}^{n} a_j x^{\lambda_j}$ pour tout $x \in [0,1]$, où $a_1, \dots, a_n$ sont des réels indépendants de x. On a ainsi (puisque $k \notin \Lambda$ et que les λ_i sont distincts) pour $x \in]0,1]$

$$\begin{aligned} Q_{n+1}(x) &= (\lambda_{n+1} - k)x^{\lambda_{n+1}} \int_x^1 Q_n(t) t^{-1-\lambda_{n+1}}\, dt \\ &= (\lambda_{n+1} - k)x^{\lambda_{n+1}} \left[\frac{1 - x^{k-\lambda_{n+1}}}{k - \lambda_{n+1}} + \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{1 - x^{\lambda_j - \lambda_{n+1}}}{\lambda_j - \lambda_{n+1}} \right] \end{aligned}$$

donc

$$Q_{n+1}(x) = x^k - x^{\lambda_{n+1}} + \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\lambda_{n+1} - k}{\lambda_j - \lambda_{n+1}} \left(x^{\lambda_{n+1}} - x^{\lambda_j} \right)$$

et cette relation est encore vraie en $x = 0$.

Ainsi $\mathscr{H}_{n+1}$ est vraie, ce qui achève la récurrence.

(c) À nouveau, on va montrer le résultat par récurrence : pour $n \geqslant 1$

$$\mathscr{H}_n : \quad \text{“ } \|Q_n\|_\infty \leqslant \prod_{j=1}^{n} \left|1 - \frac{k}{\lambda_j}\right| \text{ "}$$

$\mathscr{H}_1$ est vraie d'après 1.a.

Supposons que $\mathscr{H}_n$ est vraie. Pour $j \geqslant 1$, on a $\lambda_j \geqslant \lambda_1 > \lambda_0 = 0$. On calcule :

$$\|Q_{n+1}\|_\infty \leqslant |\lambda_{n+1} - k| \sup_{x \in]0,1]} x^{\lambda_{n+1}} \left(\int_x^1 \prod_{j=1}^{n} \left|1 - \frac{k}{\lambda_j}\right| t^{-1-\lambda_{n+1}}\, dt \right)$$

donc

$$\|Q_{n+1}\|_\infty \leqslant |\lambda_{n+1} - k| \prod_{j=1}^{n} \left|1 - \frac{k}{\lambda_j}\right| \sup_{x \in]0,1]} \frac{1 - x^{\lambda_{n+1}}}{\lambda_{n+1}} = \prod_{j=1}^{n+1} \left|1 - \frac{k}{\lambda_j}\right|.$$

(d) On va justifier que $\|Q_n\|_\infty$ converge vers 0 et ainsi que $\nu_k \in \overline{M_\Lambda}$ puisque d'après 1.b, il existe un polynôme $P_n \in M_\Lambda$ tel que $\nu_k - P_n = Q_n$: on aura ainsi que la distance de ν_k à M_Λ tend vers 0.

Il suffit de montrer que $\prod_{j=1}^{n} \left|1 - \frac{k}{\lambda_j}\right|$ converge vers 0. C'est effectivement le cas :

$$\prod_{j=1}^{n} \left|1 - \frac{k}{\lambda_j}\right| = \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \ln \left|1 - \frac{k}{\lambda_j}\right| \right)$$

et $\ln\left|1-\frac{k}{\lambda_j}\right| = \ln\left(1-\frac{k}{\lambda_j}\right) \sim -\frac{k}{\lambda_j}$ au voisinage de l'infini (où en particulier $k < \lambda_j$), qui est le terme général d'une série divergente (à termes de signe constant) vers $-\infty$, par hypothèse sur les λ_j ; d'où le résultat par passage à l'exponentielle.

(e) On a donc pour tout $k \in \mathbf{N}$, $v_k \in \overline{M_\Lambda}$: lorsque $k \in \Lambda$, c'est trivialement vrai et cela découle de la question précédente quand $k \notin \Lambda$.

Comme M_Λ est un espace vectoriel, l'espace $\overline{M_\Lambda}$ aussi donc $M_\mathbf{N} \subset \overline{M_\Lambda}$ mais $M_\mathbf{N}$ est l'espace des polynômes. Il est dense dans $C([0,1])$ par le théorème de Weierstrass. Ainsi,

$$C([0,1]) = \overline{M_\mathbf{N}} \subset \overline{M_\Lambda} \subset C([0,1])$$

donc M_Λ dense dans $C([0,1])$.

2. (a) On applique les résultats de I.2. avec $u_n = \frac{1}{\lambda_n}$ pour $n \geqslant 1$ et $u_0 = 1$: la suite est bien décroissante (la suite Λ est une suite strictement croissante d'entiers naturels). Ainsi, pour $s \geqslant \lambda_1 \geqslant 1$, on a d'une part $u_0 \geqslant 1/s$ et $\lambda_0 \leqslant s$. D'autre part, pour $n \geqslant 1$: $u_n \geqslant 1/s \Longleftrightarrow \lambda_n \leqslant s$. Ainsi

$$N_s(\Lambda) = \operatorname{card}\{n \in \mathbf{N} \mid u_n \geqslant 1/s\} = K_s$$

donc $\lim\limits_{s\to+\infty} \frac{N_s(\Lambda)}{s} = 0$.

Variante de rédaction : appliquer les résultats de I.2. avec $u_n = \frac{1}{\lambda_n - \lambda_0 + 1}$ pour $n \in \mathbf{N}$, ce qui donne dans ce cas $N_s(\Lambda) = K_{s-\lambda_0+1}$ lorsque $s \geq \lambda_0$. Donc $N_s(\Lambda) = o(s)$.

(b) $\lim\limits_{p\to+\infty} \rho_p(\Lambda) = 0$ puisque c'est une suite de restes partiels d'une série convergente.

En effet la condition $\lambda_n > p$ signifie $n > n_p = \max\{n \mid \lambda_n \leqslant p\}$. En fait par définition, on a $N_p(\Lambda) = n_p + 1$. Ainsi n_p tend vers l'infini avec p d'après les résultats de I.2. et le lien fait dans la question précédente. On a bien que $\rho_p(\Lambda)$ est le reste partiel d'ordre n_p de la série (où $n_p \to \infty$ quand p tend vers l'infini).

3. On applique les résultats de II qui fournit une fonction μ, continue et bornée par 1 sur $[0,1]$, associée aux $\alpha_n = \frac{1}{\lambda_n + 1}$, où $n \in \mathbf{N}$. On note cette fonction μ_Λ. Pour tout $z \in \Omega_0$, on a

$$\int_0^1 x^{(z-1)} \mu_\Lambda(x)\,dx = F(z) = \frac{2}{(1+z)^2} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1-\alpha_n z}{1+\alpha_n z} = \frac{2}{(z+1)^2} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n + 1 - z}{\lambda_n + 1 + z}\,.$$

En particulier, pour tout $m \in \mathbf{N}$, on a $z = m+1 \in \Omega_0$ donc

$$\int_0^1 x^m \mu_\Lambda(x)\,dx = \frac{2}{(m+2)^2} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n - m}{\lambda_n + m + 2}\,.$$

4. (a) On note que pour tout $j \in \mathbf{N}$: $\int_0^1 x^{\lambda_j} \mu_\Lambda(x)\,dx = 0$ (le produit s'annule).

Tout $P \in M_\Lambda$ s'écrit comme combinaision linéaire des v_j. Par linéarité de l'intégrale, on a donc $\int_0^1 P(x)\,\mu_\Lambda(x)\,dx = 0$.

(b) Pour tout $q \notin \Lambda$ et tout $P \in M_\Lambda$, d'après la question précédente :

$$\int_0^1 (v_q - P)(x)\,\mu_\Lambda(x)\,dx = \int_0^1 v_q(x)\,\mu_\Lambda(x)\,dx$$

donc, puisque μ_Λ est bornée par 1 sur $[0,1]$:

$$\left|\int_0^1 \nu_q(x)\,\mu_\Lambda(x)\,dx\right| = \left|\int_0^1 (\nu_q - P)(x)\,\mu_\Lambda(x)\,dx\right| \begin{array}{l} \leqslant \displaystyle\int_0^1 |(\nu_q-P)(x).\mu_\Lambda(x)|\,dx \\ \leqslant \displaystyle\sup_{[0,1]} |(\nu_q-P)(x).\mu_\Lambda(x)| \\ \leqslant \displaystyle\sup_{[0,1]} |(\nu_q-P)(x)| \end{array}$$

ce qui donne le résultat en prenant la borne inférieure sur $P \in M_\Lambda$.

5. (a) On se souvient que tout $x > -1$ (ici $x \geqslant 0$ suffit) : $\ln(1+x) \leqslant x$.

Pour tout entier n tel que $\lambda_n > 2m$, on a $\lambda_n - m \geqslant \lambda_n/2 > 0$ donc

$$\ln\left(\frac{\lambda_n+m+2}{\lambda_n-m}\right) = \ln\left(1+\frac{2(m+1)}{\lambda_n-m}\right) \leqslant \frac{2(m+1)}{\lambda_n-m} \leqslant \frac{4(m+1)}{\lambda_n}.$$

Ainsi par sommation :

$$\sum_{\substack{\lambda_n>2m\\ n\in\mathbf{N}}} \ln\left(\frac{\lambda_n+m+2}{\lambda_n-m}\right) \leqslant 4(m+1)\rho_{2m}(\Lambda).$$

(b) (i) Pour tout entier $k \geqslant 1$, on a $\mathrm{e}^k = \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{k^p}{p!} \geqslant \frac{k^k}{k!}$ (en ne retenant que le terme pour $p = k$ dans cette somme de termes positifs). Donc $k! \geqslant k^k \mathrm{e}^{-k}$.

(ii) On va considérer que $\widetilde{N} \neq 0$, sinon les inégalités sont clairement vérifiées (les trois termes valent 1).

Pour tout entier n tel que $m < \lambda_n \leqslant 2m$, les termes $\lambda_n - m$ sont des entiers naturels distincts non nuls. Il y en a $\widetilde{N} = N_{2m}(\Lambda) - N_m(\Lambda)$ par définition. Ainsi

$$\prod_{\substack{m<\lambda_n\leqslant 2m\\ n\in\mathbf{N}}} \lambda_n - m \geqslant \widetilde{N}!$$

Pour être plus précis : écrivons $\{n \in \mathbf{N} |\ m < \lambda_n \leqslant 2m\} = \{a+1, \ldots, a+\widetilde{N}\}$ (puisque la suite λ_n est strictement croissante et qu'il y a $\widetilde{N}$ termes non nuls dans cet ensemble. De plus, on a $\lambda_{a+i} - m \geqslant i$ (suite strictement croissante d'entiers naturels) donc

$$\prod_{\substack{m<\lambda_n\leqslant 2m\\ n\in\mathbf{N}}} \lambda_n - m = \prod_{i=1}^{\widetilde{N}} (\lambda_{a+i} - m) \geqslant \prod_{i=1}^{\widetilde{N}} i = \widetilde{N}!$$

D'autre part, $\displaystyle\prod_{\substack{m<\lambda_n\leqslant 2m\\ n\in\mathbf{N}}} (\lambda_n + m + 2) \leqslant \prod_{\substack{m<\lambda_n\leqslant 2m\\ n\in\mathbf{N}}} (3m+2) = (3m+2)^{\widetilde{N}}$ puisque le produit comporte $\widetilde{N}$ termes.

On conclut donc que $\displaystyle\prod_{\substack{m<\lambda_n\leqslant 2m\\ n\in\mathbf{N}}} \frac{\lambda_n - m}{\lambda_n+m+2} \geqslant \frac{\widetilde{N}!}{(3m+2)^{\widetilde{N}}}.$

Enfin, avec la minoration de la question précédente de la factorielle (et compte tenu du fait que $(3m+2) \leqslant 3(m+1)$), on obtient

$$\frac{\widetilde{N}!}{(3m+2)^{\widetilde{N}}} \geqslant \frac{\widetilde{N}^{\widetilde{N}}\mathrm{e}^{-\widetilde{N}}}{3^{\widetilde{N}}.(m+1)^{\widetilde{N}}} = \exp\Big(-(m+1)\mathbb{T}heta\big(\widetilde{N}/(m+1)\big)\Big).$$

6. (a) On fixe $m \in \mathbf{N}$ et on applique les résultats précédents à $\Lambda' = \Lambda \setminus \{m\}$.

On note que $\rho_{2m}(\Lambda') = \rho_{2m}(\Lambda)$ et $N_s(\Lambda') \leqslant N_s(\Lambda)$.

D'après 3. et 4.b, comme $m \notin \Lambda'$, on a

$$\inf\{\|\nu_m - P\|_\infty \mid P \in M_{\Lambda'}\} \geqslant \left|\int_0^1 x^m \mu_{\Lambda'}(x)\,dx\right| = \frac{2}{(m+2)^2} \prod_{\substack{n\geqslant 0\\ \lambda_n\neq m}} \frac{|\lambda_n - m|}{\lambda_n + m + 2}\,.$$

De plus, d'après 5.a et 5.b (et le résultat admis), on a

$$\frac{2}{(m+2)^2} \prod_{\substack{n\geqslant 0\\ \lambda_n\neq m}} \frac{|\lambda_n - m|}{\lambda_n + m + 2} \geqslant \frac{1}{(m+2)^2} \prod_{\substack{n\geqslant 0\\ \lambda_n\neq m}} \frac{|\lambda_n - m|}{\lambda_n + m + 2} \geqslant \exp\Big(-(m+1)\gamma_m\Big)$$

avec

$$\gamma_m = \frac{2}{(m+1)}\ln(m+2) + 4\rho_{2m}(\Lambda) + \mathbb{T}heta\big(\widetilde{N}/(m+1)\big) + \mathbb{T}heta\big(\widehat{N}/(m+1)\big)$$

où $\widehat{N} = N_{m-1}(\Lambda')$ lorsque $m \geq 1$ ($\widehat{N} = 0$ pour $m = 0$) et $\widetilde{N} = N_{2m}(\Lambda') - N_m(\Lambda')$.

En particulier, puisque $\mathbb{T}heta$ est croissante sur $[0,3]$ (et que $\widehat{N}$ et $\widetilde{N}$ sont inférieurs à $N_{2m}(\Lambda) \leqslant 2m \leqslant 3(m+1)$),

$$\gamma_m \leqslant \frac{2}{(m+1)}\ln(m+2) + 4\rho_{2m}(\Lambda) + 2\mathbb{T}heta\big(N_{2m}(\Lambda)/(m+1)\big)$$

or d'après 2., $N_{2m}(\Lambda) = o(m+1)$ et d'autre part, $\mathbb{T}heta(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0, donc $\mathbb{T}heta\big(N_{2m}(\Lambda)/(m+1)\big)$ converge vers 0.

Par ailleurs, $\dfrac{2}{(m+1)}\ln(m+2)$ et $\rho_{2m}(\Lambda)$ convergent vers 0.

La suite $(\gamma_m)_m$ converge bien vers 0.

(b) Soit $m \notin \Lambda$. Si on avait $\nu_m \in \overline{M_\Lambda}$, alors on aurait une suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de M_Λ, convergente vers ν_m. Or pour tout $n \in \mathbf{N}$, d'après 6.a :

$$\|\nu_m - P_n\|_\infty \geqslant \mathrm{e}^{-(m+1)\gamma_m}$$

ce qui est absurde par passage à la limite sur n.

Formulation alternative : $\nu_m \in \overline{M_\Lambda}$ si et seulement si la distance de ν_m à l'espace M_Λ est nulle or la question 6.a exprime que cette distance est minorée par $\mathrm{e}^{-(m+1)\gamma_m}$ donc est strictement positive.

7. (a) On applique 6.a avec $m = \lambda_k$. Avec les notations de l'énoncé et pour $a_k \neq 0$ (sinon c'est trivial) :

$$\left\|\nu_{\lambda_k} - \frac{1}{a_k}(a_k\nu_{\lambda_k} - P)\right\|_\infty \geqslant \inf\{\|\nu_{\lambda_k} - A\|_\infty;\ A \in M_{\Lambda\setminus\{\lambda_k\}}\} \geqslant \exp\Big(-(\lambda_k+1)\gamma_{\lambda_k}\Big)$$

Ainsi en réarrangeant : $\mathbb{T}au_k.\mathbb{T}au_k^{\lambda_k}\|P\|_\infty \geqslant |a_k|$ avec $\mathbb{T}au_k = \exp\Big(\gamma_{\lambda_k}\Big)$ qui définit une suite convergente vers 1 (car γ_{λ_k} convergente vers 0) donc bornée, disons par T. Il existe un entier $k_1 \geqslant 1$ tel que $\mathbb{T}au_k \leqslant (1+\varepsilon)$ quand $k \geqslant k_1$. Par ailleurs, on peut définir $C \geqslant 1$ supérieur au maximum des $\left(\dfrac{\mathbb{T}au_k}{1+\varepsilon}\right)^{\lambda_k}$ pour $0 \leqslant k < k_1$. On conclut donc que pour tout $k \in \mathbf{N}$

$$\beta_\varepsilon(1+\varepsilon)^{\lambda_k}\|P\|_\infty \geqslant |a_k|$$

où $\beta_\varepsilon = T.C$.

(b) On utilise la question précédente : fixons $i \in \mathbf{N}$. Pour tous $n, n' \in \mathbf{N}$, on a

$$\beta_\varepsilon(1+\varepsilon)^{\lambda_i}\|P_n - P_{n'}\|_\infty \geqslant |a_{n,i} - a_{n',i}|$$

et la suite $(a_{n,i})_n$ est donc de Cauchy puisque $(P_n)_n$ en est une (convergente vers f) dans $C([0,1])$. Par complétude de $\mathbf{C}$, cette suite est donc convergente vers un $a_i \in \mathbf{C}$.

(c) On peut désormais passer à la limite (sur n) dans la relation

$$\beta_\varepsilon(1+\varepsilon)^{\lambda_i}\|P_n\|_\infty \geqslant |a_{n,i}|$$

et on obtient

$$\beta_\varepsilon(1+\varepsilon)^{\lambda_i}\|f\|_\infty \geqslant |a_i|.$$

Fixons $x \in [0,1[$. Comme $x<1$, on peut choisir un $\varepsilon>0$ tel que $r = x(1+\varepsilon)<1$. On a alors pour tout $i \in \mathbf{N}$

$$\beta_\varepsilon r^{\lambda_i}\|f\|_\infty \geqslant |a_i|x^{\lambda_i}$$

et la série des $a_i x^{\lambda_i}$ converge (absolument).
D'autre part, par passage à la limite (sur n') dans la relation

$$\beta_\varepsilon(1+\varepsilon)^{\lambda_i}\|P_n - P_{n'}\|_\infty \geqslant |a_{n,i}-a_{n',i}|$$

on obtient

$$\beta_\varepsilon(1+\varepsilon)^{\lambda_i}\|P_n - f\|_\infty \geqslant |a_{n,i}-a_i|$$

Ainsi

$$|P_n(x) - \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{\lambda_i}| = |\sum_{i=0}^{\infty} a_{n,i}x^{\lambda_i} - \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{\lambda_i}| \leqslant \Big(\sum_{i=0}^{\infty} r^{\lambda_i}\Big)\beta_\varepsilon\|P_n - f\|_\infty$$

donc en passant à la limite sur n : $f(x) - \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{\lambda_i} = 0$.

8. (a) On utilise l'uniforme continuité de f sur le compact $[0,1]$ (Th. Heine).

Soit $\varepsilon>0$: il existe $\eta>0$ tel que pour tous $x,y\in[0,1]$ vérifiant $|x-y|\leqslant\eta$, on a $|f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon$. Dès lors, pour $r\geqslant 1-\eta$, on a pour tout $t\in[0,1]$: $|rt-t|\leqslant \eta t\leqslant\eta$ donc $|f(rt)-f(t)|\leqslant\varepsilon$, soit $\|f_r - f\|_\infty\leqslant\varepsilon$.

(b) Si $f\in\overline{M_\Lambda}$, on a bien l'existence d'une telle suite (a_i) d'après 7.c.

Réciproquement, soit $f\in C([0,1])$ vérifiant $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{\lambda_i}$ pour tout $x\in[0,1[$ (pour une certaine suite $(a_i)_{i\in\mathbf{N}}$). Fixons $\varepsilon>0$, il existe $r<1$ tel que $\|f_r - f\|_\infty\leqslant\varepsilon$ (cf 8.a.). Mais pour tout $x\in[0,1]$, comme $rx\in[0,1[$:

$$f(rx) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i r^{\lambda_i}x^{\lambda_i}$$

et la convergence de cette série entière est uniforme sur $[0,1]$ (puisque celle définissant f est uniforme sur $[0,r]$). Il existe donc un entier J telle que

$$\Big\|f_r - \sum_{i=0}^{J} a_i r^{\lambda_i}\nu_{\lambda_i}\Big\|_\infty \leqslant\varepsilon$$

On en conclut que $\Big\|f - \sum_{i=0}^{J} a_i r^{\lambda_i}\nu_{\lambda_i}\Big\|_\infty \leqslant 2\varepsilon$ donc $f\in\overline{M_\Lambda}$.

PARTIE IV

1. (a) Pour $x\in S$ fixé, l'application $f\in V\mapsto f(x)$ est une forme linéaire continue de norme inférieure à 1 puisque $|f(x)|\leqslant \sup_{s\in S}|f(s)|\leqslant\|f\|_\infty$. De même pour l'application $f\in V\mapsto f(y)$ et enfin pour $\xi_{x,y}$ par combinaision linéaire.

(b) Comme f est C^1 sur S, f' est continue donc bornée sur le compact S.

Pour tous $x \neq y \in S$, d'après l'inégalité des accroissements finis, on a donc

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \sup_{s\in S} |f'(s)|.|x - y|.$$

Ce qui s'écrit encore :

$$|\xi_{x,y}(f)| \leqslant \sup_{s\in S} |f'(s)|.$$

(c) On applique le théorème de Banach-Steinhaus : V est un sous-espace fermé du Banach $C([0,1])$ donc est lui-même un espace de Banach. Les formes linéaires $\xi_{x,y}$ sont continues et la question précédente nous dit que le théorème s'applique. Ainsi

$$\sup_{\substack{x,y\in S\\ x\neq y}} \|\xi_{x,y}\| < \infty.$$

Appelons $\mathcal{N}(S)$ cette quantité (dans l'éventualité où cette quantité est nulle i.e. les fonctions de V sont constantes sur S, on peut choisir plutôt $\mathcal{N}(S) = 1$, par exemple).

Cela s'écrit encore : pour tout $f \in V$ et tous $x, y \in S$ avec $x \neq y$:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \mathcal{N}(S).|x - y|.\|f\|_\infty$$

qui est encore trivialement vrai quand $x = y$.

(d) Soit $f \in V$. Par continuité de f sur le compact S : $\sup_{t\in S} |f(t)| = \max_{t\in S} |f(t)| = |f(s)|$ pour un $s \in S$. Il existe k tel que $|s - t_k| \leqslant \dfrac{1}{2\mathcal{N}(S)}$ puisque les intervalles $[t_l, t_{l+1}]$ recouvrent S et ont une longueur inférieure à $\dfrac{1}{\mathcal{N}(S)}$ (tout simplement, on choisit "le" t_l le plus proche de s). On utilise la question précédente :

$$|f(s) - f(t_k)| \leqslant \mathcal{N}(S).|s - t_k|.\|f\|_\infty \leqslant \frac{1}{2}\|f\|_\infty$$

d'où

$$\sup_{t\in S} |f(t)| = |f(s)| \leqslant |f(t_k)| + \frac{1}{2}\|f\|_\infty \leqslant \sup_{0\leqslant l\leqslant L} |f(t_l)| + \frac{1}{2}\|f\|_\infty .$$

2. *Méthode* 1 *(élémentaire).* En appliquant ce qui précède avec $S = [0,1]$, on obtient un entier L (dépendant de F_0 uniquement) tel que pour toute fonction $f \in F_0$, on ait $\|f\|_\infty \leqslant \sup_{0\leqslant l\leqslant L} |f(t_l)| + \frac{1}{2}\|f\|_\infty$ donc

$$\|f\|_\infty \leqslant 2 \sup_{0\leqslant l\leqslant L} |f(t_l)|.$$

Considérons l'application

$$\begin{array}{ccc} F_0 & \longrightarrow & \mathbf{C}^{L+1} \\ f & \longmapsto & \big(f(t_0), \dots, f(t_L)\big) \end{array}$$

Si $f \in F_0$ est telle que tous les $f(t_l)$ sont nuls, l'inégalité ci-dessus donne $\|f\|_\infty = 0$ donc $f = 0$. L'application (qui est clairement linéaire) est donc injective. Donc F_0 est de dimension finie (au plus $L + 1$).

Méthode 2 *(classique).* On peut conclure à partir de la question c. en invoquant Ascoli et le théorème de Riesz. En effet, en appliquant 1.c avec $S = [0,1]$, la boule unité fermée de F_0 est alors équicontinue. La bornitude ponctuelle de cette boule est évidente et on en déduit que c'est une partie compacte de $C([0,1])$. Enfin le théorème de Riesz nous dit que F_0 est donc de dimension finie.

3. (a) Il suffit de considérer un espace de Müntz $\overline{M_\Lambda}$ associé à Λ avec $\sum_{n\geqslant 1} 1/\lambda_n$ convergente : par exemple $\lambda_n = n^2$ convient.

En effet $\overline{M_\Lambda}$ est (évidemment!) fermé dans $C([0,1])$ et d'après III.7.c (ou encore 8.b), toutes les fonctions f dans $\overline{M_\Lambda}$ sont développables en série entière avec un rayon de convergence d'au moins 1 : elles sont donc C^∞ (en particulier C^1) sur $[0,1[$. Enfin, cet espace est de dimension infinie puisqu'il contient l'espace (de polynômes) engendré par la famille (infinie) des monômes v_{λ_i}.

(b) Pour tout $f \in X_0$, la suite $\big(f(s_n)\big)_n$ est bien convergente (vers $f(1)$) puisque f est continue en 1 et $(s_n)_n$ converge vers 1 par définition. L'application J est donc bien définie.

De plus, $N_\infty(J(f)) = \sup\limits_n |f(s_n)| \leqslant \|f\|_\infty$.

D'autre part, fixons $x \in [0,1[$: x appartient à un intervalle $\left[a_j, a_{j+1}\right]$ (car $a_0 = 0$ et la suite $(a_n)_n$ est strictement croissante vers 1). D'après 1.d avec $S = \left[a_j, a_{j+1}\right]$ (le rôle des t_l étant joué par les s_i où $n_j \leqslant i \leqslant n_{j+1}$), on a donc

$$|f(x)| \leqslant \sup_{n_j \leqslant i \leqslant n_{j+1}} |f(s_i)| + \frac{1}{2}\|f\|_\infty \leqslant N_\infty(J(f)) + \frac{1}{2}\|f\|_\infty.$$

Par passage au sup pour x décrivant $[0,1[$, on obtient $\|f\|_\infty \leqslant N_\infty(J(f)) + \dfrac{1}{2}\|f\|_\infty$ et la conclusion.

(c) J réalise donc un isomorphisme de X_0 sur $J(X_0) \subset c$ (bien bicontinue par la question précédente). Enfin, en utilisant l'isomorphisme T du I.3., $T \circ J$ réalise donc un isomorphisme de X_0 sur $Z_0 = T \circ J(X_0) \subset c_0$.

(d) Notons Z_0 "le" sous-espace de c_0 auquel X_0 est isomorphe (celui donné par la question précédente).

Le dual Z_0^* est isomorphe à X_0^* via $\xi \in Z_0^* \mapsto \xi\circ\psi \in X_0^*$ si $\psi : X_0 \to Z_0$ isomorphisme. En effet cette application est clairement bijective (d'inverse $u \in X_0^* \mapsto u\circ\psi^{-1} \in Z_0^*$. D'autre part, la continuité découle de la majoration

$$\|\xi \circ \psi\| \leq \|\xi\| \cdot \|\psi\|.$$

De même, la réciproque est continue de norme $\|\psi^{-1}\|$.

Comme le caractère séparable se conserve évidemment par isomorphisme, il suffit de montrer que Z_0^* est séparable.

L'énoncé nous rappelle que le dual de c_0 est (isomorphe à) ℓ^1 qui est séparable : considérons donc $(\beta_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite dense de c_0^* et montrons que la suite des applications $\beta_{n|Z_0}$ (restriction de β_n à Z_0) est dense dans Z_0^*. Fixons $\varepsilon > 0$, et $\xi \in Z_0^*$, il existe un prolongement $\mathbb{T}ilde\xi$ de ξ en une forme linéaire continue (avec même norme) sur c_0, par Hahn-Banach. Il existe alors $n \in \mathbf{N}$ tel que $\|\mathbb{T}ilde\xi - \beta_n\| \leqslant \varepsilon$. A fortiori, par restriction à Z_0, on a $\|\xi - \beta_{n|Z_0}\| \leqslant \varepsilon$. D'où la densité des $\beta_{n|Z_0}$, ce qui donne la séparabilité de Z_0^* donc le résultat.

4. (a) On a déjà signalé que δ_x est une forme linéaire continue sur $C([0,1])$, de norme inférieure à 1 puisque pour toute fonction $f \in C([0,1])$

$$|\delta_x(f)| = |f(x)| \leqslant \|f\|_\infty.$$

Ainsi pour tous $x \neq y \in [0,1]$, on a $\|\delta_x - \delta_y\| \leqslant 2$. De plus, il existe une fonction f, continue sur $[0,1]$, prenant ses valeurs dans $[-1,1]$ telle que $f(x) = 1$ et $f(y) = -1$ (on la choisit par exemple affine par morceaux). Ainsi

$$\|\delta_x - \delta_y\| \geqslant |\delta_x(f) - \delta_y(f)| = |f(x) - f(y)| = 2.$$

(b) L'application χ est bien définie : l'existence de cet entier n provient de la densité de $\{\omega_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ dans $C([0,1])^*$.

L'application χ est injective : supposons que $\chi(x) = \chi(y) = n$ avec $x \neq y \in [0,1]$, alors

$$2 = \|\delta_x - \delta_y\| \leqslant \|\delta_x - \omega_n\| + \|\omega_n - \delta_y\| < 1 + 1$$

ce qui est impossible.

L'application χ réalise alors une bijection de $[0,1]$ sur $\chi([0,1]) \subset \mathbf{N}$. Or $[0,1]$ n'est pas dénombrable. Ainsi il n'existe pas de telle suite $(\omega_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $C([0,1])^*$ n'est pas séparable.

PARTIE V

1. (a) Fixons $f \in C_P(\mathbb{T})$, on constate que pour tout réel x :

$$\Phi_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_N(x-t)f(t)\,dt = \sum_{k=-N}^{N} \frac{\mathrm{e}_k(x)}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}_k(-t)f(t)\,dt = \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k)\mathrm{e}_k(x)$$

Mais comme f est paire : on a $\widehat{f}(k) = \widehat{f}(-k)$ pour tout $k \in \mathbf{N}$ et ainsi

$$\Phi_N(f)(x) = \widehat{f}(0) + 2\sum_{k=1}^{N} \widehat{f}(k)\cos(kx).$$

On a bien $\Phi_N(f) \in \Gamma_N$. On note que l'application Φ_N est clairement linéaire. De plus, lorsque $f \in \Gamma_N$, on a $f(x) = \sum_{k=0}^{N} c_k \cos(kx)$. En fait $\widehat{f}(0) = c_0$ et pour tout $k \in \{1, \dots, N\}$, $\widehat{f}(k) = \widehat{f}(-k) = c_k/2$. Ainsi $\Phi_N(f) = f$ par la relation ci-dessus. L'application Φ_N est bien une projection de $C_P(\mathbb{T})$ sur Γ_N.

(b) On a immédiatement la majoration $\|\Phi_N(f)\|_{\mathbb{T}} \leqslant \|D_N\|_1 \|f\|_{\mathbb{T}}$ donc

$$\|\Phi_N\| \leqslant \|D_N\|_1 = \mathscr{L}_N.$$

Réciproquement

Variante 1. Comme D_N est paire, la fonction signe de D_N est aussi paire. En fait, D_N change de signe un nombre fini de fois : plus précisément, le signe de D_N sur $]0, 2\pi[$ est donné par le signe de $t \mapsto \sin((2N+1)t/2)$. Soit σ la fonction qui vaut le signe de D_N sur chaque intervalle $\left]\frac{2k\pi}{2N+1}, \frac{2(k+1)\pi}{2N+1}\right[$ avec $0 \leqslant k \leqslant 2N$, et vaut 0 en chaque $\frac{2k\pi}{2N+1}$. Il existe une suite $(f_j)_j$ de fonctions de $C(\mathbb{T})$ (que l'on peut choisir en fait affines par morceaux), paires, à valeurs dans $[-1, 1]$ qui converge ponctuellement (simplement) vers D_N. Concrètement, avec ε_j décroissante vers 0 (et à valeurs dans $]0, 1/2N[$ disons), on peut prendre f_j égale à σ sur $\left[\frac{2k\pi}{2N+1} + \varepsilon_j, \frac{2(k+1)\pi}{2N+1} - \varepsilon_j\right]$, nulle en chaque point $\frac{2k\pi}{2N+1}$ et affine sur $\left[\frac{2k\pi}{2N+1}, \frac{2k\pi}{2N+1} + \varepsilon_j\right]$ et sur $\left[\frac{2(k+1)\pi}{2N+1} - \varepsilon_j, \frac{2(k+1)\pi}{2N+1}\right]$. On prolonge cette fonction par 2π périodicité.

De la relation

$$\|\Phi_N\| \geqslant \|\Phi_N(f_j)\|_{\mathbb{T}} \geqslant \Phi_N(f_j)(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_N(t) f_j(t)\,dt$$

pour tout j, on obtient par passage à la limite sur j (par exemple en invoquant le théorème de convergence dominée) :

$$\|\Phi_N\| \geqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_N(t)\sigma(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D_N(t)|\,dt = \mathscr{L}_N.$$

Variante 2. On considère une suite $(\varepsilon_j)_j$ décroissante vers 0 et $f_j = \frac{D_N}{|D_N| + \varepsilon_j} \in C_P(\mathbb{T})$ puisque D_N est paire. On note que ces fonctions appartiennent à la boule unité de $C_P(\mathbb{T})$. Puis on conclut de la même façon (ou via le théorème de convergence monotone) :

$$\|\Phi_N\| \geqslant \lim_j \Phi_N(f_j)(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lim_j D_N(t) f_j(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lim_j \frac{D_N^2}{|D_N| + \varepsilon_j}\,dt = \mathscr{L}_N.$$

2. (a) Fixons $x \in \mathbf{R}$. Il suffit de remarquer que l'application

$$y \in \mathbf{R} \longmapsto \left(\widetilde{P}\big(\mathbb{T}au_y(f)\big)\right)(x-y)$$

est continue (donc l'intégrale sur le segment $[0, 2\pi]$ sera bien définie).

En effet, l'application $y \in \mathbf{R} \longmapsto \mathbb{T}au_y(f) \in C(\mathbb{T})$ est continue car f est uniformément continue sur $\mathbf{R}$ (par Heine sur tout compact, puis par périodicité). Ainsi par composition, l'application $y \in \mathbf{R} \longmapsto \widetilde{P}\big(\mathbb{T}au_y(f)\big)$ est continue, puisque $\widetilde{P}$ est continue sur $C(\mathbb{T})$ (elle-même composée de Ψ et P, continues).

En fixant $y_0 \in \mathbf{R}$, on a pour tout $y \in \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned}\left|\left(\widetilde{P}\big(\mathbb{T}au_y(f)\big)\right)(x-y) - \left(\widetilde{P}\big(\mathbb{T}au_{y_0}(f)\big)\right)(x-y_0)\right| &\leqslant \left\|\widetilde{P}\big(\mathbb{T}au_y(f)\big) - \widetilde{P}\big(\mathbb{T}au_{y_0}(f)\big)\right\|_{\mathbb{T}} \\ &\quad + \left|\left(\widetilde{P}\big(\mathbb{T}au_{y_0}(f)\big)\right)(x-y) - \left(\widetilde{P}\big(\mathbb{T}au_{y_0}(f)\big)\right)(x-y_0)\right|\end{aligned}$$

En utilisant de plus la continuité de l'application $y \mapsto \widetilde{P}\big(\mathbb{T}au_{y_0}(f)\big)(x-y)$ en y_0, la conclusion devient immédiate.

(b) Par linéarité, il suffit de vérifier cette relation pour les e_k, $k \in \mathbf{Z}$, qui forment une base de $\mathcal{T}$. On note que pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a $\Psi(\mathrm{e}_k)(t) = \cos(kt)$.

Pour $k = 0$: puisque e_0 est constante (comme ses translatées) et appartient à Γ_N, on a

$$Q(\mathrm{e}_0)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \widetilde{P}(2\mathrm{e}_0)(x-y)\,dy = 2 = 2\mathrm{e}_0(x)$$

qui est aussi égal à $1 + \Phi_N \circ \Psi(\mathrm{e}_0)(x)$.

Fixons, $k \in \mathbf{N}$, non nul. On remarque que $\mathbb{T}au_y(\mathrm{e}_k) = 2\cos(ky).\mathrm{e}_k$.

On suppose désormais que $N \geq 1$.

- Lorsque $|k| \in \{1, \dots, N\}$, on a $\widetilde{P}(\mathrm{e}_k) = P\big(\cos(k\cdot)\big) = \cos(k\cdot)$ car $\cos(k\cdot) \in \Gamma_N$.
  Pour tous $x, y \in \mathbf{R}$, on a donc

  $$\widetilde{P}\big(\mathbb{T}au_y(\mathrm{e}_k)\big)(x-y) = 2\cos(ky)\big(\widetilde{P}(\mathrm{e}_k)\big)(x-y) = 2\cos(ky)\cos(k(x-y))$$

  d'où

  $$Q(\mathrm{e}_k)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\cos(ky)\cos(k(x-y))\,dy$$

  On peut conclure immédiatement via un argument de coefficients de Fourier (comme dans l'étude ci-dessous du second cas) ou détailler par exemple le calcul en écrivant

  $$\begin{aligned} 2\cos(ky)\cos(k(x-y)) &= 2\big(\cos^2(ky)\cos(kx) + \cos(ky)\sin(ky)\sin(kx)\big) \\ &= \cos(kx) + \cos(2ky)\cos(kx) + \sin(2ky)\sin(kx).\end{aligned}$$

  Puisque l'intégrale des $\cos(p\cdot)$ et $\sin(p\cdot)$ est nulle pour p non nul, il vient

  $$Q(\mathrm{e}_k)(x) = \cos(kx) = \Psi(\mathrm{e}_k)(x)$$

  Comme $\widehat{\mathrm{e}_k}(0) = 0$ et Φ_N est l'identité sur Γ_N, on retrouve bien $\widehat{\mathrm{e}_k}(0) + \Phi_N \circ \Psi(\mathrm{e}_k)$.
- Lorsque $|k| > N$, on a

  $$Q(\mathrm{e}_k)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\cos(ky)\widetilde{P}(\mathrm{e}_k)(x-y)\,dy$$

  qui nul puisque $\widetilde{P}(\mathrm{e}_k)$ appartient à l'espace Γ_N donc tous les coefficients de Fourier de $\widetilde{P}(\mathrm{e}_k)$ en m sont nuls pour $|m| > N$.
  Par ailleurs, $\widehat{\mathrm{e}_k}(0) = 0$ et $\Phi_N \circ \Psi(\mathrm{e}_k) = 0$.

On conclut bien dans tous les cas.

(c) Pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $f \in \mathcal{T}$, on a

$$\forall y \in \mathbf{R}, \quad \left|\left(\widetilde{P}\big(\mathbb{T}au_y(f)\big)\right)(x-y)\right| \leqslant \|\widetilde{P}\big(\mathbb{T}au_y(f)\big)\|_{\mathbb{T}} \leqslant \|\widetilde{P}\|.\|\mathbb{T}au_y(f)\|_{\mathbb{T}} \leqslant 2\|P\|.\|\Psi\|.\|f\|_{\mathbb{T}}$$

mais on voit facilement que $\|\Psi\| = 1$, donc par l'inégalité triangulaire sur les intégrales :

$$\|Q(f)\|_{\mathbb{T}} = \sup_{x\in\mathbf{R}} |Q(f)(x)| \leqslant 2\|P\|.\|f\|_{\mathbb{T}}.$$

Comme $\Phi_N \circ \Psi(f) = Q(f) - \widehat{f}(0)$ et $\left|\widehat{f}(0)\right| \leq \|f\|_{\mathbb{T}}$, on obtient

$$\|\Phi_N \circ \Psi(f)\|_{\mathbb{T}} \leqslant \|f\|_{\mathbb{T}} + 2\|P\|.\|f\|_{\mathbb{T}}$$

puis comme $\mathcal{T}$ est dense dans $C(\mathbb{T})$ (et que Φ_N est continue sur $C_P(\mathbb{T})$ et Ψ est continue sur $C(\mathbb{T})$), on a $\|\Phi_N \circ \Psi(f)\|_{\mathbb{T}} \leqslant \|f\|_{\mathbb{T}} + 2\|P\|.\|f\|_{\mathbb{T}}$ pour tout $f \in C(\mathbb{T})$. En particulier pour tout $f \in C_P(\mathbb{T})$, on a : $\|\Phi_N(f)\|_{\mathbb{T}} \leqslant \|f\|_{\mathbb{T}} + 2\|P\|.\|f\|_{\mathbb{T}}$, ce qui donne

$$\|\Phi_N\| \leqslant 1 + 2\|P\|.$$

On conclut puisque $\mathcal{L}_N = \|\Phi_N\|$.

3. Soit $h \in vect(v_0, \dots, v_N)$. Ce n'était pas demandé mais on peut effectivement facilement justifier que $h\circ\rho \in \Gamma_N$: cela revient à justifier que $\cos^k(x) \in \Gamma_k \subset \Gamma_N$ pour $0 \leqslant k \leqslant N$. Ceci se voit par exemple via la formule du binôme en développant $(\mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_{-1})^k$.

On remarque que ρ est un homéomorphisme de $[0, 2\pi]$ sur $[0, 1]$ et que

$$\rho^{-1}(y) = arccos(2y - 1).$$

Pour $f \in C_P(\mathbb{T})$, on définit

$$P(f) = \left[\mathcal{R}\big(f \circ \rho^{-1}\big)\right] \circ \rho$$

qui vérifie $P(f) \in \Gamma_N$ car $\mathcal{R}\big(f \circ \rho^{-1}\big) \in vect(v_0, \dots, v_N)$.

On observe alors que lorsque $f \in \Gamma_N$, la fonction $h = f \circ \rho^{-1} \in vect(v_0, \dots, v_N)$ (car $\cos(nx)$ est un polynôme, de degré n, en $\cos(x)$) donc vérifie $\mathcal{R}(h) = h$ donc

$$P(f) = h \circ \rho = f.$$

Ainsi, P est une projection continue de $C_P(\mathbb{T})$ sur Γ_N donc, d'après 2.c, $\mathcal{L}_N \leqslant 1 + 2\|P\|$. Mais pour $f \in C_P(\mathbb{T})$, on a

$$\|P(f)\|_{\mathbb{T}} = \|\mathcal{R}\big(f \circ \rho^{-1}\big)\|_\infty \leqslant \|\mathcal{R}\|.\|\big(f \circ \rho^{-1}\big)\|_\infty = \|\mathcal{R}\|.\|f\|_{\mathbb{T}}$$

donc $\|P\| \leqslant \|\mathcal{R}\|$. Conclusion : $\mathcal{L}_N \leqslant 1 + 2\|\mathcal{R}\|$.

4. On exploite la même idée avec $r(u) = u^n$ soit $r^{-1}(v) = v^{1/n}$ avec $u, v \in [0, 1]$. On définit $\mathbb{T}ilde\mathcal{R}(f) = \big[\mathcal{R}\big(f\circ r\big)\big]\circ r^{-1}$ où $f \in C([0, 1])$. L'application $\mathbb{T}ilde\mathcal{R}$ est linéaire continue de $C([0, 1])$ dans $\mathrm{vect}(v_0, v_1, \dots, v_m)$ avec $\|\mathbb{T}ilde\mathcal{R}\| \leqslant \|\mathcal{R}\|$ (cf raisonnement du 3.).

Lorsque $f \in \mathrm{vect}(v_0, v_1, \dots, v_m)$, on a $f \circ r \in \mathrm{vect}(v_0, v_n, \dots, v_{nm})$ donc $\mathcal{R}\big(f \circ r\big) = f \circ r$ ainsi $\mathbb{T}ilde\mathcal{R}(f) = f$. On en conlut que $\mathbb{T}ilde\mathcal{R}$ est une projection continue de $C([0, 1])$ sur $\mathrm{vect}(v_0, v_1, \dots, v_m)$ donc, d'après 3.,

$$\mathcal{L}_m \leqslant 1 + 2\|\mathbb{T}ilde\mathcal{R}\| \leqslant 1 + 2\|\mathcal{R}\|.$$

PARTIE VI

1. L'espace vect$(v_0, v_1, \ldots, v_d)$ est de dimension finie $(d+1)$. L'application

$$P \in \text{ vect } (v_0, v_1, \ldots, v_d) \mapsto P'$$

est linéaire donc continue. On note $\Delta(d)$ la norme de cette application linéaire. On a par définition :

$$\|P'\|_\infty \leqslant \Delta(d)\|P\|_\infty.$$

On peut toujours supposer que $\Delta(d) \geqslant d$... (en fait, en testant sur le polynôme X^d i.e. la fonction v_d, on doit avoir $\Delta(d) \geqslant d$).

2. (a) Le degré de $P(X)$ est au plus m. La valuation de Q est au moins 1 donc celle de $Q(X^n)$ est d'au moins n. Ainsi, comme $n > m$, le coefficient de X^k dans le polynôme $P(X) + Q(X^n)$ est le coefficient de X^k dans le polynôme P pour $0 \leqslant k \leqslant m$. Donc si $P(X) + Q(X^n) = 0$ alors P est nul, a fortiori $Q(X^n)$ est nul donc Q aussi.

(b) (i) Pour tout $x \in [0, x_n]$, on a $x^n \in [0,1]$ et par l'inégalité des accroissements finis :

$$|Q(x^n)| = |Q(x^n) - Q(0)| \leqslant \|Q'\|_\infty |x^n| \leqslant x^n \Delta(m)\|Q\|_\infty \leqslant x_n^n \Delta(m)\|Q\|_\infty$$

d'après 1.

Mais $\|Q\|_\infty = \|Q(X^n)\|_\infty \leqslant 1 + \|P\|_\infty$ et on a aussi

$$|P(x)| \leqslant \|P(X) + Q(X^n)\|_\infty + |Q(x^n)| \leqslant 1 + |Q(x^n)|.$$

Il reste à remarquer que, comme $\ln(1-x) \leqslant -x$ pour $x \in [0,1[$, on a

$$x_n^n = \exp n \ln\left(1 - \frac{\ln(n)}{n}\right) \leqslant \exp -n\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) = \frac{1}{n}.$$

On conclut que $|P(x)| \leqslant 1 + \dfrac{\Delta(m)}{n}(1 + \|P\|_\infty)$.

(ii) Pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$|P(x)| \leqslant \max\left(\max_{[0,x_n]} |P(t)|, \max_{[x_n,1]} |P(t)|\right).$$

Or on sait déjà contrôler $\max\limits_{[0,x_n]} |P(t)|$ donc il suffit de montrer que pour tout $x \in [x_n, 1]$, on a

$$|P(x)| \leqslant \Delta(m)\frac{\ln(n)}{n}\|P\|_\infty + 1 + \frac{\Delta(m)}{n}(1 + \|P\|_\infty).$$

Fixons donc $x \in [x_n, 1]$. On utilise encore l'inégalité des accroissements finis et la question 1. :

$$|P(x) - P(x_n)| \leqslant \|P'\|_\infty |x - x_n| \leqslant \Delta(m)\|P\|_\infty |x - x_n|$$

donc

$$|P(x)| \leqslant |P(x_n)| + \Delta(m)\|P\|_\infty |x - x_n|$$

mais $|x - x_n| \leqslant 1 - x_n = \dfrac{\ln(n)}{n}$ et d'après 2.a

$$|P(x_n)| \leqslant 1 + \frac{\Delta(m)}{n}(1 + \|P\|_\infty)$$

d'où la majoration cherchée.

(c) Soient P et Q de degré au plus m avec $Q(0) = 0$.
Si $\|P(X) + Q(X^n)\|_\infty = 0$ alors $P(X) + Q(X^n) = 0$ et P est nul d'après 2.a. et l'inégalité est donc triviale
Sinon on peut considérer les polynômes

$$P_1 = \frac{1}{\|P(X) + Q(X^n)\|_\infty} P \qquad \text{et} \qquad Q_1 = \frac{1}{\|P(X) + Q(X^n)\|_\infty} Q$$

qui sont de degré au plus m avec $Q_1(0) = 0$ et de plus $\|P_1(X) + Q_1(X^n)\|_\infty = 1$.
Si $\|P_1\|_\infty \leqslant 1$ alors $\|P\|_\infty \leqslant \|P(X) + Q(X^n)\|_\infty$ et l'inégalité à montrer est trivialement vraie.
Sinon $\|P_1\|_\infty \geqslant 1$ et en applique 2.b.ii, on obtient

$$\|P_1\|_\infty \leqslant 1 + \frac{\Delta(m)}{n} + \Delta(m)\frac{\ln(n)+1}{n}\|P_1\|_\infty \leqslant 1 + \Delta(m)\frac{\ln(n)+2}{n}\|P_1\|_\infty$$

soit

$$\left(1 - \Delta(m)\frac{(2+\ln(n))}{n}\right)\|P\|_\infty \leqslant \|P(X) + Q(X^n)\|_\infty$$

3. Observons que la suite (n_j) est strictement croissante puisque

$$n_{j+1} > \frac{n_{j+1}}{2+\ln\left(n_{j+1}\right)} \geqslant (j+1)^2\Delta(jn_j) \geqslant \Delta(jn_j) \geqslant jn_j \geqslant n_j.$$

On fixe $j \geqslant 1$ et on effectue une récurrence sur $k \geqslant j$:

$$\mathscr{H}_k \qquad \text{“ } \|S_k\|_\infty \geqslant \frac{k+1}{2k}\|S_j\|_\infty.\text{"}$$

Pour $k = j$: $\mathscr{H}_j$ est vraie car $\dfrac{j+1}{2j} \leqslant 1$.
Supposons que $\mathscr{H}_k$ soit vraie. On note que le degré de S_k est majoré par kn_k et que $P_{k+1}(0) = 0$. D'autre part on a déjà signalé ci-dessus que $n_{k+1} > kn_k$.
D'après la question précédente, on a

$$\|S_{k+1}\|_\infty \geqslant \left(1 - \Delta(kn_k)\frac{(2+\ln(n_{k+1}))}{n_{k+1}}\right)\|S_k\|_\infty \geqslant \left(1 - \Delta(kn_k)\frac{(2+\ln(n_{k+1}))}{n_{k+1}}\right)\frac{k+1}{2k}\|S_j\|_\infty$$

en utilisant $\mathscr{H}_k$.
Il reste donc à justifier que $\left(1 - \Delta(kn_k)\dfrac{(2+\ln(n_{k+1}))}{n_{k+1}}\right)\dfrac{k+1}{2k} \geqslant \dfrac{k+2}{2(k+1)}$ mais ceci découle de la propriété des n_i. En effet, par définition on a

$$\Delta(kn_k)\frac{(2+\ln(n_{k+1}))}{n_{k+1}} \leqslant \frac{1}{(k+1)^2}$$

donc

$$\left(1 - \Delta(kn_k)\frac{(2+\ln(n_{k+1}))}{n_{k+1}}\right)\frac{k+1}{2k} \geqslant \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right)\frac{k+1}{2k} = \frac{k+2}{2(k+1)}.$$

Ainsi $\mathscr{H}_{k+1}$ est vraie.

4. Λ s'écrit $\{\lambda_n | \; n \in \mathbf{N}\}$ avec $\lambda_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$: $\lambda_{n+1} > \lambda_n$. On va voir que la série des $1/\lambda_n$ converge : pour le voir, il suffit de borner les sommes partielles (termes positifs) et on a pour tout $J \geqslant 2$:

$$\sum_{n=1}^{J(J+1)/2} \frac{1}{\lambda_n} = \sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{kn_j} \leqslant \sum_{j=1}^{J}\frac{j}{n_j}$$

or on sait que $\dfrac{n_j}{j} \geqslant j(2+\ln(n_j))\Delta((j-1)n_{j-1})$ et comme $\Delta((j-1)n_{j-1}) \geqslant (j-1)n_{j-1} \geqslant j-1$, on a $\dfrac{n_j}{j} \geqslant j(j-1)$ donc $\dfrac{j}{n_j}$ est le terme général d'une série convergente et a fortiori la série des $1/\lambda_n$ converge.

On peut appliquer le théorème de Clarkson-Erdös : pour toute fonction $f \in \overline{M_\Lambda}$, il existe une suite de complexes (a_i) telle que

$$\forall x \in [0,1[, \qquad f(x) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{i=0}^{N} a_i x^{\lambda_i}$$

Notons que la suite (a_i) est unique par unicité du développement en série entière.

En particulier, par définition de Λ dans cette partie :

$$\forall x \in [0,1[, \qquad f(x) = f(0) + \lim_{J\to+\infty} \sum_{j=1}^{J} P_j\big(x^{n_j}\big) = f(0) + \sum_{j=1}^{\infty} P_j\big(x^{n_j}\big)$$

où P_j est un polynôme de degré au plus j avec $P_j(0) = 0$.

En fait, $P_j(X) = \displaystyle\sum_{n_j \leqslant \lambda_i \leq j n_j} a_i X^{\lambda_i/n_j}$ est uniquement déterminé.

Fixons $j \geqslant 1$ et $0 < r < 1$. La suite des sommes partielles (S_k) converge normalement (donc uniformément) sur $[0,r]$ vers la fonction $f - f(0)$ (propriété des séries entières). La suite de fonctions $(S_k(r\,\cdot))_k$ converge donc uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction $f_r - f_r(0) = f_r - f(0)$. Ainsi,

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |S_k(rx)| = \|f_r - f(0)\|_\infty.$$

En appliquant la question 3. aux polynômes $P_j(rX)$ (qui vérifient les mêmes hypothèses de degré et de valuation), on obtient :

$$\sup_{x\in[0,1]} |S_j(rx)| \leqslant \frac{2k}{k+1} \sup_{x\in[0,1]} |S_k(rx)| \leqslant 2 \sup_{x\in[0,1]} |S_k(rx)|$$

donc $\sup_{x\in[0,1]} |S_j(rx)| \leqslant 2\|f_r - f(0)\|_\infty$ par passage à la limite sur k.

En particulier, pour tout $t \in [0,1[$, dès que $t \leqslant r < 1$, on a $|S_j(t)| \leqslant 2\|f_r - f(0)\|_\infty$ mais on sait que $\lim_{r\to 1^-} \|f_r - f(0)\|_\infty = \|f - f(0)\|_\infty$ (cf III.8.a.) ainsi après passage à la limite sur r vers 1, on obtient $|S_j(t)| \leqslant 2\|f - f(0)\|_\infty$ et par conséquent

$$\|S_j\|_\infty = \sup_{t\in[0,1[} |S_j(t)| \leqslant 2\|f - f(0)\|_\infty.$$

5. Supposons qu'il existe une projection continue $\mathscr{R}$ de $C([0,1])$ sur $\overline{M_\Lambda}$, alors on peut (par exemple) considérer pour tout entier $j \geqslant 2$ l'application

$$T_j \left| \begin{array}{lcc} C([0,1]) & \longrightarrow & vect(v_0, v_{n_j}, \ldots, v_{jn_j}) \\ & & \\ f & \longmapsto & \mathscr{R}(f)(0) + S_j\big(\mathscr{R}(f)\big) - S_{j-1}\big(\mathscr{R}(f)\big) \end{array} \right.$$

où $S_j\big(\mathscr{R}(f)\big)$ désigne la somme partielle (comme au 4.) associée à la fonction $\mathscr{R}(f)$. (on aurait pu mettre $f(0)$ à la place de $\mathscr{R}(f)(0)$, cela changerait simplement les constantes dans la suite). L'unicité des polynômes dans la question précédente asssure que l'on a bien défini ainsi une application linéaire.

Cette application T_j serait linéaire bornée avec (d'après 4.)

$$\|T_j(f)\|_\infty = \|\mathscr{R}(f)(0) + S_j\big(\mathscr{R}(f)\big) - S_{j-1}\big(\mathscr{R}(f)\big)\|_\infty \leqslant |\mathscr{R}(f)(0)| + 4\|\mathscr{R}(f) - \mathscr{R}(f)(0)\|_\infty$$

donc

$$\|T_j(f)\|_\infty \leqslant 9\|\mathscr{R}\|.\|f\|_\infty$$

pour tout $f \in C([0,1])$. On obtient $\|T_j\| \leqslant 9\|\mathscr{R}\|$.
Mais lorsque $f \in vect(v_0, v_{n_j}, \dots, v_{jn_j}) \subset \overline{M_\Lambda}$, on a $\mathscr{R}(f) = f$ et $T_j(f) = f$.
Ainsi T_j est une projection continue de $C([0,1])$ sur $vect(v_0, v_{n_j}, \dots, v_{jn_j})$ donc, d'après V.4 et I.1., on a

$$\|T_j\| \geqslant \frac{1}{2}\big(\mathscr{L}_j - 1\big) \geqslant \frac{1}{2}\big(\gamma \ln(j+1) - 1\big)$$

qui diverge vers l'infini. On a donc une contradiction !

Chapitre 5

Épreuves orales : Algèbre et Géométrie ; Analyse et Probabilités ; Mathématiques pour l'Informatique ; Informatique-Option D

5.1 Organisation des épreuves 2013

Pour les candidats de l'option D, des changements de modalités sur les leçons de mathématiques sont intervenus lors du concours 2009. Ces candidats tirent un couple de sujets au sein d'une liste d'une quarantaine de sujets d'algèbre, d'analyse et de probabilités extraite de la liste générale des autres options du concours.

Tous les candidats tirent un couple de sujets. Le candidat est libre de choisir le sujet qui lui plait.

À l'issue de la période de préparation qui dure 3 heures pour "Analyse et Probabilités" et 3h30 pour l'épreuve "Algèbre et Géométrie" ou "Mathématiques pour l'Informatique" (cette extension de 30mn est due au temps de préparation de l'épreuve "Agir en fonctionnaire de l'État et de façon éthique et responsable", voir le chapitre 7) durant laquelle le candidat dispose des livres de la bibliothèque de l'Agrégation ou de ses propres ouvrages (avec un numéro ISBN et non annotés [1]) mais n'a pas accès à Internet (ni bien-sûr à son téléphone portable ou tout autre objet électronique [2] !), le jury fait procéder à la photocopie des plans préparés par les candidats. Ces derniers sont manuscrits, comportent 3 pages A4 ***au maximum*** et possèdent une marge de 1 cm sur tous les côtés afin d'éviter tout problème lors de la photocopie. *Il est conseillé de ne pas utiliser de stylos de couleurs.* Il est en revanche conseillé de soigner la présentation du plan écrit, de mettre des titres, d'encadrer les formules, *etc.* pour qu'il soit le plus lisible possible. En particulier il est vain de vouloir écrire petit dans l'espoir de placer plus de contenu ; on perd en clarté et le jury n'est pas disposé à utiliser une loupe. Les plans peuvent être complétés par une quatrième page consacrée aux figures. Il faut noter clairement sur le plan les développements proposés.

Le candidat *peut utiliser sa copie du plan pendant toute l'épreuve* et pourra utiliser les notes manuscrites

1. Les rapports de jury de l'agrégation externe de mathématiques, complets et reliés sont autorisés
2. Les calculatrices ne sont pas autorisées, ni les clés USB, etc...

produites durant la préparation, pendant la première phase de l'interrogation dite « présentation du plan ».

L'épreuve s'organise en trois temps, prévus pour une durée totale d'un maximum de 50 minutes environ : une présentation du plan éventuellement suivie d'une brève discussion, un développement de 15 minutes maximum et enfin une partie consacrée au dialogue et aux questions.

Le jury ne cherche pas à déstabiliser le candidat pendant l'épreuve.

5.1.1 Première partie : présentation du plan

Le candidat est convié à utiliser son temps de parole, **8 minutes maximum**, pour présenter, argumenter, mettre en valeur et faire une synthèse de son plan. Le jury envisage de réduire ce temps d'exposition du plan dans les années à venir aux alentours de **5 à 6 mn**, mais le format actuel devrait être maintenu en 2014.

Le plan écrit n'est ni une énumération de paragraphes, ni un exposé complet avec développement des démonstrations. Il définit avec précision les notions introduites, donne les *énoncés complets* des résultats fondamentaux, cite des exemples et des applications. La formalisation mathématique doit être soignée et l'utilisation des symboles mathématiques correcte. Le jury conseille vivement aux candidats de soigner tant leurs écrits que leur expression orale. ***Le plan doit être maîtrisé***, c'est à dire que les résultats exposés doivent être compris ainsi que l'organisation d'ensemble. Il est souhaitable que le candidat connaisse dans leurs grandes lignes les démonstrations des résultats figurant au programme du concours : le jury pourra appliquer ce critère pour évaluer la maîtrise du plan. C'est au candidat de circonscrire son plan, notamment en ce qui concerne les énoncés débordant largement le cadre du programme. Le jury ne cherche pas des plans absolument originaux, le plus important est que le plan soit bien structuré, maîtrisé par le candidat et qu'y figure une quantité substantielle d'exemples.

Il s'agit d'une épreuve orale, il est donc inutile de recopier le plan au tableau, dans la mesure où le jury possède une copie du texte. Toutefois il peut être pertinent d'utiliser le tableau pour écrire l'architecture du plan, les théorèmes importants ou un exemple significatif, voire faire un dessin !

Il est souhaitable que le candidat utilise son temps de parole pour expliquer de façon systématique les articulations principales de son plan. Les détails techniques, s'ils sont clairement écrits dans le plan, pourront ne pas être repris oralement. Le candidat peut faire un bref exposé introductif et commenter utilement ensuite ses résultats principaux, les outils développés, l'organisation d'ensemble et les méthodes utilisées. Il peut être utile de consacrer du temps à un exemple pertinent qui éclaire la problématique de la leçon, à faire usage du tableau pour illustrer ses propos.

Le plan est malheureusement rarement commenté. Le candidat se contente trop souvent d'une présentation linéaire, sans expliquer ou mettre en valeur les articulations du plan, ni faire ressortir les méthodes ou les résultats importants. Parfois le candidat se met à parler extrêmement rapidement, ce qui rend incompréhensible les mathématiques présentées. Si le candidat énonce un théorème particulièrement difficile, il faut qu'il soit *contextualisé* en montrant comment il répond à des problématiques naturelles de la leçon ou en donnant des applications internes ou externes de la théorie dont il est issu.

La présentation orale, l'organisation et la cohérence globale du plan écrit constituent des éléments importants d'appréciation.

Insistons sur le fait que la recopie de plans disponibles sur Internet ou dans des livres spécialisés ne constitue pas un travail suffisant de préparation du concours. L'exposé oral ne peut être maîtrisé s'il ressemble à une récitation. Quelques rares candidats prennent des libertés quant au libellé de la leçon ; les titres des leçons définissent un champ clair qu'il faut traiter entièrement. **Le hors sujet est lourdement sanctionné**.

À la fin de cette présentation, le jury peut éventuellement questionner très brièvement le candidat. On peut aborder quelques points techniques, sans entrer dans des détails qui retarderaient le début du développement.

5.1.2 Deuxième partie : le développement

Le jury veille à la cohérence du plan et des propositions de développements eu égard au niveau du candidat. Il est souhaitable que le candidat recherche une adéquation entre son niveau intrinsèque et les développements proposés. Un candidat ne sera pas avantagé s'il présente un développement non maîtrisé, mal compris ou exposé trop rapidement. Il faut toutefois veiller à rester au niveau de l'Agrégation ; les développements de niveau d'une classe de Terminale ou d'une première année post-bac ne peuvent constituer une proposition acceptable.

Le jury demande au candidat de présenter *deux développements au moins*. Ceux-ci doivent être clairement mentionnés sur le plan écrit et non pas vaguement évoqués à l'oral. Le candidat doit aussi préciser, **sur son plan écrit**, ce qu'il va démontrer et, le cas échéant, les résultats de son plan qu'il va admettre pour mener à bien son développement. Le candidat dispose de 15mn (maximum) pour mener à bien ce développement. Le jury demande au candidat de bien gérer son tableau, en particulier le candidat doit demander aux membres du jury l'autorisation d'effacer. Le jury souhaite, dans la mesure du possible, que le candidat efface le moins possible le tableau pendant cette période.

Lors du développement, le jury attend du candidat des explications sur la preuve et sur l'utilisation pertinente des notions développées durant l'exposé oral ; il peut être opportun, lors du développement, de se référer explicitement au plan présenté.

Trop peu de candidats commencent leur développement par une rapide exposition des grandes idées ou des étapes qui le composent. Le jury aimerait avoir une petite explication de la démarche au début du développement. Il est inutile de se précipiter ou de parler trop vite ; on veillera au contraire à préciser ses notations, à soigner sa présentation, à placer sa voix et à regarder de temps en temps le jury !

Le développement ressemble parfois à une succession plus ou moins convaincante de résultats intermédiaires *ad hoc*. La récitation d'un développement est lourdement sanctionnée ; le jury veille à ce que les futurs enseignants comprennent ce qu'ils exposent et sachent exposer ce qu'ils comprennent. C'est une qualité essentielle d'un futur agrégé.

On ne saurait trop conseiller aux candidats d'illustrer leur développement (et éventuellement leur plan) par un ou plusieurs dessins : l'exposé y gagnerait en clarté pour le jury, le candidat pourrait ainsi montrer un souci louable de pédagogie.

Rappelons que le développement doit être en rapport avec le sujet traité, la leçon présentée et le plan écrit. Tout hors sujet est sévèrement sanctionné. L'utilisation d'un résultat non présent dans le plan écrit doit être explicitement signalée par le candidat. Toute utilisation d'un lemme non démontré et enfermant l'essence de la preuve est sanctionnée. Le jury peut exiger la démonstration d'un lemme, soit-disant admis, si celui-ci est essentiellement le cœur du développement. Il faut éviter de présenter ou d'utiliser un résultat préliminaire ou intermédiaire sans explication convaincante. Dans le cas d'un développement ambitieux, il ne faut pas négliger les cas élémentaires et les détails utiles à la compréhension du jury.

Comme mentionné précédemment, le candidat *peut utiliser sa copie du plan pendant toute l'épreuve* et ses notes manuscrites produites durant la préparation, uniquement durant la première phase de l'interrogation dite « présentation du plan », mais il ne pourra les utiliser pendant le développement.

Enfin, même si le jury laisse évoluer le candidat durant son développement, en intervenant le moins possible, il peut, en cas de lacunes ou d'erreurs manifestes, interrompre le candidat pour demander des explications. Cette intervention ne donne pas droit à une extension du temps consacré au développement.

La pertinence des explications, le souci pédagogique, la capacité à mener à bien et complètement le sujet dans le temps imparti, l'aisance technique sont des éléments importants d'appréciation. Par ailleurs, le candidat doit s'attendre à être interrogé lors de la période de discussion sur des applications ou illustrations élémentaires de son développement. Il est donc essentiel qu'il soit capable de reconnaître dans une question donnée un cas particulier simple du résultat général qu'il vient d'exposer.

5.1.3 Troisième partie : questions et dialogue

Le jury vérifie systématiquement la maîtrise approfondie du plan présenté. C'est à dire qu'une part importante de la discussion portera sur le plan, ou trouvera sa source dans le plan présenté par le candidat. De manière générale, il faut éviter de dépasser largement son niveau. Pour assimiler les notions il faut, durant l'année de préparation, se demander si on est capable de les mettre en œuvre sur des exemples simples et, pour certains théorèmes, si on a réfléchi à des exemples ou des contre-exemples. Le candidat doit être conscient que, s'il met un énoncé dans son plan, il doit se préparer à des questions élémentaires voire considérées comme évidentes auxquelles il doit répondre avec précision, et à des calculs éventuels sur ce point.

Une fois de plus, insistons sur le fait qu'il est essentiel de bien maîtriser ce que l'on propose.

Le jury pose aussi des exercices en rapport direct avec la leçon, mais ne s'attend pas à ce que le candidat trouve une solution immédiatement. Le but est plutôt de voir évoluer le futur agrégé dans une démarche scientifique rigoureuse et méthodique. Le candidat doit réfléchir, utiliser son plan et rattacher l'exercice à sa leçon. Le fait de ne pas résoudre un exercice ne doit pas être compris comme un échec et le candidat ne doit pas se décourager. *Il doit au contraire rester attentif aux suggestions du jury* ; la qualité du dialogue, les réponses aux questions, l'utilisation du plan écrit et l'écoute dont le candidat fait preuve sont des éléments importants de notation.

Pendant cette discussion le jury veille à laisser un temps raisonnable au candidat pour réfléchir, sans le submerger de questions.

Rappelons que l'objet du concours est de recruter de futurs enseignants.

5.2 Rapport détaillé sur les épreuves orales

Le jury suggère la lecture des rapports de ces cinq dernières années. Les commentaires précis sur les leçons y restent d'actualité.

Voici quelques remarques concernant certaines leçons de la session 2013, reprenant pour partie les commentaires des années précédentes. Les candidats sont invités à étendre ces commentaires aux leçons non commentées.

Les candidats de l'option D consulteront la liste *ad hoc* des titres (repérés par un numéro unique) reprenant ceux de l'oral des options A,B, C, en algèbre et analyse.

5.2.1 Leçons d'Algèbre et Géométrie

Généralement, le jury apprécie que les candidats soient en mesure d'appliquer les résultats élémentaires mais fondamentaux de leur leçon. Par exemple et sans prétention à l'exhaustivité, la capacité (dans des cas simples) à :

- justifier la diagonalisabilité ou déterminer un polynôme annulateur d'une matrice ;
- effectuer les manipulations élémentaires sur les éléments appartenant à diverses structures algébriques standards ($\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, $\mathscr{S}_n$,, $\mathbf{F}_q$ etc.) ;
- mettre en œuvre des algorithmes exposés dans le plan (opérations élémentaires sur des systèmes ou des déterminants, réduction de Gauss d'une forme quadratique, etc.).

Les leçons d'algèbre sont de difficultés variables, mais le candidat ne sera jamais confronté au choix entre deux leçons de niveau difficile. En revanche, le jury comprendra qu'un candidat de niveau faible ou moyen choisisse une leçon facile plutôt d'une leçon plus difficile.

Les leçons de géométrie sont souvent délaissées. C'est bien anormal pour de futurs professeurs qui auront à enseigner la géométrie (même si sa place à tendance à diminuer) qui fournit de nombreux exemples et applications des notions algébriques, par exemple en théorie des groupes. À ce propos, rappelons qu'un dessin au tableau est souvent apprécié et soulignons que le jury n'est pas vraiment regardant sur les qualités esthétiques du dessin.
Le titre des leçons comport souvent les mots « exemples » et « applications ». Il faut bien distinguer les deux termes ; un exemple n'est pas en soi une application et inversement. Les leçons d'exemples devraient être construites à partir des connaissances théoriques du candidat et ne pas contenir uniquement de la théorie.
Le jury a noté que les notions de quotients échappent souvent au candidat.
La théorie des représentations est apparue au programme. Elle est naturellement reliée à bon nombre leçons. Mise à part les leçons qui la concerne directement, on peut suggérer par exemple : 101, 102, 103, 104, 105, 106, 124, 150.

Voici quelques points plus spécifiques du jury.

5.2.2 Commentaires sur les leçons d'algèbre et géométrie

leçon 101 : Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

Il faut bien dominer les deux approches de l'action de groupe : l'approche naturelle et l'approche, plus subtile, via le morphisme qui relie le groupe agissant et le groupe des permutations de l'ensemble sur lequel il agit. Des exemples de nature différente doivent être présentés : actions sur un ensemble fini, sur un espace vectoriel (en particulier les représentations), sur un ensemble de matrices, sur des polynômes. Les exemples issus de la géométrie ne manquent pas (groupes d'isométries d'un solide). Certains candidats décrivent les actions naturelles de $PGL(2,\mathbf{F}_q)$ sur la droite projective qui donnent des injections intéressantes pour $q = 2,3$ et peuvent plus généralement en petit cardinal donner lieu à des isomorphismes de groupes.

leçon 102 : Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.

Cette leçon est encore abordée de façon élémentaire sans réellement voir où et comment les complexes de modules 1 et les racines de l'unité apparaissent dans divers domaines des mathématiques (polynômes cyclotomiques, théorie des représentations, spectre de certaines matrices remarquables).

leçon 103 : Exemples et applications des notions de sous-groupe distingué et de groupe quotient.

Les candidats parlent de groupe simple et de sous-groupe dérivé ou de groupe quotient sans savoir utiliser ces notions. Entre autres, il faut savoir pourquoi on s'intéresse particulièrement aux groupes simples. La notion de produit semi-direct n'est plus au programme, mais lorsqu'elle est utilisée, il faut savoir la définir proprement et savoir reconnaître des situations simples où de tels produits apparaissent (le groupe diédral D_n par exemple).

On pourra noter que les tables de caractères permettent d'illustrer toutes ces notions.

leçon 104 : Groupes finis. Exemples et applications.

Les exemples doivent figurer en bonne place dans cette leçon. On peut par exemple étudier les groupes de symétries A_4, S_4, A_5 et relier sur ces exemples géométrie et algèbre, les représentations ayant ici toute leur place. Le théorème de structure des groupes abéliens finis doit être connu.

On attend des candidats de savoir manipuler correctement les éléments de quelques structures usuelles ($\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathscr{S}_n$, etc.). Par exemple, proposer un générateur simple de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ voire tous les générateurs, calculer aisément un produit de deux permutations, savoir décomposer une permutation en produit de cycles à support disjoint.
Il est important que la notion d'ordre d'un élément soit mentionnée et comprise dans des cas simples.

leçon 105 : Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

Il faut relier rigoureusement les notions d'orbites et d'action de groupe et savoir décomposer une permutation en cycles disjoints. Des dessins ou des graphes illustrent de manière commode ce que sont les permutations. Par ailleurs un candidat qui se propose de démontrer que *tout groupe simple d'ordre* 60 *est isomorphe à* A_5 devrait aussi savoir montrer que A_5 est simple.

L'existence du morphisme signature est un résultat non trivial mais ne peut pas constituer, à elle seule, l'objet d'un développement.

Comme pour toute structure algébrique, il est souhaitable de s'intéresser aux automorphismes du groupe symétrique. Les applications du groupe symétrique ne concernent pas seulement les polyèdres réguliers. Il faut par exemple savoir faire le lien avec les actions de groupe sur un ensemble fini. Il est important de savoir déterminer les classes de conjugaisons du groupe symétrique par la décomposition en cycles.

leçon 106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de GL(E). Applications.

Cette leçon est souvent présentée comme un catalogue de résultats épars et zoologiques sur $GL(E)$. Il faudrait que les candidats sachent faire correspondre sous-groupes et noyaux ou stabilisateurs de certaines actions naturelles (sur des formes quadratiques, symplectiques, sur des drapeaux, sur une décomposition en somme directe, *etc.*). À quoi peuvent servir des générateurs du groupe $GL(E)$? Qu'apporte la topologie dans cette leçon ? Il est préférable de se poser ces questions avant de les découvrir le jour de l'oral.

Certains candidats affirment que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense (respectivement ouvert) dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Il est judicieux de préciser les hypothèses nécessaires sur le corps $\mathbb{K}$ ainsi que la topologie sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Il faut aussi savoir réaliser S_n dans $GL(n,\mathbf{R})$ et faire le lien entre signature et déterminant.

leçon 107 : Représentations et caractères d'un groupe fini sur un C-espace vectoriel.

Le jury a été généralement bienveillant pour cette leçon, vu que la théorie des représentations était au programme depuis peu. Il s'agit d'une leçon où théorie et exemples doivent apparaître. Le candidat doit d'une part savoir dresser une table de caractères pour des petits groupes. Il doit aussi savoir tirer des informations sur le groupe à partir de sa table de caractères.

leçon 108 : Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

C'est une leçon qui demande un minimum de culture mathématique. Peu de candidats voient l'utilité des parties génératrices dans l'analyse des morphismes de groupes.

leçon 109 : Représentations de groupes finis de petit cardinal.

Il s'agit d'une leçon où le matériel théorique doit figurer pour ensuite laisser place à des exemples. Les représentations peuvent provenir d'actions de groupes, de groupes d'isométries, d'isomorphismes exceptionnels entre groupes de petit cardinal... Inversement, on peut chercher à interpréter des représentations de façon géométrique, mais il faut avoir conscience qu'une table de caractères provient généralement de représentations complexes et non réelles (a priori). Pour prendre un exemple ambitieux, la construction de l'icosaèdre à partir de la table de caractères de $\mathscr{A}_5$ demande des renseignements sur l'indice de Schur (moyenne des caractères sur les carrés des éléments du groupe).

leçon 120 : Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

Cette leçon classique demande toutefois une préparation minutieuse. Tout d'abord n n'est pas forcément un nombre premier. Il serait bon de connaître les sous-groupes de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et les morphismes de groupes de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$

Bien maîtriser le lemme chinois et sa réciproque. Savoir appliquer le lemme chinois à l'étude du groupe des inversibles. Distinguer clairement propriétés de groupes additifs et d'anneaux. Connaître les automorphismes, les nilpotents, les idempotents. Enfin, les candidats sont invités à rendre hommage à Gauss en présentant quelques applications arithmétiques des anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, telles l'étude de quelques équations diophantiennes bien choisies.

leçon 121 : Nombres premiers. Applications.

Il s'agit d'une leçon pouvant être abordée à divers niveaux. Attention au choix des développements, ils doivent être pertinents (l'apparition d'un nombre premier n'est pas suffisant !). La réduction modulo p n'est pas hors-sujet et constitue un outil puissant pour résoudre des problèmes arithmétiques simples. La répartition des nombres premiers est un résultat historique important, qu'il faudrait citer. Sa démonstration n'est bien-sûr pas exigible au niveau de l'Agrégation. Quelques résultats sur la géométrie des corps finis sont les bienvenus.

leçon 122 : Anneaux principaux. Applications.

Les plans sont trop théoriques. Il est possible de présenter des exemples d'anneaux principaux classiques autres que $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{K}[X]$ (décimaux, entiers de Gauss ou d'Eisenstein), accompagnés d'une description de leurs irréductibles. Les applications en algèbre linéaire ne manquent pas, il serait bon que les candidats les illustrent. Par exemple, il est étonnant de ne pas voir apparaître la notion de polynôme minimal parmi les applications.

On peut donner des exemples d'anneaux non principaux.

leçon 123 : Corps finis. Applications.

Un candidat qui étudie les carrés dans un corps fini doit savoir aussi résoudre les équations de degré 2. Les constructions des corps de petit cardinal doivent avoir été pratiquées. Les injections des divers $\mathbf{F}_q$ doivent être connues.

Le théorème de Wedderburn ne doit pas constituer le seul développement de cette leçon. En revanche, les applications des corps finis (y compris pour $\mathbf{F}_q$ avec q non premier !) ne doivent pas être négligées. Le théorème de l'élément primitif, s'il est énoncé, doit pouvoir être utilisé.

leçon 124 : Anneau des séries formelles. Applications.

C'est une leçon qui doit être illustrée par de nombreux exemples et applications, souvent en lien avec les séries génératrices ; combinatoire, calcul des sommes de Newton, relations de récurrence, nombre de partitions, représentations et séries de Molien, *etc.*

leçon 125 : Extensions de corps. Exemples et applications.

Très peu de candidats ont choisi cette leçon d'un niveau difficile. On doit y voir le théorème de la base téléscopique et ses applications à l'irréductibilité de certains polynômes, ainsi que les corps finis. Une version dégradée de la théorie de Galois (qui n'est pas au programme) est très naturelle dans cette leçon.

leçon 140 : Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.

Voici une leçon qui avait disparu et qui revient à l'oral de l'Agrégation. Le bagage théorique est somme toute assez classique, même si parfois le candidat ne voit pas l'unicité de la décomposition en éléments simples en terme d'indépendance en algèbre linéaire. Ce sont surtout les applications qui sont attendues : séries génératrices (avec la question à la clef : à quelle condition une série formelle est-elle le développement d'une fraction rationnelle), automorphismes de $K(X)$, version algébrique du théorème des résidus.

Le théorème de Lüroth n'est pas obligatoire et peut même se révéler un peu dangereux.

leçon 141 : Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

Les applications ne concernent pas que les corps finis. Il existe des corps algébriquement clos de caractéristique nulle autre que $\mathbf{C}$. Un polynôme réductible n'admet pas forcément de racines. Il est instructif de chercher des polynômes irréductibles de degré 2, 3, 4 sur $\mathbf{F}_2$. Il faut connaître le théorème de la base téléscopique ainsi que les utilisations artithmétiques (utilisation de la divisibilité) que l'on peut en faire dans l'étude de l'irréductibilité des polynômes.

leçon 142 : Algèbre des polynômes à plusieurs indéterminées. Applications.

La leçon ne doit pas se concentrer exclusivement sur les aspects formels ni sur les les polynômes symétriques.

Les aspects arithmétiques ne doivent pas être négligés. Il faut savoir montrer l'irréductibilité d'un polynôme à plusieurs indéterminées en travaillant sur un anneau de type $A[X]$, où A est factoriel.

Le théorème fondamental sur la structure de l'algèbre des polynômes symétriques est vrai sur $\mathbf{Z}$. L'algorithme peut être présenté sur un exemple.

Les applications aux quadriques, aux relations racines cœfficients ne doivent pas être négligées. On peut faire agir le groupe $GL(n,\mathbf{R})$ sur les polynômes à n indéterminées de degré inférieur à 2.

leçon 143 : Résultant. Applications.

Le caractère entier du résultant (il se définit sur $\mathbf{Z}$) doit être mis en valeur et appliqué.

La partie application doit montrer la diversité du domaine (par exemple en arithmétique, calcul d'intersection/élimination, calcul différentiel).

Il ne faut pas perdre de vue l'application linéaire sous-jacente $(U,V) \mapsto AU + BV$ qui lie le résultant et le PGCD de A et B.

leçon 144 : Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires.

Il s'agit d'une leçon au spectre assez vaste. On peut y traiter de méthodes de résolutions, de théorie des corps (voire théorie de Galois si affinités), de topologie (continuité des racines) ou même de formes quadratiques.

Il parait difficile de ne pas introduire la notion de polynôme scindé, de citer le théorËme de d'Alembert-Gauss et des applications des racines (valeurs propres, *etc.*)

leçon 150 : Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

Cette leçon n'a pas souvent été prise, elle demande un certain recul. Les actions ne manquent pas et selon l'action on pour dégager d'une part des invariants (rang, matrices échelonnées réduites), d'autre par des algorithmes. On peut aussi, si l'on veut aborder un aspect plus théorique, faire apparaître à travers ces actions quelques décompositions célèbres.

leçon 151 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

C'est une leçon qui, contrairement aux apparences, est devenue difficile pour les candidats. Nombre d'entre eux n'ont pas été capables de donner des réponses satisfaisantes à des questions élémentaires comme : un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie, est-il aussi de dimension finie ?

Il faut bien connaître les théorèmes fondateurs de la théorie des espaces vectoriels de dimension finie en ayant une idée de leurs preuves.

leçon 152 : Déterminant. Exemples et applications.

Il faut que le plan soit cohérent ; si le déterminant n'est défini que sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, il est délicat de définir $\det(A-XI_n)$ avec A une matrice carrée. L'interprétation du déterminant comme volume est essentielle. Beaucoup de candidats commencent la leçon en disant que le sous-espace des formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n est de dimension 1, ce qui est fort à propos. Toutefois, il est essentiel de savoir le montrer.

Le jury ne peut se contenter d'un Vandermonde ou d'un déterminant circulant ! Le résultant et les applications simples à l'intersection ensembliste de deux courbes algébriques planes peuvent trouver leur place dans cette leçon. D'une manière générale on attend pendant le développement l'illustration d'un calcul ou la manipulation de déterminants non triviaux.

Il serait bien que la continuité du déterminant trouve une application, ainsi que son caractère polynomiale.

leçon 153 : Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

Les polynômes d'un endomorphisme ne sont pas tous nuls ! Il faut consacrer une courte partie de la leçon à l'algèbre $\mathbf{K}[u]$, connaître sa dimension sans hésiter. Les propriétés globales pourront être étudiées par les meilleurs. Le jury souhaiterait voir certains liens entre réduction et structure de l'algèbre $\mathbf{K}[u]$. Le candidat peut s'interroger sur les idempotents et le lien avec la décomposition en somme de sous-espaces caractéristiques.

Le jury ne souhaite que le candidat présente un catalogue de résultats autour de la réduction, mais seulement ce qui a trait aux polynômes d'endomorphismes. Il faut bien préciser que dans la réduction de Dunford, les composantes sont des polynômes en l'endomorphisme.

L'aspect *applications* est trop souvent négligé. On attend d'un candidat qu'il soit en mesure, pour une matrice simple de justifier la diagonalisabilité et de déterminer un polynôme annulateur (voire minimal). Il est souhaitable que les candidats ne fassent pas la confusion entre diverses notions de multiplicité pour une valeur propre λ donnée (algébrique ou géométrique). Enfin rappelons que pour calculer A^k, il n'est pas nécessaire en général de faire la réduction de A (la donnée d'un polynôme annulateur de A suffit bien souvent).

leçon 154 : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Les candidats doivent s'être interrogés sur les propriétés de l'ensemble des sous-espaces stables par un endomorphisme. Des études détaillées de cas sont les bienvenues. La décomposition de Frobenius trouve tout à fait sa place dans la leçon. Notons qu'il a été ajouté la notion de familles d'endomorphismes. Ceci peut déboucher par exemple sur des endomorphismes commutant entre eux ou sur la théorie des représentations.

leçon 155 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Il faut pouvoir donner des exemples naturels d'endomorphismes diagonalisables et des critères. Le calcul de l'exponentielle d'un endomorphisme diagonalisable est immédiat une fois que l'on connaît les valeurs propres et ceci sans diagonaliser la matrice, par exemple à l'aide des projecteurs spectraux.

On peut sur le corps des réels et des complexes donner des propriétés topologiques, et sur les corps finis, dénombrer les endomorphismes diagonalisables, ou possédant des propriétés données, liées à la diagonalisation.

Mentionnons que l'affirmation «l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$» nécessite quelques précisions sur le corps $\mathbb{K}$ et la topologie choisie pour $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

leçon 156 : Exponentielle de matrices. Applications.

C'est une leçon difficile et ce n'est pas une leçon d'analyse. Il faut toutefois pouvoir justifier clairement la convergence de la série exponentielle. Les questions de surjectivité ou d'injectivité doivent être abordées. Par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle dans l'image $\exp(\mathrm{Mat}(2,\mathbf{R}))$? La matrice blocs $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ est-elle dans l'image $\exp(\mathrm{Mat}(4,\mathbf{R}))$?

La décomposition de Dunford multiplicative (décomposition de Jordan) de $\exp(A)$ doit être connue. Les groupes à un paramètre peuvent trouver leur place dans cette leçon. On peut s'interroger si ces sous-groupes constituent des sous-variétés fermées de $GL(n,\mathbf{R})$. L'étude du logarithme (quand il est défini) trouve toute sa place dans cette leçon. Si on traite du cas des matrices nilpotentes, on pourra invoquer le calcul sur les développements limités.

Les applications aux équations différentielles doivent être évoquées sans constituer l'essentiel de la leçon. On pourra par exemple faire le lien entre réduction et comportement asymptotique, mais le jury déconseille aux candidats de proposer ce thËme dans un développement.

Les notions d'algèbres de Lie ne sont pas au programme de l'agrégation, on conseille de n'aborder ces sujets qu'à condition d'avoir une certaine solidité. Sans aller si loin, on pourra donner une application de l'exponentielle à la décomposition polaire de certains sous-groupes fermés de GL_n (groupes orthogonaux par exemple).

leçon 157 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Il est possible de mener une leçon de bon niveau, même sans la décomposition de Jordan à l'aide des noyaux itérés. On doit savoir déterminer si deux matrices nilpotentes sont semblables grâce aux noyaux itérés (ou grâce à la décomposition de Jordan si celle-ci est maîtrisée).

Notons que l'étude des nilpotents en dimension 2 débouche naturellement sur des problèmes de quadriques et l'étude sur un corps fini donne lieu à de jolis problèmes de dénombrement.

leçon 158 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

C'est une leçon transversale. La notion de signature doit figurer dans la leçon et on ne doit surtout pas se cantonner au cas des matrices définies positives. Curieusement, il est fréquent que le candidat énonce l'existence de la signature d'une matrice symétrique réelle sans en énoncer l'unicité dans sa classe de congruence. On doit faire le lien avec les formes quadratiques et les formes hermitiennes. La partie réelle et la partie imaginaire d'un produit hermitien définissent des structures sur l'espace vectoriel réel sous-jacent.

leçon 159 : Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.

Il est important de replacer la thématique de la dualité dans cette leçon. Les liens entre base duale et fonctions de coordonnées doivent être parfaitement connus. Savoir calculer la dimension d'une intersection d'hyperplans est au cœur de la leçon. L'utilisation des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes permet facilement d'obtenir les équations d'un sous-espace vectoriel ou d'exhiber une base d'une intersection d'hyperplans. Cette leçon peut être traitée sous différents aspects : géométrique, algèbrique, topologique, analytique, *etc.* Il faut que les développements proposés soient en lien direct, comme toujours, avec la leçon ; proposer la trigonalisation simultanée est un peu osé ! Enfin rappeler que la différentielle d'une fonction réelle est une forme linéaire semble incontournable.

leçon 160 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

Les candidats doivent bien prendre conscience que le caractère euclidien de l'espace est essentiel pour que l'endomorphisme soit remarquable. Par exemple, des développements comme le lemme des noyaux ou la décomposition de Dunford n'ont rien à faire ici. En revanche, l'utilisation du fait que l'orthogonal d'un sous-espace stable par un endomorphisme est stable par l'adjoint doit être mis en valeur.

leçon 161 : Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Forme réduite. Applications en dimensions 2 et 3.

La classification des isométries en dimension 2 est exigible. En dimension 3, les rotations et les liens avec la réduction. On peut penser aux applications aux isométries laissant stables certaines figures en dimension 2 et 3.

leçon 162 : Systèmes d'équations linéaires ; opérations, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

Le jury n'attend pas *une version à l'ancienne* articulée autour du théorème de Rouché-Fontené, qui n'est pas d'un grand intérêt dans sa version traditionnellement exposée.

La leçon doit impérativement présenter la notion de système échelonné, avec une définition précise et correcte et situer l'ensemble dans le contexte de l'algèbre linéaire (sans oublier la dualité !). Par exemple les relations de dépendances linéaires sur les colonnes d'une matrice échelonnée sont claires et permettent de décrire simplement les orbites de l'action à gauche de $GL(n,\mathbf{K})$ sur $M_n(\mathbf{K})$ donnée par $(P,A) \mapsto PA$. Le candidat doit pouvoir écrire un système d'équations de l'espace vectoriel engendré par les colonnes.

Un point de vue opératoire doit accompagner l'étude théorique et l'intérêt pratique (algorithmique) des méthodes présentées doit être expliqué y compris sur des exemples simples où l'on attend parfois une résolution explicite.

leçon 170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

Le candidat ne doit pas se contenter de travailler sur $\mathbf{R}$. Il faut savoir que les formes quadratiques existent sur le corps des complexes et sur les corps finis et savoir les classifier. On ne doit pas négliger l'interprétation géométrique des notions introduites (lien entre coniques, formes quadratiques, cônes isotropes) ou les aspects élémentaires (par exemple le discriminant de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ et la signature de la forme quadratique $ax^2+bxy+cy^2$). On ne peut se limiter à des considérations élémentaires d'algèbre linéaire. Les formes quadratiques ne sont pas toutes non dégénérées (la notion de quotient est utile pour s'y ramener).

L'algorithme de Gauss doit être énoncé et pouvoir être pratiqué sur une forme quadratique de $\mathbf{R}^3$. Le lien avec la signature doit être clairement énoncé. Malheureusement la notion d'isotropie est mal maîtrisée par les candidats, y compris les meilleurs d'entre eux. Le cône isotrope est un aspect important de cette leçon, qu'il faut rattacher à la géométrie différentielle. Il est important d'illustrer cette leçon d'exemples naturels.

leçon 171 : Formes quadratiques réelles. Exemples et applications.

La preuve de la loi d'inertie de Silvester doit être connue et le candidat doit avoir compris la signification géométrique de ces deux entiers composant la signature d'une forme quadratique réelle ainsi que leur caractère classifiant. La différentielle seconde d'une fonction de plusieurs variables est une forme quadratique importante.

leçon 180 : Coniques. Applications.

La définition des coniques affines non dégénérées doit être connue. Les propriétés classiques des coniques doivent être présentées. Bien distinguer les notions affines, métriques ou projectives, la classification des coniques étant sensiblement différente selon le cas.

On peut se situer sur un autre corps que celui des réels. Le lien entre classification des coniques et classification des formes quadratiques peut être établi à des fins utiles.

leçon 181 : Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

On attend des candidats qu'ils parlent de coordonnées barycentriques et les utilisent par exemple dans le triangle (coordonnées barycentriques de certains points remarquables). Il est judicieux de parler d'enveloppe convexe, de points extrémaux, ainsi que des applications qui en résultent.

leçon 182 : Applications des nombres complexes à la géométrie.

Cette leçon ne saurait rester au niveau de la Terminale. Une étude de l'exponentielle complexe et des homographies de la sphère de Riemann est tout à fait appropriée. La réalisation du groupe SU_2 dans le corps des quaternions et ses applications peuvent trouver sa place dans la leçon.

leçon 183 : Utilisation des groupes en géométrie.

C'est une leçon transversale et difficile, qui peut aborder des aspects variés selon les structures algébriques présentes. D'une part un groupe de transformations permet de ramener un problème de géométrie à un problème plus simple. D'autre part, les actions de groupes sur la géométrie permettent de dégager des invariants (angle, birapport) essentiels. On retrouvera encore avec bonheur les groupes d'isométries d'un solide.

leçon 190 : Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

Il faut dans un premier temps dégager clairement les méthodes et les illustrer d'exemples significatifs. L'utilisation de séries génératrices est un outil puissant pour le calcul de certains cardinaux. Le jury s'attend à ce que les candidats sachent calculer des cardinaux classiques et certaines probabilités ! L'introduction des corps finis (même en se limitant aux cardinaux premiers) permettent de créer un lien fécond avec l'algèbre linéaire.

5.2.3 Leçons d'Analyse et Probabilités

Probabilités et Analyse complexe

Le jury rappelle que le chapitre des probabilités a vocation à se développer dans l'enseignement secondaire et post-baccalauréat. Les candidats à un futur poste d'enseignant de mathématiques doivent maîtriser les notions centrales de ces thématiques. C'est pourquoi le programme 2014 fait apparaître un chapitre 10 intitulé **Probabilités**, séparé de la théorie de l'intégration, mais qui reprend essentiellement les contenus des programmes précédents.

Il est construit autour de quelques notions de base sur l'indépendance, les lois classiques, les moments, les transformées et les convergences. Ces thèmes sont évidemment liés.

Le jury a observé que le nombre de candidats qui ont choisi les leçons de probabilité augmente ; le jury se félicite de cette évolution, et rappelle aux candidats que les leçons de probabilités ne recèlent pas de piège ou de danger particulier.

Il y avait quatre leçons de probabilités dont trois seront supprimées à la session 2014 pour être potentiellement remplacées par cinq autres leçons. Les six leçons de probabilités peuvent (pourront) toutes se traiter à un niveau raisonnable, et mettent (mettront) en jeu des outils qui sont au cœur du programme d'analyse de l'agrégation.

Ainsi, les inégalités probabilistes classiques (version simple, des grandes déviations à la Bernstein, Hoeffding, Paley-Zygmund) offrent matière à des développements abordables et intéressants. Les diverses formes de la loi des grands nombres, les applications du théorème de Lévy admettent de nombreuses variations. L'étude des séries aléatoires, voire des séries de fonctions aléatoires contient beaucoup de résultats significatifs (exemples : signes aléatoires, points singuliers d'une série entière aléatoire)

Enfin, les probabilités interagissent de manière significative avec de nombreuses branches de l'analyse (et plus largement des mathématiques). Le travail sur les leçons précédentes devrait permettre aux candidats d'affermir leurs réflexes en matière de théorie de la mesure et de probabilités, mais aussi d'aborder sous un angle nouveau d'autres items du programme.

C'est ainsi que la linéarité de l'espérance et l'inégalité de Markov ont des applications combinatoires spectaculaires, que le problème de la détermination d'une variable par ses moments est lié à la théorie des fonctions holomorphes, que l'étude des fonctions caractéristiques prolonge et approfondit celle de la transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$, que les "constructions aléatoires" permettent de produire des objets mathématiques difficiles à exhiber directement.

Rassurons les candidats futurs, il n'est pas question d'exiger d'eux qu'ils connaissent tout cela, mais le rapport vise aussi à donner aux candidats et aux préparateurs des idées de développement de niveau varié.

Le jury s'inquiète, depuis un certain temps, du recul de la connaissance par les candidats de l'analyse complexe, dont il n'est pas nécessaire de souligner l'importance et les très nombreuses applications en mathématiques fondamentales ou appliquées. Il est patent que les connaissances sur les fonctions holomorphes, leur comportement au bord du domaine de convergence, les espaces fonctionnels qu'elles constituent, les concepts topologiques qu'elles mettent en œuvre (familles normales, simple connexité) sont globalement en recul. Les candidats en sont sans doute conscients puisqu'ils évitent souvent les leçons correspondantes. L'analyse complexe est cependant appelée à conserver dans le programme de l'agrégation la place centrale que lui impose son importance scientifique. **Les candidats sont invités à en prendre acte et à se préparer en conséquence.**

Commentaires généraux

Le jury apprécie que les candidats soient en mesure d'appliquer les résultats élémentaires mais fondamentaux de leur leçon, par exemple : justifier une permutation limite-intégrale ; résoudre une équation différentielle simple ; étudier la convergence d'une suite ou d'une série (numérique, de fonctions, de variables aléatoires).

De nombreux candidats ont présenté au jury des plans raisonnables, suivis d'un développement correctement mené, car soigneusement appris et révisé pendant les trois heures de préparation. Cependant, la première question du jury a souvent révélé une incompréhension réelle du sujet traité. Rappelons aux candidats qu'ils peuvent s'attendre, après leur plan, à quelques questions portant sur un cas particulièrement simple d'application du théorème présenté, ou sur des situations proches qui soulignent l'utilité des hypothèses ou la portée des arguments de la preuve qu'ils viennent de développer. Si ces questions restent sans réponse, le jury sera conduit à la conclusion que le candidat n'a fait que restituer mécaniquement quelques pages apprises à la va-vite et sa note s'en ressentira. Il est attendu des candidats qu'ils aient compris les notions mathématiques au programme de l'agrégation. Les candidats ne sont pas tenus de savoir établir complètement chacun des résultats de leur plan, en revanche il leur est demandé d'avoir une idée raisonnable des argiments emplaoyés dans les preuves. Par exemple : mentionner le théorème de Cauchy-Lipschitz dans la leçon "Théorèmes du point fixe" suppose de savoir transformer un problème de Cauchy en équation à point fixe !

Il est légitime qu'un candidat ignore certains résultats, le jury ne prétend pas à l'omniscience et ne l'attend pas des candidats. Cependant, un candidat qui se montre capable de proposer des pistes de solution aux questions qu'on lui pose impressionne très favorablement le jury. **Il faut donc apprendre, mais surtout comprendre**.

Il est également souhaitable que les candidats gardent à l'esprit la nature des objets qu'ils sont en train de manipuler : quantités numériques, variables muettes, indéterminées, inconnues, paramètres, vecteurs, fonctions, opérateurs.... Cela est assez sensible en analyse où par exemple, la question "à quel espace appartiennent les deux termes de votre équation ?" peut se révéler embarrassante. Le calcul différentiel est particulièrement délicat à cet égard, et on recommande aux candidats qui préparent l'agrégation de s'astreindre à la rigueur dans les leçons correspondantes.

Le jury observe enfin que d'assez nombreux candidats, dont le niveau est convenable et qui ont soigneusement préparé l'agrégation, ont répété une petite quinzaine de développements choisis pour leur caractère bien classique et répartis de façon à couvrir une bonne moitié des leçons possibles. Mais il faut souligner qu'un développement pertinent mais un peu original est bien récompensé. Les candidats sont donc invités à sortir des sentiers battus : une petite prise de risque sera reconnue et appréciée.

En dépit des intitulés, beaucoup de leçons manquent d'exemples et se cantonnent pour l'essentiel à des généralités théoriques. Ainsi la leçon relative aux espaces vectoriels normés doit comporter quelques calculs de normes subordonnées, la leçon sur les séries doit être illustrée par des exemples d'études de convergence et d'évaluations asymptotiques.

Enfin, le jury apprécierait que les candidats fassent plus de dessins !

Voici quelques points plus spécifiques concernant les leçons :

5.2.4 Commentaires sur les leçons d'Analyse et Probabilités

203 - Utilisation de la notion de compacité. Il est important de ne pas concentrer la leçon sur la compacité générale (confusion générale entre *utilisation de la notion compacité* et *notion de compacité*), sans proposer des exemples significatifs d'utilisation (Stone-Weierstrass, point fixe, voire étude qualitative d'équations différentielles, *etc.*). Les familles normales de fonctions holomorphes fournissent des exemples fondamentaux d'utilisation de la compacité. Les applications linéaires compactes sur l'espace de Hilbert ou sur un espace de Banach relèvent également de cette leçon, et on pourra développer par exemple leurs propriétés spectrales.

204 - Connexité. Exemples et applications. Il est important de présenter des résultats naturels dont la démonstration utilise la connexité ; par exemple, diverses démonstrations du théorème de d'Alembert-Gauss. On distinguera bien connexité et connexité par arcs, mais il est pertinent de présenter des situations où ces deux notions coïncident.

205 - Espaces complets. Exemples et applications. Les candidats devraient faire apparaître que l'un des intérêts essentiel de la complétude est de fournir des théorèmes d'existence en dimension infinie, en particulier dans les espaces de fonctions. Le théorème de Baire trouverait naturellement sa place dans cette leçon, mais il faut l'accompagner d'applications. Rappelons que celles-ci ne se limitent pas aux théorèmes de Banach-Steinhaus et du graphe fermé, mais qu'on peut évoquer au niveau de l'agrégation l'existence de divers objets : fonctions continues nulle part dérivables, points de continuité pour les limites simples de suites de fonctions continues, vecteurs à orbite dense pour certains opérateurs linéaires, etc.

206 - Théorèmes de points fixes. Les applications aux équations différentielles sont importantes. Il faut préparer des contre-exemples pour illustrer la nécessité des hypothèses. Il est envisageable d'admettre le théorème de point fixe de Brouwer et d'en développer quelques conséquences.

207 - Prolongement de fonctions. Les candidats exploitent rarement toutes les potentialités de cette leçon très riche. Le prolongement analytique relève bien sûr de cette leçon, ainsi que le théorème de Hahn-Banach, le prolongement de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sur un segment en fonctions de la même classe, le théorème de Tietze sur l'extension des fonctions continues définies sur un sous-ensemble fermé d'un espace métrique, l'intégrale de Riemann, la transformation de Fourier sur L^2 et l'extension des fonctions Lipschitziennes définies sur un sous-ensemble (pas nécesairement dense) d'un espace métrique.

208 - Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples. La justification de la compacité de la boule unité en dimension finie doit être donnée. Le théorème d'équivalence des normes en dimension finie, ou le caractère fermé de tout sous-espace de dimension finie d'un espace normé, sont des résultats fondamentaux à propos desquels les candidats doivent se garder des cercles vicieux.

213 - Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Il est important de faire la différence entre base algébrique et base hilbertienne. Il faut connaître quelques critères simples pour qu'une famille orthogonale forme une base hilbertienne et illsutrer la leçon par des exemples de bases hilbertiennes (polynômes orthogonaux, séries de Fourier, etc...). Le théorème de projection sur les convexes fermés (ou sur un sous-espace vectoriel fermé) d'un espace de Hilbert H est régulièrement mentionné. En revanche, la possibilité de construire de façon élémentaire le dit-projeté dans le cas particulier d'un sous-espace vectoriel de dimension finie semble inconnue de nombreux candidats. Les candidats doivent s'intéresser au sens des formules $x = \sum_{n\geqslant 0}(x|e_n)e_n$ et $||x||^2 = \sum_{n\geqslant 0}(x|e_n)^2$ en précisant les hypothèses sur la famille $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et en justifiant la convergence.

214 - Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. On attend des applications en géométrie différentielle (notamment dans la formulation des multiplicateurs de Lagrange). Rappelons que les sous-variétés sont au programme.

215 - Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications. Il faudrait que les candidats à l'Agrégation sachent que les différentielles d'ordre supérieur $d^k f(a)$ définissent des applications k-linéaires (sur quel espace ?). Il faut savoir calculer sur des exemples simples, la différentielle d'une fonction, ou effectuer un développement limité à l'ordre 1 d'une fonction.

217 - Sous-variétés de $\mathbf{R}^n$. Exemples. Cette leçon n'a pas eu beaucoup de succès, c'est bien dommage. Elle ne saurait être réduite à un cours de géométrie différentielle abstraite ; ce serait un contresens. Le jury attend une leçon concrète, montrant une compréhension géométrique locale. Aucune notion globale n'est exigible, ni de notion de variété abstraite. Le candidat doit pouvoir être capable de donner plusieurs représentations locales (paramétriques, équations, *etc.*) et d'illustrer la notion d'espace tangent sur des exemples classiques. Le jury invite les candidats à réfléchir à la pertinence de l'introduction de la notion de sous-variétés. En ce qui concerne les surfaces de $\mathbf{R}^3$, les candidats sont invités à réfléchir aux notions de formes quadratiques fondamentales et à leurs interprétations géométriques. Le théorème des extremas liés devient assez transparent lorsqu'on le traite par les sous-variétés.

Le théorème des extrema liés peut être évoqué dans cette leçon. Les groupes classiques donnent des exemples utiles de sous-variétés.

218 - Applications des formules de Taylor. Il faut connaître les formules de Taylor des polynômes et certains développements très classiques. Il y a de très nombreuses applications en géométrie et probabilités (le théorème central limite). On peut aussi penser à la méthode de Laplace, du col, de la phase stationnaire ou aux inégalités $||f^{(k)}|| \leqslant 2^{k(n-k)/2}||f||^{1-k/n}||f^{(n)}||^{k/n}$ (lorsque f et sa dérivée n-ème sont bornées). On soignera particulièrement le choix des développements.

219- Problèmes d'extremums. Il faut bien faire la distinction entre propriétés locales (caractérisation d'un extremum) et globales (existence par compacité, par exemple). Dans le cas important des fonctions convexes, un minimum local st également global. Les applications de la minimisation des fonctions convexes sont nombreuses et elles peuvent illustrer cette leçon, plus généralement les algorithmes de recherche d'extremas ont toute leur place.

220 - Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'études qualitatives des solutions. Le lemme de Gronwall semble trouver toute sa place dans cette leçon mais est rarement énoncé. L'utilisation du théorème de Cauchy-Lipschitz doit pouvoir être mise en œuvre sur des exemples concrets. Les études qualitatives doivent être préparées et soignées.

221 - Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Le cas des systèmes à cœfficients constants fait appel à la réduction des matrices qui doit être connue et pratiquée. L'utilisation des exponentielles de matrices doit pouvoir s'expliquer. Dans le cas général, certains candidats évoquent les généralisations de l'exponentielle (résolvante) via les intégrales itérées.

226 - Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Le jury attend d'autres exemples que la traditionnelle suite récurrente $u_{n+1} = \sin(u_n)$. Les suites homographiques réelles ou complexes fournissent des exemples intéressants, rarement évoqués. La méthode du gradient ou les méthodes de Jacobi ou de Gauss-Siedel fournissent des exemples naturels et utiles de suites vectorielles. Le théorème de Sharkovski sur l'itération des fonctions continues sur un intervalle est un résultat récent qui peut se traiter entièrement au niveau de l'agrégation, et il trouve sa place dans cette leçon. Les notions de point attractif ou répulsif sont essentielles et doivent être connues. Enfin les itérations matricielles ont leur place dans cette leçon.

228 - Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Un plan découpé en deux parties (I - Continuité, II - Dérivabilité) n'est pas le mieux adapté. Les théorèmes de base doivent être maîtrisés et illustrés par des exemples intéressants. Les candidats doivent disposer d'un exemple de fonction dérivable de la variable réelle qui ne soit pas continûment dérivable. La dérivabilité presque partout des fonctions Lipschitziennes relève de cette leçon. Enfin les applications du théorème d'Ascoli (par exemple les opérateurs intégraux à noyau continu, le théorème de Peano, *etc*), sont les bienvenues.

229 - Fonctions monotones. Fonctions convexes. Les candidats sont invités à réfléchir à l'incidence de ces notions en théorie des probabilités. La dérivabilité presque partout des fonctions monotones est un résultat important. Il est souhaitable d'illustrer la présentation de la convexité par des dessins clairs, même si ces dessins ne peuvent remplacer un calcul. On notera que la monotonie concerne (à ce niveau) les fonctions réelles d'une seule variable réelle, mais que la convexité concerne également les fonctions définies sur une partie convexe de $\mathbb{R}$, qui fournissent de beaux exemples d'utilisation. L'espace vectoriel engendré par les fonctions monotones (les fonctions à variation bornée) relève de cette leçon. La dérivation au sens des distributions fournit les caractérisations les plus générales de la monotonie et de la convexité et les candidats bien préparés peuvent s'aventurer utilement dans cette direction.

230 - Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles. De nombreux candidats commencent leur plan par une longue exposition des conditions classiques assurant la convergence ou la divergence des séries numériques. Sans être véritablement hors sujet, cette exposition ne doit pas former l'essentiel du plan. Le thème central de la leçon est en effet le comportement asymptotique des restes et sommes partielles (équivalents, etc...) et leurs applications diverses, comme par exemple des résultats d'irrationalité, voire de transcendance. Enfin on rappelle que la transformation d'Abel trouve toute sa place dans cette leçon.

232 - Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples. Le jury attire l'attention sur le fait que X peut désigner un vecteur.

234 - Espaces L^p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. Le jury a apprécié les candidats sachant montrer qu'avec une mesure finie $L^2 \subset L^1$ (ou même $L^p \subset L^q$ si $p \geqslant q$). Il est important de pouvoir justifier l'existence de produits de convolution (exemple $L^1 \star L^1$).

239 - Fonctions définies par une intégrales dépendant d'un paramètre. Exemples et applications. Cette leçon doit être enrichie par des études et méthodes asymptotiques et les transformations classiques (Fourier, Laplace, *etc.*).

240 - Transformation de Fourier, produit de convolution. Applications. Cette leçon ne doit pas se limiter à une analyse algébrique de la transformation de Fourier. C'est bien une leçon d'analyse, qui nécessite une étude soigneuse des hypothèses, des définitions et de la nature des objets manipulés. La transformation de Fourier des distributions tempérées trouve sa place ici. Certains candidats considérent l'extension de la transformée de Fourier à la variable complexe, riche d'applications (dans la direction du théorème de Paley-Wiener, par exemple).

243 - Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Il faut éviter de ne parler que de dérivabilité par rapport à une variable réelle quand on énonce (ou utilise) ensuite ces résultats sur les fonctions holomorphes. Les séries entières fournissent une méthode puissante d'extension des fonctions au plan complexe, puis au calcul fonctionnel et cela peut être évoqué. Le comportement au bord du disque de convergence (Théorèmes d'Abel, de Tauber et de Hardy-Littlewood) fournit de bons thèmes de développement applicables par exemple à des conditions suffisantes pour que le produit de Cauchy de deux séries semi-convergentes soit convergent.

245 - Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de C. Les conditions de Cauchy-Riemann doivent être parfaitement connues et l'interprétation de la différentielle en tant que similitude directe doit être comprise. La notation $\int_\gamma f(z)\,dz$ a un sens précis, qu'il faut savoir expliquer. Par ailleurs il faut connaître la définition d'une fonction méromorphe (l'ensemble des pôles doit être une partie fermée discrète) !

246 - Série de Fourier. Exemples et applications Les différents modes de convergence (L^2, Fejer, Dirichlet *etc*...) doivent être connus. Il faut avoir les idées claires sur la notion de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux (elles ne sont pas forcément continues). Dans le cas d'une fonction continue et $\mathscr{C}^1$ par morceaux on peut conclure sur la convergence normale de la série Fourier sans utiliser le théorème de Dirichlet. Cette leçon ne doit pas se réduire à un cours abstrait sur les cœfficients de Fourier.

Les leçons 254 et 255 qui portent sur la théorie des distributions et son utilisation ont été choisies par quelques candidats, qui étaient souvent bien préparés et dont la présentation s'est avérée satisfaisante. Rappelons une fois de plus que les attentes du jury sur ces leçons restent modestes, et se placent au niveau de ce qu'un cours de M1 standard sur le sujet peut contenir. Aucune subtilité topologique portant sur l'espace des distributions tempérées n'est attendue. Les candidats sont invités à présenter des situations simples où les distributions sont effectivement utilisées, et à avoir les idées claires sur ce qu'est le support d'une distribution ou son ordre. Les thèmes de développement possibles incluent les formules de saut, les solutions élémentaires (pour le Laplacien par exemple), les conditions sous lesquelles le produit de convolution de deux distributions peut être défini, ou son associativité dans certains cas. La dérivation au sens des distributions des fonctions d'une seule variable réelle fournit déjà une problématique intéressante. Des applications simples aux équations aux dérivées partielles linéaires sont également les bienvenues.

5.2.5 Remarques sur l'épreuve de leçon de mathématiques - Option D

Dans cette épreuve, le candidat tire un couple de sujets au sein d'une liste d'une quarantaine de sujets d'algèbre et d'analyse extraite de la liste générale des autres options du concours. **Il n'y a donc plus nécessairement un sujet d'algèbre et un sujet d'analyse !** Il peut y avoir deux sujets d'algèbre ou deux sujets d'analyse, par exemple : *Loi binomiale* et *Fonctions monotones*. Le programme précise en effet :

> *Les candidats se verront proposer deux sujets, dans un corpus d'algèbre, de géométrie, d'analyse et de probabilités.*

Il est donc impératif que les candidats ajustent leur préparation à cette organisation.

Le jury a interrogé les candidats dans le même esprit que dans les autres options et les critères d'évaluation étaient strictement identiques.

Notons toutefois que lorsqu'ils avaient le choix, les candidats ont le plus souvent préféré les sujets d'algèbre à ceux d'analyse. Nous conseillons vivement aux futurs candidats de cette option de ne pas négliger leur formation en analyse et probabilités.

Les remarques détaillées concernant cette épreuve ne sont pas différentes des remarques concernant les épreuves de leçon des autres options, et le lecteur est invité à se reporter à la section du rapport consacrée à ce point.

5.3 Épreuves orales Option D : Informatique

5.3.1 Remarques sur l'épreuve de leçon d'informatique - Option D

Les sujets des leçons se répartissent en quatre grands domaines, bien identifiés : algorithmique (avec par exemple la leçon 902 : « *Diviser pour régner : exemples et applications* »), calculabilité et complexité (avec par exemple la leçon 904 : « *Problèmes NP-complets : exemples* »), langages et automates (avec par exemple la leçon 910 : « *Langages algébriques. Exemples et applications* »), et logique et preuves (avec par exemple la leçon 919 : « *Unification : algorithmes et applications* »).

De manière générale, le jury a apprécié la qualité de certaines leçons présentées, notamment parmi les leçons les plus avancées, ce qui confirme le bon travail des préparations spécifiques en amont du concours. Ceci est particulièrement net dans les plans des présentations proposées. Beaucoup de candidats cernent bien le sujet de leurs leçons et proposent des développements intéressants.

L'épreuve de la leçon est une épreuve difficile, qui couvre des domaines variés couvrant largement le champ de la science informatique. Elle ne peut être réussie que si elle est préparée sérieusement et sur une période longue, et il serait illusoire de choisir cette option par défaut, sans préparation.

Le niveau constaté est assez hétérogène, ce qui conduit à une grande dispersion des notes.

Organisation de la leçon. Le jury rappelle qu'il s'agit bien d'une épreuve d'*informatique fondamentale*, et non pas d'outils mathématiques pour l'informatique. Il appartient au candidat de montrer la pertinence des outils mathématiques qu'il développe vis-à-vis des objectifs du thème informatique développé dans la leçon.

La présentation d'outils mathématiques pour eux-mêmes, en particulier lorsqu'il s'agit d'outils sophistiqués comme ceux de la théorie de la calculabilité ou de la théorie des types, s'apparente donc à un *hors-sujet*. Ce point avait déjà été souligné dans les précédents rapports et les titres des leçons ont été affinés en conséquence. Les titres des leçons concernant des modèles formels de l'informatique sont maintenant libellés en mentionnant explicitement *exemples et applications*, ce qui devrait ramener le candidat aux réels attendus de l'épreuve.

Les deux questions-clés de cette épreuve sont toujours les mêmes :

- à quoi cet outil mathématique sert-il dans le cadre informatique considéré ? Pouvez-vous décrire quelques exemples pertinents de son application concrète ?
- la complexité ou le coût de son utilisation sont-ils bien compensés par la qualité supplémentaire d'information qu'il permet d'obtenir ?

Ces questions sont très souvent posées par le jury, sous une forme ou une autre. Le jury invite les candidats à se préparer tout particulièrement à gérer ce type de questions, centrales dans la pédagogie de l'informatique au niveau des lycées et des classes préparatoires.

Enfin, il faut rappeler que lors de la présentation de son plan, le candidat doit proposer au moins deux développements : le jury est attentif d'une part à ce que ces développements entrent strictement dans le cadre de la leçon, et que d'autre part ils ne se réduisent pas à des exemples triviaux. Tout hors sujet est sévèrement pénalisé.

Interaction avec le jury. Une large partie de l'épreuve est consacrée à l'interaction avec le jury. En informatique, il s'agit plutôt d'explorer de manière plus approfondie les notions qui ont été présentées, les domaines connexes, et surtout les *exemples d'application* de ces notions.

L'interaction est conduite sous la forme d'un *dialogue* avec le candidat. Le jury respecte le niveau choisi par le candidat : les questions s'ajustent à ce niveau. De même, toute digression du candidat sur un domaine connexe à celui de la leçon conduira le jury à tester les connaissances du candidat sur ce domaine : les connaissances solides seront récompensées, mais un manque de maîtrise sur des notions choisies par le candidat lui-même seront pénalisées.

Ce long temps d'interaction doit être considéré comme une *occasion privilégiée* pour le candidat de montrer ses connaissances ! À lui, ou à elle, de guider le jury dans la direction adéquate. Il est indispensable que les candidats s'entraînent à ce type d'exercice avec leurs préparateurs.

Chapitre 6

Épreuve orale de modélisation

6.1 Recommandations du jury, communes aux options A,B, C

6.1.1 Recommandations pour l'exposé

Le jury tient à souligner les attentes partagées entre les trois options A (Probabilités et Statistiques), B (Calcul Scientifique) et C (Calcul Formel).

Dans cette épreuve, le candidat est appelé à **faire preuve d'initiative** pour s'exprimer et manifester ses qualités pédagogiques et de synthèse. Le texte fourni est un point de départ pour construire et exposer un traitement mathématique d'un problème «concret» en s'appuyant sur les éléments, généralement partiels, fournis par le texte. La présentation doit s'appuyer sur un dosage cohérent et harmonieux entre introduction motivée de modèles, preuves mathématiques, illustrations informatiques, critiques éventuelles du texte, réponses aux questions et mise en lumière de connaissances. Il n'y a pas de «format type» et des prestations très différentes, dans leur forme et leur contenu, sur un même texte, éventuellement traité de façon partielle mais en profondeur, peuvent conduire également à des notes élevées.

Comme le candidat se le voit rappeler en début d'épreuve, il doit exposer son travail à un public qui n'est pas censé connaître le texte, et ce de façon à le lui faire comprendre. Le jury, tout en étant conscient des difficultés du concours, attend un minimum d'aisance au tableau, la manifestation d'une certaine volonté de capter l'attention de l'auditoire et un discours clair et précis. Il est recommandé aux candidats de consacrer une partie de leur temps de préparation à s'interroger sur la stratégie d'exploitation du tableau et d'utilisation de l'outil informatique qui leur permettra de mettre au mieux en valeur leurs connaissances et leur compréhension du texte ou d'une partie de celui-ci. Le jury regrette de ne pas voir davantage de dessins (soignés) ou schémas explicatifs qui peuvent rendre l'argumentation plus claire et convaincante. La capacité à revenir sur le problème de départ et à conclure quant à l'efficacité de l'approche mathématique proposée pour y répondre est une qualité très appréciée. La rigueur et la clarté de l'organisation, la gestion du temps, la pertinence des choix opérés parmi les différentes questions soulevées par le texte sont des éléments de l'évaluation. Les qualités de synthèse sont aussi appelées à s'exprimer : il vaut mieux indiquer les étapes cruciales d'un raisonnement que de se lancer dans un long calcul fastidieux qu'on aura du mal à mener à bien. À un survol superficiel de l'intégralité du texte sans apport mathématique ou critique scientifique, le candidat doit préférer une discussion fouillée d'une portion du texte, bâtie sur des arguments mathématiques solides, des simulations pertinentes accompagnées de commentaires de bon aloi.

Le candidat est invité à mobiliser ses connaissances, sur des aspects variés du programme, pour enrichir son propos, en étayant les arguments seulement esquissés dans le texte par des **énoncés précis.** Il est totalement illusoire de chercher à impressionner le jury par une logorrhée de mots savants : les textes proposés peuvent être discutés en exploitant un bagage technique qui n'utilise pas les éléments les plus sophistiqués du programme. Quoi qu'il en soit, le jury ne manque pas de s'attarder sur toute notion amenée par le candidat durant sa présentation et il est toujours dommageable de s'aventurer sur des terrains méconnus. Bien plus qu'une démonstration de virtuosité technique, le jury attend que le candidat montre sa maîtrise d'énoncés relativement simples «en situation» : c'est là que réside une des difficultés principales de l'épreuve. Nombre de candidats éprouvent des difficultés à **formaliser** précisément des notions de base du programme ou à mettre en œuvre certaines de leurs connaissances en algèbre, géométrie, et analyse pour l'étude des modèles. *A contrario*, utiliser une portion excessive du temps de parole pour recycler un développement d'une leçon d'analyse ou de mathématiques générales en s'éloignant des enjeux du texte est considéré comme un hors sujet sévérement sanctionné. La paraphrase pure et simple d'amples portions du texte ne constitue en aucun cas un exposé satisfaisant. Les textes fournissent souvent des esquisses de démonstrations qui sont précisément destinées à être complétées et commentées. Le jury n'est pas dupe des candidats qui tentent de faire semblant de connaître une notion ou d'avoir compris un point du texte ou une démonstration. Il ne se laisse pas tromper non plus par les candidats qui font des indications du texte un argument d'autorité, tentative maladroite de masquer des insuffisances techniques. Un regard critique («il faudrait prouver que... mais je n'ai pas réussi à le faire», «les hypothèses du théorème de XXX que je connais pour aborder des problèmes similaires ne sont pas satisfaites dans le cas présent»...) est une attitude bien plus payante.

Enfin, le jury s'alarme de la grande faiblesse des connaissances en **algèbre linéaire**, les manipulations et raisonnements les plus élémentaires sont excessivement laborieux (calcul matriciel, résolution de systèmes linéaires, norme de matrices, décomposition spectrale et réduction).

6.1.2 Recommandations pour l'illustration informatique

Le jury rappelle son fort attachement à cet aspect de l'épreuve, dont les ambitions sont clairement délimitées. Il ne s'agit en aucun cas, et pour aucune des trois options (A, B, C), d'un exercice de programmation. L'objectif est d'être capable d'utiliser l'outil informatique pour illustrer, de façon pertinente, le contenu du texte. La réalisation de cet objectif constitue une part incompressible de la note finale attribuée à l'épreuve. Une très bonne évaluation peut résulter d'une exploitation judicieuse de programmes simples, reposant largement sur les routines standards des logiciels fournis (et dont un certain nombre sont disponibles de façon ouverte et gratuite afin de s'entraîner avant le concours). À ce propos, il n'est évidemment pas réaliste de découvrir ces logiciels le jour de l'épreuve : la configuration informatique utilisée pour le concours, et sa documentation, à l'exclusion des logiciels commerciaux, sont accessibles et téléchargeables sur le site officiel de l'agrégation et permettent de se familiariser avec l'environnement offert pour l'épreuve. La forme et la nature des illustrations proposées n'obéissent à aucun code préétabli. En revanche, elles doivent faire la preuve d'une véritable réflexion scientifique et être agrémentées de commentaires, sur les résultats et les méthodes. Même si les simulations ne sont pas abouties («ça ne marche pas»), le jury sait valoriser la démarche suivie lorsqu'elle est clairement argumentée et permettrait, avec des aménagements mineurs, de mettre en évidence des aspects intéressants du texte.

6.2 Option A : probabilités et statistiques

Le niveau de la session 2013 de ce concours en ce qui concerne l'option A a été assez proche de celui de 2012. Comme lors de cette dernière session, on se doit de regretter que de trop nombreux candidats, que ce soit par impréparation ou par manque de connaissances, aient présenté des exposés soit trop courts, soit trop vides, voire carrément inquiétants par le nombre de raisonnements et énoncés faux. Quelques rares candidats ont su montrer un niveau très bon, mais il semble clair que le niveau des candidats ne se répartit pas selon une gaussienne raisonnable...

Cette épreuve de modélisation, pour ce qui concerne ici l'option A, doit permettre au candidat de mettre en avant ses qualités académiques (le savoir mathématique pur), ses capacités de réflexion et de mise en perspective de ses connaissances . La mise en application des mathématiques à des problèmes concrets de modélisation, des illustrations informatiques pertinentes et des qualités pédagogiques de mise en forme d'un exposé construit et cohérent sont des éléments importants d'évaluation. Signalons encore une fois, que la l'aptitude du candidat à répondre aux questions qui lui sont posées, fait partie intégrante de l'évaluation de cette leçon. Comme pour l'ensemble des oraux, le caractère dynamique de l'exposé apporte une valeur ajoutée conséquente sur l'évaluation.

Le jury tient à rappeler que l'exposé doit être construit par le candidat en s'appuyant sur le contenu du texte et des suggestions qui y sont présentes, mais que la paraphrase simple des résultats avec un suivi linéaire de la structure du texte ne saurait constituer un exposé satisfaisant : les textes ne sont en général que survolés dans leur premières parties, qui reprennent souvent des notions simples du programme, alors que l'intérêt scientifique se situe dans les dernières parties du texte qui permettent aux candidats de montrer une étendue de connaissances et une faculté d'adaptation à des contextes mathématiques moins classiques que l'on est en droit d'attendre d'un bon candidat à l'agrégation.

Connaissance du programme

Les textes proposés comportent souvent les deux aspects probabiliste et statistique, de même il n'est pas impossible de se voir proposer le choix entre deux textes où l'aspect statistiques est plus marqué : il est donc nécessaire que les candidats fassent un effort de formation et de culture statistique plus poussés qu'ils ne l'ont montré au cours de cette session. La part importante de la statistique dans l'enseignement des mathématiques, part qui devrait encore s'accroitre dans les années futures, justifie que les futurs professeurs soient bien formés à la démarche statistique.

Ainsi, lors de la discussion avec le candidat, le jury peut interroger celui-ci sur la totalité du programme. En particulier, il est systématique que le jury pose des questions de nature statistique à partir des textes à coloration probabiliste et inversement.

Il ne faut pas non plus que les candidats oublient que statistique et probabilités font appel à des résultats issus d'autres domaines des mathématiques, ainsi le jury attend une utilisation pertinente de notions d'algèbre (en particulier linéaire), de géométrie et d'analyse dans l'exposé du candidat ; la modélisation stochastique faisant appel à toutes les connaissances des mathématiques, le candidat doit montrer qu'il en est conscient et capable.

Contenu théorique en probabilités-statistique

Que ce soit en probabilités ou en statistique les notions sont souvent mal maîtrisées ; les différentes notions de convergence, les questions de conditionnement et d'indépendance ou les notions statistiques les plus élémentaires. En particulier on notera que les propriétés des chaînes de Markov ne sont pas toujours bien connues. On notera que les intervalles de confiance semblent mieux compris par les candidats, même si l'on regrettera que le jury ait souvent eu à demander la construction de tels intervalles, alors qu'il serait attendu que le candidat le propose de lui-même dès lors qu'il propose une procédure d'estimation. En revanche, on regrettera que la notion de maximum de vraisemblance soit très peu présente dans la construction d'estimateurs, et que les tests statistiques soient en général totalement inconnus de la part des candidats.

Modélisation et mise en œuvre informatique

Il est rappelé que même si la plupart des textes s'appuient sur des problèmes issus de sciences autres que les mathématiques, aucune connaissance dans ces domaines n'est exigée par le jury. Discuter la modélisation proposée par un texte consiste, avant tout, à dégager les comportements qualitatifs du modèle mathématique proposé, la manière dont il dépend d'éventuels paramètres et, à un niveau tout à fait élémentaire, s'il semble apte à rendre compte des phénomènes qu'il est censé représenter. Le jury s'attend à ce que le candidat ne se contente pas d'un exposé qualitatif et développe, fût-ce partiellement, certains aspects purement mathématiques du texte. A contrario, les interprétations qualitatives du comportement des modèles sont parfois absentes des exposés. Pourtant, montrer que l'on comprend un modèle ne se réduit pas à prouver un théorème.

Pour ce qui concerne la simulation informatique, trop souvent le jury a pu voir des programmes *types* appliqués de façon non adéquate à la situation de modélisation proposée, certains candidats ont même parfois proposé des programmes complètement en dehors du sujet. Il est bien évident que cette démarche ne correspond absolument pas aux attendus de l'épreuve : la simulation informatique doit illustrer un des phénomènes du modèle, illustration à la fois qualitative et quantitative par exemple par la réalisation de tests ou d'intervalles de confiance pour l'estimation. De nombreux textes sont assortis d'un jeu de données numériques sur lequel le candidat est invité à mettre en œuvre les procédures de test ou d'estimation proposées par le texte, ou celles qu'il pourrait proposer en complément pour l'illustration du modèle : trop peu de candidats traitent effectivement ces données.

6.3 Option B : Calcul scientifique

Généralités

Cette session du concours a assez nettement séparé la population des candidats entre ceux qui avaient préparé un tant soit peu l'épreuve, et ceux qui n'en connaissaient ni les modalités, ni les attentes, et ne maîtrisaient pas les notions de base du programme général intervenant dans les textes. Afin d'aborder sereinement les textes proposés dans l'option B, un minimum d'aisance est requis avec les notions suivantes :

- Connaître le théorème de Cauchy-Lipschitz (le cas $\mathscr{C}^1$ est souvent suffisant) et être en mesure de l'appliquer pour des systèmes différentiels simples,
- Construire, analyser et mettre en œuvre la méthode d'Euler explicite,
- Connaître les principes des méthodes directes de résolution de systèmes linéaires (pivot de Gauss, *LU*), notion de conditionnement, éléments propres de matrices, analyser et mettre en œuvre la méthode de la puissance,
- Analyser et mettre en œuvre la méthode de Newton (cas vectoriel),
- Construire la matrice correspondant à la discrétisation par différences finies de $(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2})$ et connaître ses propriétés,
- Etre capable d'énoncer et appliquer le théorème des extrêma liés (typiquement pour des problèmes de minimisation de fonctionnelles convexes sur $\mathbb{R}^N$ avec contraines linéaires), analyser et mettre en œuvre un algorithme du gradient.

Le jury souligne que les textes exploitent ces notions dans leurs versions les plus élémentaires et ne requièrent aucun raffinement technique.

Dans l'épreuve de modélisation, un certain nombre de candidats, bien que disposant d'un bagage technique modeste, ont su tirer leur épingle du jeu et obtenir des notes très honorables :

- en se montrant capable d'identifier comment un théorème classique pouvait répondre à une question soulevée par le texte, énonçant clairement ce théorème et l'appliquant au contexte précis du texte,
- en commentant de manière pertinente la mise en équations évoquée par le texte,
- en proposant une illustration d'un fait discuté par le texte (la convergence vers un état stationnaire, l'apparition de structures particulières...).

Recommandations spécifiques

En ce qui concerne l'option de Calcul Scientifique, le jury émet les *recommandations spécifiques suivantes* :

- *Analyse des équations différentielles ordinaires et calcul différentiel* : La dérivation de fonctions de $\mathbf{R}^m$ dans $\mathbf{R}^n$ ne devrait pas poser de difficulté au niveau de l'agrégation. Les formules de développements de Taylor contiennent généralement un terme de reste, dont l'analyse est un point souvent crucial. Les candidats devraient faire preuve d'automatismes à la vue de la moindre équation différentielle ordinaire. Par exemple, un texte indiquant «la solution de l'équation différentielle [...] est définie pour tout temps et reste positive» doit amener à : 1) citer le théorème de Cauchy-Lipschitz, 2) expliquer comment il s'applique dans le contexte présent, 3) établir des estimations sur la solution, 4) en déduire la positivité de la solution et le caractère non borné du temps d'existence.
- *Schémas numériques pour les équations différentielles* : Le jury considère la description des schémas d'Euler comme un élément central du programme de l'option. Les candidats doivent être capables de présenter clairement les principes guidant l'écriture de ces schémas et l'analyse de leurs propriétés de convergence, ainsi que les avantages et inconvénients des méthodes explicites et implicites. Trop rares sont les candidats capables de formaliser correctement une définition de la convergence d'un schéma numérique. La confusion récurrente entre l'approximation X_n et l'évaluation $X(t_n)$ de la solution exacte au temps t_n, l'incapacité à relier le nombre de points de discrétisation et le pas Δt témoignent d'une compréhension déficiente du sujet. Afin de limiter des confusions coupables, le jury recommande instamment de prohiber toute utilisation de symboles comme $\simeq$, $\approx$ ou bien pire $\sim$, pour relier l'évaluation de la solution aux points de discrétisation et les éléments de la suite numérique définie par le schéma. La mise en œuvre de ces méthodes peut être l'occasion de discuter des difficultés potentielles liées à la stabilité et aux contraintes portant sur le pas de temps. Attribuer l'intérêt de la notion de stabilité aux «erreurs machines» traduit une interprétation erronée des enjeux du calcul scientifique.
- *Equations aux dérivées partielles* : Le jury précise que les textes qui évoquent des problèmes d'équations aux dérivées partielles peuvent être abordés avec des outils rudimentaires et ne nécessitent *a priori* aucune connaissance sur la théorie des distributions, bien que ces notions aient intégré le programme commun, ni ne réclament de dextérité particulière d'analyse fonctionnelle. Le jury a été quelque peu étonné que des candidats à cette épreuve découvrent la matrice associée à la discrétisation de $(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2})$ par différences finies le jour de l'oral.
- *Algèbre linéaire* : Calculer déterminant et polynôme caractéristique n'est pas forcément la méthode la plus efficace pour déterminer si une matrice symétrique est définie positive. Nombre de candidats manquent d'assurance sur la théorie des formes quadratiques et sur les raisonnements liés à la réduction des matrices. Les méthodes pratiques de calcul (résolution de systèmes, déterminant, inverse...) sont trop souvent méconnues.

Les candidats qui ont choisi l'option B ne doivent pas hésiter à s'appuyer sur leurs connaissances spécifiques pour proposer des développements originaux dans les leçons d'analyse et de mathématiques générales, en centrant leur propos sur des problématiques motivées par les préoccupations du calcul scientifique (approximation de solutions d'équations linéaires ou non linéaires, d'équations différentielles, convergence d'algorithmes, analyse matricielle,...).

Informatique

Le jury de l'option B rappelle qu'une illustration réalisée avec les routines de base des logiciels fournis est tout à fait satisfaisante si elle est clairement présentée, motivée et discutée. Le jury se réjouit qu'une grande partie des candidats aborde avec enthousiasme cette partie de l'épreuve. Cependant le jury met en garde les candidats qui auraient tendance à meubler le temps d'interrogation en accumulant les simulations pour tenter de masquer la faiblesse du contenu mathématique de leur prestation. Si `Scilab` ou `Matlab` sont certainement les logiciels les mieux adaptés, le jury relève qu'un certain nombre de candidats a pu fournir des résultats convaincants avec des logiciels comme `Maple`, `Sage` ou `XCas`.

6.4 Option C : Algèbre et Calcul formel

Généralités

La qualité générale des exposés tend à baisser. La préparation de l'exposé, à l'instar de la compréhension du texte, devrait être un passage incontournable de la préparation, là où l'on voit de nombreux candidats arriver sans s'être posé la question de la restitution de ce qu'ils ont étudié et compris – avec pour conséquence qu'ils restent beaucoup trop près du texte. Même s'il est permis de garder le texte en main, on ne saurait trop conseiller aux candidats de le laisser sur la table lors de l'oral...

S'il est parfaitement légitime de ne pas vouloir aborder tous les aspects d'un texte, la stratégie, adoptée cette année par certains très bons candidats, d'en rester au premier tiers et de refuser d'entrer dans les mathématiques avancées, ne permet pas, sauf exception, d'obtenir une excellente note.

Enfin, l'oral de l'option C n'est pas un problème, ou une suite d'exercices, d'algèbre. La ligne directrice du calcul formel est la recherche de l'*effectivité*, puis de l'*efficacité* (souvent en temps, parfois en espace) du calcul algébrique, en allant des aspects les plus élémentaires (calcul avec les entiers, les polynômes, les entiers modulo, les séries formelles) aux aspects plus avancés (élimination, géométrie effective, codes correcteurs d'erreur). Se poser ces questions permet, dans de très nombreux cas, de mieux comprendre la ligne directrice des textes, et d'en proposer un exposé éclairant ; par exemple d'expliquer, au-delà de ce que le texte fait, *pourquoi* il le fait.

Les candidats ayant le réflexe de se saisir, seuls, d'une question de complexité, sont perçus très positivement par le jury. Pour prendre un exemple, quand le texte parle de cryptographie, comparer le coût du système proposé et le coût d'une attaque, même naïve, est une initiative intéressante et actuellement inexistante. Une telle étude est beaucoup plus à sa place qu'un exposé détaillé de RSA plaqué sur un texte qui n'en parle pas – la mention rapide de RSA dans un texte introduisant un système de chiffrement pour comparer des complexités restant bien sûr pertinente. Plus largement, une réflexion minimale sur les ordres de grandeur (est-ce qu'un calcul faisable représente $10^1, 10^{10}, 10^{100}, 10^{1000}$ opérations élémentaires) permettrait souvent de mieux situer les problèmes soulevés par un texte, ou de proposer des valeurs de paramètres réalistes quand ce sujet n'est pas évoqué par le texte.

Aspects mathématiques

Les remarques de l'année 2012 s'appliquent intégralement à la session 2013, et on renvoie le lecteur à ce rapport, en ajoutant ici quelques remarques complémentaires.

- L'algèbre linéaire n'est toujours pas l'acquis solide qu'elle devrait être, ses aspects effectifs peuvent encore progresser. Le réflexe "pivot de Gauss / n^3" en réponse aux questions effectives d'algèbre linéaire est devenu plus répandu, avec parfois des surprises : pour certains candidats, il peut permettre de calculer le rang, mais pas le déterminant, ou seulement de résoudre des systèmes linéaires, *etc.* Aussi, il est bon d'avoir fait un pivot entier à la main pour s'être posé la question de la "remontée", par exemple pour le calcul de l'inverse : on ne décide pas soudainement d'opérer sur les colonnes, contrairement à une idée répandue. Les questions de valeurs propres, en particulier la différence entre sous-espace propre et sous-espace caractéristique, restent mal comprises.
- Le résultant reste la terreur des candidats. Beaucoup surcompensent des lacunes en infligeant au jury un extrait de lecon d'algèbre sur le sujet, avec des hypothèses (trop) générales, et sans le résultat souvent utile, voire central, dans le contexte de l'option C, *i.e.* celui concernant la spécialisation d'une variable, faisant apparaître la condition de non-annulation simultanée des termes de tête. Ces remarques sur le résultant s'appliquent également à d'autres sujets ; rappelons donc que le jury n'accordera **a**ucune valeur

à un exposé de leçon généraliste sur une notion du texte, et qu'on se limitera, au plus, à l'énoncé du théorème pertinent dans le contexte étudié.

- Pour ce qui est de l'arithmétique, le point noir reste l'algorithme d'Euclide étendu, qui reste assez peu formalisé dans l'esprit des candidats ; les connaissances sur les corps finis progressent, tout en restant fragiles. En particulier, le fait que l'endomorphisme de Frobenius permet, partant d'une racine d'un polynôme, d'obtenir toutes les autres, n'est pas connu des candidats. Un certain nombre de candidats se lancent dans une discussion sur l'algorithme de Berlekamp (un peu à tout propos, d'ailleurs). Outre qu'une telle discussion est souvent hors sujet, l'algorithme (difficile) est en général compris de manière tellement superficielle que ça n'a, cette année, jamais été une bonne idée.
- Les codes correcteurs sont une partie limitée du programme, et très peu de connaissances sont exigibles (et exigées). Néanmoins, il est bon de s'y être un peu frotté pour se familiariser avec les problématiques sous-jacentes, typiquement qu'un bon code correcteur se décrit de façon compacte (et est donc en général linéaire), a une grande dimension et grande distance minimale (par rapport à sa longueur) et, aussi et surtout un algorithme de décodage efficace – rappelons que ce second point n'est pas vrai d'un code linéaire "quelconque". Il faut s'être confronté à ces faits pour comprendre les questions que se pose presque tout texte sur les codes...
- Sur les aspects complexité, rappelons qu'il est toujours pertinent de dire ce qu'on compte, car c'est souvent ambigu en calcul formel : opérations sur les éléments du corps, ou de l'anneau de base ; ou (préférable, mais parfois trop difficile) opérations "élémentaires" sur des petits entiers. L'exemple de l'algorithme d'Euclide est éclairant : la complexité linéaire du nombre de divisions euclidiennes oublie un fait important : soit le nombre d'étapes est petit, soit les quotients sont petits en moyenne, et le coût total est quadratique là où on l'attendrait, naïvement, cubique. La mise en regard de ces deux complexités est un élément important sur l'algorithme. Sur ces aspects complexité, relevons aussi une confusion fréquente et pourtant élémentaire entre opérations consécutives (on ajoute les complexités) et opérations imbriquées (on les multiplie), qui conduit à des aberrations (complexités de l'ordre de $n!$ ou n^n quasi-systématiques).

Enfin, tout cela n'a de sens qu'une fois la question de la représentation des objets réglée : entiers, polynômes mais aussi séries formelles et réels. Pour ces derniers, de loin les plus délicats, signalons que les connaissances attendues sur les flottants sont très limitées (essentiellement une prise de conscience des problèmes liés à la perte de précision catastrophique lors de la soustraction de deux nombres proches), et qu'on attend surtout une réflexion sur les limites de l'approximation et la différence, du point de vue algébrique, entre monde réel et monde approché (pgcd de deux polynômes à coefficients réels, par exemple, ou encore les 0.999999999 ou 1.000000001 affichés par les logiciels).

Informatique

La qualité de l'illustration informatique semble inexorablement en baisse, la réflexion associée est bien pauvre, et le commentaire de l'illustration presque inexistant. Ce n'est pas le cas des attentes du jury sur ce sujet, et ce hiatus finira nécessairement par conduire à un durcissement de l'évaluation sur ce point. Les remarques des années passées continuent à s'appliquer : en particulier, on ne découvre pas un logiciel le jour de l'oral, mais on en connaît les capacités et, surtout, les limites avant.

6.5 Option D : Modélisation et Analyse de Systèmes Informatiques

Commentaires généraux

Le jury a apprécié le travail accompli pour la préparation de cette épreuve par les meilleurs candidats. Il a interrogé les candidats dans le même esprit que dans les autres options et les critères d'évaluation étaient largement identiques sauf en ce qui concerne l'exercice de programmation. Le lecteur est invité à se reporter à la section du rapport consacrée à l'épreuve de modélisation pour les remarques générales sur la structure de cette épreuve. Nous ne détaillons ici que les aspects spécifiques à cette épreuve dans l'option Informatique.

Exposé des motivations

Beaucoup de candidats omettent la phase indispensable d'introduction et de motivation. C'est au candidat d'introduire le sujet du texte et de motiver la présentation qui va suivre. Cette motivation sera le plus souvent l'évocation de situations concrètes dans lesquelles on a besoin d'outils informatiques spécifiques. Ces situations peuvent être proposées par le texte lui-même, mais elles peuvent aussi être tirées de l'expérience personnelle du candidat. Toute contribution personnelle à ce niveau est toujours très appréciée !

Présentation du texte

Il est attendu des candidats qu'ils soient fidèles à l'esprit du texte. Il ne s'agit pas qu'il traite l'intégralité des points du texte, mais que le traitement qu'il choisit d'en faire soit cohérent : il doit par exemple expliquer pourquoi il a choisi de développer certains points, et pas certains autres.

Particulièrement dans le cadre de l'option D, il est attendu une prise en compte soigneuse de l'ensemble de la démarche de modélisation, qu'on peut décomposer en quatre phases :

- partir d'une situation concrète, non nécessairement de nature informatique ;
- en proposer un modèle, mathématique et informatique ;
- travailler dans ce modèle, pour implémenter, expérimenter, décider d'un compromis sur la complexité en temps ou en espace, etc. ;
- revenir à la situation concrète de départ, se demander comment le modèle a permis de mieux analyser cette situation.

On attend, en particulier, que le candidat ne néglige pas l'étape de modélisation, ni la dernière (retour à la situation concrète).

Le jury est spécialement attentif aux questions liées à l'évaluation du coût, ainsi qu'aux compromis de la modélisation concernant la précision, la complexité, etc.

Concernant la troisième phase, de travail dans le modèle, il est rappelé que le candidat n'est pas dans le cadre d'une leçon : il ne doit pas se lancer dans une succession de démonstrations mathématiques, mais insister sur la variété des techniques qui peuvent être appliquées, et dont il doit être capable de développer en détail l'une ou l'autre à la demande du jury. Dans cette partie de l'épreuve, il ne s'agit pas de détailler toutes les preuves. Toute tentative de ramener cette épreuve à une leçon sera détectée et sanctionnées par le jury.

Exercice de programmation informatique

Au cours de l'exposé, le candidat présente son *exercice de programmation*. Nous donnons quelques recommandations spécifiques à cette partie de l'épreuve à la fin de ce rapport.

Cette partie de l'épreuve a été globalement satisfaisante, les candidats ayant généralement bien compris l'importance qui y est attachée. Elle dure environ 10 minutes. Le candidat choisit librement dans le temps d'exposé le moment où présenter son exercice de programmation, de façon qu'il s'intègre au mieux à la présentation. Si l'exercice n'a pas été présenté au bout d'une trentaine de minutes, le jury lui rappellera de le faire.

Le plus souvent, les candidats le placent dès que les notions nécessaires ont été introduites dans l'exposé. Cette introduction doit être soignée et complète, afin d'éviter tant les allers-retours du terminal au tableau que les discours approximatif devant l'écran.

Cette présentation au jury doit être faite que le programme fonctionne — ce que l'on espère ! — ou pas. C'est seulement dans un deuxième temps que le candidat lance une exécution. Dans tous les cas, le jury évalue la qualité générale du code réalisé. Cette évaluation interactive permet à un candidat réactif de repérer une erreur, voire de la corriger, de recompiler et de relancer l'exécution.

Interaction avec le jury

Cette dernière partie de l'épreuve est un *dialogue*, bidirectionnel.

Certes, le candidat répond aux questions du jury, mais il doit prendre conscience que ses réponses orientent les questions. Au-delà du sujet du texte, le jury n'interrogera que sur ce que le candidat aura évoqué de lui-même. Inversement, si le candidat s'écarte du texte proposé, le jury s'attend à ce qu'il puisse répondre aux questions qu'invariablement il lui posera sur ces points. Cependant, le candidat est bienvenu s'il fait intervenir des connaissances personnelles non abordées par le texte.

Dans cette dernière partie de l'épreuve, le jury souhaite pouvoir aborder de nombreuses questions : **il est donc attendu des réponses brèves et non pas des développements de type leçon.** Les questions du jury porteront au moins autant sur la démarche globale de modélisation et la compréhension des différentes approches du texte que sur l'étude technique des diverses propositions.

Il sera apprécié que la présentation des différentes approches souligne leurs avantages et inconvénients respectifs, en terme de coût, d'adéquation au problème, de complexité, de précision…

Une partie de la discussion pourra être consacrée à l'exercice de programmation, pour discuter avec le candidat de la cohérence de sa programmation : choix du langage, style de programmation (fonctionnel ou impératif) utilisation des structures de contrôle et en particulier des boucles, découpage du problème en fonctions…

6.5.1 Remarques spécifiques sur l'exercice de programmation.

Voici quelques recommandations plus précises concernant l'exercice de programmation. Elles sont motivées par les présentations des candidats de cette année. Nous espérons qu'elles seront utiles pour les candidats des années à venir.

Il s'agit d'un exercice de pédagogie et non pas de virtuosité. Le critère principal d'évaluation est la qualité pédagogique de la présentation du programme au jury et non pas la complexité du codage ou la virtuosité dans l'utilisation des aspects avancés du langage. Une question fréquente du jury sera : comment expliqueriez-vous ceci à une classe de terminale ?

Installation technique

Le candidat dispose d'un poste informatique analogue à celui utilisé pour la préparation. Les fichiers qu'il a préparés sont installés sur ce poste en début d'interrogation. Le jury suit la présentation, mais il ne dispose ni de clavier ni de souris : le candidat est donc le seul à contrôler ce qui est présenté, sans interférence possible.

Présentation du programme

D'une manière générale, le candidat doit proposer un code lisible et mettre en valeur ses connaissances en programmation et sa maîtrise du langage et de l'environnement de programmation utilisés. À titre de repère, la partie centrale du code devrait tenir sur un écran.

Les candidats sont invités à présenter le schéma algorithmique et les structures de données utilisés avant de lancer leur programme. Par contre, il est inutile de descendre dans les détails les plus triviaux du code.

Le jury pourra demander au candidat d'évaluer la complexité de son implémentation ou de discuter de choix alternatifs de conception. La possibilité de modification au vol d'un paramètre ou des données est appréciée pour la vérification de la correction.

Choix des données d'exécution

Il est demandé aux candidats d'exécuter leurs programmes sur différents jeux de données, et il est souhaitable qu'ils aient anticipé ce point. La manière dont ces jeux de données sont choisis devra être justifiée par la démonstration de divers aspects du comportement du programme. Les candidats sont souvent interrogés sur leurs critères de choix.

Le candidat doit être capable de repérer des résultats erronés produits par son programme. Ne pas s'apercevoir que son programme renvoie des résultats absurdes est évidemment pénalisé ! Le jury invite donc les candidats à réfléchir aux ordres de grandeur des résultats attendus.

Choix du langage

Le candidat choisit son langage. Cette année, la plupart des candidats ont choisi Caml, mais C et Java ont également été utilisés. À partir de la session 2014, C++ pourra également être choisi, avec les bibliothèques disponibles en standard dans la distribution gcc, en particulier STL *(standard template library)*.

Ce choix peut orienter les questions, car l'implémentation d'un problème peut être plus facile dans certains langages qui permettent de manipuler les structures de données directement, par exemple les listes pour Caml. Mais un candidat qui utilise ces facilités doit pouvoir les justifier. Par exemple, la différence ensembliste entre deux listes étant prédéfinie dans les bibliothèques de Caml, on attend du candidat qui l'utiliserait qu'il puisse expliquer l'implémentation de cette fonction et la complexité des opérations concernées.

L'exercice est soigneusement spécifié dans les textes proposés. Il doit être conduit dans l'un des langages proposés : un candidat qui n'utilise pas les langages proposés reçoit la note 0 à l'exercice de programmation, même si ce langage est disponible sur le poste informatique (Maple, Scilab, etc.)

Style de programmation

La *lisibilité* et l'*élégance* de l'expression du programme dans le langage choisi sont particulièrement appréciées par le jury. Il est essentiellement attendu que le style de programmation des programmes soit *cohérent* : utilisation de structures d'itération (bornées `for` ou non-bornées `while`), initialisation des variables, découpage plus ou moins fin en fonctions auxiliaires, etc. **Les critères d'arrêt des boucles et des récursions doivent être parfaitement maîtrisés.** Toutes les quantités présentes dans les programmes doivent être définies par des constantes symboliques facilement modifiables à la demande du jury.

Certains langages favorisent une programmation récursive ou itérative. Le candidat peut utiliser le mode de programmation qu'il préfère, pourvu que ce soit de manière cohérente avec les autres choix de conception. Il est bien sûr attendu du candidat qu'il sache passer d'une programmation récursive à une programmation itérative et réciproquement dans les cas simples, par exemple en présence de *récursivité terminale*.

Entrées-sorties

Certains candidats passent beaucoup de temps à programmer des entrées *interactives* au clavier. Ce n'est pas nécessaire et souvent inutilement complexe, notamment en C (appel par référence dans la fonction `scanf`, etc.). Il est recommandé de coder le jeu de données dans une procédure d'initialisation qui pourra être facilement modifiée à la demande du jury.

Assertions de correction

Il est très souvent demandé aux candidats d'exécuter leurs programmes sur les cas limites de leurs spécifications, sauf si ces cas ont été explicitement exclus dans la présentation préalable : liste vide pour les algorithmes de tri, nombres négatifs pour des algorithmes de factorisation, etc. Il sera d'ailleurs bien apprécié que le candidat garde les parties délicates de son programme par des assertions, par exemple à l'aide de la fonction `assert` de la bibliothèque C ou de levée d'exception `failwith` de Caml. C'est particulièrement indiqué pour les accès aux tableaux passés en paramètre en C.

Recompilation

Dans le cas d'une programmation en C, il sera systématiquement demandé au candidat de recompiler son programme avec le niveau maximal d'avertissement :

```
gcc -Wall prog.c -o prog
```

Un programme qui produit des avertissements sera pénalisé et le candidat devra le corriger pendant l'interrogation. La même chose sera vérifiée en Caml ou Java. En particulier, les *pattern-matching* de Caml doivent être exhaustifs et les fonctions internes à une séquence doivent retourner la valeur `()` du type `unit`.

Organisation de la préparation

Il est souvent demandé combien de temps un candidat devrait consacrer à la préparation de l'exercice de programmation au sein des heures de préparation. Ceci dépend bien sûr des capacités du candidat et de l'organisation de son exposé. Cependant, il faut noter que la présentation de cette partie ne dure que 10 minutes sur les 40 minutes d'exposé. Il est donc indiqué d'y passer au plus un quart du temps de préparation, soit entre une demi-heure et une heure, afin de ne pas empiéter sur la préparation du reste de l'épreuve.

Respect de la spécification

Le candidat doit respecter la spécification qui est donnée dans l'énoncé. C'est seulement dans un deuxième temps qu'il peut, s'il le souhaite, présenter un programme implémentant une autre spécification. Il devra alors expliquer pourquoi il le fait. Le fait que l'exercice proposé dans l'énoncé soit trivial ou inintéressant n'est évidemment pas une explication suffisante ! Ces extensions sont alors considérées et évaluées comme des développements au choix du candidat. Par exemple, des simulations simples ont pu servir à exposer un développement. Elles doivent mettre en valeur d'autres capacités du candidat que sa *virtuosité* en programmation pure qui n'est absolument pas l'objectif de l'épreuve. Ces présentations complémentaires peuvent utiliser l'ensemble des outils présents sur le poste informatique, Maple et Scilab par exemple.

Chapitre 7

Épreuve : Agir en fonctionnaire de l'État et de façon éthique et responsable

Conformément à l'arrêté du 28 décembre 2009 fixant les modalités d'organisation des concours de recrutement des enseignants, une interrogation portant sur la compétence «Agir en fonctionnaire de façon éthique et responsable » est insérée, depuis la session 2011, dans l'épreuve orale d'algèbre et géométrie pour les candidats des options A,B,C et dans l'épreuve orale de mathématiques pour l'informatique pour les candidats de l'option D.

7.1 Déroulement

Le candidat dispose d'un temps global de 3h30 qu'il a toute liberté de répartir entre la préparation des deux interrogations. Toutefois, il convient de conserver une certaine proportionnalité compte tenu des coefficients en jeu (4-1).

Celle qui se rapporte à l'épreuve «Agir en fonctionnaire de l'État de manière éthique et responsable » comporte deux phases : un exposé du candidat d'une durée maximale de dix minutes, suivi d'un entretien avec le jury d'une durée maximale de dix minutes. L'exposé et l'entretien s'appuient sur le sujet remis au candidat à l'issue du tirage. Celui-ci comprend plusieurs extraits de textes officiels (de nature législative ou réglementaire) et deux ou trois pistes de réflexion conçues pour aider le candidat à structurer sa présentation et pouvant servir de support aux questions abordées lors de la phase de dialogue avec le jury. Il est à noter que le candidat n'est pas tenu de suivre ces piste et a toute liberté pour analyser le texte comme il l'entend. Les sujets ont porté sur des thématiques regroupées autour des connaissances, capacités et attitudes portant définition des compétences à acquérir par les professeurs.

Parmi celles-ci, nous pouvons citer :

- Droits et obligations du fonctionnaire de l'État
- Missions de l'enseignant du second degré et du supérieur
- Les cordées de la réussite
- L'obligation scolaire
- Education et égalité des chances
- Politique éducative et liberté académique de l'enseignant
- Le projet d'établissement
- Le socle commun des connaissances et des compétences
- L'éducation prioritaire
- L'orientation active
- La scolarisation des élèves en situation de handicap
- L'utilisation des ressources numériques
- Le conseil de discipline.

7.2 Objectif

L'objectif de l'interrogation est de vérifier les connaissances du candidat sur l'une des compétences professionnelles du métier d'enseignant et ses capacités de compréhension, de réflexion et d'analyse, jugées indispensables pour un fonctionnaire de catégorie A. La conception de l'épreuve tend à minorer la place des connaissances du système éducatif au profit de capacités de réflexion, d'exploitation et d'analyse de documents et de communication orale.

7.3 Compétences attendues

Lors de l'exposé, le jury attend du candidat qu'il dégage les objectifs principaux visés par les extraits de textes figurant dans la documentation fournie par le sujet, qu'il cerne leurs articulations ou leurs apparentes contradictions, qu'il en fasse une analyse raisonnée et construise une argumentation.
Ceci suppose que le candidat soit capable de traiter scientifiquement une question en se méfiant tant de ses propres préjugés que de certains lieux communs ou idées reçues. Ce processus de distanciation vis à vis de ses propres représentations est particulièrement nécessaire sur certaines thématiques pouvant le toucher dans ses convictions ou son histoire personnelle. Outre le contenu de l'exposé, la manière dont il est présenté en termes de structure et d'expression sont des éléments d'appréciation importants : en particulier, le registre de langue orale (tant au niveau syntaxique que lexical) doit être adapté aussi bien à la situation d'oral de concours qu'aux situations de communication auxquelles un enseignant est confronté dans sa pratique professionnelle.
L'échange avec le jury qui fait suite à l'exposé porte aussi bien sur certains points évoqués par le candidat que sur des éléments figurant dans le document. Le jury n'attend a priori aucune prétendue bonne réponse, mais est sensible aux qualités d'écoute, de dialogue et d'ouverture d'esprit manifestées par le candidat, dans le respect des règles de la déontologie et de l'éthique d'un fonctionnaire de l'État. Le candidat peut, s'il le souhaite, illustrer sa présentation par des éléments tirés d'une expérience professionnelle. En revanche toute exposition uniquement basée sur des opinions ou convictions personnelles et non étayée ne peut satisfaire le jury qui en tient compte dans sa notation.

7.4 Bilan des interrogations

Parmi les candidats, le jury a pu détecter trois catégories de populations : quelques rares étudiants qui se sont présentés sans préparation, des professeurs déjà en activité, des étudiants ayant préparé l'épreuve et ayant bien compris les règles de l'exercice.

- Les premiers se sont contenté de résumer les textes proposés, sans identifier les liens logiques qui les unissent. L'entretien avec ces candidats a souvent révélé que leurs connaissances sur l'éducation relevaient davantage d'idées reçues et de lieux communs que de savoirs scientifiquement fondés. Dans des cas extrêmes, quelques très rares candidats ont mal géré leur temps de préparation et se sont présentés devant le jury sans même avoir pris connaissance du sujet. La durée de leur exposé a été amputée du temps nécessaire à la lecture des textes qui s'est alors effectuée au début de l'interrogation ; dans ces conditions, leur prestation s'est souvent limitée à de la paraphrase, sans aucune émancipation des textes proposés.
- Les seconds ont montré de bonnes connaissances de la politique éducative et des institutions qui la définissent et la mettent en œuvre. Ils n'ont pas hésité, pour organiser leur exposé ou participer à l'entretien, à compléter les éléments figurant dans le sujet par des exemples tirés de leur expérience personnelle. Certains d'entre eux n'ont cependant pas réussi à mettre leurs sentiments ou leurs opinions à l'épreuve de savoirs externes, notamment ceux produits par les sciences sociales. Quelques expériences présentées sur un registre affectif, voire pathétique, n'ont pas réussi à s'élever du niveau personnel au niveau professionnel.

- Les troisièmes ont montré des connaissances livresques sur les institutions et le système éducatif et ont su les mobiliser pour aborder la problématique abordée dans le corpus documentaire fourni. Quelques uns sont même parvenus à le contextualiser en prenant appui sur une culture personnelle relative à l'histoire, la sociologie ou la philosophie.

Le jury a constaté une assez bonne qualité d'ensemble des prestations, la majorité des candidats ayant bien compris les règles de l'exercice, et s'y étant préparés. Nombre d'entre eux ont fait preuve de qualités de réflexion, d'analyse et d'esprit critique, se positionnant clairement dans le cadre des principes éthiques de la fonction publique de l'État.

Chapitre 8

Annexe 1 : Leçons d'oral (options A, B et C) proposées en 2013

Leçons d'algèbre et géométrie

❁ ❁ ❁

La leçon 126 n'a pas été posée en 2013 mais pourra l'être en 2014.

101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

---

102 Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.

---

103 Exemples et applications des notions de sous-groupe distingué et de groupe quotient.

---

104 Groupes finis. Exemples et applications.

---

105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

---

106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

---

107 Représentations et caractères d´un groupe fini sur un $\mathbf{C}$-espace vectoriel.

---

108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

---

109 Représentations de groupes finis de petit cardinal.

---

120 Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

---

121 Nombres premiers. Applications.

---

122 Anneaux principaux. Exemples et applications.

---

123 Corps finis. Applications.

---

124 Anneau des série formelles. Applications

---

125 Extensions de corps. Exemples et applications.

---

126 Exemples d'équations diophantiennes.

---

140 Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.

---

141 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

---

142 Algèbre des polynômes à plusieurs indéterminées. Applications.

---

143 Résultant. Applications.

---

144 Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.

---

150 Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

---

151 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

---

152 Déterminant. Exemples et applications.

---

153 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

---

154 Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

---

155 Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

---

156 Exponentielle de matrices. Applications.

---

157 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

---

158 Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

---

159 Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.

---

160 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

---

161 Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Applications en dimensions 2 et 3.

---

162 Systèmes d'équations linéaires ; opérations, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

---

170 Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

---

171 Formes quadratiques réelles. Exemples et applications.

---

180 Coniques. Applications.

---

181 Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

---

182 Applications des nombres complexes à la géométrie.

---

183 Utilisation des groupes en géométrie.

---

190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

Leçons d'analyse et probabilités

Les leçons 209, 244, 260, 261, 262, 263, 264 n'ont pas été posées en 2013 mais pourront l'être en 2014.
Les leçons 250, 251, 252 sont supprimées pour la session 2014.
Les leçons 219, 220, 223, 224, 226 et 245 seront reformulées pour la session 2014.

201 Espaces de fonctions : exemples et applications.

---

202 Exemples de parties denses et applications.

---

203 Utilisation de la notion de compacité.

---

204 Connexité. Exemples et applications.

---

205 Espaces complets. Exemples et applications.

---

206 Théorèmes de point fixe. Exemples et applications.

---

207 Prolongement de fonctions. Exemples et applications.

---

208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

---

209 Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications.

---

213 Espaces de HILBERT. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

---

214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications.

---

215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

---

216 Étude métrique des courbes. Exemples.

---

217 Sous-variétés de $\mathbf{R}^n$. Exemples.

---

218 Applications des formules de TAYLOR.

---

219 Problèmes d'extremums.

---

220 Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'études qualitatives des solutions.

---

221 Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

---

223 Convergence des suites numériques. Exemples et applications.

---

224 Comportement asymptotique de suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.

---

226 Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples.

---

228 Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.

---

229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

---

230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

---

232 Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.

---

234 Espaces L^p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.

---

235 Suites et séries de fonctions intégrables. Exemples et applications.

---

236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.

---

239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

---

240 Produit de convolution, transformation de FOURIER. Applications.

---

241 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

---

243 Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

---

244 Fonctions développables en série entière, fonctions analytiques. Exemples.

---

245 Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbf{C}$. Exemples et applications.

---

246 Séries de FOURIER. Exemples et applications.

---

247 Exemples de problèmes d'interversion de limites.

---

249 Suites de variables de BERNOULLI indépendantes.

---

250 Loi des grands nombres. Théorème central limite. Applications.

---

251 Indépendance d'événements et de variables aléatoires. Exemples.

---

252 Loi binomiale. Loi de POISSON. Applications.

---

253 Utilisation de la notion de convexité en analyse.

---

254 Espaces de SCHWARTZ $S(\mathbf{R}^d)$ et distributions tempérées. Transformation de FOURIER dans $S(\mathbf{R}^d)$ et $S^{'}(\mathbf{R}^d)$.

---

255 Espaces de Schwartz. Distributions. Dérivation au sens des distributions.

---

260 Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.

---

261 Fonction caractéristique et transformée de Laplace d'une variable aléatoire. Exemples et applications.

---

262 Modes de convergence d'une suite de variables aléatoires. Exemples et applications.

---

263 Variables aléatoires à densité. Exemples et applications.

---

264 Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Reformulation de certaines leçons d'analyse et probabilités pour la session 2014.

219 Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications

---

220 Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2.

---

223 Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

---

224 Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

---

226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples et applications.

---

245 Fonctions holomorphes sur un ouvert de **C**. Exemples et applications.

Chapitre 9

Annexe 2 : Leçons de mathématiques pour l'informatique et leçons d'informatique proposées en 2013

Leçons de mathématiques pour l'informatique

Les leçons 219, 220, 223, 224 et 226 seront reformulées pour la session 2014.
Les leçons 251, 252 sont supprimées pour la session 2014.
Les leçons 260 et 264 sont susceptibles d'apparaître lors de la session 2014.

104 Groupes finis. Exemples et applications.

---

105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

---

106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

---

108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

---

120 Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

---

121 Nombres premiers. Applications.

---

123 Corps finis. Applications.

---

141 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

---

150 Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

---

151 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

---

152 Déterminant. Exemples et applications.

---

153 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

---

157 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

---

159 Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.

---

162 Systèmes d'équations linéaires ; opérations, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

---

170 Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

---

181 Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

---

182 Applications des nombres complexes à la géométrie.

---

183 Utilisation des groupes en géométrie.

---

190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

---

203 Utilisation de la notion de compacité.

---

206 Théorèmes de point fixe. Exemples et applications.

---

208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

---

214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications.

---

215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

---

218 Applications des formules de TAYLOR.

---

219 Problèmes d'extremums.

---

220 Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'études qualitatives des solutions.

---

221 Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

---

223 Convergence des suites numériques. Exemples et applications.

---

224 Comportement asymptotique de suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.

---

226 Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples.

---

229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

---

230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

---

232 Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.

---

236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.

---

239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

---

240 Produit de convolution, transformation de FOURIER. Applications.

---

243 Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

---

246 Séries de FOURIER. Exemples et applications.

---

251 Indépendance d'événements et de variables aléatoires. Exemples.

---

252 Loi binomiale. Loi de POISSON. Applications.

---

260 Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.

---

264 Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Reformulation de certaines leçons d'analyse et probabilités pour la session 2014.

219 Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications

---

220 Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2.

---

223 Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

---

224 Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

---

226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples et applications.

Leçons d'informatique

Les leçons 908 et 911 seront supprimées pour la session 2014.

901 Structures de données : exemples et applications.

---

902 Diviser pour régner : exemples et applications.

---

903 Exemples d'algorithmes de tri. Complexité.

---

906 Programmation dynamique : exemples et applications.

---

907 Algorithmique du texte : exemples et applications.

---

908 Automates finis. Exemples et applications.

---

909 Langages rationnels. Exemples et applications.

---

910 Langages algébriques. Exemples et applications.

---

911 Automates à pile. Exemples et applications.

---

912 Fonctions récursives primitives et non primitives. Exemples.

---

913 Machines de Turing. Applications.

---

914 Décidabilité et indécidabilité. Exemples.

---

915 Classes de complexité : exemples.

---

916 Formules du calcul propositionnel : représentation, formes normales, satisfiabilité. Applications.

---

917 Logique du premier ordre : syntaxe et sémantique.

---

918 Systèmes formels de preuve en logique du premier ordre : exemples.

---

919 Unification : algorithmes et applications.

---

920 Réécriture et formes normales. Exemples.

---

921 Algorithmes de recherche et structures de données associées.

---

922 Ensembles récursifs, récursivement énumérables. Exemples.

---

923 Analyses lexicale et syntaxique : applications.

---

924 Théories et modèles en logique du premier ordre. Exemples.

---

925 Graphes : représentations et algorithmes.

---

926 Analyse des algorithmes : complexité. Exemples.

---

927 Exemples de preuve d'algorithme : correction, terminaison.

---

928 Problèmes NP-complets : exemples de réductions

Chapitre 10

Annexe 3 : Le programme 2014

Le programme des épreuves de l'agrégation n'est pas rédigé comme un plan de cours. Il décrit un ensemble de connaissances que le candidat doit maîtriser. Il comporte des répétitions lorsque des notions interviennent naturellement à plusieurs endroits.

D'une façon générale, les candidats doivent connaître des applications qui illustrent les notions générales. Le programme en propose ainsi un certain nombre. Il ne s'agit que de simples suggestions d'applications possibles, qui peuvent être complétées ou remplacées par d'autres.

Dans les titres 1 à 5 qui suivent, tous les corps (notés $\mathbf{K}$ en général) sont supposés commutatifs.

10.1 Algèbre linéaire

10.1.1 Espaces vectoriels

1. Espaces vectoriels, applications linéaires. Produit d'espaces vectoriels. Sous-espaces, image et noyau d'une application linéaire. Espaces quotients. Somme de sous-espaces, somme directe, supplémentaires. Familles libres, génératrices ; bases. Algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel E, groupe linéaire $GL(E)$.
2. Sous-espaces stables d'un endomorphisme. Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres.
3. Représentations linéaires d'un groupe et d'une algèbre. Irréductibilité. En dimension finie : exemples de décomposition d'une représentation linéaire en somme directe de sous-représentations, lemme de Schur.

10.1.2 Espaces vectoriels de dimension finie

1. Espaces vectoriels de dimension finie. Existence de bases : isomorphisme avec $\mathbf{K}^n$. Existence de supplémentaires d'un sous-espace. Rang d'une application linéaire, rang d'un système de vecteurs. Espace dual. Rang d'un système d'équations linéaires. Transposée d'une application linéaire. Base duale. Bidualité. Orthogonalité.
2. Applications multilinéaires. Déterminant d'un système de vecteurs, d'un endomorphisme. Groupe spécial linéaire $SL(E)$. Orientation d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.
3. Matrices à coefficients dans un corps. Opérations matricielles. Rang d'une matrice. Représentations matricielles d'une application linéaire. Changement de base.

   Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice. Méthode du pivot de GAUSS. Notion de matrices échelonnées. Application à la résolution de systèmes d'équations linéaires, au calcul de déterminants, à l'inversion des matrices carrées, à la détermination du rang d'une matrice, à la détermination d'équations définissant un sous-espace vectoriel.

Extension élémentaire de ces notions aux matrices à coefficients dans un anneau commutatif.

4. Sous-espaces stables d'un endomorphisme, lemme des noyaux. Polynôme caractéristique, polynômes annulateurs d'un endomorphisme, polynôme minimal. Théorème de CAYLEY-HAMILTON. Diagonalisation, trigonalisation, applications. Sous-espaces caractéristiques, décomposition de DUNFORD. Exponentielle des matrices réelles ou complexes.

10.2 Groupes et géométrie

Les différentes notions de théorie des groupes introduites dans les paragraphes suivants seront illustrées et appliquées dans des situations géométriques.

1. Groupes, morphismes de groupes. Produit direct de groupes. Sous-groupes. Sous-groupe engendré par une partie. Ordre d'un élément. Sous-groupes distingués (ou normaux), groupes quotients. Opération d'un groupe sur un ensemble. Stabilisateur d'un point, orbites, espace quotient. Formule des classes. Classes de conjugaison. Application à la détermination des groupes d'isométries d'un polyèdre régulier en dimension 3.
2. Groupes cycliques. Groupes abéliens de type fini. Groupe des racines complexes n-ièmes de l'unité, racines primitives.
3. Groupe des permutations d'un ensemble fini. Décomposition d'une permutation en produit de transpositions, en produit de cycles à supports disjoints. Signature. Groupe alterné. Application : déterminants.
4. Définition des groupes classiques d'automorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie : groupe général linéaire, groupe spécial linéaire ; groupe orthogonal, groupe spécial orthogonal ; groupe unitaire, groupe spécial unitaire.
5. Représentations d'un groupe fini sur un **C**-espace vectoriel.
   Cas d'un groupe abélien. Orthogonalité des caractères irréductibles. Groupe dual. Transformée de Fourier. Convolution. Application : transformée de Fourier rapide.
   Cas général. Théorème de Maschke. Caractères d'une représentation de dimension finie. Fonctions centrales sur le groupe, base orthonormée des caractères irréductibles. Exemples de représentations de groupes de petit cardinal.

10.3 Anneaux, corps, polynômes et fractions rationnelles

1. Anneaux (unitaires), morphisme d'anneaux, sous-anneaux. L'anneau **Z** des entiers relatifs. Produit d'anneaux. Idéaux d'un anneau, anneaux quotients. Idéaux premiers, idéaux maximaux d'un anneau commutatif. Notion de module sur un anneau commutatif, d'algèbre (associative ou non) sur un anneau commutatif.
2. Algèbre des polynômes à une ou plusieurs indéterminées sur un anneau commutatif. Polynômes homogènes. Polynômes symétriques.

   Décomposition en polynômes homogènes. Tout polynôme symétrique s'exprime en fonction des polynômes symétriques élémentaires.
3. Séries formelles à une indéterminée à coefficients dans un corps. Addition, multiplication, composition, éléments inversibles.
4. Corps, sous-corps. Caractéristique. Extension de corps. Corps des fractions d'un anneau intègre. Le corps **Q** des nombres rationnels. Le corps **R** des nombres réels. Le corps **C** des nombres complexes. Théorème de D'ALEMBERT-GAUSS.

5. Divisibilité dans les anneaux commutatifs intègres. Éléments irréductibles, éléments inversibles, éléments premiers entre eux. Anneaux factoriels. Plus grand diviseur commun, plus petit multiple commun.

   Factorialité de $A[X]$ quand A est un anneau factoriel. Anneaux principaux. Théorème de BÉZOUT. Anneaux euclidiens. Algorithme d'EUCLIDE. Cas de l'anneau $\mathbf{Z}$ et de l'algèbre $\mathbf{K}[X]$ des polynômes sur le corps $\mathbf{K}$. Polynômes irréductibles. Exemples : polynômes cyclotomiques dans $\mathbf{Q}[X]$, critère d'EISENSTEIN.
6. Congruences dans $\mathbf{Z}$. Nombres premiers. Étude de l'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et de ses éléments inversibles. Théorème chinois et applications : multiplication, pivot de GAUSS, systèmes linéaires...
7. Racines d'un polynôme, multiplicité. Polynôme dérivé. Éléments algébriques et transcendants. Extensions algébriques. Corps algébriquement clos. Corps de rupture et corps de décomposition. Corps finis.
8. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé. Sommes de NEWTON. Résultant. Discriminant. Application à l'intersection ensembliste de deux courbes algébriques planes.
9. Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps. Décomposition en éléments simples. Cas réel et complexe. Dérivée logarithmique d'un polynôme et applications.

10.4 Formes bilinéaires et quadratiques sur un espace vectoriel

1. Formes bilinéaires. Formes bilinéaires alternées. Formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques, forme polaire d'une forme quadratique (en caractéristique différente de 2). Éléments orthogonaux, interprétation géométrique. Formes non dégénérées. Adjoint d'un endomorphisme. Représentation matricielle, changement de base. Rang d'une forme bilinéaire.
2. Orthogonalité. Sous-espaces isotropes. Décomposition d'une forme quadratique en somme de carrés. Théorème d'inertie de SYLVESTER. Classification dans le cas de $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Procédés d'orthogonalisation.
3. Espaces vectoriels euclidiens, espaces vectoriels hermitiens. Isomorphisme d'un espace vectoriel euclidien avec son dual. Supplémentaire orthogonal. Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ. Norme. Bases orthonormales.
4. Groupe orthogonal, groupe spécial orthogonal. Exemple de générateurs du groupe orthogonal : décomposition d'un automorphisme orthogonal en produit de réflexions. Endomorphismes symétriques, endomorphismes normaux. Diagonalisation d'un endomorphisme symétrique. Réduction simultanée de deux formes quadratiques réelles, l'une étant définie positive. Décomposition polaire dans $GL(n,\mathbf{R})$. Espaces vectoriels euclidiens de dimension 2 ou 3 : groupe des rotations ; produit mixte ; produit vectoriel.
5. Angles en dimension 2 : angles de vecteurs, angles de droites. Théorème de l'angle inscrit. Cocyclicité.
6. Groupe unitaire, groupe spécial unitaire. Diagonalisation des endomorphismes normaux. Décomposition polaire dans $GL(n,\mathbf{C})$.

10.5 Géométries affine, projective et euclidienne

Tous les espaces considérés dans ce chapitre sont de dimension finie.

1. Espace affine et espace vectoriel associé. Application affine et application linéaire associée. Sous-espaces affines, barycentres. Repères affines, équations d'un sous-espace affine. Groupe affine, notion de propriété affine. Groupe des homothéties-translations, affinités. Parties convexes, enveloppe convexe d'une partie d'un espace affine réel, points extrémaux.

   Projection sur un convexe fermé.

2. Droite projective réelle ou complexe : groupe des homographies, birapport.
3. Isométries d'un espace affine euclidien. Groupe des isométries d'un espace affine euclidien. Déplacements, antidéplacements. En dimension 2 : classification des isométries, similitudes directes et indirectes. En dimension 3 : rotations.
4. Groupe des isométries laissant stable une partie du plan ou de l'espace. Polygones réguliers. Relations métriques dans le triangle. Utilisation des nombres complexes en géométrie plane.
5. Coniques et quadriques

   Application des formes quadratiques à l'étude des coniques propres du plan affine euclidien et des quadriques de l'espace affine euclidien de dimension 3. Classification des coniques.

   Intersection de quadriques et résultant.

   Propriétés géométriques (affines et métriques) des coniques. Définition par foyer et directrice, définition bifocale.

10.6 Analyse à une variable réelle

1. Nombres réels

   Le corps **R** des nombres réels. Topologie de **R**. Sous-groupes additifs de **R**. Droite numérique achevée. Suites de nombres réels : convergence, valeur d'adhérence. Limites inférieure et supérieure. Suites de Cauchy. Complétude de **R**. Théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS. Parties compactes de **R**. Parties connexes de **R**.

   Convergence des séries à termes réels. Séries géométriques, séries de RIEMANN. Séries à termes positifs. Sommation des relations de comparaison. Comparaison d'une série et d'une intégrale. Estimations des restes. Convergence absolue. Produits de séries. Séries alternées.
2. Fonctions définies sur une partie de **R** et à valeurs réelles

   (a) Continuité

   Limite, continuité à droite, à gauche, continuité.

   Opérations algébriques sur les fonctions continues. Théorème des valeurs intermédiaires, image d'un segment. Étude de la continuité des fonctions monotones. Continuité d'une fonction réciproque.

   (b) Dérivabilité

   Dérivée en un point, dérivée à droite, à gauche. Fonctions dérivables. Opérations algébriques sur les fonctions dérivables. Dérivée d'une fonction composée. Dérivabilité d'une fonction réciproque.

   Théorèmes de ROLLE et des accroissements finis. Application au sens de variation d'une fonction.

   Dérivées d'ordre supérieur. Applications de classe $\mathscr{C}^k$, de classe $\mathscr{C}^k$ par morceaux. Formule de LEIBNIZ. Formule de TAYLOR avec reste intégral, formule de TAYLOR-LAGRANGE, formule de TAYLOR-YOUNG.

   Calcul de développements limités et de développements asymptotiques.
3. Intégrale sur un segment des fonctions continues par morceaux et calcul de primitives

   Propriétés de l'intégrale : linéarité, relation de CHASLES, positivité. Sommes de RIEMANN. Primitives d'une fonction continue. Changement de variable. Intégration par parties. Méthodes usuelles de calcul d'intégrales.
4. Intégrales généralisées. Intégrales absolument convergentes. Intégration des relations de comparaison. Intégrales semi-convergentes.

5. Suites et séries de fonctions

   Convergence simple, convergence uniforme. Continuité et dérivabilité de la limite. Cas des séries de fonctions : convergence normale.

   Théorèmes d'approximation de WEIERSTRASS polynomial et de WEIERSTRASS trigonométrique.

6. Fonctions usuelles

   Fonctions polynômes, fonctions rationnelles. Logarithmes. Exponentielles. Fonctions puissances. Fonctions circulaires et hyperboliques. Fonctions circulaires et hyperboliques réciproques.

7. Convexité

   Fonctions convexes d'une variable réelle. Continuité et dérivabilité des fonctions convexes. Caractérisations de la convexité.

8. Suites définies par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$. Étude graphique. Points fixes attractifs. Points fixes répulsifs.

9. Polynôme d'interpolation de LAGRANGE.

10. Méthodes d'approximation

    Approximation quadratique : polynômes orthogonaux.

11. Méthodes de résolution approchée des équations $f(x) = 0$: dichotomie, méthode de PICARD, méthode de NEWTON. Estimation de l'erreur pour la méthode de NEWTON.

12. Intégration numérique : méthode des trapèzes, de SIMPSON ; estimation de l'erreur.

10.7 Analyse à une variable complexe

1. Séries entières

   Rayon de convergence. Propriétés de la somme d'une série entière sur son disque de convergence : continuité, dérivabilité par rapport à la variable complexe, primitives.

   Fonctions analytiques sur un ouvert. Principe des zéros isolés. Opérations algébriques sur les fonctions analytiques. Composition.

   Exponentielle complexe ; propriétés. Extension des fonctions circulaires au domaine complexe.

   Développement en série entière des fonctions usuelles.

2. Fonctions d'une variable complexe

   Fonctions holomorphes. Conditions de CAUCHY-RIEMANN. Intégrale d'une fonction continue le long d'un chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Primitives d'une fonction holomorphe sur un ouvert étoilé. Déterminations du logarithme.

   Indice d'un chemin fermé $\mathscr{C}^1$ par morceaux par rapport à un point.

   Formules de CAUCHY. Analyticité d'une fonction holomorphe. Principe du prolongement analytique. Principe du maximum.

   Singularités isolées. Séries de LAURENT. Fonctions méromorphes. Théorème des résidus.

   Suites et séries de fonctions holomorphes.

10.8 Calcul différentiel

1. Topologie de $\mathbf{R}^n$

   Parties ouvertes, fermées. Voisinages. Parties compactes. Théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS.

   Parties connexes. Normes usuelles. Limites. Applications continues. Complétude de $\mathbf{R}^n$.

2. Fonctions différentiables

   Applications différentiables sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Différentielle (application linéaire tangente). Dérivée selon un vecteur.

   Dérivées partielles. Opérations algébriques sur les applications différentiables. Composition d'applications différentiables. Théorème des accroissements finis. Applications de classe $\mathscr{C}^1$.

   Matrice jacobienne. Applications de classe $\mathscr{C}^k$. Dérivées partielles d'ordre k. Interversion de l'ordre des dérivations. Formule de TAYLOR avec reste intégral, formule de TAYLOR-YOUNG.

   Étude locale des applications à valeurs dans $\mathbf{R}$. Développements limités. Recherche des extremums locaux.

   Difféomorphismes. Théorème d'inversion locale. Théorème des fonctions implicites.

3. Équations différentielles

   Équations différentielles sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$, de la forme $X' = f(t,X)$. Théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ. Solutions maximales. Problème de l'existence globale. Dépendance par rapport aux conditions initiales.

   Portrait de phase, comportement qualitatif.

   Systèmes différentiels linéaires.

   Méthode de variation de la constante. Cas des coefficients constants. Équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à un.

10.9 Calcul intégral

1. Définition des espaces mesurables, tribu produit, cas particulier des tribus boréliennes. Définition d'une mesure, cas particuliers de la mesure de comptage, de la mesure de LEBESGUE (construction admise) et des mesures de probabilité. Définition d'une fonction mesurable ; opérations élémentaires sur les fonctions mesurables.
2. Intégration

   Intégrale des fonctions mesurables positives, théorème de convergence monotone. Lemme de Fatou. Fonctions intégrables, théorème de convergence dominée. Continuité, dérivabilité, holomorphie d'une intégrale dépendant d'un paramètre. Espaces L^p, où $1 \leqslant p \leqslant \infty$: inégalités de MINKOWSKI, HÖLDER et JENSEN. Théorème de FUBINI.

   Changement de variables dans une intégrale multiple. Calculs d'aires de domaines plans et de volumes.

   Convolution. Régularisation et approximation par convolution.
3. Analyse de FOURIER

   Séries de FOURIER des fonctions localement intégrables périodiques d'une variable réelle. Lemme de RIEMANN-LEBESGUE. Produit de convolution de fonctions périodiques. Théorèmes de DIRICHLET et de FEJER. Théorie L^2 : convergence en moyenne quadratique, formule de PARSEVAL.

10.10 Probabilités

1. Définition d'un espace probabilisé : événements, tribus, mesure de probabilité. Indépendance d'événements et de tribus. Loi du 0-1, lemmes de BOREL-CANTELLI.
2. Probabilités conditionnelles : définition, formule des probabilités totales et théorème de BAYES.
3. Variables aléatoires, loi d'une variable aléatoire : loi discrète et loi absolument continue. Fonction de répartition et densité.
4. Exemples de variables aléatoires : variable de BERNOULLI, binomiale, de POISSON, uniforme, exponentielle, de GAUSS.

5. Espérance et variance d'une variable aléatoire à valeurs réelles, théorème de transfert.
6. Indépendance de variables aléatoires. Loi conditionnelle d'une variable par rapport à une autre.
7. Transformations exponentielles de lois : fonction caractéristique, transformée de LAPLACE, fonction génératrice. Liens avec l'indépendance et la convolution, application aux sommes de variables aléatoires indépendantes.
8. Convergences de suites de variables aléatoires : en probabilité, dans L^p, presque sûrement, en loi.
9. Inégalité de MARKOV, inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV. Loi faible des grands nombres, applications en statistiques.
10. Théorème de LÉVY, théorème central limite, applications en statistiques.

10.11 Analyse fonctionnelle

1. Topologie et espaces métriques

   Topologie d'un espace métrique. Topologie induite.

   Suites. Valeurs d'adhérence. Limites. Applications continues. Homéomorphismes.

   Produit fini d'espaces métriques.

   Compacité. Connexité. Composantes connexes. Connexité par arcs.

   Propriétés métriques : applications lipschitziennes, applications uniformément continues.

   Espaces métriques complets. Théorème du point fixe pour les applications contractantes.
2. Espaces vectoriels normés sur **R** ou **C**.

   Topologie d'un espace vectoriel normé. Normes équivalentes. Cas des espaces de dimension finie. Espaces de BANACH. Séries absolument convergentes dans un espace de Banach.

   Applications linéaires continues, norme.

   Norme de la convergence uniforme. Espace des fonctions continues bornées sur un espace métrique, à valeurs dans un espace BANACH.

   Étude de la compacité de parties d'un espace vectoriel normé : théorème de RIESZ ; théorème d'ASCOLI.

   Complétude des espaces L^p, où $1 \leqslant p \leqslant \infty$.
3. Espaces de HILBERT

   Projection sur un convexe fermé. Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel fermé.

   Dual d'un espace de HILBERT.

   Cas des espaces L^2.

   Bases hilbertiennes (dans le cas séparable). Exemples de bases : fonctions trigonométriques, polynômes orthogonaux.

   Exemples d'applications linéaires continues entre espaces de HILBERT.
4. Espace de Schwartz $S(\mathbf{R}^d)$ des fonctions à décroissance rapides sur $\mathbf{R}^d$.

   Normes $N_p(f)$ (sup des normes uniformes des produits des dérivées partielles itérées d'ordre inférieur à p de f par les monômes de degré inférieur à p).

   Espace $S'(\mathbf{R}^d)$ des distributions tempérées.

   Dérivation des distributions tempérées ; formule des sauts en dimension 1 ; formule de Stokes pour un demi-espace en dimension d.

   Cas particulier des distributions à support compact dans $\mathbf{R}^d$.

   Convolution de distributions dans le cas où l'une d'entre elles est à support compact.

   Transformation de Fourier dans S et dans S'.

   Transformation de Fourier sur les espaces $L^1(\mathbf{R}^d)$ et $L^2(\mathbf{R}^d)$.

10.12 Géométrie différentielle

Sous-variétés de $\mathbf{R}^n$. Définitions équivalentes : graphe local, paramétrisation locale, équation locale. Espace tangent. Notions métriques : longueur d'un arc, paramétrisation normale, courbure d'un arc en dimensions 2 et 3. Gradient.

Tracé de courbes usuelles.

Surfaces dans $\mathbf{R}^3$: position par rapport au plan tangent.

Définition de la divergence d'un champ de vecteurs.

Extremums locaux d'une fonction définie sur une sous-variété (extremums liés), multplicateurs de Lagrange.

ÉPREUVES ÉCRITES

Les épreuves écrites comportent deux épreuves :

A. Composition de mathématiques générales

Le programme de cette épreuve est constitué par les titres 1 à 12 ci-dessus.

B. Composition d'analyse et probabilités

Le programme de cette épreuve est constitué par les titres 1 à 12 ci-dessus.

ÉPREUVES ORALES

Les candidats ont le choix entre quatre options :

Option A : probabilité et statistiques

Option B : calcul scientifique

Option C : algèbre et calcul formel

Option D : informatique

Épreuves orales des options A, B, C

1re Épreuve : Épreuve d'Algèbre et Géométrie

2e Épreuve : Épreuve d'Analyse et Probabilités

Le programme de ces deux épreuves, communes aux options A, B et C, est constitué des titres 1 à 12 ci-dessus.

3e Épreuve : Épreuve de Modélisation

L'épreuve porte sur un programme commun aux options A, B et C et sur un programme spécifique à l'option choisie.

L'épreuve consiste en un exposé de modélisation mathématique construit en partant d'un texte proposé par le jury. Le programme définit un cadre de théories mathématiques et de techniques d'application adaptées pour l'épreuve. Ce programme comporte une partie commune aux options A, B et C et, pour chacune de ces options, une partie spécifique.

Modélisation : programme de la partie commune aux options A, B, C

Le corpus des logiciels disponibles est constitué de Maple, Mathematica, MuPAD, Matlab, Scilab, Octave, R, Maxima, Axiome, Giac/Xcas, Pari/GP, Gap.

À partir de 2015, seuls les logiciels libres seront disponibles. Le site de l'agrégation externe de mathématiques (`agreg.org`) et le rapport du Jury préciseront suffisamment à l'avance la liste des logiciels disponibles et la nature de leur environnement.

À l'aide d'un ou plusieurs de ces logiciels, les candidats devront montrer leur capacité à :

– mettre en œuvre avec précision et rigueur les concepts et outils mathématiques au programme,

- distinguer les représentations exactes ou approchées des objets mathématiques
- estimer le coût et les limitations d'algorithmes simples : complexité, précision
- analyser la pertinence des modèles.

Le programme de cette partie comprend les méthodes numériques, probabilistes, statistiques et symboliques citées dans les programmes des épreuves écrites et celles citées dans les paragraphes suivants.

1. Calcul numérique et symbolique
   Utilisation des logiciels au programme : simulation, intégration, différentiation, calcul de sommes et d'intégrales, résolution d'équations algébriques et différentielles.
2. Probabilités discrètes : tirages uniformes ; échantillons.
3. Chaînes de MARKOV homogènes à espace d'états finis : définition, irréductibilité, apériodicité.
4. Validation et précision des résultats.
   Méthodes numériques : notion de conditionnement des systèmes linéaires.
   Précision du schéma numérique d'EULER explicite à pas constant.
   Moyenne et variance empirique.
   Méthode de Monte Carlo : vitesse de convergence ; applications au calcul d'intégrales multiples (exemple : calcul de volumes).
5. Moindres carrés linéaires (sans contraintes).

Programme spécifique de l'option A

1. Utilisation de lois usuelles (voir section 10.4, loi géométrique) pour modéliser certains phénomènes aléatoires. Exemples : temps d'attente ou durée de vie, erreurs de mesure, sondages... Méthodes de simulation de variables aléatoires.
2. Chaînes de MARKOV à espace d'états finis. Classification des états. Convergence vers une loi stationnaire (théorème ergodique et théorème central limite admis).
   Chaînes de MARKOV homogènes à espace d'états dénombrable, transience, récurrence positive ou nulle, exemple de la marche aléatoire simple.
3. Lois de Poisson, exponentielle et Gamma, construction et propriétés du processus de Poisson sur $\mathbb{R}_+$.
4. Espérance conditionnelle, définition des martingales, temps d'arrêt. Exemples d'utilisation, des théorèmes de convergence presque sûre et L^2, des martingales à temps discret.
5. Échantillons, moments empiriques, loi et fonction de répartition empiriques.
6. Applications des théorèmes de convergences à l'estimation (lois des grands nombres, théorème central limite, utilisation du lemme de SLUTSKY). Définition et construction d'intervalles de confiance.
7. Estimation paramétrique. Estimation par maximum de vraisemblance : définition et exemples.
8. Vecteurs gaussiens : définition, simulation en dimension 2, théorème de COCHRAN. Théorème central limite dans $\mathbb{R}^n$.
9. Modèle linéaire gaussien : calculs par moindres carrés, régression linéaire simple ou multiple, exemples d'utilisation.
10. Tests paramétriques (test du rapport de vraisemblance). Tests d'ajustement (tests du χ^2, tests de KOLMOGOROV-SMORNOV). Exemples d'utilisation.

Programme spécifique de l'option B.

1. Résolution de systèmes d'équations linéaires ; définition du conditionnement. Factorisation LU.
   Méthode du gradient pour les systèmes linéaires symétriques définis positifs.
   Recherche des valeurs propres : méthode de la puissance.
   Résolution de systèmes d'équations non linéaires. Méthode de NEWTON : définition, vitesse de convergence, estimation de l'erreur.
2. Intégration numérique : méthode des trapèzes, de SIMPSON ; estimation de l'erreur.
3. Équations différentielles ordinaires. Espaces de phase. Étude qualitative. Stabilité des points critiques.
   Aspects numériques du problème de CAUCHY. Méthodes d'EULER explicite et implicite : consistance, stabilité, convergence, ordre. Utilisation de la méthode de RUNGE-KUTTA 4.
4. Notions élémentaires sur les équations aux dérivées partielles classiques en dimension un.
   Équation de transport (advection) linéaire : méthode des caractéristiques.
   Équations des ondes et de la chaleur : résolution par transformée de FOURIER et séparation des variables. Aspects qualitatifs élémentaires.
   Équations elliptiques.
   Exemples de discrétisation de problèmes aux limites en dimension un par la méthode des différences finies : notions de consistance, stabilité, convergence, ordre.
5. Optimisation et approximation
   Interpolation de LAGRANGE.
   Extremums des fonctions réelles de n variables réelles : multiplicateurs de LAGRANGE. Mise en œuvre de l'algorithme de gradient à pas constant.
   Méthode des moindres carrés et applications.

Programme spécifique de l'option C.

1. Représentation et manipulation des entiers longs, flottants multiprécision, nombres complexes, polynômes, éléments de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et des corps finis. Addition, multiplication, division, extraction de racine carrée.
2. Algorithmes algébriques élémentaires.
   Exponentiation ($n \mapsto a^n$, pour $n \in \mathbf{N}$), algorithme d'EUCLIDE étendu.
   Test de primalité de FERMAT.
3. Matrices à coefficients dans un corps.
   Méthode du pivot de GAUSS, décomposition LU. Calcul du rang, du déterminant.
   Exemples de codes correcteurs linéaires : codes de répétition, codes de HAMMING binaires.
4. Matrices à coefficients entiers.
   Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes. Application aux systèmes linéaires sur $\mathbf{Z}$ et aux groupes abéliens de type fini.
5. Polynômes à une indéterminée.
   Évaluation (schéma de HORNER), interpolation (LAGRANGE, différences finies).
   Localisation des racines dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$: majoration en fonction des coefficients.
6. Polynômes à plusieurs indéterminées.
   Résultants, élimination ; intersection ensembliste de courbes et de surfaces algébriques usuelles.
7. Estimation de la complexité des algorithmes précités dans le pire des cas. Aucune formalisation d'un modèle de calcul n'est exigée.

Épreuves de l'option D : informatique

1re Épreuve : Mathématiques

Le programme de cette épreuve est constitué des titres 1 à 12 ci-dessus. Les candidats se verront proposer deux sujets, dans un corpus d'algèbre, de géométrie, d'analyse et de probabilités.

2e Épreuve : Informatique Fondamentale

Le programme de cette épreuve est constitué des titres 13 à 16 ci-après.

3e Épreuve : Analyse de système informatique

Le programme de cette épreuve est constitué des titres 13 à 16 ci-après.

Deux textes décrivant une classe de systèmes informatiques sont proposés au candidat qui doit choisir l'un des deux. La compréhension de ces textes et leur exploitation dans cette épreuve requièrent les connaissances en informatique correspondant aux matières enseignées en L1-L2 de Maths-Info ou dans l'option informatique des classes préparatoires auxquelles s'ajoutent celles du programme.

L'objectif de l'épreuve est d'évaluer la capacité des candidats à mettre en place un processus d'analyse d'un système informatique dans un contexte applicatif. Ce processus s'appuie sur les notions au programme.

Les langages informatiques C, Caml et Java seront disponibles pour cette épreuve et sa préparation. Le rapport du Jury précisera la nature de l'environnement logiciel.

Programme spécifique de l'option D.

L'ensemble du programme correspond à 250h de formation (cours et/ou TD et/ou TP) de niveau Licence et première année de Master, à partir des acquis des deux premières années de Licence ou de l'option informatique des classes préparatoires. L'objectif de cette option est de s'assurer que les candidats maîtrisent les fondements essentiels et structurants de la science informatique.

Le programme n'est pas rédigé comme un plan de cours, il décrit les notions que les candidats doivent maîtriser.

Le programme n'impose aucun langage de programmation particulier. Les candidats doivent maîtriser au moins un langage et son environnement de programmation parmi CAML, Java ou C.

10.13 Algorithmique fondamentale

Cette partie insiste sur les notions de preuve et de complexité des algorithmes. Elle est relativement indépendante de tout langage de programmation, mais le candidat doit être capable de mettre en oeuvre sur machine les structures de données et les algorithmes étudiés.

1. Structures de données. Types abstraits : définition des tableaux, listes, piles, files, arbres, graphes (orientés et non orientés), ensembles, dictionnaires, file de priorité. Interface abstraite et implantation (implémentation) concrète.
2. Schémas algorithmiques classiques : approche gloutonne, diviser pour régner, programmation dynamique. Exemples : algorithme de DIJKSTRA, tri-fusion, plus longue sous-séquence commune.
3. Complexité. Analyse des algorithmes : relations de comparaison O, Θ et Ω. Analyse dans le pire cas. Exemple d'analyse en moyenne : recherche d'un élément dans un tableau.
4. Preuve d'algorithmes : correction, terminaison. Méthodes de base : assertions, pré-post conditions, invariants et variants de boucles, logique de HOARE, induction structurelle.

5. Algorithmes de tri et de recherche. Méthodes de tri par comparaison (tri-fusion, tri-tas, tri rapide), arbre de décision et borne inférieure du tri par comparaisons. Méthodes de recherche séquentielle et dichotomique. Arbres binaires de recherche. Arbres équilibrés : définition, relation entre la taille et la hauteur, maintien de l'équilibre.
6. Algorithmes de graphes. Parcours de graphes : algorithmes de parcours en largeur, en profondeur, algorithme de DIJKSTRA. Arbres couvrants : algorithmes de PRIM et de KRUSKAL. Fermeture transitive.

10.14 Automates et langages

1. Automates finis. Langages reconnaissables. Lemme d'itération. Existence de langages non reconnaissables. Automates complets. Automates déterministes. Algorithme de déterminisation. Propriétés de clôture des langages reconnaissables.
2. Expressions rationnelles. Langages rationnels. Théorème de KLEENE.
3. Automate minimal. Résiduel d'un langage par un mot. Algorithme de minimisation.
4. Utilisation des automates finis : recherche de motifs, analyse lexicale.
5. Langages algébriques. Lemme d'OGDEN. Existence de langages non algébriques. Grammaires algébriques. Propriétés de clôture des langages algébriques.
6. Automates à pile. Langages reconnaissables par automates à pile.
7. Utilisation des automates à pile : analyse syntaxique. Grammaires LL(1).

10.15 Calculabilité, décidabilité et complexité

1. Définition des fonctions primitives récursives ; schémas primitifs (minimisation bornée). Définition des fonctions récursives ; fonction d'ACKERMAN.
2. Définitions des machines de TURING. Équivalence entre classes de machines (exemples : nombre de rubans, alphabet). Équivalence avec les fonctions récursives.
3. Universalité. décidabilité, Indécidabilité. Théorème de l'arrêt. Théorème de RICE. Réduction de TURING. Définitions et caractérisations des ensembles récursifs, récursivement énumérables.
4. Complexité en temps et en espace : classe P. Machines de TURING non déterministes : classe NP. Acceptation par certificat. Réduction polynomiale. NP-complétude. Théorème de COOK.

10.16 Logique et démonstration

1. Calcul propositionnel : syntaxe et sémantique. Tables de vérité, tautologies, formes normales, forme clausale. Théorème de complétude du calcul propositionnel.
2. Logique du premier ordre : aspects syntaxiques. Langages, termes, formules. Variables libres et variables liées, substitutions, capture de variables.
3. Réécriture : filtrage syntaxique du premier ordre, définition de l'unification syntaxique. Confluence, confluence locale, formes normales, paires critiques, lemme de NEWMAN, algorithme de complétion de KNUTH-BENDIX.
4. Logique du premier ordre : systèmes formels de preuve. Calcul des séquents, déduction naturelle. Algorithme d'unification des termes. Preuves par résolution.
5. Logique du premier ordre : aspects sémantiques. Interprétation d'une formule dans un modèle. Validité, satisfiabilité. Théories cohérentes, théories complètes. Théories décidables, indécidables. Exemples de théories : égalité, arithmétique de Peano. Théorème de complétude du calcul des prédicats du premier ordre.

Chapitre 11

Annexe 4 : La bibliothèque de l'agrégation

ABELSON H. **SUSSMAN G. J.** **SUSSMAN J.**	Structure and interpretation of computer programs	MIT PRESS
AEBISCHER B.	L2 Analyse fonctions de plusieurs variables et géométrie analytique	VUIBERT
AEBISCHER B.	L3 Géometrie	VUIBERT
AHUÉS M. **CHATELIN F.**	Exercices de valeurs propres de matrices	MASSON
ALBERT L. **Collectif**	Cours et exercices d'informatique	VUIBERT
ALDON G.	Mathématiques dynamiques	HACHETTE
ALESSANDRI M.	Thèmes de géométrie	DUNOD
ALLOUCHE J. P. **SHALLIT J.**	Automatic sequences theory, applications, generalizations	CAMBRIDGE
AMAR E. **MATHERON É.**	Analyse complexe	CASSINI

ANDLER M. **BLOCH J. D.** **MAILLARD B.**	Exercices corrigés de Mathématiques • Tome 1A - Topologie • Tome 1B - Fonctions numériques • Tome 2 - Suites et séries numériques • Tome 3 - Analyse fonctionnelle • Tome 5 - Algèbre générale, polynômes • Tome 6 - Algèbre linéaire, première partie • Tome 7 - Algèbre linéaire, deuxième partie	ELLIPSES
ANDREWS G.	Number Theory	DOVER
APPLE A.W.	Modern compiler implementation • in C • in Java • in ML	CAMBRIGDE
ARIBAUD F. **VAUTHIER J.**	Mathématiques. Première année de DEUG	ESKA
ARNAUDIES J-M. **BERTIN J.**	Groupes, Algèbres et Géométrie • Tome I • Tome II	ELLIPSES
ARNAUDIES J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus d'analyse	DUNOD
ARNAUDIES J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus d'algèbre bilinéaire et géométrie du cours de Mathématiques tome 4	DUNOD
ARNAUDIES J-M. **FRAYSSE H.**	Cours de Mathématiques • 1. Algèbre • 2. Analyse • 3. Compléments d'analyse • 4. Algèbre bilinéaire et géométrie	DUNOD
ARNOLD V.	Chapitre supplémentaire de la théorie des équations différentielles ordinaires	MIR
ARNOLD V.	Équations différentielles ordinaires	MIR
ARNOLD V.	lectures on partial differential equations	SPINGER
ARNOLD A. **GUESSARIAN I.**	Mathématiques pour l'informatique	EDISCIENCES

ARTIN E.	Algèbre géométrique	GAUTHIER-VILLARS
ARTIN E.	Algèbre géométrique	GABAY
ARTIN M.	Algebra	PRENTICE HALL
AUBIN J.P.	Analyse fonctionnelle appliquée • Tome 1 • Tome 2	PUF
AUTEBERT J. M.	Calculabilité et décidabilité	MASSON
AUTEBERT J. M.	Théorie des langages et des automates	MASSON
AUDIN M.	Géométrie de la licence à l'agrégation	BELIN
AVANISSIAN V.	Initiation à l'analyse fonctionnelle	PUF
AVEZ A.	Calcul différentiel	MASSON
BAASE S. **VAN GELDER A.**	Computer algorithms Introduction to design & analysis	ADDISON WESLEY
BADOUEL E. **BOUCHERON S.** **DICKY A., PETIT A.** **SANTHA M., WEIL P., ZEITOUN M.**	Problèmes d'informatique fondamentale	SPRINGER
BACAER N.	Histoires de mathématiques et de populations	CASSINI
BAJARD J.C.	Exercices d'Algorithmique	ITP
BAKHVALOV N.	Méthodes numériques	MIR
BARANGER J.	Analyse numérique	HERMANN

BARBE Ph. **LEDOUX M.**	Probabilité (De la licence à l'agrégation)	BELIN
BARRET M. **BENIDIR M.**	Stabilité des filtres et des systèmes linéaires	DUNOD
BASILI B. **PESKINE C.**	Algèbre	DIDEROT, ÉDITEUR ARTS ET SCIENCES
BASS J.	Cours de Mathématiques • Tome 1 • Tome 2	MASSON
BHATIA R.	Matrix Analysis	SPRINGER
BAUER F. L.	Decrypted secrets. Methods and maxims of cryptology	SPRINGER
BENDER C. **ORSZAG S.**	Advanced mathematical methods for scientists and engineers	MC GRAW HILL
BENIDIR M. **BARRET M.**	Stabilité des filtres et des systèmes linéaires	DUNOD
BENOIST J. et Alii	Math L2, Cours complet avec 700 tests et exercices corrigés	PEARSON EDUCATION
BERCU B. **CHAFAI D.**	Modélisation stochastique et simulation	DUNOD
BERGER M. **GOSTIAUX B.**	Géométrie différentielle	ARMAND COLIN
BERGER M. **BERRY J-P.** **PANSU P.** **SAINT RAYMOND X.**	Problèmes de géométrie commentés et rédigés	CÉDIC/NATHAN

BERGER M.	Géométrie • Index • 1. Action de groupes, espaces affines et projectifs • 2. Espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères • 3. Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes • 4. Formes quadratiques, quadriques et coniques • 5. La sphère pour elle-même, géométrie hyperbolique, l'espace des sphères	CÉDIC/NATHAN
BERGER M.	Géométrie tome 2	NATHAN
BERGER M.	Géométrie vivante	CASSINI
BERLINE N. **SABBAH C.**	Groupes finis, journées X-UPS 2000	EDITIONS DE L'X
BHATIA R.	Matrix analysis 1	SPRINGER
BICKEL P.J. **DOKSUM K.A.**	Mathematical statistics	PRENTICE HALL
BIDEGARAY B. **MOISAN L.**	Petits problèmes de mathématiques appliquées et de modélisation	SPRINGER
BIGGS NORMAN L.	Discrete mathematics	OXFORD SCIENCE PUBLICATIONS
BLANCHARD A.	Les corps non commutatifs	PUF
BILLINGSLEY P.	Probability and measure	COPYRIGHTED MATERIAL
BOAS R.	A primer of real functions	MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA
BOISSONAT J.D. **YVINEC M.**	Géométrie algébrique	EDISCIENCE
BON J.L.	Fiabilité des systèmes	MASSON

BONNANS J.F. **GILBERT J.C.** **LEMARECHAL C.** **SAGASTIZABAL C.** **PENNEQUIN D.**	Optimisation numérique	SPRINGER
BOUALEM H. **BROUZET J.C.** **ELSNER B.** **KACZMAREK L.**	Mathématique L1	PEARSON EDUCATION
BOURBAKI N.	Éléments de Mathématique • Topologie générale, chapitres V à X • Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à VII • Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à III • Fascicule XIII Intégration, chapitres I à IV	HERMANN
BOURGADE P.	Annales des Olympiades internationales de mathématiques 1976-2005	CASSINI
BOUVIER A. **RICHARD D.**	Groupes	HERMANN
BREMAUD P.	Introduction aux probabilités	SPRINGER
BREZIS H.	Analyse fonctionnelle, théorie et applications	MASSON
BRIANE M. **PAGES G.**	Théorie de l'intégration Cours et exercices, 3ème édition	VUIBERT
BROUSSE P.	Mécanique MP - PC.- Spéciales A. A'. B. B'.	ARMAND COLIN
BRUCE J.W. **GIBLIN P.J.** **RIPPON P.J.**	Microcomputers and Mathematics	CAMBRIDGE
CABANE R. **LEBOEUF C.**	Algèbre linéaire • 1. Espaces vectoriels , Polynômes • 2. Matrices et réduction	ELLIPSES
CABANNES H.	Cours de Mécanique générale	DUNOD
CALAIS J.	Éléments de théorie des anneaux	PUF

CALAIS J.	Éléments de théorie des groupes	PUF
CANDELPERGHER B.	Calcul intégral	Cassini
CARREGA J.C.	Théorie des corps	Hermann
CARTAN H.	Calcul différentiel (1971)	Hermann
CARTAN H.	Cours de calcul différentiel (1977)	Hermann
CARTAN H.	Formes différentielles	Hermann
CARTAN H.	Théorie élémentaire des fonctions analytiques	Hermann
CARTON O.	Langages formels, calculabilité et complexité	Vuibert
CASTLEMAN K.R.	Digital image processing	Prentice Hall
CASTI J.L.	Realty Rules : Picturing the world in mathematics I	Wiley Interscience
CASTI J.L.	Realty Rules : Picturing the world in mathematics II	Wiley Interscience
CHABAT B.	Introduction à l'analyse complexe	Mir
CHAMBERT-LOIR A.	Algèbre corporelle	Editions de l'X
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.** **MAILLOT V.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Analyse 1 (seconde édition revue et corrigée)	Masson
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation • Analyse 2 • Analyse 3	Masson

CHARPENTIER E. **NIKOLSKI N.**	Leçons de mathématiques d'aujourd'hui • Vol 1 • Vol 2 • Vol 3 • Vol 4	ELLIPSES
CHARLES J. **MBEKHTA M.** **QUEFFELEC H.**	Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs	ELLIPSES
CHATELIN F.	Valeurs propres de matrices	MASSON
CHILDS L.	A concrete introduction to Higher Algebra	SPRINGER VERLAG
CHOQUET G.	Cours d'analyse Tome II : Topologie	MASSON
CHOQUET G.	L'enseignement de la géométrie	HERMANN
CHOIMET D. **QUEFFELEC H.**	Analyse mathématique	CASSINI
CHRISTOL G. **PILIBOSSIAN P.** **YAMMINE S.**	• Algèbre 1 • Algèbre 2	ELLIPSES
CIARLET P.G.	Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation	MASSON
COGIS O. **ROBERT C.**	Au-delà des ponts de Könisberg. Théorie des graphes. Problèmes, théorie, algorithmes	VUIBERT
COHN P.M.	Algebra Volume 1	JOHN WILEY
COLLET H. **GIRARD B.** **PERRIER C.**	Mathématique BTS industriel	NATHAN
COLLET P.	Modeling binary data	CHAPMAN AND HALL
COLMEZ P.	Éléments d'algèbre et d'analyse	EDITIONS DE L'X

COMBROUZE A.	Probabilités et statistiques	PUF
CORI R. **LASCAR D.**	Logique mathématique • 1. Calcul propositionnel, algèbre de Boole, calcul des prédicats • 2. Fonctions récursives, théorème de Gödel, théorie des ensembles, théorie des modèles	DUNOD
CORMEN T. H. **LEISERSON C. E.** **RIVEST R. L.** **STEIN C.**	Introduction à l'algorithmique	DUNOD
COTRELL M. **GENON-CATALOT V.** **DUHAMEL C.** **MEYRE T.**	Exercices de probabilités	CASSINI
COURANT R. **HILBERT D.**	Methods of Mathematical Physics • Volume 1 • Volume 2	JOHN WILEY
COUSINEAU G. **MAUNY M.**	Approche fonctionnelle de la programmation	EDISCIENCE
COXETER H.S.M.	Introduction to Geometry	JOHN WILEY
COX D.A.	Galois Theory	WILEY INTERSCIENCE
CVITANOVIC P.	Universality in Chaos	INSTITUTE OF PHYSICS PUBLISHING
DACUNHA-CASTELLE D. **DUFLO M.**	• Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe • Exercices de Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe	MASSON
DACUNHA-CASTELLE D. **REVUZ D.** **SCHREIBER M.**	Recueil de problèmes de calcul des probabilités	MASSON
DAMPHOUSSE P.	Petite introduction à l'algorithmique	ELLIPSES

DANTZER J.F.	Mathématiques pour l'agrégation interne	VUIBERT
DARTE A. **VAUDENAY S.**	Algorithmique et optimisation	DUNOD
DAVID R. **NOUR K.** **RAFFALI C.**	Introduction à la logique Théorie de la démonstration	DUNOD
DE KONNINCK J.M. **MERCIER A.**	Introduction à la théorie des nombres	MODULO
DEHEUVELS P.	L'intégrale	PUF
DEHEUVELS P.	L'intégrale	QUE-SAIS-JE ? PUF
DEHEUVELS R.	Formes quadratiques et groupes classiques	PUF
DEHORNOY P.	Mathématiques de l'informatique	DUNOD
DEHORNOY P.	Complexité et décidabilité	SPRINGER
DELTHEIL R. **CAIRE D.**	Géométrie et compléments	JACQUES GABAY
DEMAILLY J.P.	Analyse numérique et équations différentielles	PU GRENOBLE
DEMAZURE M.	Catastrophes et bifurcations	ELLIPSES
DEMAZURE M.	Cours d'algèbre : primalité, divisibilité, codes	CASSINI
DEMAZURE M.	Cours d'algèbre	CASSINI
DEMBO A. **ZEITOUNI O.**	Large deviations techniques and applications	SPRINGER

DESCHAMPS **WARUSFEL** **MOULIN, RUAUD** **MIQUEL, SIFRE**	Mathématiques, cours et exercices corrigés • 1ère année MPSI, PCSI, PTSI • 2ème année MP, PC, PSI	DUNOD
DESCOMBES R.	Éléments de théorie des nombres	PUF
DEVANZ C. **ELHODAIBI M.**	Exercices corrigés de Mathématiques posés à l'oral des Ensi, Tome 2	ELLIPSES
DI MENZA L.	Analyse numérique des équations aux dérivées partielles	CASSINI
DIEUDONNÉ J.	Algèbre linéaire et géométrie élémentaire	HERMANN
DIEUDONNÉ J.	Calcul infinitésimal	HERMANN
DIEUDONNÉ J.	Sur les groupes classiques	HERMANN
DIEUDONNÉ J.	Éléments d'Analyse. • Fondements de l'analyse moderne • Éléments d'Analyse Tome 2.	GAUTHIER-VILLARS
DIXMIER J.	Cours de Mathématiques du premier cycle • Première année • Deuxième année	GAUTHIER-VILLARS
DOWEK G. **LEVYH J.-J**	Introduction à la théorie des langages de programmation	EDITIONS DE L'X
DRAPPER N. **SCHMITH H.**	Applied regression analysis	WILEY
DUBUC S.	Géométrie plane	PUF
DUCROCQ A. **WARUSFEL A.**	Les Mathématiques, plaisir et nécessité Un parcours guidé dans l'univers des mathématiques	VUIBERT
DUGAC P.	Histoire de l'analyse. Autour de la notion de limite et de ses voisinages	VUIBERT

DUTERTRET G.	Initiation à la cryptographie	PUF
DYM H. **Mac KEAN H.P.**	Fouriers series and integrals	ACADEMICS PRESS
EBBINGHAUS, HERMES **HIRZEBRUCH** **KOECHER** **LAMOTKE, MAINZER** **NEUKIRSCH, PRESTEL, REMMERT**	Les Nombres	VUIBERT
EIDEN J.D.	Géométrie analytique classique	CALVAGE ET MOUNET
EL HAJ LAAMRI	Mesures, intégration et transformée de Fourier des fonctions	DUNOD
EL KACIMI ALAOUI A. **QUEFFÉLEC H.** **SACRÉ C.** **VASSALLO V.**	Quelques aspects des mathématiques actuelles	ELLIPSES
ENGEL A.	Solutions d'expert • Vol 1 • Vol 2	CASSINI
EPISTEMON L. **(OVAERT J.L.** **VERLEY J.L.)**	Exercices et problèmes • Analyse. Volume 1 • Algèbre.	CÉDIC/NATHAN
EXBRAYAT J.M. **MAZET P.**	Notions modernes de mathématiques • Algèbre 1 : Notions fondamentales de la théorie des ensembles • Analyse 1 : Construction des espaces fondamentaux de l'analyse • Analyse 2 : Éléments de topologie générale	HATIER
FADDEEV D. **SOMINSKI I.**	Recueil d'exercices d'Algèbre Supérieure	MIR
FAIRBANK X. **BEEF C.**	POX - Exercices posés au petit oral de l'X	ELLIPSES
FARAUT J.	Analyse sur les groupes de Lie	CALVAGE ET MOUNET

FARAUT J. **KHALILI E.**	Arithmétique Cours, Exercices et Travaux Pratiques sur Micro-Ordinateur	ELLIPSES
FELLER W.	An introduction to probability theory and its applications • Volume 1 • Volume 2	JOHN WILEY
FERRIER J.P.	Mathématiques pour la licence	MASSON
FLORY G.	Exercices de topologie et analyse avec solutions • Tome 1 - Topologie • Tome 2 - Fonctions d'une variable réelle • Tome 3 - Fonctions différentiables, intégrales multiples • Tome 4 - Séries, équations différentielles	VUIBERT
FONTANEZ F. **RANDÉ B.**	Les clefs pour les Mines	CALVAGE ET MOUNET
FRANCHINI J. **JACQUENS J-C.**	Mathématiques Spéciales • Algèbre • Analyse 1 • Analyse 2	ELLIPSES
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Algèbre 1	CASSINI
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Algèbre 2	CASSINI
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Algèbre 3	CASSINI
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Analyse 1	CASSINI
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Analyse 2	CASSINI

FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Analyse 3	CASSINI
FRANCINOU S. **GIANELLA H.**	Exercices de Mathématiques Algèbre 1	MASSON
FRENKEL J.	Géométrie pour l'élève-professeur	HERMANN
FRESNEL J.	Géométrie algébrique	UFR MATHS BORDEAUX
FRESNEL J.	Géométrie	IREM DE BORDEAUX
FRESNEL J.	Groupes	HERMANN
FRESNEL J. **MATIGNON M.**	Algèbre et géométrie	HERMANN
FRESNEL J.	Méthodes modernes en géométrie	HERMANN
FUHRMANN P.	A polynomial approach to linear algebra	SPRINGER
FULTON W.	Algebraic Topology A first course	SPRINGER
GABRIEL P.	Matrices, géométrie, algèbre linéaire	CASSINI
GANTMACHER F.R.	Théorie des matrices • Tome 1 • Tome 2	DUNOD
GAREY M. **JOHNSON D.**	Computers and intractability	FREEMAN
GARLING D.J.H.	Inequalities : a journey into linear analysis	CAMBRIDGE
GATHEN (von zur) J. **GERHARD .J**	Modern computer algebra	CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS

GENET J.	Mesure et intégration. Théorie élémentaire. Cours et exercices résolus	VUIBERT
GHIDAGLIA J.M.	Petits problèmes d'analyse	SPRINGER
GINDIKIN S.	Histoires de mathématiciens et de physiciens	CASSINI
GRANGON Y.	Informatique, algorithmes en Pascal et en langage C	DUNOD
GRENIER J.P.	Débuter en algorithmique avec Matlab et Scilab	ELLIPSES
GOBLOT R.	Algèbre commutative	MASSON
GOBLOT R.	Thèmes de géométrie	MASSON
GODEMENT R.	Analyse • Tome 1 • Tome 2 • Tome 3	SPRINGER
GODEMENT R.	Cours d'Algèbre	HERMANN
GOLUB G.H. **VAN LOAN C.F.**	Matrix computations	WILEY
GONNORD S. **TOSEL N.**	Thèmes d'Analyse pour l'agrégation • Topologie et Analyse fonctionnelle • Calcul différentiel	ELLIPSES
GOSTIAUX B.	Cours de mathématiques spéciales • Tome 1 - Algèbre • Tome 2 - Topologie et analyse réelle • Tome 3 - Analyse fonctionnelle et calcul différentiel • Tome 4 - Géométrie affine et métrique • Tome 5 - Géométrie : arcs et nappes	PUF
GOURDON X.	Les maths en tête, mathématiques pour M' • Algèbre • Analyse	ELLIPSES

GRAHAM R. **KNUTH D.** **PATASHNIK O.**	Concrete mathematics	ADISON-WESLEY
GRAMAIN A.	Géométrie élémentaire	HERMANN
GRAMAIN A.	Intégration	HERMANN
GRANJON Y.	Informatique, algorithmes en pascal et en C	DUNOD
GRENIER J.P.	Debutér en algorithmique avec Matlab et Scilab	ELLIPSES
GREUB W.	Linear Algebra	SPRINGER VERLAG
GRIMMET G. **WELSH D.**	Probability (an introduction)	OXFORD
GUJARATI D. N.	Basic Econometrics	WILEY
GUSFIELD D.	Algorithms on strings, trees and sequences	CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS
HABSIEGER L. **MARTEL V.**	Exercices corrigés posés à l'oral des ENSI Tome 1 Analyse	ELLIPSES
HALMOS P.	Problèmes de mathématiciens petits et grands	CASSINI
HAMMAD P.	Cours de probabilités	CUJAS
HAMMAD P. **TARANCO A.**	Exercices de probabilités	CUJAS
HAMMER R. **HOCKS M.** **KULISH U.** **RATZ D.**	C++ toolbox for verified computing	SPRINGER
HARDY G.H. **WRIGH E.M.**	An introduction to the theory of numbers	OXFORD

HAREL D.	Computer LTD. What they really can't do	OXFORD
HAREL D. **FELDMAN Y.**	Algorithmics. The spirit of computing	ADDISON WESLEY
HENNEQUIN P.L. **TORTRAT A.**	Théorie des probabilités et quelques applications	MASSON
HENRICI P.	Applied and Computational Complex Analysis • Volume 1 • Volume 2 • Volume 3	WILEY-INTERSCIENCE
HERVE M.	Les fonctions analytiques	PUF
HINDRY M.	Arithmétique	CALVAGE ET MOUNET
HIRSCH F. **LACOMBE G.**	Eléments d'analyse fonctionnelle	MASSON
HOCHART **SCIUTO**	Algèbre Analyse Géométrie (MPSI/PCSI)	VUIBERT
HOPCROFT J.E. **MOTWANI R.** **ULLMAN J. D.**	Introduction to automata theory, Languages and Computation	ADDISON WESLEY
HOUZEL C.	Analyse mathématique : cours et exercices	BELIN
INGRAO B.	Coniques projectives, affines et métriques	CALVAGE ET MOUNET
IRELAND K. **ROSEN M.**	A Classical Introduction to Modern Numbers Theory	SPRINGER VERLAG
ISAAC R.	Une initiation aux probabilités (Trad. R. Mansuy)	VUIBERT-SPRINGER
ITARD J.	Les nombres premiers	QUE SAIS-JE ? PUF
JACOBSON N.	Basic Algebra • Tome I • Tome II	FREEMAN AND CO

JACOD J. **PROTTER P.**	L'essentiel en théorie des probabilit és	CASSINI
KAHANE J.P. **GILLES P.**	Séries de Fourier et ondelettes	CASSINI
KATZNELSON Y.	An Introduction to Harmonic Analysis	DOVER
KERBRAT Y. **BRAEMER J-M.**	Géométrie des courbes et des surfaces	HERMANN
KERNIGHAN B. **RITCHIE D.**	Le langage C	DUNOD
KNUTH D.E.	The art of computer programming • Volume 1 : Fundamental algorithms • Volume 2 : Seminumerical algorithms • Volume 3 : Sorting and Searching	ADDISON-WESLEY
KOBLITZ N.	A course in number theory and cryptography quantite1	
KOLMOGOROV A. **FOMINE S.**	Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle	ELLIPSES
de KONNINCK J.M. **MERCIER A.**	Introduction à la théorie des nombres	MODULO
KÖRNER T.W.	Fourier analysis	CAMBRIDGE
KÖRNER T.W.	Exercises for Fourier analysis	CAMBRIDGE
KREE P.	Introduction aux Mathématiques et à leurs applications fondamentales M.P.2	DUNOD
KRIVINE H.	Exercices de Mathématiques pour physiciens	CASSSINI
KRIVINE J.L.	Théorie axiomatique des ensembles	PUF
KRIVINE J.L.	Théorie des ensembles	CASSINI

KUNG J.P.S. **ROTA G-C.** **YAN C.H.**	Combinatorics : the Rota way	CAMBRIDGE
LACOMME P. **PRINS C.** **SEVAUX M.**	Algorithmes de graphes	EYROLLES
LACROIX Y. **MAZLIAK L.**	Probbilités, variables aléatoires...Niveau M1	ELLIPSES
LADEGAILLERIE Y.	Géométrie affine, projective, euclidienne et analagmatique	PUF
LAFONTAINE J.	Introduction aux variétés différentielles	PUF
LALEMENT R.	Logique, réduction, résolution	MASSON
LANG S.	Algèbre linéaire • Tome 1 • Tome 2	INTEREDITIONS
LANG S.	Algebra	ADDISON-WESLEY
LANG S.	Linear Algebra	ADDISON-WESLEY
LAROCHE F.	Escapades arithmétiques	ELLIPSES
LASCAR D.	La théorie des modèles en peu de maux	CASSINI
LAVILLE G.	Courbes et surfaces	ELLIPSES
LAVILLE G.	Géométrie pour le CAPES et l'Agrégation	ELLIPSES
LAX P. D.	Funnctional analysis	WILEY
LAX P. D.	Linear Algebra	WILEY

LE BRIS G.	Maple Sugar : une initiation progressive à Maple	CASSINI
LEBOEUF C. **GUEGAND J.** **ROQUE J.L.** **LANDRY P.**	Exercices corrigés de probabilités	ELLIPSES
LEBORGNE D.	Calcul différentiel et géométrie	PUF
LEBOSSÉ C. **HÉMERY C.**	Géométrie. Classe de Mathématiques	JACQUES GABAY
LEHMANN D. **SACRÉ C.**	Géométrie et topologie des surfaces	PUF
LEHNING H. **JAKUBOWICZ D.**	Mathématiques supérieures et spéciales 2 : Dérivation	MASSON
LEHNING H.	Mathématiques supérieures et spéciales • Tome 1 : Topologie • Tome 3 : Intégration et sommation • Tome 4 : Analyse en dimension finie • Tome 5 : Analyse fonctionnelle	MASSON
LEICHTNAM E. **SCHAUER X.**	Exercices corrigés de mathématiques posés aux oraux X-ENS • Tome I - Algèbre 1 • Tome 2 - Algèbre et géométrie • Tome 3 - Analyse 1 • Tome 4 - Analyse 2	ELLIPSES
LELONG-FERRAND J. **ARNAUDIES J.M.**	Cours de Mathématiques • Tome 1 pour M-M' : Algèbre • Tome 1 pour A-A' : Algèbre • Tome 2 : Analyse • Tome 3 : Géométrie et cinématique • Tome 4 : Equations différentielles, intégrales multiples	DUNOD
LELONG-FERRAND J.	Géométrie différentielle	MASSON
LELONG-FERRAND J.	Les fondements de la géométrie	PUF

LESIEUR L. **MEYER Y.** **JOULAIN C.** **LEFEBVRE J.**	Algèbre linéaire, géométrie	ARMAND COLIN
LION G.	Algèbre pour la licence Cours et exercices (2ème édition)	VUIBERT
LION G.	Géométrie du plan Cours complet avec 600 exercices résolus	VUIBERT
LOTHAIRE M.	Algebraic combinatorics on words	CAMBRIDGE
MAC LANE S. **BIRKHOFF G.**	Algèbre • 1 : Structures fondamentales • 2 : Les grands théorèmes	GAUTHIER-VILLARS
MACKI J. **STRAUSS A.**	Introduction to optimal control theory	SPRINGER
MAKAROV B.M. **GOLUZINA M.G.** **LODKIN A.A.** **PODKORYTOV A.N.**	Problèmes d'analyse réelle	CASSINI
MALLIAVIN M. P. **WARUSFEL A.**	Algèbre linéaire et géométrie classique. Exercices	MASSON
MALLIAVIN M. P.	Les groupes finis et leurs représentations complexes	MASSON
MALLIAVIN P.	Géométrie différentielle intrinsèque	HERMANN
Manuels Matlab	• Using Matlab version 5 • Using Matlab version 6 • Statistics Toolbox • Using Matlab Graphics	
MANSUY R. **RANDÉ B.**	Les clefs pour l' X	CALVAGE ET MOUNET
MARCE S. **DEVAL-GUILLY E.**	Problèmes corrigés des ENSI	ELLIPSES

MASCART H. **STOKA M.**	Fonctions d'une variable réelle • Tome 2 : Exercices et corrigés • Tome 3 : Exercices et corrigés • Tome 4 : Exercices et corrigés	PUF
MAWHIN J.	Analyse : fondements, technique, évolutions	De Boeck Université
MAZET P.	Algèbre et géométrie pour le CAPES et l'Agrégation	Ellipses
MENEZES A.J. **van OORSCHOT P.C.** **VANSTONA S.A.**	Handbook of applied cryptography	CRC Press
MERKIN D.	Introduction to the theory of stability	Springer
MÉTIVIER M.	Notions fondamentales de la théorie des probabilités	Dunod
MÉTIVIER M.	Probabilités : dix leçons d'introduction. École Polytechnique	Ellipses
MEUNIER P.	Agrégation interne de Mathématiques Exercices d'oral corrigés et commentés • Tome 2	PUF
MEUNIER P.	Algèbre avec applications à l'algorithmique et à la cryptographie	Ellipses
MIGNOTTE M.	Algèbre concrète, cours et exercices	Ellipses
MIGNOTTE M.	Mathématiques pour le calcul formel	PUF
MITCHELL J. C.	Concepts in programming languages	Cambridge
MNEIMNÉ R.	Eléments de géométrie : action de groupes	Cassini
MNEIMNÉ R.	Réduction des endomorphismes	Calvage et Mounet

MNEIMNÉ R. **TESTARD F.**	Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques	HERMANN
MOISAN J. **VERNOTTE A.** **TOSEL N.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales Analyse : suites et séries de fonctions	ELLIPSES
MOISAN J. **VERNOTTE A.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales Analyse : topologie et séries	ELLIPSES
MONIER J.M.	Cours de mathématiques • Analyse 1 MPSI, PCSI, PTSI • Analyse 2 MPSI, PCSI, PTSI • Analyse 3 MP, PSI, PC, PT • Analyse 4 MP, PSI, PC, PT • Algèbre 1 MPSI, PCSI, PTSI • Algèbre 2 MP, PSI, PC, PT • Exercices d'analyse MPSI • Exercices d'analyse MP • Exercice d'algèbre et géométrie MP	DUNOD
MUTAFIAN C.	Le défi algébrique • Tome 1 • Tome 2	VUIBERT
NAGEL E. **NEWMAN J. R.** **GÖDEL K.** **GIRARD J. Y.**	Le théorème de Gödel	SEUIL
NAUDIN P. **QUITTE C.**	Algorithmique algébrique avec exercices corrigés	MASSON
NEVEU J.	Base mathématique du calcul des probabilités	MASSON
NIVEN I.	Irrational numbers	MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA
NORRIS J.R.	Markov chains	CAMBRIDGE
OŔOURKE J.	Computational géométrie in C (second édition)	CAMBRIDGE
OPREA J.	Differential geometry	PRENTICE HALL

OUVRARD J.Y.	• Probabilités 1 (capes, agrégation) • Probabilités 2 (maîtrise, agrégation)	CASSINI
PAPADIMITRIOU C.H.	Computational complexity	PEARSON EDUCATION
PAGES G. **BOUZITAT C.**	En passant par hasard ... Les probabilités de tous les jours	VUIBERT
PAPINI O. **WOLFMANN J.**	Algèbre discrète et codes correcteurs	SPRINGER
PARDOUX E.	Processus de Markov et applications	DUNOD
PEDOE D.	Geometry- A comprehensive course	DOVER
PERKO L.	Differential equation and dynamical systems	SPRINGER
PERRIN D.	Cours d'Algèbre	ELLIPSES
PERRIN D.	Cours d'Algèbre	ENSJF
PERRIN D.	Mathématiques d'école	CASSINI
PERRIN-RIOU B.	Algèbre, arithmétique et MAPLE	CASSINI
PETAZZZONI B.	Seize problèmes d'informatique	SPRINGER
PETROVŠEK **WILF** **ZEILBERGER**	A=B	A.K. PETERS
PEVZNER P.	Computational molecular biology- an algorithmic approach	MIT PRESS
PÓLYA G. **SZEGÖ G.**	Problems and Theorems in Analysis • Volume I • Volume II	SPRINGER VERLAG

POMMELLET A.	Agrégation de Mathématiques. Cours d'Analyse	ELLIPSES
POUNDSTONE.	Le dilemme du prisonnier	CASSINI
PRASOLOV V.	Polynomials	SPRINGER
PRASOLOV V.	Problèmes et théorèmes d'algèbre linéaires	CASSINI
PREPARATA F.P. **SHAMOS M.I.**	Computational géométrie - an introduction	SPRINGER
PRESS W. **FLANNERY B.** **TEUKOLSKI S.** **VETTERLING W.**	Numerical recipes in Pascal	CAMBRIDGE
PUTZ J.F.	Maple animation	CHAPMAN AND HALL
QUEFFELEC H. **ZUILY C.**	Éléments d'analyse	DUNOD
RALSTON A. **RABINOWITCH P**	A first curse in numerical analysis	INTERNATINAL STUDENT EDITION
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Cours de Mathématiques spéciales • 1- Algèbre • 2- Algèbre et applications à la géométrie • 3- Topologie et éléments d'analyse • 4- Séries et équations différentielles • 5- Applications de l'analyse à la géométrie	MASSON
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Exercices avec solutions • Algèbre • Analyse 1 • Analyse 2	MASSON
RAMIS J.P. **WARUSFEL A.**	Mathématiques - Tout en un pour la licence	DUNOD
RAO C.R.	Linear statistical inference and its application	WILEY

RANDÉ B.	Les carnets indiens de Srinivasa Ramanujan	CASSINI
RANDÉ B. **TAIEB F.**	Les clefs pour l'X	CALVAGE MOUNET
RANDÉ B. **MANSUY R.**	Les clefs pour l'X (2)	CALVAGE MOUNET
REINHARDT F. **SOEDER H.**	Atlas des mathématiques	LIVRE DE POCHE
REMMERT R.	Classical topics in complex function theory	SPRINGER
RIDEAU F.	Exercices de calcul différentiel	HERMANN
RIESZ F. **NAGY SZ. B.**	Leçons d'analyse fonctionnelle	GAUTHIER- VILLARS
RIO E.	Théorie asymptotique des processus aléatoires faiblement dépendants	SPRINGER
ROBERT C.	Contes et décomptes de la statistique - Une initiation par l'exemple	VUIBERT
ROLLAND R.	Théorie des séries 2- Séries entières	CÉDIC/NATHAN
ROMBALDI J.E.	Thèmes pour l'agrégation de mathématiques	EDP SCIENCES
ROMBALDI J.E.	Analyse matricielle	EDP SCIENCES
ROUDIER H.	Al èbre linéaire. Cours et exercices	VUIBERT
ROMBALDI J.E.	Analyse matricielle	EDP SCIENCES
ROUSSEAU Y. **SAINT-AUBIN Y.**	Mathématiques et technologie	SPRINGER (SUMAT)
ROUVIÈRE F.	Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation	CASSINI

ROUX C.	Initiation à la théorie des graphes	ELLIPSES
RUAUD J.F. **WARUSFEL A.**	Exercices de Mathématiques Algèbre 3	MASSON
RUDIN W.	Analyse réelle et complexe	MASSON
RUDIN W.	Functional analysis	MC GRAW HILL
RUDIN W.	Real and complex analysis	MC GRAW HILL
SA EARP R. **TOUBIANA E.**	Introduction à la Géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann	CASSINI
SAINT RAYMOND J.	Topologie, calcul différentiel et variable complexe	CALVAGE ET MOUNET
SAKAROVITCH J.	Eléments de théorie des automates	VUIBERT
SAKS S. **ZYGMUND A.**	Fonctions analytiques	MASSON
SAMUEL P.	Géométrie projective	PUF
SAMUEL P.	Théorie algébrique des nombres	HERMANN
SARMANT M.C. **MERLIER T.** **PILIBOSSIAN Ph.** **YAMMINE S.**	Analyse 1	ELLIPSES
SAUVAGEOT F.	Petits problèmes de géométrie et d'algèbre	SPRINGER
SAUX PICARD P.	Cours de calcul formel - Algorithmes fondamentaux	ELLIPSES
SAVIOZ J.C.	Algèbre linéaire, cours et exercices	VUIBERT
SCHNEIER B.	Applied cryptography	WILEY

SCHWARTZ L.	Analyse • I Topologie générale et analyse fonctionnelle • II Calcul différentiel et équations différentielles	HERMANN
SCHWARTZ L.	Cours d'Analyse • Tome 1 • Tome 2	HERMANN
SCHWARTZ L.	Méthodes Mathématiques pour les sciences physiques	HERMANN
SEDGEWICK R.	Algorithms	ADDISON WESLEY
SEDGEWICK R.	Algorithmes en Java	PEARSON EDUCATION
SEDGEWICK R.	Algorithmes en langage C	DUNOD
SEGUINS PAZZIS (de) C.	Invitation aux formes quadratiques	CALVAGE ET MOUNET
SELBERHERR S. **STIPPEL H.** **STRASSER E.**	Simulation of semi-conductor devices and processes	SPRINGER
SERRE D.	Les matrices, théorie et pratique	DUNOD
SERRE J.P.	Cours d'arithmétique	PUF
SERVIEN Cl.	• Analyse 3 • Analyse 4	ELLIPSES
SHAPIRO H.N.	Introduction to the theory of numbers	DOVER
SIDLER J.C.	Géométrie Projective	DUNOD
SIPSER M.	Introduction to the theory of computation	THOMSON C. T.
SKANDALIS G.	Topologie et analyse	DUNOD

STANLEY R.P.	Enumerative combinatorics Volume I	WADDWORTH AND BROOKS
STEWART I.	Galois theory	CHAPMAN AND HALL
STROUSTRUP B	Le langage C++	PEARSON EDUCATION
SZPIRGLAS A.	Exercices d'algèbre	CASSINI
TAUVEL P.	Cours de Géométrie	DUNOD
TAUVEL P.	Cours d'algè bre	DUNOD
TAUVEL P.	Corps commutatifs et théorie de Galois	CALVAGE ET MOUNET
TAUVEL P.	Mathématiques générales pour l'agrégation	MASSON
TAUVEL P.	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Algèbre 2	MASSON
TENENBAUM G. **WU J.**	Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres T 2	S. M. F.
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres T 1	S. M. F.
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres	INSTITUT ELIE CARTAN
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres	BELIN
TENENBAUM G. **MENDÈS-FRANCE M.**	Les nombres premiers	QUE SAIS-JE ? PUF
TISSERON C.	Géométries affine, projective et euclidienne	HERMANN
TISSIER A.	Mathématiques générales : exercices avec solutions	BRÉAL

TITCHMARSH E.C.	The theory of functions	OXFORD
TORTRAT A.	Calcul des probabilités et introduction aux processus aléatoires	MASSON
TRIGNAN J.	Constructions géométriques et courbes remarquables	VUIBERT
TRUFFAULT B.	Exercices de géométrie élémentaires	IREM DES PAYS DE LOIRE
TURING A **GIRARD J. Y.**	La Machine de Turing	SEUIL
VALIRON G.	Cours d'analyse mathématique • I Théorie des fonctions • II Équations fonctionnelles - Applications	MASSON
VAUQUOIS B.	Outils Mathématiques. Probabilités	HERMANN
VAUTHIER J. **PRAT J-J.**	Cours d'Analyse Mathématique de l'Agrégation	MASSON
VAZIRANI V.V.	Algorithmes d'approximation	SPRINGER
VINBERG E. B.	A course in algebra	AMS
WAGSCHAL C.	Fonctions holomorphes - Équations différentielles	HERMANN
WAGSCHAL C.	Distributions, analyse microlocale, équations aux dérivées partielles	HERMANN
WARIN B.	L'algorithmique, votre passeport informatique pour la programmation	ELLIPSES
WARUSFEL A.	Structures algébriques finies	CLASSIQUES HACHETTE
WARUSFEL, ATTALI **COLLET, GAUTIER** **NICOLAS**	Mathématiques • Analyse • Arithmétique • Géométrie • Probabilités	VUIBERT

WATERMAN M.S.	Introduction to computational biology	CHAPMAN AND HALL / CRC
WEST D. B.	Introduction to graph theory	PRENTICE HELL
WHITTAKER E.T. **WATSON G.N.**	A course of modern analysis	CAMBRIDGE
WILF H.	Generatingfunctionology	ACADEMIC PRESS
WILF H.	Algorithms and complexity	A.K. PETERS
WILLEM M.	Analyse fonctionnelle élémentaire	CASSINI
WILLEM M.	Principes d'analyse fonctionnelle	CASSINI
WINSKEL G.	The formal semantics of programming languages	MIT PRESS
YALE P.B.	Geometry and Symmetry	DOVER
YOUNG D.M. **GREGORY R.T.**	A survey of numerical mathematics	DOVER
ZÉMOR G.	Cours de cryptographie	CASSINI
ZUILY Cl. **QUEFFELEC H.**	Éléments d'analyse pour l'agrégation	MASSON
ZUILY Cl. **QUEFFELEC H.**	Problèmes de distributions	CASSINI