MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

DIRECTION GÉNÉRALE DES RESSOURCES HUMAINES

RAPPORT DE JURY DE CONCOURS

AGRÉGATION DE MATHÉMATIQUES
CONCOURS EXTERNE

Session 2012

LES RAPPORTS DES JURYS DE CONCOURS SONT ÉTABLIS SOUS LA RESPONSABILITÉ DES PRÉSIDENTS DE JURY

Table des matières

Chapitre 1

Composition du jury

DIRECTOIRE

TOROSSIAN Charles, Président	PARIS	Inspecteur général
FOULON Patrick, Président délégué	AIX-MARSEILLE	Professeur des Universités
BOUGE Luc, Vice-président	RENNES	Professeur des Universités
BURBAN Anne, Vice-présidente	PARIS	Inspectrice générale
GODEFROY Gilles, Vice-président	PARIS	Directeur de recherche
YEBBOU Johan, Secrétaire général	PARIS	Inspecteur général
BOISSON François, Directoire	PARIS	Professeur de chaire supérieure
GOUDON Thierry, Directoire	NICE	Directeur de recherche
RUPPRECHT David, Directoire	TOULOUSE	Professeur agrégé

JURY

ABERGEL Luc	PARIS	Professeur de Chaire supérieure
AEBISCHER Bruno	BESANÇON	Professeur agrégé
ALBERT Luc	NICE	Professeur de Chaire supérieure
APPEL Walter	LYON	Professeur de Chaire supérieure
BACHMANN Florence	AIX-MARSEILLE	Professeur agrégé
BARANI jean Pierre	LYON	Professeur de Chaire supérieure
BARDET Jean-Marc	PARIS	Professeur des Universités.
BAROU Geneviève	CAEN	Maître de conférences
BAUMANN Pierre	STRASBOURG	Chargé de recherches au CNRS
BAYLE Lionel	NANTES	Maître de conférences
BAYLE Vincent	TOULOUSE	Professeur agrégé
BEAUCHARD Karine	VERSAILLES	Chargé de recherches au CNRS
BEAULIEU Anne	CRETEIL	Maître de conférences
BECHATA Abdellah	VERSAILLES	Professeur agrégé

BECKER Marc	NICE	Professeur de Chaire supérieure
BEGYN Arnaud	TOULOUSE	Professeur agrégé
BENHAMOU Marie Hélène	PARIS	Professeur de Chaire supérieure
BIOLLEY Anne-Laure	PARIS	Professeur agrégé
BLANLOEIL Vincent	STRASBOURG	Maître de conférences
BOLDO Sylvie	VERSAILLES	Chargé de recherches à INRIA
BONNAILLIE-NOEL Virginie	RENNES	Chargé de recherches au CNRS
BOREL Agnès	AIX-MARSEILLE	Professeur de Chaire supérieure
BOREL Laetitia	VERSAILLES	Professeur agrégé
BOULMEZAOUD Tahar-Zamène	VERSAILLES	Maître de conférences
BREMONT Julien	PARIS	Maître de conférences
BRINON Olivier	PARIS	Maître de conférences
BROUZET Robert	MONTPELLIER	Maître de conférences
BURGUET David	CRETEIL	Chargé de recherches au CNRS
BUSE Laurent	NICE	Chargé de recherches à INRIA
CADORET Anna	VERSAILLES	Professeur associé à l'Ecole Polytechnique
CALADO Bruno	PARIS	Professeur agrégé
CALDERO Philippe	LYON	Maître de conférences
CHAINAIS Claire	LILLE	Professeur des Universités.
CHARDIN Marc	PARIS	Chargé de recherches au CNRS
CHENO Laurent	PARIS	Inspecteur général
CHEVALLIER Elisabeth	STRASBOURG	Professeur de Chaire supérieure
CHILLES Alain	LYON	Professeur de Chaire supérieure
CZARNECKI Marc-Olivier	MONTPELLIER	Professeur des Universités.
D'ANGELO Yves	ROUEN	Professeur des Universités.
DE SEGUINS PAZZIS Clément	VERSAILLES	Professeur agrégé
DEVULDER Christophe	ORLEANS-TOURS	Professeur de Chaire supérieure
DOUMERC Yan	LILLE	Professeur agrégé
DROUHIN Catherine	VERSAILLES	Professeur de Chaire supérieure
DUJARDIN Guillaume	LILLE	Chargé de recherches à INRIA
DUTRIEUX Yves	NANTES	Maître de conférences
FAKHI-SOUCHU Saâdia	PARIS	Professeur agrégé
FAVENNEC Denis	BORDEAUX	Professeur de Chaire supérieure
FLON Stephane	VERSAILLES	Professeur agrégé
FONTAINE Philippe	POITIERS	Professeur de Chaire supérieure
FRICKER Christine	VERSAILLES	Directeur de recherches à INRIA
GALLOIS Mirentchu	PARIS	Professeur de Chaire supérieure
GARAY Mauricio	VERSAILLES	Professeur agrégé
GERMAIN Cyril	PARIS	Professeur agrégé
HAAS Bénédicte	PARIS	Maître de conférences
HADIJI Rejeb	CRETEIL	Maître de conférences
HANROT Guillaume	LYON	Professeur des Universités.
HENRI Michel	POITIERS	Professeur de Chaire supérieure
HERAU Frédéric	NANTES	Professeur des Universités.
ISAIA Jérome	NICE	Professeur agrégé
ISTAS Jacques	GRENOBLE	Professeur des Universités.
JULG Pierre	ORLEANS-TOURS	Professeur des Universités.
KASPEREK Xavier	NICE	Professeur agrégé
KOSTYRA Marie-Laure	STRASBOURG	Professeur agrégé
LAFITTE Christophe	PARIS	Professeur agrégé
LAFITTE Pauline	VERSAILLES	Maître de conférences

LAMBOLEY Jimmy	PARIS	Maître de conférences
LEFEVRE Pascal	LILLE	Professeur des Universités.
LE MERDY Sylvie	RENNES	Professeur agrégé
LESCOT Paul	ROUEN	Professeur des Universités.
LEVY-VEHEL Jacques	NANTES	Directeur de recherches à INRIA
MANSUY Roger	PARIS	Professeur agrégé
MARCHE Claude	VERSAILLES	Directeur de recherches à INRIA
MARIANI Charles	PARIS	Professeur agrégé
MERLE Eric	PARIS	Professeur de Chaire supérieure
MESTRE Jean françois	PARIS	Professeur des Universités
MEZARD Ariane	VERSAILLES	Professeur des Universités
MICHEL Julien	POITIERS	Professeur des Universités
MONAT Pascale	GRENOBLE	Professeur de Chaire supérieure
MONIER Marie	PARIS	Professeur agrégé
MOREAU Anne	POITIERS	Maître de conférences
NOBLE Pascal	LYON	Maître de conférences
NODET MaÎlle	GRENOBLE	Maître de conférences
ORGOGOZO Fabrice	VERSAILLES	Chargé de recherches au CNRS
PENNEQUIN Denis	PARIS	Maître de conférences
PEYRE Emmanuel	GRENOBLE	Professeur des Universités
PRIEUR Christophe	GRENOBLE	Chargé de recherches au CNRS
PUCHOL Pierre	CRETEIL	Professeur de Chaire supérieure
RECHER François	LILLE	Maître de conférences
REGNIER Mireille	VERSAILLES	Directeur de recherches à INRIA
REZZOUK Marc	ROUEN	Professeur de Chaire supérieure
RHODES Rémi	PARIS	Maître de conférences
RISLER Jean-Jacques	PARIS	Professeur des Universités
RITZENTHALER Christophe	AIX-MARSEILLE	Chargé de recherches au CNRS
RIVOLLIER Damien	NANCY-METZ	Professeur agrégé
ROUX RaphaÎl	PARIS	Maître de conférences
SCHABANEL Nicolas	PARIS	Directeur de recherches au CNRS
SEURET Stéphane	PARIS	Maître de conférences
SIMON Thomas	LILLE	Professeur des Universités
STOLTZ Gilles	PARIS	Chargé de recherches au CNRS
SUFFRIN Frédéric	STRASBOURG	Professeur de Chaire supérieure
TAIEB Franck	VERSAILLES	Professeur de Chaire supérieure
THERY Laurent	NICE	Chargé de recherches à INRIA
TOSEL Emmanuelle	PARIS	Professeur de Chaire supérieure
TOSEL Nicolas	PARIS	Professeur de Chaire supérieure
TU Jean-Louis	NANCY-METZ	Professeur des Universités
VIAL Grégory	LYON	Professeur des Universités
WATTIEZ Johann	VERSAILLES	Professeur agrégé
WEILL Mathilde	PARIS	Professeur agrégé
ZEGHIB Abdelghani	LYON	Directeur de recherches au CNRS
ZINSMEISTER Michel	ORLEANS-TOURS	Professeur des Universités
ZWALD Laurent	GRENOBLE	Maître de conférences

Chapitre 2

Déroulement du concours et statistiques

2.1 Déroulement du concours

Les épreuves écrites se sont déroulées selon le calendrier suivant :

- Épreuve de mathématiques générales : mercredi 4 avril 2012
- Épreuve d'analyse et probabilités : jeudi 5 avril 2012

La liste d'admissibilité a été publiée le mercredi 6 juin 2012.

L'oral s'est déroulé du samedi 23 juin au samedi 7 juillet 2012 à l'Ecole Nationale de Commerce, 70 boulevard Bessières. La liste d'admission a été publiée le mardi 10 juillet 2012.

Depuis 2006 le concours propose quatre options. Les trois premières ne diffèrent que par les épreuves de modélisation alors que les trois épreuves orales de l'option D (informatique) sont spécifiques.

En 2012 on peut constater que dans les trois premières options, les nombres d'inscrits sont similaires ; ils sont toujours – et c'est bien compréhensible – nettement inférieurs dans l'option D. Dans les quatre options, les pourcentages d'admis sont similaires. Nous continuons, tant que ces options ne sont pas stabilisées, à ne pas donner de statistiques détaillées par option.

Le nom officiel, « concours externe de recrutement de professeurs agrégés stagiaires », montre clairement que, par le concours d'agrégation, le ministère recrute des professeurs agrégés destinés, selon leur statut, à l'enseignement secondaire (lycées d'enseignement général et technologique et, exceptionnellement collèges) ou à l'enseignement supérieur (universités, instituts universitaires de technologie, Grandes Écoles, classes préparatoires aux Grandes Écoles, sections de techniciens supérieurs).

Les candidats qui ont été admis à un concours de recrutement sont nommés professeurs agrégés stagiaires à la rentrée scolaire de l'année au titre de laquelle est organisé le recrutement et classés, dès leur nomination, selon les dispositions du décret du 5 décembre 1951 susvisé. Ils sont affectés dans une académie par le Ministre chargé de l'éducation dans des conditions fixées par arrêté de ce dernier. Le stage a une durée d'un an. Au cours de leur stage, les professeurs stagiaires bénéficient d'une formation dispensée, dans le cadre des orientations définies par l'État, sous la forme d'actions organisées à l'université, d'un tutorat, ainsi que, le cas échéant, d'autres types d'actions d'accompagnement. Les modalités du stage et les conditions de son évaluation sont arrêtées par le ministre chargé de l'éducation

La note de service 2012-047 du 20 mars 2012, relative à l'affectation des lauréats des concours du second degré en qualité de professeur stagiaire, explique en détail les conditions de report de stages accordés aux lauréats du concours de l'agrégation qui souhaitent poursuivre des études doctorales. Notons que le Master Recherche entre en général dans la catégorie "études doctorales". Cependant, lorsqu'un lauréat de l'agrégation est, suite à sa demande, nommé stagiaire et affecté en académie, l'annulation de sa nomination ne peut se faire sans l'accord du recteur concerné. Notons enfin que le lauréat peut demander à effectuer son stage en tant qu'ATER ou doctorant contractuel ou en classes préparatoires aux grandes écoles (sur proposition de l'Inspection générale) selon les modalités de la note de service.

Le programme, la nature des épreuves écrites et orales, font l'objet de publications au bulletin officiel du ministère de l'éducation nationale (B.O.), et leur actualisation peut être consultée sous forme électronique sur le site de la DPE, à l'adresse www.education.gouv.fr/siac/siac2 ou sur le site de l'agrégation externe de mathématiques, à l'adresse www.agreg.org où se trouvent aussi tous les renseignements pratiques concernant les sessions à venir.

Épreuve « Agir en fonctionnaire de l'état de manière éthique et responsable ».

Les modalités de la session 2011 ont été reconduites. Suivant l'option choisie, elle est cumulée soit à l'épreuve "Algèbre et Géométrie" soit à l'épreuve "Mathématiques pour l'Informatique". Les contenus pour cette nouvelle épreuve sont précisés dans le texte suivant.

Les candidats se verront remettre un extrait court d'un texte officiel en relation avec les connaissances décrites dans le point 1 de l'arrêté du 12 mai 2010 fixant le contenu de la compétence « Agir en fonctionnaire de l'Etat et de façon éthique et responsable » et une liste de suggestions utilisables par le candidat pour préparer son exposé. Des données supplémentaires utiles à la préparation pourront être fournies aux candidats.

Modification légère du programme de l'agrégation à partir de la session 2014.

Les modifications porteront sur les sections concernant la géométrie et les probabilités (programme d'écrit et d'oral). Par ailleurs, à partir de la session 2015, seuls les logiciels libres seront proposés pour les épreuves de modélisation. La liste précise et actualisée de ces logiciels sera disponible sur le site de l'agrégation.

2.2 Statistiques et commentaires généraux sur la session 2012

Après la diminution sensible du nombre de postes entre les concours 2005 (388 postes) et 2008 (252 postes), ce nombre a été revu à la hausse légèrement chaque année. En 2012 il y avait 308 postes ouverts au concours (+20 postes par rapport à 2011), ce qui nous ramène au niveau de 2001.

Le nombre d'inscrits et de présents a atteint un plafond en 2006-07. Depuis on a constaté une baisse sensible, qui s'est arrêtée en 2012, puisque le concours enregistre une légère hausse (+173 inscrits, +39 présents). En analysant les séries longues on observe que ces variations suivent avec un décalage de 4 ans environ, le nombre de postes ouverts. Toutefois l'analyse ne peut se résumer à ce décalage.

Beaucoup de candidats s'inscrivent mais se sentent insuffisamment préparés ; le taux de déperdition entre les inscrits et les présents est de plus de 50%. La baisse très nette du nombre des étudiants suivant une préparation exigeante et difficile, inquiète non seulement le jury mais aussi toute la communauté éducative. Ce fait semble confirmé par une analyse un peu plus fine qui montre que cette diminution est particulièrement visible dans les catégories des étudiants hors ENS. Remarquons avec satisfaction, un retour des normaliens après un effondrement en 2011 (+ 20 présents).

Enfin, le nombre de présents par poste est passé pour la deuxième session consécutive sous la barre de 4.

À l'issue de la délibération d'écrit portant sur deux épreuves (Mathématiques générales et Analyse-Probabilités), 571 candidats ont été déclarés admissibles ; le premier admissible avait une moyenne de 19,75/20 et le dernier une moyenne de 6,75/20. Les moyennes des présents sur les épreuves écrites furent de 6,53/20 et 6,84/20 pour Mathématiques générales et Analyse-Probabilités. Notons que pour les admissibles, les moyennes étaient de 10,51/20 et 10,19/20 respectivement.

Finalement, à l'issue des épreuves orales, les 308 postes offerts au concours ont été pourvus ; le premier admis a une moyenne de 18,42/20, le dernier admis une moyenne de 9,33/20.

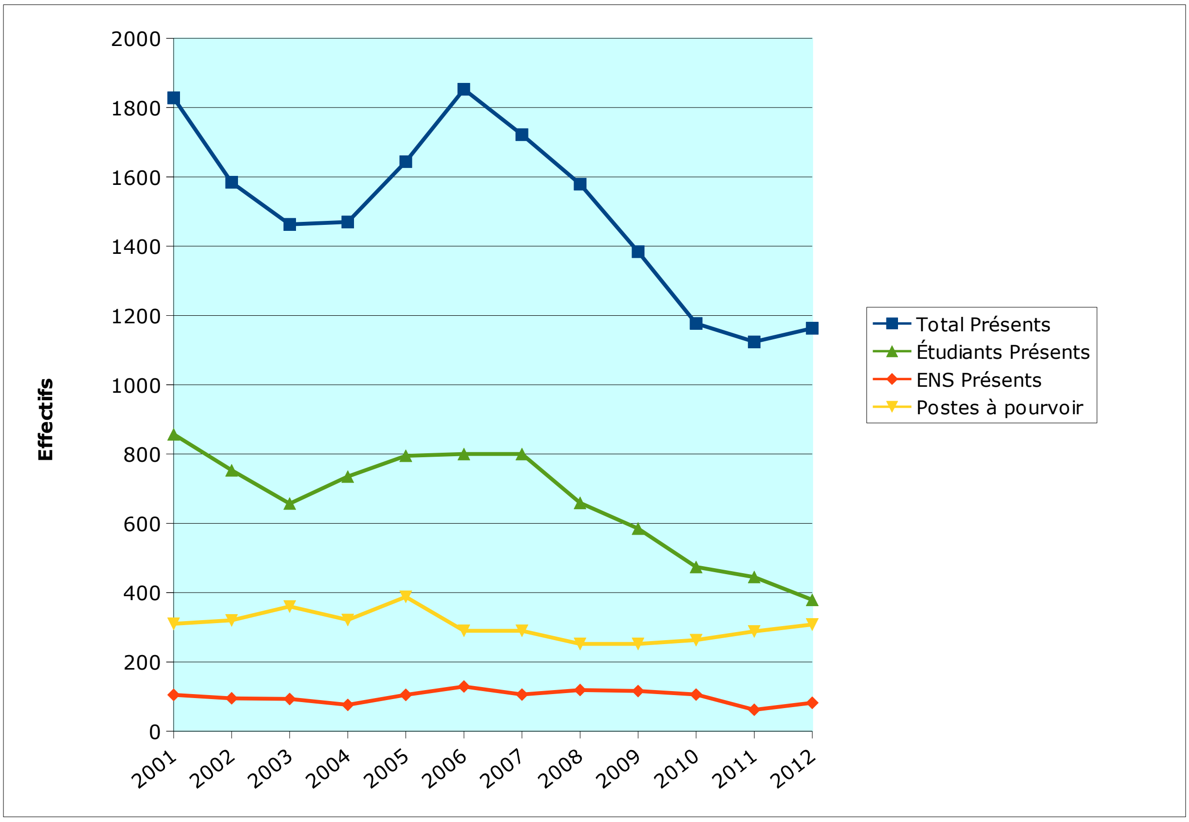
On trouvera dans les pages qui suivent différents tableaux et graphiques constituant le bilan statistique du concours selon différents critères (géographie, genre, catégorie professionnelle, âge). Dans ces tableaux, **tous les pourcentages sont calculés par rapport aux présents**.[1] L'écrit de l'agrégation sert aussi d'écrit pour les agrégations de mathématiques en Tunisie et au Maroc ; il n'y a pas de différence pour les barres d'admissibilité pour les étudiants de ces deux pays.

1. Un candidat étranger a été admis hors classement.

Effectifs depuis 12 ans

Année	Total Inscrits	Total Présents	Étudiants Présents	ENS Présents	Postes à pourvoir	Présents par poste
2001	**2663**	**1828**	857	105	310	**5,9**
2002	**2343**	**1584**	753	95	320	**5,0**
2003	**2217**	**1463**	657	93	360	**4,1**
2004	**2333**	**1470**	735	76	321	**4,6**
2005	**2560**	**1644**	795	105	388	**4,2**
2006	**2849**	**1853**	800	129	290	**6,4**
2007	**2801**	**1722**	800	106	290	**5,9**
2008	**2491**	**1579**	659	119	252	**6,3**
2009	**2351**	**1384**	585	116	252	**5,5**
2010	**2332**	**1177**	474	106	263	**4,5**
2011	**2500**	**1124**	445	62	288	**3,9**
2012	**2673**	**1163**	379	82	308	**3,78**

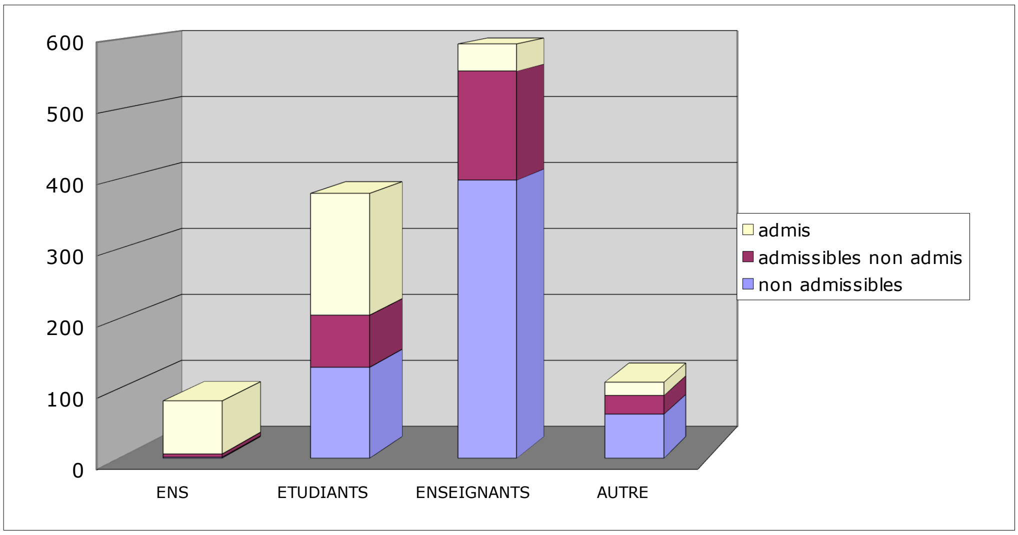
Évolution du nombre de présents aux deux épreuves d'écrit



Profession et Diplôme

CATÉGORIES	INSCRITS	PRÉSENTS	ADMISSIBLES	ADMIS	% admissibles	% admis
ÉLÈVE D'UNE ENS	103	82	81	76	98,8	92,7
ÉTUDIANT	697	379	249	174	65,7	45,9
SALARIÉ SECTEUR PRIVÉ	155	32	16	9	50,0	28,1
SANS EMPLOI	171	48	24	8	50,0	16,7
ENSEIGNANT DU SUPÉRIEUR	45	10	5	2	50,0	20,0
AGRÉGÉ	7	1	1	1	100,0	100,0
CERTIFIÉ	1061	482	168	32	34,9	6,6
PLP	44	13	3	1	23,1	7,7
AUTRE ENSEIGNANT 2nd DEGRÉ	276	84	17	3	20,2	3,6
ENSEIGNANT 1er DEGRÉ	20	3	1	0	33,3	0,0
AUTRE FONCTIONNAIRE	22	5	1	1	20,0	20,0
SURVEILLANT	25	7	1	0	14,3	0,0
AUTRE	47	17	4	1	23,5	5,9
TOTAL	**2673**	**1163**	**571**	**308**	**49,1**	**26,5**

Résultat du concours par catégories professionnelles[2]



Résultat du concours par grandes catégories

2. Les catégories professionnelles listées ci-dessus correspondent aux déclarations des candidats lors de l'inscription : elles ne font l'objet d'aucune vérification et doivent être considérées avec prudence.

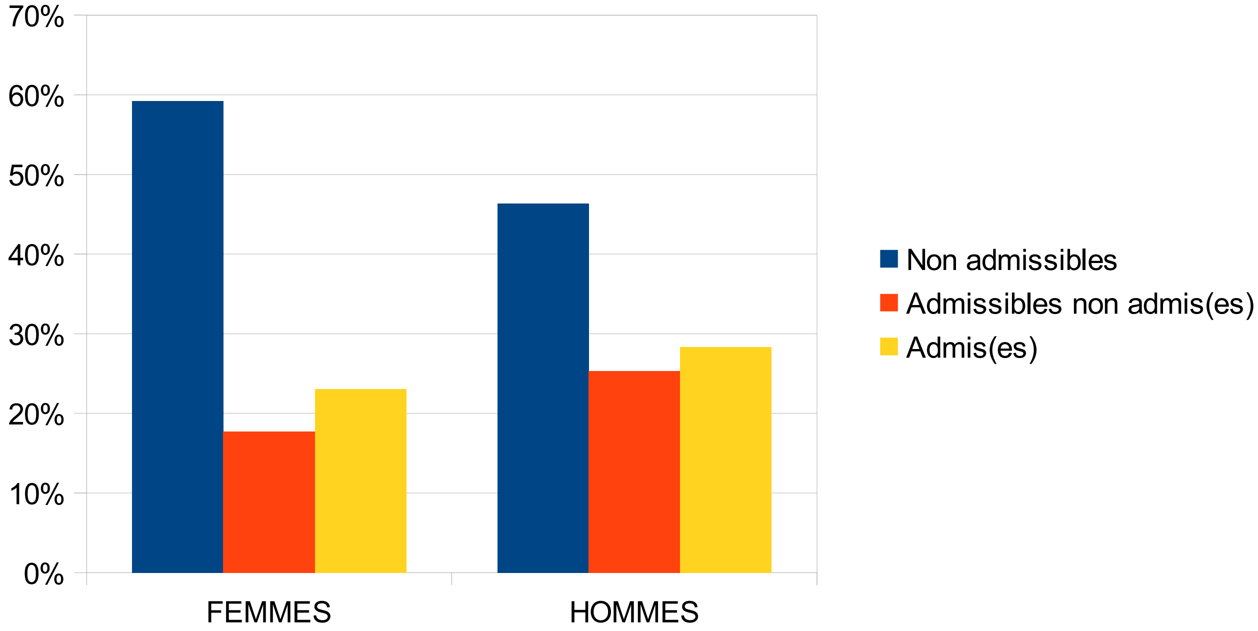
Titre ou diplôme	Inscrits	Présents	Admissibles	
DOCTORAT	218	76	38	50%
DIP POSTSECONDAIRE 5 ANS OU +	158	56	16	29%
MASTER	1410	714	345	48%
GRADE MASTER	90	40	17	43%
DIPLOME CLASSE NIVEAU I	25	10	0	0%
ENSEIGNANT TITUL-ANCIEN TITUL CAT A	708	336	95	28%
CPE TITULAIRE - ANCIEN TITULAIRE	1	1	0	0%
ADMIS ECH.REM.CERTIFIE PLP PEPS	32	13	1	8%
DIPLOME D'INGENIEUR (BAC+5)	256	92	36	39%
DIPLOME GRANDE ECOLE (BAC+5)	83	24	18	75%
DISP.TITRE 3 ENFANTS (MERE)	13	8	2	25%
DISP.TITRE 3 ENFANTS (PERE)	32	11	3	27%
ADMIS ECH.REM PROFESSEUR ECOLE	1	0	0	
TOTAL (y compris Tunisiens et Marocains)	3027	1381	571	41%

Diplômes des présents (y compris Marocains et Tunisiens) et admissibles

Ces résultats par grandes catégories confirment que le concours de l'agrégation externe de mathématiques est, comme c'est sa fonction, un concours de recrutement de nouveaux enseignants. La catégorie cumulée des étudiants (ENS et hors ENS) constitue en effet, 81% de l'effectif des admis. On note cependant une différence significative avec les années 2008-2010 ce pourcentage était alors de 92%. Le tarissement du vivier étudiant profite aux professeurs en poste. L'impact du diplôme sur la performance à l'écrit est nette. Notons le nombre important de docteurs inscrits au concours, mais aussi le peu d'admissibles dans cette catégorie.

Répartition selon le genre

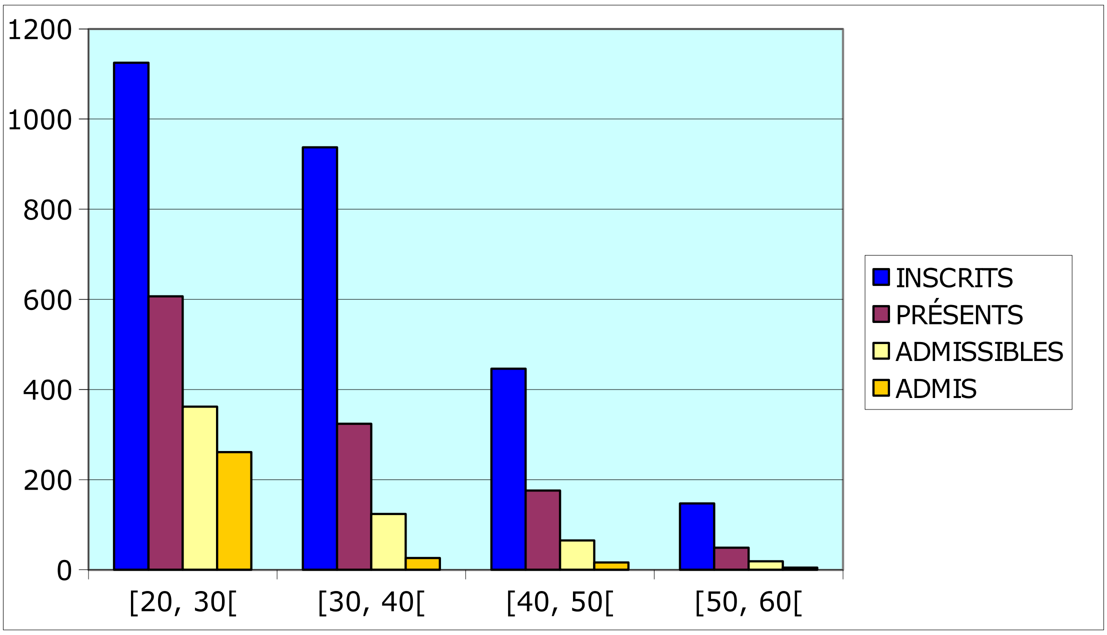
GENRE	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis	% Admissibles	% Admis
FEMMES	889	412	168	95	40,78	23,06
HOMMES	1784	751	403	213	53,66	28,36
TOTAL	2673	1163	571	308	49,10	26,48



Le rééquilibrage de la parité pour le succès au concours observé en 2010 et 2011 se confirme cette année. Ces pourcentages sont à apprécier en tenant compte du fait que les femmes ne représentent qu'un faible pourcentage parmi les candidats issus d'une ENS, 11% en 2012.

Répartition selon l'âge

TRANCHE D'ÂGE	INSCRITS	PRÉSENTS	ADMISSIBLES	ADMIS
[20, 30[	1125	607	362	261
[30, 40[	937	324	124	26
[40, 50[	446	176	65	16
[50, 60[	147	49	19	5



Répartition par tranches d'âge

Cette répartition par tranches d'âge confirme que l'agrégation externe permet de recruter des jeunes enseignants. Les jeunes constituent en effet l'essentiel des admissibles mais surtout des admis au concours, 84 % des reçus ont moins de 30 ans. Cependant des candidats plus avancés en âge se sont présentés avec succès.

Répartition selon l'académie

Académie	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
AIX-MARSEILLE	162	69	28	16
AMIENS	59	26	12	6
BESANCON	49	29	15	8
BORDEAUX	85	40	17	12
CAEN	45	19	8	4
CLERMONT-FERRAND	37	19	9	4
CORSE	5	0	0	0
DIJON	53	28	14	5
GRENOBLE	76	36	19	5
GUADELOUPE	29	10	1	1
GUYANE	9	3	1	0
LA REUNION	62	25	8	2
N. CALEDONIE	10	2	2	1
POLYNESIE	11	5	2	0
MAYOTTE	8	4	2	0
LILLE	104	45	17	9
LIMOGES	13	6	2	1
LYON	164	84	51	39
MARTINIQUE	31	10	1	0
MONTPELLIER	108	53	21	6
NANCY-METZ	83	31	17	4
NANTES	95	36	19	9
NICE	88	29	9	8
ORLEANS-TOURS	67	18	7	3
POITIERS	75	24	8	3
REIMS	54	29	13	6
RENNES	119	78	55	46
ROUEN	56	28	7	3
STRASBOURG	87	44	26	15
TOULOUSE	124	45	20	8
CRETEIL-PARIS-VERSAIL.	705	288	160	84
TOTAL	2673	1163	571	308

Hors ENS	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
CRÉTEIL-PARIS-VERSAILLE	664	260	132	59
RENNES	89	53	31	22
LYON	134	55	22	12

ENS seulement	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
CRETEIL-PARIS-VERSAILLES	41	28	28	25
RENNES	30	25	24	24
LYON	30	29	29	27

Représentation des résultats par académies (y compris ENS)

Chapitre 3

Épreuve écrite de mathématiques générales

3.1 Énoncé

Avertissement

Les calculatrices et documents sont interdits. La qualité de la rédaction sera un facteur important d'appréciation des copies. On invite donc le candidat à produire des raisonnements clairs, complets et concis. Le candidat peut utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes ; il veillera toutefois à préciser la référence du résultat utilisé.

Le but de ce problème est d'étudier le nombre de points à coordonnées entières contenus dans certaines parties de $\mathbf{R}^d$.

Les parties **I**, **II** et **III** du problème sont indépendantes les unes des autres.

Le sigle ⧫ signale l'introduction dans le texte d'une définition, d'une hypothèse, d'une notation ou d'un rappel.

Notations

On note $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers positifs ou nuls, $\mathbf{Z}$ l'anneau des entiers relatifs, $\mathbf{Q}$ le corps des rationnels, $\mathbf{R}$ celui des nombres réels et $\mathbf{C}$ celui des complexes.

Pour tout nombre réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière. Si X est un ensemble fini, $\mathrm{Card}(X)$ désigne son cardinal. Si X et Y sont des ensembles, on note

$$X \setminus Y = \{x \in X \mid x \notin Y\}.$$

Étant donné une partie X de $\mathbf{R}^d$ et un nombre réel λ, on note

$$\lambda X = \{y \in \mathbf{R}^d \mid \exists x \in X, y = \lambda x\}.$$

⧫ Une application $f : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ sera dite *polynomiale* s'il existe un polynôme $P \in \mathbf{C}[T]$ tel que

$$f(n) = P(n)$$

pour tout $n \in \mathbf{N}$.

♦ Une application $f : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ sera dite *quasi-polynomiale* s'il existe un entier N strictement positif et des polynômes $P_0, \dots, P_{N-1} \in \mathbf{C}[T]$ tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on ait

$$f(n) = P_{r_N(n)}(n)$$

où $r_N(n)$ désigne le reste de la division euclidienne de n par N.

Partie I : Un premier cas

Soit d un entier strictement positif et soient $m_1, \dots, m_d$ des entiers strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose

$$u_n = \mathrm{Card}(\{(k_1, \dots, k_d) \in \mathbf{N}^d \mid \sum_{i=1}^{d} m_i k_i = n\})$$

et $v_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$.

1. Démontrer que la somme et le produit de deux fonctions quasi-polynomiales sont des fonctions quasi-polynomiales.

2. (a) Déterminer la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans le cas où $d = 1$.

(b) L'application $n \mapsto v_n$ est-elle quasi-polynomiale dans ce cas ?

3. Pour $i \in \{1, \dots, d\}$, on pose $U_i = \sum_{k\in\mathbf{N}} T^{km_i}$ et on définit la série formelle

$$U = \sum_{n\in\mathbf{N}} u_n T^n \in \mathbf{Z}[[T]],$$

où les u_n ont été définis en début de partie.

(a) Écrire U ‡ l'aide des séries formelles U_i.

(b) Déterminer le produit $U \times \prod_{i=1}^{d} (1 - T^{m_i})$.

4. On définit la série formelle $V = \sum_{n\in\mathbf{N}} v_n T^n$. Trouver une relation entre les séries formelles V et U.

♦ La dérivée d'une série formelle $F = \sum_{n\in\mathbf{N}} a_n T^n$ est la série formelle $F' = \sum_{n\geqslant 1} n a_n T^{n-1}$. On pourra utiliser sans preuve la formule $(F_1F_2)' = F_1'F_2 + F_1F_2'$ pour des séries formelles F_1 et F_2. Les dérivées successives d'une série formelle F sont obtenues en posant $F^{(0)} = F$ et en définissant $F^{(k+1)}$ comme la dérivée de la série $F^{(k)}$.

5. On pose $G = \sum_{n\in\mathbf{N}} T^n$.

(a) Trouver une relation entre les séries formelles G^2 (carré de la série G) et G'.

(b) Soit $k \in \mathbf{N}$. Trouver une relation entre les séries G^{k+1} et $G^{(k)}$.

(c) Trouver des expressions explicites pour les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans le cas où on a les égalités $m_1 = \dots = m_d = 1$. Montrer dans ce cas particulier que la fonction $n \mapsto v_n$ est polynomiale.

6. On revient au cas général. Démontrer que la fonction $v : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ donnée par $n \mapsto v_n$ est quasi-polynomiale (*on pourra utiliser la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle*).

Partie II : Étude en dimensions 1 et 2

1. Soient p et q des entiers strictement positifs et premiers entre eux. On pose $x = p/q$. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par

$$u_n = \mathrm{Card}(\mathbf{Z} \cap [0, nx]) - nx$$

pour $n \in \mathbf{N}$ est une suite périodique dont on déterminera une période.

2. Soient $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$. On pose $A = (a, b) \in \mathbf{Z}^2$ et $B = (c, d) \in \mathbf{Z}^2$. On note $[A, B]$ le segment de $\mathbf{R}^2$ d'extrémités A et B. Démontrer que

$$\mathrm{Card}([A, B] \cap \mathbf{Z}^2) = \mathrm{pgcd}(c - a, d - b) + 1.$$

♦ Dans la suite de cette partie, on munit $\mathbf{R}^2$ de sa structure euclidienne usuelle et de la mesure usuelle, c'est-à-dire celle obtenue en faisant le produit des mesures de Lebesgue sur $\mathbf{R}$. On appellera *polygone* de $\mathbf{R}^2$ l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points. Si X est une partie de $\mathbf{R}^2$, on note ∂X sa frontière, c'est-à-dire $\overline{X} \setminus X^o$, où $\overline{X}$ désigne l'adhérence de X et X^o son intérieur. Soit $\mathscr{P}$ un polygone de $\mathbf{R}^2$. On dit que $\mathscr{P}$ est un *polygone à sommets entiers* s'il est l'enveloppe convexe d'une partie finie de $\mathbf{Z}^2$.

♦ Soit $\mathscr{P}$ une partie compacte de $\mathbf{R}^2$. On note $V(\mathscr{P})$ son aire. On dira que la partie $\mathscr{P}$ vérifie *la formule de Pick*, si elle vérifie la formule

$$\mathrm{Card}(\mathscr{P} \cap \mathbf{Z}^2) = V(\mathscr{P}) + \frac{1}{2}\mathrm{Card}(\partial\mathscr{P} \cap \mathbf{Z}^2) + 1. \tag{3.1}$$

3. (a) Soient $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$ avec $a < b$ et $c < d$. Le rectangle $[a, b] \times [c, d]$ vérifie-t-il la formule de Pick ?

(b) Soient a, b des entiers non nuls. Le triangle obtenu comme enveloppe convexe des points $(0, 0)$, $(a, 0)$ et $(0, b)$ vérifie-t-il la formule de Pick ?

4. (a) Démontrer qu'un polygone est une partie compacte de $\mathbf{R}^2$.

(b) Soit $\mathscr{P}$ un polygone d'intérieur non vide. Démontrer que l'intérieur de $\mathscr{P}$ est dense dans $\mathscr{P}$.

5. Soient $\mathscr{P}_1$ (resp. $\mathscr{P}_2$) un polygone, enveloppe convexe d'une partie finie S_1 (resp. S_2) de $\mathbf{Z}^2$. On suppose que les intérieurs de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont non vides et que $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$ est un segment $[A, B]$ où A et B sont des éléments distincts de $S_1 \cap S_2$.

(a) Démontrer l'égalité $[A, B] = \partial\mathscr{P}_1 \cap \partial\mathscr{P}_2$.

(b) Démontrer que $\mathscr{P}_1$ est contenu dans l'un des demi-plans fermés de frontière la droite (AB).

(c) On suppose que $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ vérifient la formule de Pick. Démontrer qu'il en est de même pour $\mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2$.

(d) On suppose que $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2$ vérifient la formule de Pick. Que peut-on en dire pour $\mathscr{P}_2$?

6. Soient A, B et C trois points non alignés de $\mathbf{R}^2$ à coordonnées entières. Démontrer que l'enveloppe convexe de $\{A, B, C\}$ vérifie la formule de Pick.

7. Soit $\mathscr{P}$ un polygone à sommets entiers et d'intérieur non vide. Soit S un ensemble de cardinal minimal dont $\mathscr{P}$ est l'enveloppe convexe. On note N le cardinal de S.

(a) Soit $A \in S$. Démontrer que A n'est pas barycentre à coefficients positifs de points de $S \setminus \{A\}$.

(b) Soient A, B, C, D quatre points distincts de S. Soient (α, β, γ) le système de coordonnées barycentriques de D dans le repère affine (A, B, C) tel que $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Démontrer qu'un et un seul des nombres α, β, γ est strictement négatif.

(c) On suppose $N \geqslant 3$. Démontrer qu'on peut choisir une bijection $i \mapsto A_i$ de $\{1, \ldots, N\}$ sur S de sorte que A_1 soit le seul point de S dans un des deux demi-plans ouverts de frontière la droite (A_2A_3) (*il est recommandé de faire un dessin*).

(d) On suppose $N \geqslant 4$. Soit M un point de $\mathscr{P}$ qui n'appartient pas à l'enveloppe convexe de $\{A_2, \ldots, A_N\}$. Démontrer que M appartient à l'enveloppe convexe de $\{A_1, A_2, A_3\}$. (*On pourra éventuellement écrire M comme barycentre à coefficients positifs des points $A_1, \ldots, A_i$ avec i minimal.*)

(e) Démontrer que $\mathscr{P}$ est la réunion de $N - 2$ triangles dont les sommets appartiennent à S et dont les intérieurs sont non vides deux à deux disjoints.

8. Soit $\mathscr{P}$ un polygone à sommets entiers et d'intérieur non vide.

(a) Démontrer que $\mathscr{P}$ vérifie la formule de Pick.

(b) Démontrer que l'application de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{Z}$ qui envoie un entier n sur $\mathrm{Card}(n\mathscr{P} \cap \mathbf{Z}^2)$ est polynomiale.

Partie III : Le cas d'un simplexe

Soit d un entier strictement positif. Soient $A_1, \ldots, A_{d+1}$ des éléments de $\mathbf{Q}^d$. On suppose qu'il n'existe pas d'hyperplan affine de $\mathbf{R}^d$ contenant l'ensemble $S = \{A_1, \ldots, A_{d+1}\}$. Soit $\mathscr{S}$ l'enveloppe convexe de l'ensemble S. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose

$$w_n = \mathrm{Card}(n\mathscr{S} \cap \mathbf{Z}^d)$$

et on considère la série formelle

$$W = \sum_{n \in \mathbf{N}} w_n T^n.$$

1. Décrire l'ensemble des entiers $q \in \mathbf{Z}$ tels que $qA_i \in \mathbf{Z}^d$ pour tout i de $\{1, \ldots, d+1\}$.

♦ On fixe un entier strictement positif q tel que $qA_i \in \mathbf{Z}^d$ pour $i \in \{1, \ldots, d+1\}$. Soit $\widehat{\mathscr{S}}$ l'ensemble des $(x, t) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}$ tels qu'il existe un élément $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{d+1})$ de $[0, 1[^{d+1}$ vérifiant la relation

$$(x, t) = \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i q(A_i, 1).$$

2. (a) Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$ et tout $x \in n\mathscr{S}$ démontrer qu'il existe un unique élément $y \in \widehat{\mathscr{S}}$ et une unique famille $(n_1, \dots, n_{d+1}) \in \mathbf{N}^{d+1}$ tels que

$$(x, n) = y + \sum_{i=1}^{d+1} n_i q(A_i, 1).$$

(b) On conserve les notations de la question **(a)**. Démontrer que $x \in \mathbf{Z}^d$ si et seulement si $y \in \widehat{\mathscr{S}} \cap \mathbf{Z}^{d+1}$.

3. Démontrer la relation

$$W = \sum_{(x,n) \in \widehat{\mathscr{S}} \cap (\mathbf{Z}^d \times \mathbf{Z})} T^n (1 - T^q)^{-d-1}.$$

4. Démontrer que la fonction $w : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ donnée par $n \mapsto w_n$ est quasi-polynomiale.

5. Démontrer qu'il existe une constante C telle que $w_n \leqslant 1 + Cn^d$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Partie IV : Applications

Dans cette partie $\mathbf{K}$ désigne un corps commutatif. On se donne un entier strictement positif d. On appelle *monôme* de $\mathbf{K}[X_1, \dots, X_d]$ un élément de la forme $\prod_{i=1}^{d} X_i^{a_i}$ pour un d-uplet $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbf{N}^d$. On note M l'ensemble de ces monômes.

Dans la suite, on note $\mathbf{N}^*$ l'ensemble des entiers strictement positifs et on fixe jusqu'‡ la fin du problème $\boldsymbol{m} = (m_1, \dots, m_d) \in {\mathbf{N}^*}^d$.

Pour tout $P \in \mathbf{K}[X_1, \dots, X_d]$, on note

$$\pi_{\boldsymbol{m}}(P) = \deg(P(T^{m_1}, \dots, T^{m_d}))$$

avec la convention usuelle que $\deg(0) = -\infty$. Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $H_{\boldsymbol{m},n}$ l'ensemble des polynômes $P \in \mathbf{K}[X_1, \dots, X_d]$ tels qu'on ait la relation

$$P(T^{m_1} X_1, \dots, T^{m_d} X_d) = T^n P(X_1, \dots, X_d)$$

dans l'anneau $\mathbf{K}[X_1, \dots, X_d][T]$.

1. (a) Soit P un monôme de $\mathbf{K}[X_1, \dots, X_d]$. Existe-t-il un $n \in \mathbf{N}$ tel que P appartienne à $H_{\boldsymbol{m},n}$?

(b) Démontrer que $H_{\boldsymbol{m},n}$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie dont on donnera une base.

(c) Démontrer que l'application de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ qui à un entier n associe la dimension de $H_{\boldsymbol{m},n}$ est quasi-polynomiale.

(d) Démontrer que $\mathbf{K}[X_1, \dots, X_d]$ est la somme directe des sous-espaces $H_{\boldsymbol{m},n}$ où n décrit $\mathbf{N}$.

♦ Jusqu'à la fin de ce problème, on note G un groupe cyclique de cardinal N et ξ une racine primitive N-ème de l'unité dans le corps $\mathbf{C}$ des complexes. Soit g_0 un générateur de G.

2. Soit V un espace vectoriel de dimension d sur $\mathbf{C}$ et soit π une représentation de G dans V, c'est-à-dire un homomorphisme de groupes $\pi : G \to \mathrm{GL}(V)$. Démontrer qu'il existe une base $(e_1, \dots, e_d)$ de V et des entiers $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ tels que $\pi(g_0)(e_i) = \xi^{\alpha_i} e_i$ pour $i \in \{1, \dots, d\}$.

3. Pour tout polynôme $P \in \mathbf{C}[X_1, \dots, X_d]$ et tout $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbf{C}^d$ on pose $P(\boldsymbol{x}) = P(x_1, \dots, x_d)$. Soit u un automorphisme du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathbf{C}^d$. Démontrer qu'il existe un unique automorphisme $\widetilde{u}$ de la $\mathbf{C}$-algèbre $\mathbf{C}[X_1, \dots, X_d]$ tel que

$$\widetilde{u}(P)(u(\boldsymbol{x})) = P(\boldsymbol{x})$$

pour $P \in \mathbf{C}[X_1, \dots, X_d]$ et $\boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^d$. Comparer les degrés totaux de P et $\widetilde{u}(P)$.

♦ Soit $(e_1, \dots, e_d)$ la base usuelle de $\mathbf{C}^d$. On définit une représentation π de G dans $\mathbf{C}^d$ par la relation $\pi(g_0)(e_i) = \xi^{m_i} e_i$. On note $\tau = \widetilde{\pi(g_0)}$ l'automorphisme de $\mathbf{C}[X_1, \dots, X_d]$ donné par la question précédente et on définit

$$A = \{P \in \mathbf{C}[X_1, \dots, X_d] \mid \tau(P) = P\}.$$

4. (a) Démontrer que A est une sous-algèbre de $\mathbf{C}[X_1, \dots, X_d]$.

(b) Caractériser les monômes appartenant à A.

(c) Démontrer que A est la somme directe des sous-espaces vectoriels $A \cap H_{\boldsymbol{m},n}$ où n décrit $\mathbf{N}$.

(d) Démontrer que l'application qui envoie un entier n sur la dimension de $A \cap H_{\boldsymbol{m},n}$ est quasi-polynomiale.

5. On note n_0 le plus petit entier strictement positif pour lequel il existe un monôme $P \in A$ avec $\pi_{\boldsymbol{m}}(P) = n_0$. Soit S l'ensemble

$$\{P \in A \cap M \mid \pi_{\boldsymbol{m}}(P) = n_0\}.$$

On note s le cardinal de S et $u_1, \dots, u_s$ les éléments de S.

(a) Démontrer que $u_1, \dots, u_s$ sont des éléments irréductibles de A.

(b) On suppose que $s > d$. Démontrer qu'il existe deux s-uplets distincts $(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ et $(\beta_1, \dots, \beta_s)$ dans $\mathbf{N}^s$ tels que

$$\prod_{i=1}^{s} u_i^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^{s} u_i^{\beta_i}.$$

(c) On continue à supposer $s > d$. L'anneau A est-il factoriel ? Peut-il exister un entier strictement positif ℓ et un isomorphisme de $\mathbf{C}$-algèbres de $\mathbf{C}[X_1, \dots, X_\ell]$ sur A ?

3.2 Rapport sur l'épreuve écrite de mathématiques générales

Ce problème mêlait volontairement des aspects variés du programme. La partie I faisait travailler les séries formelles, les parties II et III étaient de nature plus géométrique et la partie IV permettait de tester les connaissances des candidats en algèbre linéaire et sur les anneaux de polynômes. Beaucoup de candidats admissibles ont traité une proportion importante des parties I et II ainsi que le début de la partie IV.

Comme l'indiquait l'en-tête de l'énoncé, on attend des candidats à l'agrégation qu'ils rédigent des démonstrations claires, complètes mais néanmoins concises. Une écriture lisible et une certaine maîtrise de l'orthographe font également partie des prérequis. Rappelons que la qualité de rédaction reste un facteur important dans l'évaluation des copies.

Remarque pratique : compte tenu du mode de transmission des copies, il est recommandé de n'utiliser qu'une seule couleur d'encre sombre sur les copies, même pour les figures. Pour distinguer des points de natures différentes, on peut utiliser des représentations monochromes différentes (sens des hachures, utilisation de croix ou de ronds, etc.).

Partie I

La question 1 se réduisait à démontrer que la somme et le produit de suites périodiques sont périodiques. De tels raisonnement devraient être maîtrisés par un candidat à un poste d'enseignant de mathématiques.

Dans la question 2.(a), il fallait donner une formule close pour v_n ; une simple traduction en terme de cardinal d'un autre ensemble ne permettait pas de résoudre la question suivante.

Les calculs avec les séries formelles doivent se faire en utilisant les symboles sommatoires. L'écriture de trois termes de la somme suivis de « ... » n'assure pas une rigueur suffisante et devrait être proscrite.

La question 5 donnait une méthode permettant de retrouver l'expression de v_n en termes de coefficients binomiaux. On peut regretter que certains candidats aient néanmoins préféré tenter de reconstituer une preuve directe basée sur des souvenirs malheureusement trop flous pour ce faire.

La question 6 n'a été abordée que par les meilleurs candidats.

Partie II

Cette partie, la plus longue, avait été découpée de façon à faciliter aux candidats la rédaction de preuves rigoureuses.

La question 1, indépendante de la suite de cette partie, permettait de comprendre la situation en dimension 1.

La résolution de la question 2 reposait sur un petit raisonnement arithmétique qui nécessitait de savoir paramétrer correctement un segment de droite.

La question 3.(b) se déduisait du calcul de la question 3.(a) en découpant un rectangle suivant sa diagonale. Il fallait toutefois justifier l'égalité entre les cardinaux des points entiers des deux triangles obtenus et traiter avec soin le dénombrement des points de l'intersection.

La résolution de la question 4.(a) ne nécessitait pas l'utilisation du théorème de Carathéodory. On peut suspecter une certaine confusion avec la démonstration du fait que l'enveloppe convexe d'un compact est compacte, résultat nettement plus profond que celui demandé ici.

Dans l'ensemble, les questions 4 et 5 ont révélé des lacunes en topologie surprenantes chez des candidats à l'agrégation. La difficulté essentielle de la question 5.(c) résidait dans la détermination du bord de la réunion des polygones. Cette question n'a été traitée de façon satisfaisante que dans les meilleures copies.

La question 6 se résolvait en introduisant des triangles annexes dont il fallait s'assurer que les sommets sont également à coordonnées entières. La disjonction des différents cas, bien que simple, nécessitait du soin et fut rarement traitée de façon adéquate.

Le découpage de la question 7 guidait le candidat dans la preuve de l'assertion de la question 7.(e) qui « se voit bien sur un dessin ». Les arguments fournis ne devaient donc pas être basés sur l'appréhension visuelle des candidats.

La difficulté essentielle de la question 8.(b) résidait dans le calcul du cardinal des points entiers contenus dans le bord.

Partie III

Seule la question 1 de cette partie a été traitée par beaucoup de candidats. Dans cette question, il était essentiel lors de l'écriture des coordonnées des points A_i comme quotients d'utiliser une forme réduite.

Partie IV

La question 1.(b) consistait en de l'algèbre linéaire très classique. Toutefois le fait que les monômes forment une famille génératrice de $H_{\boldsymbol{m},n}$ a rarement été traitée de façon claire.

Dans la question 1.(d), il fallait démontrer que les sous-espaces $H_{\boldsymbol{m},n}$ sont en somme directe. Vu la fréquence de ce type de question à l'écrit ou à l'oral de l'agrégation, on peut être surpris par le nombre de candidats qui continuent à considérer l'intersection de la famille des sous-espaces. Nous recommandons donc aux enseignants d'algèbre de continuer à dessiner régulièrement trois droites vectorielles distinctes au tableau.

Bibliographie

[1] L. Bonavero, *Sur le nombre de sommets des polytopes entiers*, Images des mathématiques 2004, CNRS, 33-40 (2004).

[2] M. Brion, *Points entiers dans les polytopes convexes*, Séminaire Bourbaki, Vol. 1993/94. Astérisque **227** (1995), exposé No. 780, 4, 145–169.

3.3 Corrigé

Partie I

Un premier cas

1. Soient f et g des applications quasi-polynomiales de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{Z}$. On choisit des entiers M et N et des polynômes $P_0,\dots,P_{M-1}$ et $Q_0,\dots,Q_{N-1}$ de $\mathbf{C}[T]$ tels que

$$f(n) = P_{r_M(n)}(n) \quad \text{et} \quad g(n) = Q_{r_N(n)}(n) \quad \text{pour } n \in \mathbf{N}.$$

Soit $L = \mathrm{ppcm}(M,N)$. Posons $U_k = P_{r_M(k)} + Q_{r_N(k)}$ et $V_k = P_{r_M(k)} \times Q_{r_N(k)}$ pour $k \in \{0,\dots,L-1\}$. Comme $M \mid L$ et $N \mid L$, on a $r_M = r_M \circ r_L$ et $r_N = r_N \circ r_L$. On a donc les égalités

$$f(n) + g(n) = U_{r_L(n)}(n) \quad \text{et} \quad f(n)g(n) = V_{r_L(n)}(n) \quad \text{pour } n \in \mathbf{N},$$

ce qui démontre que les applications $f+g$ et fg sont quasi-polynomiales.

2. (a) Dans ce cas, on a

$$u_n = \begin{cases} 1 \text{ si } m_1 \text{ divise } n, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On a donc les relations

$$v_n = \sum_{i=0}^{n} u_i = \mathrm{Card}\big(\{i \in \{0,\dots,n\} \mid m_1 \mid i\}\big) = \left\lfloor \frac{n}{m_1} \right\rfloor + 1$$

pour tout $n \in \mathbf{N}$.

(b) De la question (a), on déduit l'égalité

$$v_n - \frac{n}{m_1} - 1 = \left\lfloor \frac{n}{m_1} \right\rfloor - \frac{n}{m_1}$$

Comme l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ donné par $x \mapsto \lfloor x \rfloor - x$ est périodique de période 1, l'application $n \mapsto v_n - n/m_1 - 1$ est périodique de période m_1 et l'application $n \mapsto v_n$ est quasi-polynomiale.

3. (a) On a les égalités

$$U = \sum_{n\in\mathbf{N}} u_n T^n = \sum_{n\in\mathbf{N}} \sum_{\substack{(k_1,\dots,k_d)\in\mathbf{N}^d \\ \sum_{i=1}^d m_i k_i = n}} T^n = \sum_{(k_1,\dots,k_d)\in\mathbf{N}^d} \prod_{i=1}^{d} T^{k_i m_i} = \prod_{i=1}^{d} \sum_{k\in\mathbf{N}} T^{k m_i} = \prod_{i=1}^{d} U_i.$$

(b) De $(1-T)\sum_{k\in\mathbf{N}} T^k = 1$, on tire l'égalité $(1-T^m)\sum_{k\in\mathbf{N}} T^{km} = 1$ pour tout $m \in \mathbf{N}$. Compte tenu de la question (a), on a donc les relations :

$$U \times \prod_{i=1}^{d} (1 - T^{m_i}) = \prod_{i=1}^{d} U_i (1 - T^{m_i}) = 1.$$

4. On a les relations

$$V = \sum_{n\in\mathbf{N}} v_n T^n = \sum_{n\in\mathbf{N}} \sum_{k=0}^{n} u_k T^n = \sum_{k\in\mathbf{N}} \sum_{l\in\mathbf{N}} u_k T^{k+l} = \left(\sum_{k\in\mathbf{N}} u_k T^k\right)\left(\sum_{l\in\mathbf{N}} T^l\right) = \frac{1}{1-T} U.$$

5. (a) Comme $(1-T)G=1$, en dérivant on obtient $(1-T)G'-G=0$ et donc $G'=G/(1-T)=G^2$.

(b) Démontrons par récurrence que $G^{(k)}=k!G^{k+1}$. C'est vrai pour $k=0$ ou 1. Supposons le résultat connu pour k. En dérivant la relation $G^{(k)}=k!G^{k+1}$, on obtient que $G^{(k+1)}=(k+1)k!G'G^k=(k+1)!G^{k+2}$.

(c) Si $m_i=1$ pour $i\in\{1,\dots,d\}$, alors $U=G^d=G^{(d-1)}/(d-1)!$ et $V=G^{d+1}=G^{(d)}/d!$. Or on a les égalités

$$G^{(m)}=\sum_{n\geqslant m}n(n-1)\dots(n-m+1)T^{n-m}=\sum_{n\in\mathbf{N}}\frac{(n+m)!}{n!}T^n$$

donc on a $u_n=\binom{n+d-1}{d-1}$ et $v_n=\binom{n+d}{d}=\frac{1}{d!}(n+1)\dots(n+d)$ pour tout $n\in\mathbf{N}$; l'application $n\mapsto v_n$ est polynomiale.

6. Soit $N=\mathrm{ppcm}(m_1,\dots,m_d)$. On note ξ une racine primitive N-ème de l'unité dans $\mathbf{C}$. Notons que le corps des fractions rationnelles en une variable $\mathbf{C}(T)$ s'injecte dans $\mathbf{C}((T))$, le corps des fractions de $\mathbf{C}[[T]]$. Par les questions 3.(b) et 4, la série V est l'image de la fraction $1/((1-T)\prod_{i=1}^d(1-T^{m_i}))$. Dans $\mathbf{C}(T)$ on a les relations

$$\frac{1}{(1-T)\prod_{i=1}^d(1-T^{m_i})}=\frac{1}{(1-T)\prod_{i=1}^d\prod_{j=0}^{m_i-1}(1-\xi^{jN/m_i}T)}.$$

Par la décomposition en éléments simples, compte tenu du fait que la partie entière de cette fraction rationnelle est nulle, on obtient qu'il existe des entiers n_i pour $0\leqslant i\leqslant N-1$ et des nombres complexes $a_{i,k}$, pour $0\leqslant i\leqslant N-1$ et $1\leqslant k\leqslant n_i$, de sorte qu'on ait

$$V=\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{k=1}^{n_i}\frac{a_{i,k}}{(1-\xi^iT)^k}=\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{k=1}^{n_i}a_{i,k}G(\xi^iT)^k.$$

Comme les coefficients de la série G^k sont donnés par un polynôme P, ceux de $G(\xi^iT)^k$ sont donnés par l'application de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{C}$ définie par $k\mapsto\xi^{ik}P(k)$. Donc v est quasi-polynomiale.

Partie II

Étude en dimensions 1 et 2

1. On a les égalités

$$\mathrm{Card}(\mathbf{Z}\cap[0,nx])-nx=\mathrm{Card}(\{m\in\mathbf{Z}\mid 0\leqslant m\leqslant np/q\})-nx=\left\lfloor n\frac{p}{q}\right\rfloor+1-n\frac{p}{q}.$$

Comme $\left\lfloor(n+q)\frac{p}{q}\right\rfloor+1-(n+q)\frac{p}{q}=\left\lfloor n\frac{p}{q}\right\rfloor+p+1-n\frac{p}{q}-p$, cette suite est périodique et q en est une période.

2. En translatant par $-(a,b)$ on se ramène au cas d'un segment $[A,B]$ avec $A=(0,0)$ et $B=(c-a,d-b)$. Le résultat est vrai si $A=B$. Sinon, quitte à faire une symétrie, on peut en outre supposer que $c>a$. En posant $\alpha=\mathrm{pgcd}(c-a,d-b)$, on obtient

$$\begin{aligned}&\mathrm{Card}([A,B]\cap\mathbf{Z}^2)\\&=\mathrm{Card}\{(x,y)\in\mathbf{Z}^2\mid(c-a)y=(d-b)x\text{ et }0\leqslant x\leqslant c-a\}\\&=\mathrm{Card}\left(\left\{(x,y)\in\mathbf{Z}^2\,\middle|\,\frac{c-a}{\alpha}y=\frac{d-b}{\alpha}x\text{ et }0\leqslant x\leqslant c-a\right\}\right).\end{aligned}$$

Comme $(c-a)/\alpha$ et $(d-b)/\alpha$ sont premiers entre eux, par le lemme de Gauss, ce dernier cardinal est égal à

$$\begin{aligned}&\mathrm{Card}\left(\left\{(x,y)\in\mathbf{Z}^2\,\middle|\,\frac{c-a}{\alpha}\mid x,\ y=\frac{d-b}{c-a}x\text{ et }0\leqslant x\leqslant c-a\right\}\right)\\&=\mathrm{Card}\left(\left\{x\in\mathbf{Z}\,\middle|\,\frac{c-a}{\alpha}\mid x\text{ et }0\leqslant x\leqslant c-a\right\}\right)\\&=\alpha+1.\end{aligned}$$

3. (a) On pose $\mathscr{P} = [a,b] \times [c,d]$, on a

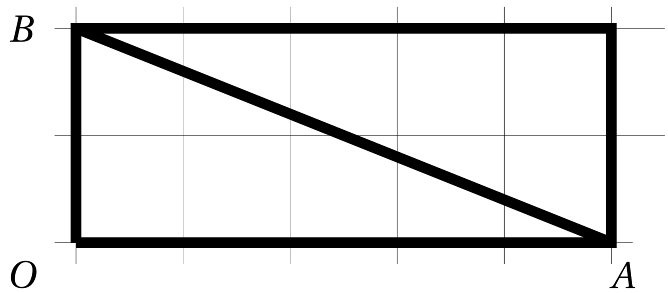
$$\mathrm{Card}(\mathscr{P} \cap \mathbf{Z}^2) = (b-a+1)(d-c+1) = (b-a)(d-c) + (b-a) + (d-c) + 1$$

et, comme $\partial\mathscr{P} = \{a,b\} \times [c,d] \cup [a,b] \times \{c,d\}$, on a

$$\mathrm{Card}(\partial\mathscr{P} \cap \mathbf{Z}^2) = 2(b-a+1) + 2(d-c+1) - 4.$$

Par conséquent, $\mathscr{P}$ vérifie la formule de Pick.

(b) Notons O l'origine de $\mathbf{R}^2$, $A = (a,0)$ et $B = (0,b)$. On note $\mathscr{T}$ l'enveloppe convexe de $\{O,A,B\}$, $\mathscr{T}'$ l'enveloppe convexe de $\{A,B,(a,b)\}$ et $\mathscr{R}$ le rectangle $[0,a] \times [0,b]$.



En utilisant une symétrie centrée en l'origine et une translation par un vecteur à coordonnées entières, on obtient que $\mathrm{Card}(\mathscr{T} \cap \mathbf{Z}^2) = \mathrm{Card}(\mathscr{T}' \cap \mathbf{Z}^2)$. Comme $\mathscr{T} \cap \mathscr{T}' = [A,B]$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}(\mathscr{T} \cap \mathbf{Z}^2) &= \frac{1}{2}\mathrm{Card}(\mathscr{R} \cap \mathbf{Z}^2) + \frac{1}{2}\mathrm{Card}([A,B] \cap \mathbf{Z}^2)\\ &= \frac{1}{2}(a+1)(b+1) + \frac{1}{2}\mathrm{Card}([A,B] \cap \mathbf{Z}^2).\end{aligned}$$

Par ailleurs le bord du triangle est formé de la réunion des segments $[O,A]$, $[A,B]$ et $[B,O]$. Il en résulte que

$$\mathrm{Card}(\partial\mathscr{T} \cap \mathbf{Z}^2) = (a+1) + (b+1) + \mathrm{Card}([A,B] \cap \mathbf{Z}^2) - 3.$$

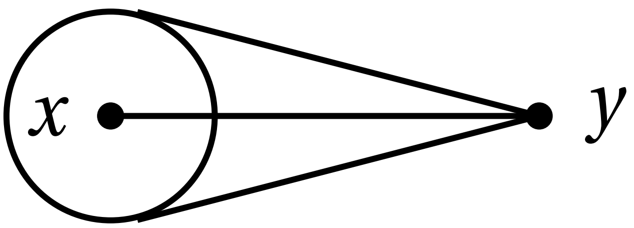
Par conséquent, le triangle $\mathscr{T}$ vérifie la formule de Pick.

4. (a) Soit $\mathscr{P}$ l'enveloppe d'un ensemble fini $\{A_1,\ldots,A_n\}$. Soit

$$\Delta_n = \left\{ (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbf{R}_+^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}.$$

L'ensemble Δ_n est un fermé borné de $\mathbf{R}^n$, il est donc compact. Le polygone $\mathscr{P}$ est l'image de Δ_n par l'application continue qui envoie $(x_1,\ldots,x_n)$ sur $\sum_{i=1}^n x_i A_i$. Donc $\mathscr{P}$ est compact.

(b) Soit x un point de l'intérieur de $\mathscr{P}$, soit $\varepsilon > 0$ un nombre réel tel que le disque $B(x,\varepsilon)$ centré en x et de rayon ε soit contenu dans $\mathscr{P}$. Soit $y \in \mathscr{P}$.



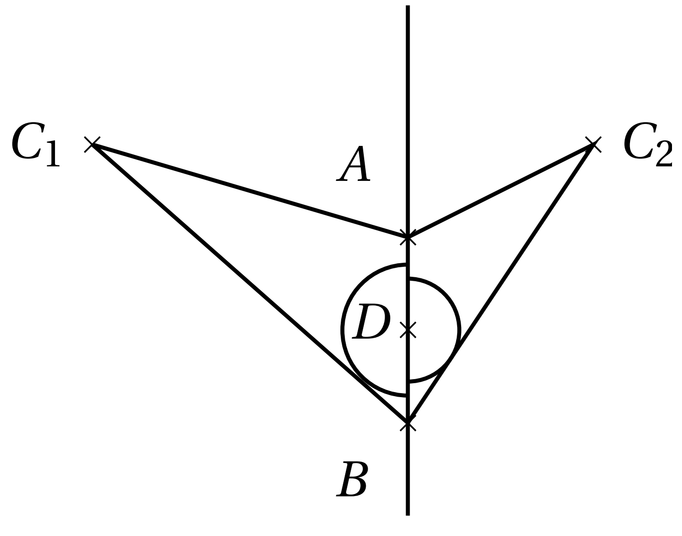
Par convexité, pour tout $t \in [0,1[$, le disque $ty+(1-t)B(x,\varepsilon)$ est contenu dans $\mathscr{P}$; donc $ty+(1-t)x \in \mathscr{P}^o$. Donc l'intérieur de $\mathscr{P}$ est dense dans $\mathscr{P}$.

5. (a) Comme $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont fermés, on a l'inclusion $\partial\mathscr{P}_1 \cap \partial\mathscr{P}_2 \subset \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = [A,B]$. Réciproquement soit $x \in [A,B]$. Démontrons que $x \in \partial P_1$ en raisonnant par l'absurde. Nous supposons donc qu'il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset \mathscr{P}_1$. Comme l'intérieur de $\mathscr{P}_2$ est dense dans $\mathscr{P}_2$ et que $x \in \mathscr{P}_2$, il existe $y \in \mathscr{P}_2^o$ tel que $y \in B(x,\varepsilon)$. Il existe alors un nombre réel $\eta > 0$ tel que

$$B(y,\eta) \subset B(x,\varepsilon) \cap \mathscr{P}_2 \subset \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2,$$

ce qui contredit le fait $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \subset [A,B]$. Donc $x \in \partial\mathscr{P}_1 \cap \partial\mathscr{P}_2$ et $[A,B]$ est contenu dans $\partial\mathscr{P}_1 \cap \partial\mathscr{P}_2$.

(b) Soient H_1 et H_2 les deux demi-plans fermés de frontière la droite (AB). On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe des points C_1 et C_2 de $\mathscr{P}_1$ appartenant respectivement à H_1^o et H_2^o



On note $]A,B[= [A,B] - \{A,B\}$. Soit D un point de l'ensemble $]A,B[$. Pour $i \in \{1,2\}$, on pose

$$\varepsilon_i = \min\big(d(D,(AC_i)), d(D,(BC_i))\big).$$

Comme D n'appartient pas aux droites (AC_1) et (BC_1), $\varepsilon_1 > 0$ et $H_1 \cap B(D,\varepsilon_1)$ est contenu dans le triangle (ABC_1). De même $H_2 \cap B(D,\varepsilon_2)$ est contenu dans le triangle (ABC_2). Soit $\varepsilon = \min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, Le disque $B(D,\varepsilon)$

est contenu dans la réunion des deux triangles et donc dans $\mathscr{P}_1$, ce qui contredit le fait que $D \in \partial\mathscr{P}_1$, prouvé dans la question précédente.

(c) La difficulté de cette question est de déterminer $\partial(\mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2)$.

On conserve les notations H_1 et H_2 de la question précédente. Supposons que $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ soient tous les deux contenus dans H_1. Soit C_1 (resp. C_2) un point de $\mathscr{P}_1^o$ (resp. $\mathscr{P}_2^o$). Alors l'intersection des triangles (ABC_1) et (ABC_2) est un triangle d'intérieur non vide contenu dans $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur ces polygones. Quitte à échanger H_1 et H_2 on peut donc supposer que $\mathscr{P}_i \subset H_i$ pour $i \in \{1,2\}$. Le raisonnement de la question (b) prouve que $]A,B[\subset (\mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2)^o$.

De l'inclusion $\mathscr{P}_1^o \cup \mathscr{P}_2^o \subset (\mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2)^o$, résulte l'inclusion

$$\partial(\mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2) \subset \partial\mathscr{P}_1 \cup \partial\mathscr{P}_2,$$

et il en résulte que

$$\partial(\mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2) \subset (\partial\mathscr{P}_1 \cup \partial\mathscr{P}_2) -]A,B[.$$

Inversement soit $x \in (\partial\mathscr{P}_1 \cup \partial\mathscr{P}_2) -]A,B[$. Supposons tout d'abord que $x \notin \mathscr{P}_2$. Comme $\mathscr{P}_2$ est fermé, il existe un nombre réel $\eta > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in]0,\eta[$, $B(x,\varepsilon) \cap \mathscr{P}_2 = \emptyset$. Par conséquent pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, l'intersection de $B(x,\varepsilon)$ avec le complémentaire de $\mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2$ est non vide. Donc x n'appartient pas à $(\mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2)^o$. Donc $x \in \partial(\mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2)$. Il en est de même si $x \notin \mathscr{P}_1$. Comme $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \subset [A,B]$, il nous reste à traiter les cas $x = A$ ou $x = B$. Supposons maintenant que $A \in (\mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2)^o$. Il existe alors un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que $B(A,\varepsilon) \subset \mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2$. Mais alors $B(A,\varepsilon) \cap H_i^o \subset \mathscr{P}_i$ pour $i \in \{1,2\}$ et $B(A,\varepsilon) \cap (AB) \subset \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$, ce qui est contraire aux hypothèses. Donc $A \in \partial(\mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2)$. On raisonne de même pour B, ce qui démontre l'égalité :

$$\partial(\mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2) = (\partial\mathscr{P}_1 \cup \partial\mathscr{P}_2) -]A,B[.$$

On note $\mathscr{P} = \mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2$. De ce qui précède, on déduit les formules :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Card}(\mathscr{P} \cap \mathbf{Z}^2) &= \mathrm{Card}(\mathscr{P}_1 \cap \mathbf{Z}^2) + \mathrm{Card}(\mathscr{P}_2 \cap \mathbf{Z}^2) \\
&\quad - \mathrm{Card}([A,B] \cap \mathbf{Z}^2) \\
\mathrm{Card}(\partial\mathscr{P} \cap \mathbf{Z}^2) &= \mathrm{Card}(\partial\mathscr{P}_1 \cap \mathbf{Z}^2) + \mathrm{Card}(\partial\mathscr{P}_2 \cap \mathbf{Z}^2) \\
&\quad - 2\,\mathrm{Card}([A,B] \cap \mathbf{Z}^2) + 2 \\
V(\mathscr{P}) &= V(\mathscr{P}_2) + V(\mathscr{P}_2)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Donc si $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ vérifient la formule de Pick il en est de même de $\mathscr{P}$.

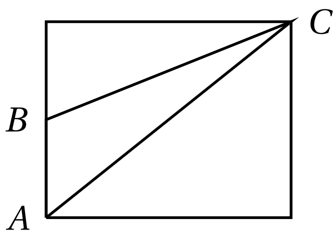
(d) Compte tenu des formules (3.2), si $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2$ vérifient la formule de Pick, il en est de même de $\mathscr{P}_2$.

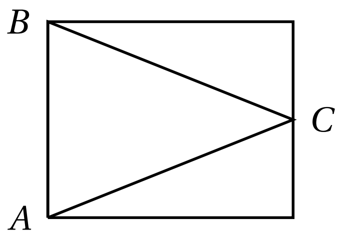
6. Soit $\mathscr{T}$ l'enveloppe convexe de $\{A,B,C\}$. On note (x_M, y_M) les coordonnées d'un point M de $\mathbf{R}^2$. Posons

$$a = \min(x_A, x_B, x_C), \qquad b = \max(x_A, x_B, x_C),$$
$$c = \min(y_A, y_B, y_C), \qquad d = \max(y_A, y_B, y_C).$$

Comme les points A, B et C ne sont pas alignés, on a $a < b$ et $c < d$. On note $\mathscr{R}$ le rectangle $[a,b] \times [c,d]$. Comme chacun des quatre côtés du rectangle contiennent un des sommets du triangle, un des sommets du rectangle appartient à $\{A,B,C\}$. Quitte à échanger A, B et C et à faire une symétrie, on peut supposer que $a = x_A$ et $c = y_A$. Enfin quitte à échanger B et C, on peut supposer que $b = x_C$. Nous allons maintenant distinguer différents cas :

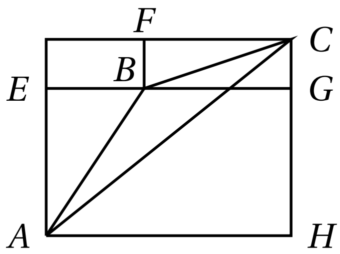
Supposons d'abord que $x_B = a$. Si $y_C \in \{y_A, y_B\}$, alors le triangle $\mathscr{T}$ est un triangle rectangle dont deux côtés sont parallèles aux axes de coordonnées et il suffit d'appliquer la question 3.(b). Sinon $y_A < y_B < y_C$ ou $y_A < y_C < y_B$; la configuration est donc une des deux suivantes :

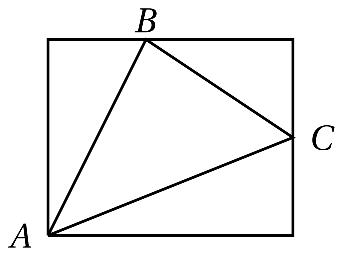




Il résulte alors des questions 3.(a), 3.(b) et 5.(d) que le triangle $\mathscr{T}$ vérifie la formule de Pick. Une symétrie permet de se ramener aux cas qui viennent d'être traités lorsque $x_B = x_C$ ou que $\mathrm{Card}\{y_A, y_B, y_C\} = 2$.

On suppose donc maintenant que $x_A < x_B < x_C$. Suivant que $y_A < y_B < y_C$ ou que $y_A < y_C < y_B$, on est dans une des deux configurations suivantes :



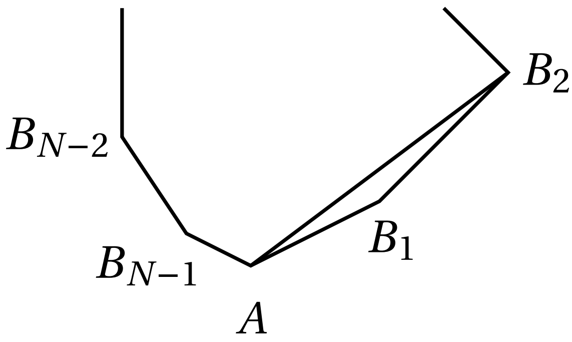


Dans le premier cas, quitte à échanger les coordonnées, on peut supposer que B est au-dessus de la droite (AC). Posons $E = (a, y_B)$, $F = (x_B, d)$, $G = (b, y_B)$ et $H = (b, c)$. Par les questions 3.(a) et 5.(c), l'ensemble obtenu comme réunion des rectangles $(AEGH)$ et $(BFCG)$ vérifie la formule de Pick, et par les questions 3.(b) et 5.(d), il en est de même de $\mathscr{T}$. Dans le second cas, la formule de Pick pour $\mathscr{T}$ résulte des questions 3.(a), 3.(b) et 5.(d).

7. (a) Par l'associativité des barycentres, si A est barycentre à coefficients positifs des points de $S \setminus \{A\}$, tout point de $\mathscr{P}$ serait barycentre à coefficients positifs des points de $S \setminus \{A\}$, ce qui contredit la minimalité de S.

(b) Par la question (a), trois points distincts de S ne sont pas alignés. La famille (A, B, C) est donc un repère affine du plan. On écrit $D = \alpha A + \beta B + \gamma C$ avec $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Par la question (a), quitte à échanger A, B et C, on peut supposer que $\alpha < 0$. Si $\beta < 0$, comme $\alpha + \beta + \gamma = 1$, on a $\gamma > 0$. On obtient $C = 1/\gamma D - \alpha/\gamma A - \beta/\gamma B$, ce qui contredit (a). Donc $\beta > 0$ et on montre de même que $\gamma > 0$.

(c) On note $\overrightarrow{u} = (1, 0)$. Soit $A \in S$ un point de S dont la deuxième coordonnée est minimale. Comme trois points distincts de S ne sont pas alignés, il existe une unique bijection $i \mapsto B_i$ de $\{1, \dots, N-1\}$ dans $S \setminus A$ de sorte que la suite des mesures d'angles de vecteurs $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB_i}})$, vues comme des éléments de $]-\pi, \pi]$, soit strictement croissante.



Vu le choix de A, les mesures des angles $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB_i}})$ pour $i \geqslant 2$ sont comprises entre celle de $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB_2}})$, qui est positive, et π. On pose alors $A_1 = B_1$, $A_2 = A$ et $A_i = B_{i-1}$ pour $i \geqslant 3$. La bijection ainsi définie convient.

(d) On écrit $M = \sum_{k=1}^{i} \alpha_k A_k$, avec $\alpha_k \in \mathbf{R}_+$ pour $1 \leqslant k \leqslant i$, $\sum_{k=1}^{i} \alpha_k = 1$ et i minimal. On raisonne par l'absurde en supposant $i \geqslant 4$. Comme (A_1, A_2, A_3) est un repère affine du plan, on peut écrire $A_i = \alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3$, avec $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Comme la droite $(A_2 A_3)$ sépare A_1 de A_i, on a que $\alpha < 0$. Par la question (b), $\beta > 0$ et $\gamma > 0$. On a $A_1 = 1/\alpha A_i - \beta/\alpha A_2 - \gamma/\alpha A_3$ et

$$M = (\alpha_2 - \alpha_1 \frac{\beta}{\alpha}) A_2 + (\alpha_3 - \alpha_1 \frac{\gamma}{\alpha}) A_3 + \sum_{k=4}^{i-1} \alpha_k A_k + (\alpha_i + \frac{\alpha_1}{\alpha}) A_i.$$

Par hypothèse, le point M n'appartient pas à l'enveloppe convexe de l'ensemble $\{A_2, \dots, A_n\}$, donc $\alpha_i + \alpha_1/\alpha < 0$ et donc $\alpha_i \alpha + \alpha_1 > 0$. On obtient que dans

$$M = (\alpha_1 + \alpha_i \alpha) A_1 + (\alpha_2 + \alpha_i \beta) A_2 + (\alpha_3 + \alpha_i \gamma) A_3 + \sum_{k=4}^{i-1} \alpha_k A_k,$$

les coefficients des A_i sont tous positifs, ce qui contredit la minimalité de i.

(e) On raisonne par récurrence sur N. Comme l'intérieur de $\mathscr{P}$ est non vide, $N \geqslant 3$. Si $N = 3$, alors $\mathscr{P}$ est un triangle d'intérieur non vide et le résultat est vrai. Supposons maintenant $N \geqslant 4$ et le résultat vrai pour $N-1$. En reprenant les notations des questions précédentes, le polygone $\mathscr{P}$ est la réunion du triangle $\mathscr{T}$, enveloppe convexe de $\{A_1, A_2, A_3\}$ et de l'enveloppe convexe $\mathscr{P}'$ de $S' = \{A_2, \dots, A_N\}$. Comme l'intersection de $\mathscr{T}$ et $\mathscr{P}'$ est contenue dans $(A_2 A_3)$ (en fait égale à $[A_2 A_3]$), on a que $\mathscr{T}^o \cap \mathscr{P}'^o = \emptyset$. Par associativité du barycentre, si $\mathscr{P}'$ était l'enveloppe convexe de $N-2$ points, alors $\mathscr{P}$ serait l'enveloppe convexe de $N-1$ points, donc S' est un ensemble de cardinal minimal parmi ceux dont $\mathscr{P}'$ est l'enveloppe convexe. On applique donc l'hypothèse de récurrence à $\mathscr{P}'$, qui est d'intérieur non vide. On obtient que $\mathscr{P}'$ est la réunion de $N-3$ triangles dont les sommets appartiennent à S et dont les intérieurs sont non vide et deux à deux disjoints. Comme ces intérieurs sont contenus dans ceux de $\mathscr{P}'$, ils sont également disjoints de l'intérieur de $\mathscr{T}$.

8. (a) On applique ce qui a été démontré en 5.(c) et 7.(e).

(b) On a que $V(n\mathscr{P}) = V(\mathscr{P})n^2$. D'autre part, il résulte des questions 7.(e) et 5.(c) que ∂P est une réunion de segment de sommets appartenant à $\mathbf{Z}$. Mais pour un tel segment $[AB]$, il résulte de la formule de la question 2 que

$$\mathrm{Card}(n[A,B]\cap \mathbf{Z}^2) - 1 = n(\mathrm{Card}([A,B]\cap \mathbf{Z}^2) - 1).$$

Donc, il résulte de la formule de Pick que l'application $n \mapsto \mathrm{Card}(n\mathscr{P}\cap \mathbf{Z}^2)$ est polynomiale.

Partie III

Le cas d'un simplexe

1. C'est un idéal de $\mathbf{Z}$, non nul puisqu'il contient le ppcm des dénominateurs des coordonnées des points $A_1,\dots,A_{d+1}$. Il est donc de la forme $M\mathbf{Z}$ pour un entier strictement positif M.

2. (a) Notons $\iota : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}$ l'application affine $x \mapsto (x,1)$. Si un hyperplan vectoriel contient l'ensemble $\{(A_1,1),\dots,(A_{d+1},1)\}$, alors son image inverse par ι est un hyperplan affine de $\mathbf{R}^d$ qui contient S, ce qui contredit l'hypothèse. Donc $(q(A_1,1),\dots,q(A_{d+1},1))$ est une base de $\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}$. Soit $(u_1,\dots,u_{d+1})$ les coordonnées de (x,n) dans cette base.

L'équation

$$(x,n) = y + \sum_{i=1}^{d+1} n_i q(A_i,1)$$

avec $y = \sum_{i=1}^{d+1}\lambda_i q(A_i,1)$ pour un élément $(\lambda_1,\dots,\lambda_{d+1})$ de $[0,1[^{d+1}$ équivaut donc à $u_i = \lambda_i + n_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant d+1$ et donc admet une unique solution donnée par $n_i = \lfloor u_i \rfloor$ et $\lambda_i = u_i - \lfloor u_i \rfloor$.

Pour s'assurer que cette solution convient, il reste à vérifier que $\lfloor u_i \rfloor \geqslant 0$, c'est à dire $u_i \geqslant 0$ pour $i \in \{1,\dots,d+1\}$. Mais comme $x \in n\mathscr{S}$, il existe $(\alpha_1,\dots,\alpha_{d+1}) \in \mathbf{R}_+^{d+1}$ tel que $x = n\sum_{i=1}^{d+1}\alpha_i A_i$ avec $\sum_{i=1}^{d+1}\alpha_i = 1$. Donc on obtient

$$(x,n) = n\sum_{i=1}^{d+1}\alpha_i (A_i,1)$$

et $u_i = n\alpha_i/q \geqslant 0$.

(b) Comme $q(A_i,1) \in \mathbf{Z}^d\times\mathbf{Z}$, on a que $x\in\mathbf{Z}^d$ si et seulement si (x,n) appartient à $\mathbf{Z}^{d+1}$, si et seulement si

$$y = (x,n) - \sum_{i=1}^{d+1} n_i q(A_i,1) \in \widehat{\mathscr{S}}\cap\mathbf{Z}^{d+1}.$$

3. Notons $\mathscr{X} = \{(x,n), n\in\mathbf{N} \text{ et } x\in n\mathscr{S}\cap\mathbf{Z}^d\}$ et $\phi : \mathbf{R}^d\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ l'application $(x,t)\mapsto t$. Alors

$$W = \sum_{n\in\mathbf{N}} \mathrm{Card}((n\mathscr{S})\cap\mathbf{Z}^d)T^n = \sum_{y\in\mathscr{X}} T^{\phi(y)}$$

Par les questions 2.(a) et 2.(b), l'application de $\widehat{\mathscr{S}}\cap\mathbf{Z}^{d+1}\times\mathbf{N}^{d+1}$ dans $\mathscr{X}$ donnée par

$$(y,(n_1,\dots,n_{d+1})) \mapsto y + \sum_{i=1}^{d+1} n_i q(A_i,1)$$

est bijective. Comme l'application φ est linéaire, il en résulte que

$$W = \left(\sum_{y\in\widehat{\mathscr{S}}\cap\mathbf{Z}^{d+1}} T^{\phi(y)}\right) \times \prod_{i=1}^{d+1}\left(\sum_{n\in\mathbf{N}} T^{qn}\right),$$

ce qui démontre le résultat.

4. L'ensemble $\widehat{\mathscr{S}} \cap \mathbf{Z}^{d+1}$ est fini. Par la question 4, W provient donc d'un élément de $\mathbf{C}(T)$, que par abus de langage, nous notons également W. Notons que si $(x,t) \in \widehat{\mathscr{S}}$, alors (x,t) s'écrit $\sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i q(A_i, 1)$ avec $0 \leqslant \lambda_i < 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant d+1$. Donc on a les relations $t = q\sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i < q(d+1)$. Par conséquent, la partie entière de W est nulle. En reproduisant le raisonnement de la question I.6, on en déduit que W est quasi-polynomiale.

5. Soit M le plus petit entier majorant les valeurs absolues des coordonnées des points $A_1, \ldots, A_{d+1}$. Alors $n\mathscr{S} \subset [-nM, nM]^d$ donc $w_n \leqslant (nM+1)^d$, ce qui implique le résultat.

Partie IV

Applications

Dans la définition de $H_{n,\boldsymbol{m}}$, il fallait lire $\mathbf{K}[X_1, ..., X_n]$ au lieu de $\mathbf{C}[X_1, ..., X_n]$. Les candidats ont été invités à prendre $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ dans cette partie.

1. (a) Pour un monôme P, on a la relation

$$P(T^{m_1}X_1, \ldots, T^{m_d}X_d) = T^{\pi_{\boldsymbol{m}}(P)}P. \tag{3.3}$$

Donc $P \in H_{\boldsymbol{m},n}$ si et seulement si $n = \pi_{\boldsymbol{m}}(P)$.

(b) L'application de $\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_d]$ dans $\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_d][T]$ donnée par

$$P \mapsto P(T^{m_1}X_1, \ldots, T^{m_d}X_d) - T^n P$$

est linéaire, donc $H_{\boldsymbol{m},n}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_d]$. Rappelons que les monômes forment une base de $\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_d]$. Compte-tenu de la relation (3.3), un polynôme P appartient à $H_{\boldsymbol{m},n}$ si et seulement si il est combinaison linéaire de monômes Q tels que $\pi_{\boldsymbol{m}}(Q) = n$. Ces monômes forment donc une base de $H_{\boldsymbol{m},n}$ et l'ensemble de ces monômes a pour cardinal u_n, où u_n a été défini au début de la partie I.

(c) L'argument de la question I.6 démontre que l'application $n \mapsto u_n$ est quasi-polynomiale.

(d) On a les égalités

$$\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_d] = \bigoplus_{P \in M} \mathbf{K}P = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} \bigoplus_{P \in M, \pi_{\boldsymbol{m}}(P) = n} \mathbf{K}P = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} H_{\boldsymbol{m},n}.$$

2. Notons $B = \pi(g_0)$. On a que $B^N = I_n$. Comme les racines de $X^N - 1$ sont les racines N-èmes de l'unité et qu'elles sont deux à deux distinctes, la matrice B est diagonalisable, de valeurs propres des puissances de ξ.

3. On identifie l'espace dual de $\mathbf{C}^d$ avec $\sum_{i=1}^{d} \mathbf{C}X_i$. Un automorphisme $\tilde{u}$ vérifiant la condition de l'énoncé laisse nécessairement stable le dual de $\mathbf{C}^d$ et sa restriction à cet espace est donnée par

$$u^\vee : f \mapsto f \circ u^{-1}.$$

Par la propriété universelle de l'algèbre des polynômes, il existe un unique automorphisme $\tilde{u}$ de l'algèbre $\mathbf{C}[X_1, \ldots, X_d]$ tel que $\tilde{u}(X_i) = u^\vee(X_i)$ pour $i \in \{1, \ldots d\}$. Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^d$. Comme les applications $P \mapsto P(\boldsymbol{x})$ et $P \mapsto \tilde{u}(P)(u(\boldsymbol{x}))$ sont des morphismes d'algèbres de $\mathbf{C}[X_1, \ldots, X_d]$ dans $\mathbf{C}$ et qu'elles coïncident en les variables $X_1, \ldots, X_d$, ces applications sont égales. Donc $\tilde{u}$ convient. Comme $\deg(u^\vee(X_i)) = 1$, l'automorphisme $\tilde{u}$ préserve le degré total des monômes et, comme il est injectif, des polynômes.

4. (a) Comme τ est un automorphisme de $\mathbf{C}[X_1, \ldots, X_d]$, l'ensemble des éléments de cette algèbre tels que $\tau(P) = P$ contient l'image de $\mathbf{C}$ et est stable par addition et multiplication. C'est donc une sous-algèbre de $\mathbf{C}[X_1, \ldots, X_d]$.

(b) On a que $\tilde{u}(X_i)(u(e_j)) = X_i(e_j) = \delta_{i,j}$, où δ désigne le symbole de Kronecker. Donc $\tilde{u}(X_i) = \xi^{-m_i} X_i$. Donc pour un monôme P, on a la relation $\tau(P) = \xi^{-\pi_{\boldsymbol{m}}(P)} P$ donc $P \in A$ équivaut à $N \mid \pi_{\boldsymbol{m}}(P)$.

(c) Par la question 1.(d) tout polynôme P s'écrit de manière unique comme $\sum_{n\in\mathbf{N}} P_n$ avec $P_n \in H_{\boldsymbol{m},n}$. Par la question (b), on a que $\tau(P_n) = \xi^{-n} P_n$ il en résulte que $P \in A$ équivaut à $P_n = 0$ pour tout entier n non divisible par N. Donc $A = \bigoplus_{n\in\mathbf{N}} H_{\boldsymbol{m},Nn}$.

(d) Il résulte de la question précédente et de la question 1.(c) que l'application $n \mapsto \dim(A \cap H_{\boldsymbol{m},n})$ est le produit d'une application périodique et donc quasi-polynomiale par une application quasi-polynomiale. Elle est donc quasi-polynomiale par la question I.1.

5. (a) On a la relation $\pi_{\boldsymbol{m}}(PQ) = \pi_{\boldsymbol{m}}(P) + \pi_{\boldsymbol{m}}(Q)$ pour tous P, Q appartenant à $\mathbf{C}[X_1,\ldots,X_d]$. Donc si $u_k = ab$, avec $a, b \in A$, alors quitte à échanger a et b, on peut supposer que $\pi_{\boldsymbol{m}}(a) < \pi_{\boldsymbol{m}}(u_k) = n_0$. Par définition de n_0, $\pi_{\boldsymbol{m}}(a) = 0$ et, comme tous les m_i sont strictement positifs, a est inversible.

(b) On raisonne par l'absurde. S'il n'existe pas de telle relation, alors l'application de $\mathbf{N}^s$ dans M donnée par

$$(\alpha_1,\ldots,\alpha_s) \longmapsto \prod_{i=1}^{s} u_i^{\alpha_i}$$

est injective. Or l'image de $(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)$ appartient à $A \cap H_{\boldsymbol{m},(\sum_{i=1}^s \alpha_i)n_0}$. Il en résulte que

$$\dim(A \cap H_{\boldsymbol{m},nn_0}) \geqslant \binom{n+s-1}{s-1}$$

qui est un polynôme de degré $s-1$. Or cette dimension est majorée par

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Card}\left(\left\{ (k_1,\ldots,k_d) \in \mathbf{N}^d \,\middle|\, \sum_{i=1}^{d} k_i m_i = nn_0 \right\}\right)\\
&\leqslant \operatorname{Card}\left(\left\{ (k_1,\ldots,k_{d-1}) \in \mathbf{N}^{d-1} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{d-1} k_i m_i \leqslant nn_0 \right\}\right)\\
&= \operatorname{Card}(n\mathscr{S} \cap \mathbf{Z}^{d-1})
\end{aligned}$$

où $\mathscr{S}$ est défini par

$$\mathscr{S} = \left\{ (x_1,\ldots,x_{d-1}) \in \mathbf{R}_+^{d-1} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{d-1} x_i m_i \leqslant n_0 \right\}$$

c'est l'enveloppe convexe de d points d'un repère affine de $\mathbf{Q}^{d-1}$, à savoir l'origine et l'intersection des axes de coordonnées avec l'hyperplan affine d'équation $\sum_{i=1}^{d-1} x_i m_i = n_0$. Par la question III.5, il existe une constante C, de sorte que cela soit majoré par $1 + Cn^{d-1}$ ce qui contredit le fait que $s > d$. (On pouvait également raisonner avec un système de d équations linéaires sur $\mathbf{Q}$ en s variables, pour lesquelles il existe une solution rationnelle non nulle et donc une solution entière non nulle).

(c) Par (a) et (b), si $s > d$, il n'y a pas unicité de la décomposition en facteurs irréductibles dans A et cet anneau n'est donc pas factoriel. Le théorème de Gauss assure que $\mathbf{C}[X_1,\ldots,X_l]$ est factoriel, il ne peut être isomorphe à A.

Chapitre 4

Épreuve écrite d'analyse et probabilités

4.1 Énoncé

Avertissement

Les calculatrices et documents sont interdits. La qualité de la rédaction sera un facteur important d'appréciation des copies. On invite donc le candidat à produire des raisonnements clairs, complets et concis. Le candidat peut utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes ; il veillera toutefois à préciser la référence du résultat utilisé.

Ce problème est consacré à l'étude de propriétés spectrales d'une classe d'opérateurs compacts, dont on rappelle plus bas la définition, jouissant de certaines propriétés de positivité. Cette étude est illustrée à travers des exemples en dimension finie (partie 4.2) et sur des espaces de fonctions (partie 4.2) ou de suites (partie 4.2).

Les différentes parties du problème peuvent être traitées de façon indépendante. La partie 4.2 permet de se familiariser avec le sujet en se restreignant au cadre matriciel. La partie 4.2 démontre un théorème de point fixe (Théorème 2) qui est exploité dans la partie 4.2. La partie 4.2 repose en partie sur des notions évoquées dans les parties 4.1 et 4.2 ; elle peut encore être abordée indépendamment, quitte à faire une référence claire et précise aux résultats des parties précédentes.

Le sigle ♦ signale l'introduction dans le texte d'une définition, d'une notation, d'une hypothèse ou d'un rappel.

*Notations et définitions

- Les espaces vectoriels considérés dans le texte sont définis sur **R** ou sur **C**.
- Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. On note $M_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients réels. Pour $A \in M_n(\mathbf{R})$ on note A^T la matrice transposée.
- Pour deux vecteurs a et b de $\mathbf{R}^n$ (resp. $\mathbf{C}^n$), on note $(a|b) = \sum_{j=1}^n a_j b_j$ (resp. $(a|b) = \sum_{j=1}^n \overline{a_j} b_j$).
- En désignant par **I** ou bien l'ensemble des entiers naturels **N** ou bien l'ensemble des entiers relatifs **Z**, on note
$$\ell^2(\mathbf{I}) = \Big\{ \big(u_n\big)_{n\in\mathbf{I}} \text{ tel que } u_n \in \mathbf{C} \text{ et } \sum_{n\in\mathbf{I}} |u_n|^2 < \infty \Big\}.$$
On rappelle que $\ell^2(\mathbf{I})$ muni de $\|\big(u_n\big)_{n\in\mathbf{I}}\|_2 = \sqrt{\sum_{n\in\mathbf{I}} |u_n|^2}$ est un espace de Hilbert.

– Dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, on note $B(x,r)$ la boule fermée de centre $x \in E$ de rayon $r > 0$: $B(x,r) = \{y \in E \text{ tel que } \|x-y\| \leqslant r\}$ et $\mathring{B}(x,r) = \{y \in E \text{ tel que } \|x-y\| < r\}$ la boule ouverte correspondante.
– Soit C une partie d'un espace vectoriel normé E. On désigne par $\overline{C}$ l'adhérence de cet ensemble et par $\mathring{C}$ son intérieur. Si $C \neq \emptyset$, pour $x \in E$ on note $\mathrm{d}(x,C) = \inf\{\|x-c\|, c \in C\}$.
– Soit E et F deux espaces de Banach. On désigne par $\mathscr{L}(E,F)$ l'ensemble des applications *linéaires* et *continues* (ou *opérateurs*) de E dans F. Pour $A \in \mathscr{L}(E,F)$ on note $\mathrm{Ker}(A) = \{x \in E \text{ tel que } Ax = 0\}$ et $\mathrm{Im}(A) = \{Ax \in F,\ x \in E\}$. Lorsque $F = \mathbf{C}$, on note $E' = \mathscr{L}(E,\mathbf{C})$ l'espace des formes linéaires continues sur E. Lorsque $F = E$, on écrit simplement $\mathscr{L}(E)$ et $\mathbf{1}$ désigne l'opérateur identité ; on rappelle que $\mathscr{L}(E)$ est une algèbre de Banach pour la norme

$$\|A\|_{\mathscr{L}(E)} = \sup\{\|Ax\|,\ x \in B(0,1)\}.$$

En plusieurs occasions, l'énoncé fait appel à la définition suivante.

Définition 1 *Soient E et F deux espaces vectoriels normés. On dit qu'une application (linéaire ou non) $f : \mathscr{A} \subset E \to F$ est compacte si pour tout ensemble borné $B \subset \mathscr{A}$, $\overline{f(B)}$ est un compact de F. Autrement dit, de toute suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ bornée dans $\mathscr{A}$ on peut extraire une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ telle que $(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbf{N}}$ converge dans F.*

Partie I : Dimension finie

Les questions qui suivent ont pour objet de démontrer le

Théorème 1 *Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$ une matrice à coefficients $a_{k,j}$ positifs. On suppose de plus que pour tout $x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ à coordonnées positives, le vecteur Ax est à coordonnées strictement positives. Alors*
i) le rayon spectral $\rho := \sup\{|\lambda| \text{ où } \lambda \in \mathbf{C} \text{ est valeur propre de } A\}$ est valeur propre simple de A,
ii) il existe un vecteur propre v de A associé à la valeur propre ρ dont les coordonnées sont strictement positives,
iii) toute autre valeur propre λ de A vérifie $|\lambda| < \rho$,
iv) de même il existe un vecteur propre ϕ de A^T associé à la valeur propre ρ dont les coordonnées sont strictement positives.

1. (1) Soit $(w_1,\dots,w_n) \in \mathbf{C}^n$ tel que $|w_1+\dots+w_n| = |w_1|+\dots+|w_n|$. Montrer que pour j,ℓ dans $\{1,\dots,n\}$ distincts, on a $\mathrm{Re}(\overline{w_j}\ w_\ell) = |w_j|\ |w_\ell|$. En déduire qu'il existe $\theta \in [0,2\pi[$ tel que pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$ on a $w_j = e^{i\theta}|w_j|$.

♦ Jusqu'à la fin de cette partie $A \in M_n(\mathbf{R})$ est une matrice qui vérifie les hypothèses du théorème 1. On note aussi A l'opérateur de $\mathbf{C}^n$ associé.

1. (2) Montrer que les coefficients de A sont strictement positifs.

1. (3) Pour $z = (z_j)_{1\leqslant j\leqslant n} \in \mathbf{C}^n$, on note $|z|$ le vecteur de coordonnées $(|z_j|)_{1\leqslant j\leqslant n}$. Montrer que $A|z| = |Az|$ si et seulement si il existe $\theta \in [0,2\pi[$ tel que $z_j = e^{i\theta}|z_j|$ pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$.

1. (4) On introduit l'ensemble $\mathscr{C} = \{x = (x_j)_{1\leqslant j\leqslant n} \in \mathbf{R}^n \text{ tel que } x_j \geqslant 0 \text{ pour tout } j \in \{1,\dots,n\}\}$. Soit $x \in \mathscr{C}$; en notant e le vecteur de $\mathbf{R}^n$ dont toutes les coordonnées valent 1, montrer que

$$0 \leqslant (Ax|e) \leqslant (x|e)\left(\max_{j\in\{1,\dots,n\}} \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}\right).$$

1. (5) On pose $\mathscr{E} = \{t \geqslant 0$ tel qu'il existe $x \in \mathscr{C}\setminus\{0\}$ vérifiant $Ax - tx \in \mathscr{C}\}$. Montrer que $\mathscr{E}$ est un intervalle non réduit à $\{0\}$, fermé et borné.

1. (6) On pose $\rho = \max\mathscr{E} > 0$. Montrer que si $x \in \mathscr{C}\setminus\{0\}$ vérifie $Ax - \rho x \in \mathscr{C}$ alors on a en fait $Ax = \rho x$. (*On pourra observer que si $y = Ax - \rho x \neq 0$ alors on peut exhiber $\epsilon > 0$ tel que $Ay - \epsilon Ax \in \mathscr{C}$.*) En déduire que ρ est valeur propre de A et qu'il existe, pour cette valeur propre, un vecteur propre v à coordonnées strictement positives.

1. (7) Soit $z \in \mathbf{C}^n$; à l'aide de la question 1.(3), montrer que si $Az = \rho z$ et $(z|v) = 0$ alors $z = 0$. En déduire que $\mathrm{Ker}(A - \rho\mathbf{1}) = \mathrm{Vect}\{v\}$ et que toute autre valeur propre $\lambda \in \mathbf{C}$ de A vérifie $|\lambda| < \rho$.

1. (8) Montrer que tout vecteur propre de A à coordonnées positives est proportionnel à v. (*On pourra exploiter le fait que A^T admet un vecteur propre à coordonnées strictement positives associé à la valeur propre ρ.*)

♦ Le théorème 1 peut être exploité pour étudier le comportement asymptotique de certains systèmes différentiels linéaires. Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$ une matrice vérifiant les hypothèses du théorème 1. Il existe donc un couple $(v,\phi) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ tel que les coordonnées de v et ϕ sont strictement positives, et vérifiant $(v|\phi) = 1$, $Av = \rho v$ et $A^T\phi = \rho\phi$, où ρ est le rayon spectral de A. On considère le problème de Cauchy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y = Ay, \qquad y(0) = y_{\mathrm{Init}} \in \mathbf{R}^n. \tag{4.1}$$

1. (9) Soit $y_{\mathrm{Init}} \in \mathbf{R}^n$ un vecteur à coordonnées positives. Justifier que (4.1) admet une unique solution $t \mapsto y(t) \in \mathbf{R}^n$ définie sur $\mathbf{R}$, et que pour tout $t \geqslant 0$, les coordonnées $(y_j(t))_{1\leqslant j\leqslant n}$ de $y(t)$ sont positives.

1. (10) Montrer que $(y(t)|\phi)\, e^{-\rho t} = (y_{\mathrm{Init}}|\phi)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

1. (11) En déduire que pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$, la fonction $t \mapsto e^{-\rho t} y_j(t)$ est bornée sur $[0,+\infty[$.

1. (12) On rappelle que la décomposition de Dunford permet d'écrire $A = D + N$, avec D diagonalisable sur $\mathbf{C}$, N nilpotente et $DN = ND$. En notant $\sigma(A)$ l'ensemble des valeurs propres complexes de A, en déduire que, pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$, il existe des fonctions polynomiales $\{t \mapsto P_{\lambda,j}(t),\ \lambda \in \sigma(A)\}$ telles que

$$y_j(t) = \sum_{\lambda\in\sigma(A)} P_{\lambda,j}(t) e^{\lambda t}.$$

1. (13) Établir que pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$, la fonction polynomiale $t \mapsto P_{\rho,j}(t)$ est constante.

1. (14) En déduire finalement que $e^{-\rho t}y(t)$ admet une limite quand $t \to +\infty$ qu'on exprimera en fonction de y_{Init}, ϕ et v.

Partie II : Quelques éléments d'analyse spectrale

Soit E un espace de Banach complexe non réduit à $\{0\}$. On admet que $E' \neq \{0\}$. Pour $T \in \mathscr{L}(E)$, on introduit l'ensemble $\mathrm{Res}(T)$ des éléments $\lambda \in \mathbf{C}$ tels que $(\lambda\mathbf{1} - T)$ est une bijection de E dans E et $R_\lambda(T) = (\lambda\mathbf{1} - T)^{-1} \in \mathscr{L}(E)$.

On définit $\sigma(T)$ le *spectre* de T par $\sigma(T) = \mathbf{C} \setminus \mathrm{Res}(T)$. En particulier si λ est une valeur propre de T on a $\mathrm{Ker}(\lambda\mathbf{1} - T) \neq \{0\}$ et donc $\lambda \in \sigma(T)$ (*mais* $\sigma(T)$ *peut contenir des éléments qui ne sont pas valeurs propres*).

2. (1) On suppose que $\|T\|_{\mathscr{L}(E)} < 1$. Montrer que dans ce cas $1 \in \mathrm{Res}(T)$ et que $(\mathbf{1} - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$.

2. (2) Montrer que si $|\lambda| > \|T\|_{\mathscr{L}(E)}$ alors $\lambda \in \mathrm{Res}(T)$ et que de plus on a

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \|R_\lambda(T)\|_{\mathscr{L}(E)} = 0.$$

2. (3) Établir que $\mathrm{Res}(T)$ est un ouvert de $\mathbf{C}$ et que pour tout $x \in E$ et $\ell \in E'$, l'application $\Phi : \lambda \mapsto \ell\big(R_\lambda(T)x\big)$ est développable en série entière au voisinage de tout point $\lambda_0 \in \mathrm{Res}(T)$.

2. (4) En déduire que, pour tout $T \in \mathscr{L}(E)$, $\sigma(T)$ est un ensemble compact non-vide. (*On rappelle qu'une fonction de* $\mathbf{C}$ *dans* $\mathbf{C}$ *holomorphe et bornée sur* $\mathbf{C}$ *est constante.*)

♦ À partir de maintenant et jusqu'à la fin de cette partie, on suppose que E est de dimension infinie et $T \in \mathscr{L}(E)$ est un opérateur compact.

2. (5) Soit $M \neq E$ un sous-espace fermé. Justifier qu'il existe $u \in E$ tel que $\|u\| = 1$ et $\mathrm{d}(u, M) \geqslant \frac{1}{2}$. En déduire que l'on peut construire une suite $\big(x_n\big)_{n\in\mathbf{N}}$ de vecteurs de E telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\|x_n\| = 1$ et $\|x_n - x_m\| \geqslant \frac{1}{2}$ lorsque $n \neq m$.

2. (6) Montrer que $0 \in \sigma(T)$ et que pour toute valeur propre $\lambda \neq 0$ de T, $\mathrm{Ker}(\lambda\mathbf{1} - T)$ est de dimension finie.

2. (7) Soit $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ tel que $\lambda\mathbf{1} - T$ est injectif.

i) En raisonnant par l'absurde, montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|(\lambda\mathbf{1} - T)x\| \geqslant \alpha\|x\|$. En déduire que pour tout fermé $\mathscr{F} \subset E$, l'ensemble $(\lambda\mathbf{1} - T)(\mathscr{F})$ est fermé.

ii) On suppose que $\mathrm{Im}(\lambda\mathbf{1} - T) \neq E$. Montrer alors que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $\mathrm{Im}\big((\lambda\mathbf{1} - T)^{n+1}\big) \subset \mathrm{Im}\big((\lambda\mathbf{1} - T)^n\big)$, l'inclusion étant stricte.

iii) En déduire qu'alors il existerait une suite de vecteurs $\big(x_n\big)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que : $\|x_n\| = 1$, $x_n \in \mathrm{Im}\big((\lambda\mathbf{1} - T)^n\big)$ et $\mathrm{d}(x_n, \mathrm{Im}\big((\lambda\mathbf{1} - T)^{n+1}\big)) \geqslant \frac{1}{2}$.

iv) Conclure que $(\lambda\mathbf{1} - T)$ est surjectif, puis que le spectre de T n'est composé que de 0 et d'éventuelles valeurs propres de T.

Partie III : Exemple et contre-exemple sur un espace de fonctions

Pour traiter cette partie, on pourra utiliser, sans justification supplémentaire, l'énoncé suivant.

Théorème d'Arzela-Ascoli

Soit I un intervalle fermé et borné de $\mathbf{R}$. Soit $\mathscr{F}$ un ensemble de fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbf{C}$. On suppose que

i) $\mathscr{F}$ est uniformément borné c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $f \in \mathscr{F}$ et tout $x \in I$ on a $|f(x)| \leqslant M$.

ii) $\mathscr{F}$ est équi-continu c'est-à-dire que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que si $x \in I$, $y \in I$ vérifient $|x-y| \leqslant \eta$ alors pour tout $f \in \mathscr{F}$ on $|f(x) - f(y)| \leqslant \epsilon$.

Alors $\overline{\mathscr{F}}$ est compact dans l'ensemble des fonctions continues $C^0(I)$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$.

3. (1) Sur l'ensemble $C^0([0,1])$ des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs complexes, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, on considère l'application linéaire $\mathscr{I}$ définie par $\mathscr{I}[f](x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, pour $x \in [0,1]$.

i) Montrer que $\mathscr{I}$ est une application continue, compacte et telle que $\mathscr{I}[f] \geqslant 0$ lorsque f est à valeurs réelles avec $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [0,1]$.

ii) Montrer cependant que $\mathscr{I}$ n'admet pas de valeur propre.

♦ À partir de maintenant on désigne par $C^0_\#$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbf{R}$ et $1-$périodiques à valeurs complexes, qu'on munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$. À une fonction $f \in C^0_\#$ on associe la suite des coefficients de Fourier

$$\widehat{f}(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2i\pi nx} f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad n \in \mathbf{Z}.$$

Soit $a > 0$. Pour $f \in C^0_\#$ et $x \in \mathbf{R}$, on pose

$$T[f](x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{e^{2i\pi nx}}{a^2 + 4\pi^2 n^2} \widehat{f}(n).$$

3. (2) Montrer que $f \mapsto T[f]$ définit un opérateur $T \in \mathscr{L}(C^0_\#)$.

3. (3) Établir que pour tout $x \in \mathbf{R}$ on a

$$T[f](x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} k(x-y)\; f(y)\,\mathrm{d}y,$$

où, J étant une constante positive qu'on déterminera, la fonction k est définie sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ par $k(x) = \frac{1}{2a}\big(e^{-a|x|} + J\mathrm{ch}(ax)\big)$ et est prolongée sur $\mathbf{R}$ par $1-$périodicité.

3. (4) En déduire que T est un opérateur fortement positif au sens où si $f \in C^0_\#$, non identiquement nulle, vérifie $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [0,1]$, alors $T[f](x) > 0$ pour tout $x \in [0,1]$.

3. (5) Montrer que $T \in \mathscr{L}(C^0_\#)$ est un opérateur compact.

3. (6) Soit $\lambda \in \mathbf{C}$; montrer que si $f \in C^0_\# \setminus \{0\}$ vérifie $T[f](x) = \lambda f(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ alors il existe $n \in \mathbf{Z}$ tel que $\lambda = \widehat{k}(n)$. Montrer que $\widehat{k}(0) = 1/a^2$ est l'unique valeur propre de T de module maximal, caractériser l'espace propre associé et calculer $\|T\|_{\mathscr{L}(C^0_\#)}$.

3. (7) On pose $V = \left\{g \in C^0_\# \text{ tel que } \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(t)\,\mathrm{d}t = 0\right\}$. Montrer que V est un sous-espace fermé de $C^0_\#$ tel que $T[V] \subset V$.

3. (8) Montrer que pour tout $f \in C^0_\#$ n'appartenant pas à V et $x \in \mathbf{R}$, $T^n[f](x)$ est équivalent à $\frac{1}{a^{2n}}\widehat{f}(0)$ quand $n \to +\infty$.

Partie IV : Un théorème de point fixe

Cette partie vise à étendre au contexte de la dimension infinie l'énoncé suivant qui pourra être exploité sans démonstration.

Théorème de Brouwer Soit F un espace vectoriel normé de dimension *finie*. Soit $C \subset F$ un ensemble convexe, fermé, borné et non–vide. Soit $f : C \to C$ une application continue. Alors f admet un point fixe dans C.

4. (1) Dans $\ell^2(\mathbf{N})$ muni de $\|.\|_2$, on considère l'application suivante

$$f: \begin{array}{ccc} B(0,1) \subset \ell^2(\mathbf{N}) & \longrightarrow & \ell^2(\mathbf{N}) \\ x = \left(x_n\right)_{n\in\mathbf{N}} & \longmapsto & f(x) = (\sqrt{1-\|x\|_2^2}, x_0, x_1, x_2, \ldots). \end{array}$$

Montrer que f est continue, à valeurs dans la sphère unité de $\ell^2(\mathbf{N})$ mais que f n'admet pas de point fixe.

4. (2) Soit E un espace vectoriel normé, B un fermé borné et non vide de E et $f : B \to E$ une application (éventuellement non linéaire) *compacte*.

i) Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. On peut donc recouvrir $\overline{f(B)}$ par un nombre fini $N_n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ de boules de rayon $\frac{1}{n}$; $\overline{f(B)} \subset \bigcup_{i=1}^{N_n} \mathring{B}(y_i, \frac{1}{n})$ avec $y_i \in \overline{f(B)}$ pour tout i. Pour $y \in E$, on pose

$$\psi_i(y) = \begin{cases} \frac{1}{n} - \|y - y_i\| & \text{si } y \in B(y_i, \frac{1}{n}), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $\Psi : y \in \overline{f(B)} \mapsto \sum_{i=1}^{N_n} \psi_i(y)$ est continue et qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in \overline{f(B)}$ on a $\Psi(y) \geqslant \delta$.

ii) On introduit l'application $f_n : B \to E$ définie par

$$f_n(x) = \Big(\sum_{j=1}^{N_n} \psi_j(f(x))\Big)^{-1} \sum_{i=1}^{N_n} \psi_i(f(x))\; y_i.$$

Montrer que pour tout $x \in B$ on a $\|f(x) - f_n(x)\| \leqslant \frac{1}{n}$.

4. (3) Cette question vise à établir le théorème de point fixe suivant

Théorème 2 *Soit B un convexe non-vide, fermé et borné dans un espace vectoriel normé E. Soit $f : B \to B$ une application continue et compacte. Alors f admet un point fixe dans B.*

i) En utilisant les notations de la question précédente, montrer que pour tout $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ il existe $x_n \in B$ tel que $f_n(x_n) = x_n$.

ii) En déduire l'existence d'un point fixe de f dans B.

Partie V : Application en théorie spectrale

Cette partie va utiliser les définitions suivantes.

Définition 2 *Soit E un espace de Banach réel. On dit que $\mathscr{C} \subset E$ est un cône dans E si*
- *$\mathscr{C}$ est un ensemble fermé contenant 0,*
- *Pour u, v dans $\mathscr{C}$ et α, β réels positifs on a $\alpha u + \beta v \in \mathscr{C}$,*
- *Si $u \in \mathscr{C}$ et $(-u) \in \mathscr{C}$ alors $u = 0$.*

Définition 3 *Soit $\mathscr{C}$ un cône dans un espace de Banach E. On peut définir une relation d'ordre sur E en posant*

$$u \geqslant v \quad \textit{si et seulement si} \quad u - v \in \mathscr{C}.$$

On dit alors qu'un opérateur $T \in \mathscr{L}(E)$ est positif si pour tout $u \in \mathscr{C}$ on a $T(u) \in \mathscr{C}$. Si de plus $\mathscr{C}$ est d'intérieur $\mathring{\mathscr{C}}$ non vide, on dit que $T \in \mathscr{L}(E)$ est fortement positif si pour tout $u \in \mathscr{C} \setminus \{0\}$ on a $T(u) \in \mathring{\mathscr{C}}$.

5. (1) Soient a et b deux réels, $a < b$. Dans l'espace $C^0([a,b];\mathbf{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme, montrer que l'ensemble des fonctions à valeurs positives ou nulles est un cône $\mathscr{C}$ d'intérieur

$$\mathring{\mathscr{C}} = \left\{f \in C^0([a,b];\mathbf{R}) \text{ tel que pour tout } x \in [a,b],\ f(x) > 0\right\}.$$

◆ Les questions suivantes ont pour objectif, en exploitant le théorème 2, de démontrer l'énoncé suivant, "analogue" en dimension infinie du théorème 1.

Théorème 3 *Soit $\mathscr{C}$ un cône d'intérieur $\mathring{\mathscr{C}}$ non vide dans un espace de Banach réel $E \neq \{0\}$. Soit $T \in \mathscr{L}(E)$ un opérateur compact et fortement positif. Alors*
i) $\rho := \sup\left\{|\rho'| \text{ où } \rho' \in \mathbf{R} \text{ est valeur propre de } T\right\}$ est valeur propre de T,
ii) il existe un unique $\phi \in \mathring{\mathscr{C}}$ de norme 1 tel que $T\phi = \rho\phi$,
iii) le sous-espace propre associé est de dimension 1 : $\dim\big(\mathrm{Ker}(T - \rho\mathbf{1})\big) = 1$,
iv) si $\rho' \in \mathbf{R}$ est une autre valeur propre de T alors on a $|\rho'| < \rho$.

Existence d'un vecteur propre dans $\mathring{\mathscr{C}}$.

On fixe un élément $x \in \mathscr{C} \setminus \{0\}$.

5. (2) Montrer qu'il existe $\omega > 0$ tel que $\omega T x \geqslant x$.

◆ Sans perte de généralité on supposera à partir de maintenant que $\omega = 1$.

5. (3) Soit $\epsilon > 0$. Supposons qu'il existe $M \geqslant 0$ et $y \in \mathscr{C}$ tels que $y = MT(y + \epsilon x)$. Établir que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a $y \geqslant \epsilon M^n x$. En déduire que $M \leqslant 1$.

5. (4) Soit $\epsilon > 0$ et $R > 0$. On pose

$$\mathscr{C}_\epsilon = \left\{y \in \mathscr{C} \text{ tel que } y \geqslant \epsilon x,\ \|y\| \leqslant R\right\}, \qquad T_\epsilon : y \in \mathscr{C}_\epsilon \mapsto T_\epsilon(y) = \frac{1}{\|y\|}\, T(y + \epsilon\|y\| x).$$

i) Montrer que $\mathscr{C}_\epsilon$ est un convexe fermé, borné ne contenant pas 0.

ii) Montrer que pour R suffisamment grand, $\mathscr{C}_\epsilon$ est non-vide et T_ϵ est une application de $\mathscr{C}_\epsilon$ dans $\mathscr{C}_\epsilon$ continue et compacte.

♦ On suppose dorénavant que R satisfait cette condition.

iii) En déduire l'existence de $y_\epsilon \in \mathscr{C}_\epsilon$ vérifiant $y_\epsilon = T_\epsilon(y_\epsilon)$. On pose $M_\epsilon = 1/\|y_\epsilon\|$ et $z_\epsilon = y_\epsilon/\|y_\epsilon\|$ de sorte que $z_\epsilon = M_\epsilon T(z_\epsilon + \epsilon x)$. Montrer que $0 \leqslant M_\epsilon \leqslant 1$.

iv) Montrer qu'il existe une suite $\left(\epsilon_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ de réels strictement positifs tendant vers 0 telle que $\left(M_{\epsilon_n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\lambda \in]0,1]$ et $\left(z_{\epsilon_n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $z \in \mathring{\mathscr{C}}$ vérifiant $z = \lambda Tz$ et $\|z\| = 1$.

Unicité.

♦ Jusqu'à la fin de la partie λ et z sont ceux définis en 5.(4)-iv).

5. (5) On suppose qu'il existe $z' \in \mathring{\mathscr{C}}$ et $\mu > 0$ tels que $z' = \mu T z'$. Soit $\mathscr{A} = \{s \geqslant 0 \text{ tel que } z - sz' \in \mathscr{C}\}$.

i) Montrer que $\mathscr{A}$ est un intervalle fermé, borné, non réduit à $\{0\}$.

ii) En déduire que $\mu = \lambda$.

5. (6) Soit $\nu \in \mathbf{R}$ et $z' \in E$ tels que $z' \notin \mathscr{C} \cup (-\mathscr{C})$ et $z' = \nu T z'$. En considérant les ensembles $\mathscr{B}_+ = \{s \geqslant 0 \text{ tel que } z + sz' \in \mathscr{C}\}$ et $\mathscr{B}_- = \{s \geqslant 0 \text{ tel que } z - sz' \in \mathscr{C}\}$ montrer que $\lambda < |\nu|$ et que $\mathrm{Ker}(\lambda T - \mathbf{1}) = \mathrm{Vect}\{z\}$.

Partie VI : Un exemple sur un espace de suites

Soit H un espace de Hilbert complexe dont on note $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire (linéaire en la seconde variable) ; on rappelle le

Théorème de représentation de Riesz Pour toute forme linéaire continue λ sur H, il existe un unique $x_\lambda \in H$ tel que $\lambda(y) = \langle x_\lambda, y\rangle$ pour tout $y \in H$.

6. (1) Soit $x = \left(x_n\right)_{n\in\mathbf{Z}} \in \ell^2(\mathbf{Z})$; pour $p \in \mathbf{N}\setminus\{0\}$, on définit $x^{(p)} \in \ell^2(\mathbf{Z})$ par : $\forall n \in \mathbf{Z}$, si $n \neq p, x_n^{(p)} = x_n$ et $x_p^{(p)} = -\frac{1}{p}$. Évaluer $\|x - x^{(p)}\|_2$. En déduire que dans $\left(\ell^2(\mathbf{Z}), \|.\|_2\right)$, l'ensemble des suites à termes réels positifs ou nuls est un cône d'intérieur vide.

♦ Soit $\left(\kappa_n\right)_{n\in\mathbf{Z}}$ une suite de réels positifs telle que $\lim_{n\to\pm\infty}\kappa_n = +\infty$. On désigne par $\mathbf{h}_\kappa$ l'espace des suites complexes $u = \left(u_n\right)_{n\in\mathbf{Z}}$ telles que

$$\left(\mathscr{N}(u)\right)^2 = \sum_{n\in\mathbf{Z}} (1+\kappa_n)|u_n|^2 < \infty.$$

6. (2) Montrer que $(\mathbf{h}_\kappa, \mathscr{N})$ est un espace de Hilbert.

6. (3) Soit $\mu > 0$; on pose, pour $u = (u_n)_{n\in\mathbf{Z}} \in \mathbf{h}_\kappa$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbf{Z}} \in \mathbf{h}_\kappa$:

$$a(u,v) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \Big((\mu+\kappa_n)\overline{u_n}v_n + (\overline{u_{n+1}} - \overline{u_n})(v_{n+1} - v_n)\Big).$$

Montrer que cette quantité est bien définie, et qu'il existe deux constantes α, β strictement positives telles que

$$\forall u \in \mathbf{h}_\kappa,\ \alpha \mathcal{N}(u)^2 \leqslant a(u,u) \leqslant \beta \mathcal{N}(u)^2.$$

Justifier que $\mathbf{h}_\kappa$ muni du produit scalaire a est encore un espace de Hilbert.

6. (4) On se donne $f = \big(f_n\big)_{n\in\mathbf{Z}} \in \ell^2(\mathbf{Z})$. Montrer que $u = (u_n)_{n\in\mathbf{Z}} \in \mathbf{h}_\kappa$ vérifie

$$\forall n \in \mathbf{Z},\ \mu u_n + \kappa_n u_n - (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) = f_n \tag{4.2}$$

si et seulement si

$$\text{pour tout } v = (v_n)_{n\in\mathbf{Z}} \in \mathbf{h}_\kappa,\ a(u,v) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \overline{f_n} v_n. \tag{4.3}$$

Prouver alors l'existence et l'unicité de $u \in \mathbf{h}_\kappa$ solution de (4.2).

6. (5) Soit $(u^{(p)})_{p\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbf{h}_\kappa$, bornée dans $\big(\mathbf{h}_\kappa, \mathcal{N}\big)$; il existe donc $M \geqslant 0$ tel que pour tout $p \in \mathbf{N}$, $\mathcal{N}(u^{(p)}) \leqslant M$. Montrer qu'on peut en extraire une sous-suite $\big(u^{(p_k)}\big)_{k\in\mathbf{N}}$ convergente dans $\big(\ell^2(\mathbf{Z}), \|.\|_2\big)$. En déduire que l'application $S : f \mapsto u$, avec $u \in \mathbf{h}_\kappa$ solution de (4.2), définit un opérateur compact appartenant à $\mathcal{L}\big(\ell^2(\mathbf{Z})\big)$.

6. (6) Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est à valeurs réelles, alors $u = (u_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ avec $u \in \mathbf{h}_\kappa$ solution de (4.2) est aussi à valeurs réelles. En utilisant (4.3) avec $v_n = \min(0, u_n)$, établir que S est un opérateur positif au sens où si $f_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$, alors $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

6. (7) Montrer que S est un opérateur fortement positif au sens où si $f_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$ et s'il existe $n_0 \in \mathbf{Z}$ tel que $f_{n_0} > 0$ alors $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

6. (8) On note $m = \inf\big\{a(u,u), u \in \mathbf{h}_\kappa, \|u\|_2 = 1\big\}$. On considère une suite $\big(u^{(p)}\big)_{p\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathbf{h}_\kappa$ telle que $\lim\limits_{p\to+\infty} a(u^{(p)}, u^{(p)}) = m$ et $\forall p \in \mathbf{N}, \|u^{(p)}\|_2 = 1$. Montrer qu'il existe une sous-suite $\big(u^{(p_k)}\big)_{k\in\mathbf{N}}$ de $\big(u^{(p)}\big)_{p\in\mathbf{N}}$ qui converge dans $\big(\ell^2(\mathbf{Z}), \|.\|_2\big)$ vers un élément $u^{(\infty)}$ de $\mathbf{h}_\kappa$ tel que $a(u^{(\infty)}, u^{(\infty)}) = m$ et $\|u^{(\infty)}\|_2 = 1$.

6. (9) En exploitant la relation $a(u^{(\infty)} + tv, u^{(\infty)} + tv) \geqslant m\|u^{(\infty)} + tv\|_2^2$ pour tout $v \in \mathbf{h}_\kappa$ et pour tout $t \in \mathbf{R}$, montrer que $Su^{(\infty)} = \frac{1}{m} u^{(\infty)}$.

6. (10) Soit $\lambda \in \sigma(S)$. Montrer que $0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{m}$.

6. (11) Montrer que l'espace propre de S associé à la valeur propre $\frac{1}{m}$ est une droite vectorielle engendrée par une suite dont les composantes sont strictement positives. (*Si v appartient à ce sous-espace, on pourra introduire la suite $|v| = \big(|v_n|\big)_{n\in\mathbf{Z}}$.*)

4.2 Corrigé et rapport sur l'épreuve écrite d'analyse et probabilités

L'objet de ce problème est l'étude de propriétés spectrales remarquables d'opérateurs "positifs", c'est-à-dire laissant invariant un cône de l'espace de Banach sur lequel ils sont définis. Le fait saillant se résume au fait que le rayon spectral est valeur propre et admet un vecteur propre positif. Au delà de l'intérêt propre à l'analyse fonctionnelle, ces questions se révèlent être cruciales pour de nombreuses applications : interprétation de la valeur propre dominante comme "paramètre de Malthus" et caractérisation du comportement asymptotique d'une population structurée [9] ; analyse de criticité en neutronique [3, Chap. 1, Section 5, Paragraphe 3] ou, plus généralement pour tout phénomène aléatoire pouvant être décrit en termes de chaînes de Markov. Le problème est conçu sous la forme d'une succession de parties très largement indépendantes autour de ce thème commun et faisant appel à des techniques différentes de sorte qu'un large pan du programme est balayé par l'ensemble. L'étude du corrigé peut s'appuyer sur la consultation d'ouvrages de référence, comme [1, 5, 8].

Le problème commence par traiter le cas de la dimension finie dans la partie 1. On y utilise des arguments de l'analyse des systèmes algébriques et différentiels linéaires. Les questions 1.(1) à 1.(8) visent à établir le Théorème 1 qui n'est autre que le Théorème de Perron–Froebenius. Les questions 1.(9) à 1.(14) exploitent cet énoncé pour caractériser le comportement en temps long d'un système différentiel linéaire associé à une matrice dont tous les coefficients sont strictement positifs. La suite du problème décrit des extensions du Théorème de Perron–Froebenius dans des espaces de dimension infinie. Une telle extension réclame d'imposer des propriétés supplémentaires sur les opérateurs étudiés ; on va donc s'intéresser à des opérateurs compacts et positifs.

La partie 2 vise à établir les propriétés spectrales spécifiques des opérateurs compacts et fait appel à des raisonnements relativement classiques d'analyse fonctionnelle, incluant l'appel à quelques notions d'analyse complexe. La partie 3 se focalise sur des exemples dans des espaces de fonctions continues avec des opérateurs laissant invariant le cône des fonctions positives. La compacité est établie en exploitant le Théorème d'Arzela–Ascoli. L'exemple 3.(1) montre que positivité et compacité ne suffisent pas, mais que, comme en dimension finie, des propriétés de non dégénérescence doivent être prises en compte. La suite de cette partie traite intégralement un cas particulier sur lequel des calculs explicites sont possibles : cet exemple correspond à la version série de Fourier de l'inversion de l'opérateur différentiel $a^2 - \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$.

Le Théorème 3 est la version "dimension infinie" du Théorème de Perron–Froebenius, connue sous le nom de Théorème de Krein–Rutman [7, 10]. La partie 4 est un préliminaire où on établit un théorème de point fixe pour des applications continues et compactes, le Théorème de Schauder, à partir du Théorème de Brouwer, l'exemple 4.(1) montrant que les hypothèses de ce dernier ne permettent plus de conclure en dimension infinie. La démonstration proposée repose sur une propriété d'approximation des applications compactes par des applications de rang fini (on notera que, même si l'application f est linéaire, les approximations sont quant à elles non linéaires). L'énoncé de point fixe est utilisée dans la partie 5 pour établir le Théorème de Krein–Rutman, la question 5.(1) permettant de se familiariser avec la notion de cône.

La section 6 traite d'un exemple sur l'espace ℓ^2, la difficulté étant que le cône des suites à termes positifs est d'intérieur vide, comme établit dans la question 6.(1). L'exemple proposé peut être vu comme la discrétisation d'un opérateur différentiel et les techniques utilisent fortement les raisonnements de l'analyse hilbertienne. L'analyse repose sur la mise en évidence d'une formulation variationnelle permettant d'exploiter directement le théorème de Riesz (ou de Lax–Milgram) et de montrer des estimations a priori. La valeur propre principale est alors caractérisée en terme de "problème de min-max".

Le corrigé proposé ci-dessous détaille, souvent de manière approfondie, comment on pouvait répondre aux questions posées. A l'occasion, des preuves alternatives sont suggérées. Le corrigé est aussi agrémentée de quelques remarques permettant de situer les problématiques abordées dans un contexte plus général. On trouvera dans le corps du texte des commentaires spécifiques inspirés des impressions des correcteurs.

Commentaire 1 *Le sujet était clairement trop long pour être intégralement traité dans le temps imparti, y compris par les meilleurs candidats. Mais, c'est un choix délibéré et assumé où le sujet était conçu de manière à balayer un large pan du programme avec des parties très indépendantes les unes des autres. Les candidats pouvaient donc "choisir" sur quelles parties leurs connaissances s'exprimeraient le mieux. Peu de candidats ont usé de cette faculté, la grande majorité d'entre eux suivant le sujet de manière linéaire. Sans surprise, la partie 1 a donc été abordée dans la plupart des copies.*

Partie I : Dimension finie

1. (1) On commence par remarquer que l'hypothèse sur le vecteur w entraîne que

$$\begin{aligned} |w_1+\ldots+w_n|^2 &= (w_1+\ldots+w_n)(\overline{w_1}+\ldots+\overline{w_n}) = \sum_{k=1}^{n}|w_k|^2+2\sum_{1\leqslant j<\ell\leqslant n}\mathrm{Re}(\overline{w_j}w_\ell) \\ &= (|w_1|+\ldots+|w_n|)^2 = \sum_{k=1}^{n}|w_k|^2+2\sum_{1\leqslant j<\ell\leqslant n}|w_j||w_\ell|. \end{aligned}$$

Or, pour tout $z\in\mathbf{C}$, on a $\mathrm{Re}(z)\leqslant|z|$ avec égalité si et seulement si $z\in\mathbf{R}^+$. Il s'ensuit que pour $j\neq\ell\in\{1,\ldots,n\}^2$, on a $\mathrm{Re}(\overline{w_j}w_\ell)=|w_j||w_\ell|$ et $\overline{w_j}w_\ell\in\mathbf{R}^+$. On distingue les cas suivants :

- Si $w_1=\ldots=w_n=0$, alors $\theta=0$ convient ;
- Sinon, soit $\ell\in\{1,\ldots,n\}$ tel que $w_\ell\neq0$ et $\theta\in[0,2\pi[$ tel que $w_\ell=e^{i\theta}|w_\ell|$. Soit $j\neq\ell$ quelconque. Si $w_j=0$ on peut toujours écrire $w_j=e^{i\theta}|w_j|$. Sinon, on écrit $w_j=e^{i\theta_j}|w_j|$ avec $0\leqslant\theta_j<2\pi$, de sorte que, d'après ce qui précède, on a :
$$\mathrm{Re}(\overline{w_j}w_\ell)=|w_j|\,|w_\ell|\,\cos(\theta-\theta_j)=|w_j|\,|w_\ell|$$
qui entraîne que $\theta-\theta_j$ est de la forme $2m\pi$, $m\in\mathbf{Z}$. Il s'ensuit en fait que $\theta_j=\theta$.

Dans les deux cas, on a trouvé un réel $\theta\in[0,2\pi[$ tel que $\forall j\in\{1,\ldots,n\}$, on a $w_j=e^{i\theta}|w_j|$.

1. (2) Notons, pour $j\in\{1,\ldots,n\}$, $e^{(j)}$ le j-ième vecteur de la base canonique de $\mathbf{R}^n$. C'est un vecteur non nul à coordonnées positives, donc, par hypothèse sur A,

$$Ae^{(j)}=\begin{pmatrix} a_{1,j}\\ a_{2,j}\\ \vdots\\ a_{n,j}\end{pmatrix}$$

est à coordonnées strictement positives. Ainsi on a bien $\forall(k,j)\in\{1,\ldots,n\}^2$, $a_{k,j}>0$.

1. (3) Les coordonnées de $A|z|$ sont $\left(\sum_{j=1}^n a_{k,j}|z_j|\right)_{k\in\{1,\ldots,n\}}$; celles de $|Az|$ sont $\left(|\sum_{j=1}^n a_{k,j}z_j|\right)_{k\in\{1,\ldots,n\}}$. Si $|Az|=A|z|$, on a en particulier $|\sum_{j=1}^n a_{1,j}z_j|=\sum_{j=1}^n a_{1,j}|z_j|$. On peut alors appliquer le résultat de 1.(1) au vecteur de coordonnées $w_j=a_{1,j}z_j$: il existe $\theta\in[0,2\pi[$ tel que $\forall j\in\{1,\ldots,n\}$, $a_{1,j}z_j=e^{i\theta}|a_{1,j}z_j|$. Cependant, d'après le 1.(2) : $\forall j\in\{1,\ldots,n\}$, $a_{1,j}>0$, donc

$$\forall j\in\{1,\ldots,n\},\qquad z_j=e^{i\theta}|z_j|.$$

Réciproquement, s'il existe $\theta\in[0,2\pi[$ tel que $\forall j\in\{1,\ldots,n\}$, $z_j=e^{i\theta}|z_j|$, alors

$$\forall k\in\{1,\ldots,n\},\qquad \left|\sum_{j=1}^n a_{k,j}z_j\right|=\sum_{j=1}^n a_{k,j}|z_j|$$

ce qui prouve l'équivalence requise.

1. (4) Comme les $a_{k,j}$ et les x_j sont positifs, il vient :

$$\begin{aligned} 0\leqslant(Ax|e) &= \sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n a_{k,j}x_j=\sum_{j=1}^n\Big(\sum_{k=1}^n a_{k,j}\Big)x_j \\ &\leqslant \Big(\max_{m\in\{1,\ldots,n\}}\sum_{k=1}^n a_{k,m}\Big)\sum_{j=1}^n x_j=\Big(\max_{m\in\{1,\ldots,n\}}\sum_{k=1}^n a_{k,m}\Big)\,(x|e). \end{aligned}$$

1. (5) On décompose la preuve en plusieurs étapes.

– L'ensemble $\mathscr{E}$ contient au moins 0 par hypothèse sur A. Ensuite, Ae est à coordonnées strictement positives, et pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, on a $Ae - \varepsilon e \in \mathscr{C}$, donc $\varepsilon \in \mathscr{E}$. Par exemple,

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \min_{1 \leqslant k \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} > 0$$

convient. Donc $\mathscr{E}$ n'est pas réduit à $\{0\}$.
– Soit $t \in \mathscr{E}$, $x \in \mathscr{C} \setminus \{0\}$ tel que $Ax - tx \in \mathscr{C}$, et soit $t' \in [0, t]$. Alors $Ax - t'x = Ax - tx + (t - t')x \in \mathscr{C}$ car $t - t' \geqslant 0$, et les coordonnées de x sont positives. Ceci établit que $t' \in \mathscr{E}$, et $\mathscr{E}$ est donc un intervalle.
– Pour tout $y \in \mathscr{C} \setminus \{0\}$, on a $(y|e) > 0$. Soit $t \in \mathscr{E}$ et $x \in \mathscr{C} \setminus \{0\}$ tel que $y = Ax - tx \in \mathscr{C} \setminus \{0\}$. Alors $(Ax - tx|e) \geqslant 0$ c'est-à-dire $t(x|e) \leqslant (Ax|e)$. Il résulte alors de 1.(4) que

$$0 \leqslant t \leqslant \max_{j \in \{1,\ldots,n\}} \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}$$

et $\mathscr{E}$ est donc borné.
– Enfin, soit $(t_p)_{p \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{E}$ qui converge vers $t \in \mathbf{R}$. Pour tout $p \in \mathbf{N}$, il existe $x_p \in \mathscr{C} \setminus \{0\}$, tel que $Ax_p - t_p x_p \in \mathscr{C}$. Les x_p étant non nuls, on peut considérer la suite $(y_p)_{p \in \mathbf{N}} = \left(\frac{x_p}{\|x_p\|}\right)_{p \in \mathbf{N}}$, bornée en dimension finie : d'après le théorème de Bolzano-Weiertrass, on peut en extraire une sous-suite $\left(y_{p_k}\right)_{k \in \mathbf{N}}$ qui converge vers y, avec $\|y\| = 1$. Les coordonnées des y_p étant positives, celles de y le sont également, et $y \in \mathscr{C} \setminus \{0\}$. Comme pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a $Ay_{p_k} - t_{p_k} y_{p_k} \in \mathscr{C}$, par passage à la limite on en déduit que $Ay - ty \in \mathscr{C}$. Ainsi, $t \in \mathscr{E}$, et $\mathscr{E}$ est fermé.

1. (6) L'ensemble $\mathscr{E}$ étant un intervalle fermé et borné non réduit à $\{0\}$, $0 < \rho < \infty$ est bien défini et appartient à $\mathscr{E}$. En particulier il existe $x \neq 0$ à coordonnées positives tel que $Ax \geqslant \rho x$. Si $y = Ax - \rho x \neq 0$, alors $y \in \mathscr{C} \setminus \{0\}$ et donc Ay a ses coordonnées strictement positives. Pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit, on a $Ay - \epsilon Ax = A(Ax) - (\rho + \epsilon)Ax \in \mathscr{C}$. Par exemple,

$$\epsilon = \frac{1}{2} \frac{\min_{1 \leqslant j \leqslant n} (Ay)_j}{\max_{1 \leqslant j \leqslant n} (Ax)_j}$$

convient. Comme $Ax \in \mathscr{C} \setminus \{0\}$, cela contredit la définition de ρ et on en conclut que nécessairement $Ax = \rho x$. Comme $x \neq 0$ est à coordonnées positives, Ax est à coordonnées strictement positives et, puisque $\rho > 0$, on a $x_j > 0$ pour tout $j \in \{1, .., n\}$. Le vecteur $v = x$ répond donc à la question.

1. (7) On va exploiter le fait que pour tout vecteur $z \in \mathbf{C}^n$, on a $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$(R) \qquad \Big| \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} z_j \Big| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} |z_j|$$

c'est-à-dire que $A|z| - |Az| \in \mathscr{C}$. On décompose l'argumentation comme suit :
– Soit z un vecteur propre de A pour la valeur propre $\lambda \in \mathbf{C}$. D'après (R), on a $|Az| = |\lambda|\,|z| \leqslant A|z|$ qui prouve déjà que $|\lambda| \leqslant \rho$. Le spectre de A est contenu dans le disque de rayon ρ, qui est donc, d'après la question précédente, le rayon spectral.
– Supposons d'abord $\lambda = \rho$ et $z \neq 0$. Alors $|z| \in \mathscr{C} \setminus \{0\}$, et $|Az| = \rho |z|$. D'après (R), on a $A|z| - |Az| = A|z| - \rho|z| \in \mathscr{C}$, mais d'après le 1.(6) ceci implique qu'en fait $A|z| = \rho|z| = |Az|$. Le 1.(3) implique alors l'existence de $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $z = e^{i\theta}|z|$. En reportant dans la condition d'orthogonalité, il vient $(z|v) = e^{-i\theta} \sum_{k=1}^{n} |z_k| v_k = 0$, et comme les v_k sont strictement positifs, cela ne se peut. Nécessairement, on a donc $z = 0$.
– Pour tout $z \in \operatorname{Ker}\big(A - \rho\mathbf{1}\big)$, on peut décomposer $z = \alpha v + w$, où $\alpha \in \mathbf{C}$ et $(w|v) = 0$. Alors $w = z - \alpha v \in \operatorname{Ker}\big(A - \rho\mathbf{1}\big)$, et ce qui précède montre que $w = 0$. Ainsi

$$\operatorname{Ker}\big(A - \rho\mathbf{1}\big) = \operatorname{Vect}\{v\}.$$

– Finalement soit $\lambda \neq \rho$ valeur propre telle que $|\lambda| = \rho$, et z un vecteur propre associé. Alors $A|z| - |Az| = A|z| - \rho|z| \in \mathscr{C}$, d'après (R). Le 1.(6) entraîne que $|z| \in \mathrm{Ker}\big(A - \rho\mathbf{1}\big) = \mathrm{Vect}\{v\}$, et le 1.(3) assure l'existence de $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $z = e^{i\theta}|z|$. On en déduit que $z \in \mathrm{Vect}\{v\}$, ce qui contredit $\lambda \neq \rho$. Finalement, pour toute valeur propre de A, on a
$$|\lambda| < \rho.$$

1. (8) Soit x un vecteur propre de A appartenant à $\mathscr{C}$, associé à une valeur propre λ de A, et ϕ un vecteur propre de A^T à coordonnées strictement positives associé à la valeur propre ρ (ϕ existe, car A et A^T ont les mêmes valeurs propres, et les coefficients de A^T sont strictement positifs : les résultats obtenus pour A s'appliquent donc à A^T).

Alors $\phi^T Ax = \lambda\phi^T x = \lambda(\phi|x) = (A^T\phi)^T x = \rho(\phi|x)$. Cependant, comme x et ϕ appartiennent à $\mathscr{C}$ et $x \neq 0$, ϕ à coordonnées strictement positives, on a $(\phi|x) > 0$. Il s'ensuit que $\lambda = \rho$, et
$$x \in \mathrm{Ker}\big(A - \rho\mathbf{1}\big) = \mathrm{Vect}\{v\}.$$

1. (9) L'équation $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y = Ay$ est linéaire homogène à coefficients constants. Le théorème de Cauchy-Lipschitz (version linéaire) s'applique et (1) admet une unique solution définie sur $\mathbf{R}$. On sait de plus que cette solution est définie pour tout $t \in \mathbf{R}$ par la relation
$$y(t) = \exp(tA)\,y_{\mathrm{Init}}.$$

En particulier pour $t \geqslant 0$, il vient : $y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^k}{k!} y_{\mathrm{Init}}$. Les coefficients de A étant positifs, ceux de A^k le sont également pour tout $k \in \mathbf{N}$. Comme $y_{\mathrm{Init}} \in \mathscr{C}$, il en résulte que
$$\forall\, t \geqslant 0,\ \forall\, j \in \{1, \dots, n\}, \qquad y_j(t) \geqslant 0.$$

Remarque 1 *On pouvait aussi raisonner de la façon suivante. Considérons maintenant y_{Init} à coordonnées positives et soit $\epsilon > 0$. Par continuité, la solution associée à la donnée initiale $y_{\mathrm{Init}} + \epsilon\mathbf{e}$, qu'on note y_ϵ, a ses coordonnées strictement positives au moins sur un petit intervalle de temps. Soit $T_\epsilon = \sup\{t > 0,\ y_{\epsilon,j}(s) \geqslant 0,\ j \in \{1, \dots, n\},\ 0 \leqslant s \leqslant t\}$. On a*
$$y_\epsilon(t) = y_{\mathrm{Init}} + \epsilon\mathbf{e} + \int_0^t Ay_\epsilon(s)\,\mathrm{d}s$$
qui prouve que $y_j(t) \geqslant \epsilon$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ et $0 \leqslant t \leqslant T_\epsilon$. On en déduit que $T_\epsilon = +\infty$. Par continuité par rapport aux données (y_ϵ converge vers y uniformément sur tout intervalle borné), on en déduit que $y_j(t) \geqslant 0$.

1. (10) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $\forall\, t \in \mathbf{R}$, $f(t) = (y(t)|\phi)$. On a $\forall\, t \in \mathbf{R}$,
$$f'(t) = (y'(t)|\phi) = (Ay(t)|\phi) = (y(t)|A^T\phi) = \rho f(t).$$

Comme de plus $f(0) = (y_{\mathrm{Init}}|\phi)$, il en découle que $\forall\, t \in \mathbf{R}$, $f(t) = (y_{\mathrm{Init}}|\phi)e^{\rho t}$, d'où
$$(y(t)|\phi)e^{-\rho t} = (y_{\mathrm{Init}}|\phi).$$

1. (11) Les coordonnées $(\phi_1, \dots, \phi_n)$ de ϕ étant strictement positives, et les fonctions $t \mapsto y_j(t)$ étant positives sur $\mathbf{R}^+$, il vient :
$$\forall\, j \in \{1, \dots, n\}, \forall\, t \in [0, +\infty[, \qquad 0 \leqslant e^{-\rho t} y_j(t) \leqslant \frac{1}{\phi_j}\sum_{k=1}^{n} \phi_k e^{-\rho t} y_k(t) = \frac{(y_{\mathrm{Init}}|\phi)}{\phi_j}.$$

La fonction $t \mapsto e^{-\rho t} y_j(t)$ est donc bornée sur $[0, +\infty[$.

1. (12) On utilise la décomposition de Dunford de la matrice A. Soit $\Pi \in GL_n(\mathbf{C})$ telle que $\Delta = \Pi^{-1} D \Pi$ soit diagonale. On pose $N' = \Pi^{-1} N \Pi$ et on désigne par m l'exposant de nilpotence de N : $N^{m-1} \neq 0$ et $N^m = 0$. Comme D et N commutent, on a :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \qquad \exp(tA) = \exp(tD)\exp(tN) = \Pi \exp(t\Delta)\exp(tN')\Pi^{-1}.$$

De plus, N' étant nilpotente avec $N'^m = 0$, il vient :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \qquad \exp(tN') = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k N'^k}{k!},$$

alors que $\exp(t\Delta)$ est une matrice diagonale, de coefficients diagonaux $e^{\lambda t}$, avec $\lambda \in \sigma(A)$. Les coefficients de Π étant indépendants de t, en explicitant les coordonnées de $y(t) = \exp(tA)y_{\mathrm{Init}}$ on obtient, pour $j \in \{1, \dots, n\}$, l'existence de fonctions polynomiales $\{t \mapsto P_{\lambda,j}(t),\ \lambda \in \sigma(A)\}$ telles que

$$y_j(t) = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} P_{\lambda,j}(t) e^{\lambda t}.$$

1. (13) On peut donc écrire

$$\forall t \geqslant 0, \qquad y_j(t)e^{-\rho t} = P_{\rho,j}(t) + \sum_{\lambda \in \sigma(A), \lambda \neq \rho} P_{\lambda,j}(t) e^{(\lambda-\rho)t}.$$

Or on a vu au 1.(7) que pour $\lambda \in \sigma(A), \lambda \neq \rho$, on a $|\lambda| < \rho$, et donc $\mathrm{Re}(\lambda) \leqslant |\lambda| < \rho$. Comme

$$\Big| \sum_{\lambda \in \sigma(A), \lambda \neq \rho} P_{\lambda,j}(t) e^{(\lambda-\rho)t} \Big| \leqslant \sum_{\lambda \in \sigma(A), \lambda \neq \rho} |P_{\lambda,j}(t)|\ e^{(\mathrm{Re}(\lambda)-\rho)t},$$

où le majorant tend vers 0 quand $t \to \infty$, il s'ensuit que

$$\lim_{t \to +\infty} \sum_{\lambda \in \sigma(A), \lambda \neq \rho} P_{\lambda,j}(t) e^{(\lambda-\rho)t} = 0.$$

En temps grands, et pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, la fonction $t \mapsto y_j(t)e^{-\rho t}$ se comporte donc comme la fonction polynômiale $t \mapsto P_{\rho,j}(t)$. Or, d'après 1.(11) cette fonction est bornée, ce qui implique alors que $P_{\rho,j}$ est un polynôme borné sur $[0, +\infty[$, c'est donc un polynôme constant, qu'on notera dorénavant $p_j \in \mathbf{C}$.

1. (14) On note $p = (p_1, \dots, p_n)$. Les calculs précédents montrent que

$$\lim_{t \to +\infty} y(t)e^{-\rho t} = p.$$

Définissons alors $t \in \mathbf{R}^+ \mapsto g(t) = y(t)e^{-\rho t} \in \mathbf{R}^n$. Il vient $g'(t) = \big(y'(t) - \rho y(t)\big)e^{-\rho t} = (A - \rho \mathbf{1})g(t)$ qui entraîne

$$\lim_{t \to +\infty} g'(t) = (A - \rho \mathbf{1})p.$$

Par ailleurs, en dérivant l'application

$$t \mapsto y_j(t)e^{-\rho t} = p_j + \sum_{\lambda \in \sigma(A), \lambda \neq \rho} P_{\lambda,j}(t) e^{(\lambda-\rho)t} = g_j(t),$$

on obtient

$$g_j'(t) = \sum_{\lambda \in \sigma(A), \lambda \neq \rho} \big(P'_{\lambda,j}(t) + (\lambda - \rho)P_{\lambda,j}(t)\big) e^{(\lambda-\rho)t}.$$

En utilisant comme précédemment le fait que $\mathrm{Re}(\lambda) \leqslant |\lambda| < \rho$, on obtient

$$\lim_{t \to +\infty} g_j'(t) = 0.$$

En identifiant les limites, on en déduit que $(A-\rho\mathbf{1})p = 0$, donc 1.(8) entraîne qu'il existe un scalaire $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $p = \alpha v$. On note en effet que α est réel, car les coordonnées de $g(t)$ et de v le sont, donc également celles de p. On identifie cette constante en revenant à 1.(10) : par passage à la limite, on obtient $(p|\phi) = (y_{\text{Init}}|\phi) = \alpha(v|\phi) = \alpha$. Finalement, on en conclut que

$$p = (y_{\text{Init}}|\phi)\,v.$$

Remarque 2 *Dans le cadre proposé ici où la matrice A a tous ses coefficients strictement positifs, une autre démonstration consiste à exhiber des propriétés de dissipation du système différentiel qui traduisent la convergence vers l'état asymptotique. On calcule*

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{j=1}^{n}\Big(e^{-\rho t}\frac{y_j(t)}{v_j}\Big)^2 v_j\phi_j\\
&= \sum_{j=1}^{n} e^{-2\rho t}\frac{y_j(t)}{v_j}\Big(\frac{-\rho y_j(t)}{v_j}+\frac{(Ay(t))_j}{v_j}\Big)v_j\phi_j\\
&= \sum_{j=1}^{n} e^{-2\rho t}\Big(\underbrace{-\rho v_j\phi_j}_{=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}a_{j,k}v_k\phi_j-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}a_{k,j}\phi_k v_j}\Big(\frac{y_j(t)}{v_j}\Big)^2+\sum_{k=1}^{n}a_{j,k}y_k(t)\frac{y_j(t)}{v_j}\phi_j\Big)\\
&= -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} e^{-2\rho t}a_{j,k}\Big(v_k\phi_j\Big(\frac{y_j(t)}{v_j}\Big)^2+v_j\phi_k\Big(\frac{y_k(t)}{v_k}\Big)^2-2v_k\phi_j\frac{y_j(t)}{v_j}\frac{y_k(t)}{v_k}\Big)\\
&= -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} a_{j,k}\Big(e^{-\rho t}\frac{y_k(t)}{v_k}-e^{-\rho t}\frac{y_j(t)}{v_j}\Big)^2.
\end{aligned}$$

On note $-D(t)$ le terme de droite. Ce calcul permet d'établir que $H : t \mapsto \sum_{j=1}^{n}\big(e^{-\rho t}\frac{y_j(t)}{v_j}\big)^2 v_j\phi_j$ est décroissante sur $\mathbf{R}^+$ et admet donc une limite $H_\infty \geqslant 0$ quand $t\to\infty$ et que $t\mapsto D(t)\in L^2(\mathbf{R}^+)$. Soit $\big(t^{(\nu)}\big)_{\nu\in\mathbf{N}}$ une suite croissante qui tend vers $+\infty$. On peut appliquer le théorème d'Arzela-Ascoli à la suite de fonctions $z^{(\nu)}(t) = e^{-\rho(t+t^{(\nu)})}\frac{y_j(t+t^{(\nu)})}{v_j}$ puisque ces fonctions et leurs dérivées sont uniformément bornées. On pourra donc supposer, quite à extraire une sous-suite qu'on notera $\big(t^{\nu_m}\big)_{m\in\mathbf{N}}$, que $z^{(\nu_m)}$ converge uniformément sur $[0,T]$, $0<T<\infty$, vers une limite $\ell_j^\infty(t)$. Or, on a

$$H(t+t^{(\nu_m)})+\int_{t^{(\nu_m)}}^{t+t^{(\nu_m)}}D(s)\,\mathrm{d}s = H(t+t^{(\nu_m)})+\int_0^t D(s+t^{(\nu_m)})\,\mathrm{d}s = H(t^{(\nu_m)}).$$

Donc en faisant $m\to\infty$ on obtient

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^t D(s+t^{(\nu_m)})\,\mathrm{d}s = 0.$$

Comme $D(t)\geqslant 0$, par le lemme de Fatou, on en déduit que

$$D(s+t^{(\nu_m)}) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0 = \sum_{k,j=1}^{n} a_{k,j}v_k\phi_j\Big|\ell_j^\infty(s)-\ell_k^\infty(s)\Big|^2.$$

Il s'ensuit que $\ell_j^\infty(t) = \ell^\infty(t)$ ne dépend pas de j. La relation de conservation permet d'identifier cette fonction ℓ^∞ :

$$\sum_{j=1}^{n} e^{-\rho(t+t^{(\nu_m)})}y_j(t+t^{(\nu_m)})\phi_j = \sum_{j=1}^{n} e^{-\rho(t+t^{(\nu_m)})}\frac{y_j(t+t^{(\nu_m)})}{v_j}\,v_j\phi_j = y_{\text{Init}}\cdot\phi \xrightarrow[m\to\infty]{} \ell^\infty(t)\,v\cdot\phi$$

donne

$$\ell^\infty(t) = \frac{y_{\text{Init}}\cdot\phi}{v\cdot\phi} = y_{\text{Init}}\cdot\phi,$$

qui ne dépend donc ni de j ni de t. La limite étant définie de manière unique on a bien identifié la limite quand $t\to\infty$. Autrement dit, $y(t)$ se comporte comme $e^{\rho t}\ell^\infty\, v$ quand $t\to\infty$.

Ce type d'approche peut être reliée à différents contextes : fonctionnelle de Lyapounov pour les systèmes dynamiques ou "fonctionnelles d'entropie" pour les équations aux dérivées partielles. Pour des extensions et applications motivées par la biologie et la dynamique des populations on pourra consulter la thèse de P. Michel [9].

Remarque 3 *Les conclusions du Théorème de Perron–Froebenius s'appliquent encore sous des hypothèses relaxées sur la matrice A : on peut se contenter de supposer qu'il existe un entier J tel que A^J a tous ses coefficients strictement positifs (matrice* ergodique*). Une telle extension repose sur le fait que pour toute fonction polynômiale P on a*

$$\sigma(P(A)) = \{P(\lambda),\ \lambda \in \sigma(A)\}.$$

On prendra garde au fait que les espaces propres de A et de A^J ne peuvent pas être identifiés : on peut avoir $\lambda_1 \neq \lambda_2$ éléments de $\sigma(A)$ avec $\lambda_1^J = \lambda_2^J$. Néanmoins le Théorème 1 assure que la valeur propre dominante de A^J est simple et il en va donc de même pour A.

Pour donner un exemple pertinent en dynamique des populations, on peut ainsi considérer la matrice de Leslie

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ t_{2,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_{3,2} & 0 & \dots \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & t_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

avec des coefficients $f_j > 0$ qui sont des taux de fertilité et $t_{j,j+1} > 0$ qui sont des taux de transition donnant la proportion d'individus de la catégorie d'âge j pouvant atteindre la catégorie d'âge $j+1$. Le Théorème de Perron–Froebenius s'applique pour cette matrice. Le système différentiel décrivant l'évolution de la population est $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y = (\tilde{A} - \mathbf{1})y$. Ainsi, en adaptant les arguments du problème, si la valeur propre dominante de $\tilde{A}$ est < 1 la population s'éteind exponentiellement vite, si elle est > 1 la population croît exponentiellement rapidement. On trouvera des détails sur ce modèle dans [2].

En fait, la notion cruciale est celle d'irréductibilité qui est liée aux propriétés de connexité du graphe de la matrice A : à la matrice $A \in \mathscr{M}_n$ on associe le graphe composé de n sommets où un arc relie les sommets i et j lorsque $a_{i,j} > 0$ et on dit que A est irréductible si pour tout couple (i, j) il existe un chemin (c'est-à dire une suite de tels arcs) liant i à j. Pour plus de détails sur cette théorie, on pourra par exemple consulter [6].

Commentaire 2 *La quasi totalité des candidats a pu aborder cette partie, notamment les questions 1.(1) à 1.(7). Celles-ci se sont donc avérées très discriminantes : au delà de la validité des réponses, la solidité de l'argumentation et les qualités de rédaction ont été tout particulièrement prises en compte par les correcteurs sur ces questions. Par exemple dans la question 1.(3), en appliquant le résultat de 1.(1), il fallait bien mettre en évidence le fait que l'argument θ ne dépend pas des indices. Dans la question 1.(5), beaucoup ne sont pas parvenus à justifier que $\mathscr{E}$ est fermé. Etonnamment la question 1.(8) n'a été que très peu traitée : il est à craindre que cela indique un manque de réflexes en algèbre linéaire de base (spectre d'une matrice et de sa transposée...).*

Le passage à l'étude d'un système différentiel a très nettement arrêté une proportion (malheureusement) significative des candidats qui s'est orientée sur une autre partie du texte. Ce constat doit être considéré comme alarmant quant à la maîtrise des rudiments de la théorie des équations différentielles. Bien sûr, à la question 1.(8) les candidats qui ont écrit la formule avec l'exponentielle de matrice en intervertissant e^{tA} et le vecteur des données initiales ont été pénalisés.

Partie II : Quelques éléments d'analyse spectrale

2. (1) Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a $\|T^k\|_{\mathscr{L}(E)} \leqslant \|T\|^k_{\mathscr{L}(E)}$, le majorant étant le terme général d'une série géométrique convergente puisque $\|T\|_{\mathscr{L}(E)} < 1$. Il en découle que la série $\sum_{k\in\mathbf{N}} T^k$ converge absolument, donc converge dans l'algèbre de Banach $\mathscr{L}(E)$. De même, la série $\sum_{k\in\mathbf{N}} T^{k+1}$ converge dans $\mathscr{L}(E)$, et

$$(\mathbf{1}-T)(\sum_{k=0}^{\infty} T^k) = (\sum_{k=0}^{\infty} T^k)(\mathbf{1}-T) = \sum_{k=0}^{\infty} T^k - \sum_{k=0}^{\infty} T^{k+1} = \mathbf{1}.$$

L'opérateur $\mathbf{1}-T$ est donc inversible dans $\mathscr{L}(E)$: $1 \in \mathrm{Res}(T)$, et

$$(\mathbf{1}-T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k.$$

2. (2) Si $|\lambda| > \|T\|_{\mathscr{L}(E)}$ alors $\lambda \neq 0$ et $\|\frac{T}{\lambda}\|_{\mathscr{L}(E)} < 1$. Le 2.(1) garantit alors que $\mathbf{1} - \frac{T}{\lambda}$ est inversible dans $\mathscr{L}(E)$, donc aussi $\lambda\mathbf{1} - T$: $\lambda \in \mathrm{Res}(T)$. De plus, on a

$$R_\lambda(T) = \frac{1}{\lambda}\big(1-\frac{T}{\lambda}\big)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{T^k}{\lambda^k}.$$

Il s'ensuit que

$$\|R_\lambda(T)\|_{\mathscr{L}(E)} \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|T\|^k_{\mathscr{L}(E)}}{|\lambda|^k} = \frac{1}{|\lambda| - \|T\|_{\mathscr{L}(E)}}$$

ce qui implique

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \|R_\lambda(T)\|_{\mathscr{L}(E)} = 0.$$

2. (3) Rappelons d'abord que le produit de deux éléments $A, B \in \mathscr{L}(E)$ inversibles dans $\mathscr{L}(E)$ l'est encore avec $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Soit $\lambda_0 \in \mathrm{Res}(T)$ et $h \in \mathbf{C}$. On peut écrire

$$(\lambda_0 + h)\mathbf{1} - T = h\mathbf{1} + \lambda_0\mathbf{1} - T = (\lambda_0\mathbf{1} - T)(\mathbf{1} + hR_{\lambda_0}(T)).$$

D'après 2.(1), si $|h| < \frac{1}{\|R_{\lambda_0}(T)\|_{\mathscr{L}(E)}}$, alors $\|hR_{\lambda_0}(T)\|_{\mathscr{L}(E)} < 1$ et $\mathbf{1} + hR_{\lambda_0}(T)$ est inversible dans $\mathscr{L}(E)$, donc l'opérateur $(\lambda_0 + h)\mathbf{1} - T$ l'est aussi comme produit d'opérateurs inversibles. Il s'ensuit que $\lambda_0 + h \in \mathrm{Res}(T)$, et que ce dernier ensemble est un ouvert de $\mathbf{C}$.
En outre, $R_{\lambda_0+h}(T) = (\mathbf{1} + hR_{\lambda_0}(T))^{-1}(\lambda_0\mathbf{1} - T)^{-1}$ et d'après le 2.(1), pour tout $x \in E$ on a

$$R_{\lambda_0+h}(T)x = \sum_{k=0}^{+\infty}(-hR_{\lambda_0}(T))^k\, R_{\lambda_0}(T)x = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k h^k R_{\lambda_0}(T)^{k+1}x,$$

cette dernière série convergeant absolument dans l'espace de Banach E car $|h|\|R_{\lambda_0}(T)\|_{\mathscr{L}(E)} < 1$. Pour toute forme linéaire continue ℓ, il vient :

$$\Phi(\lambda_0 + h) = \ell\big(R_{\lambda_0+h}(T)x\big) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k h^k \ell\big(R_{\lambda_0}(T)^{k+1}x\big).$$

La fonction Φ est donc bien développable en série entière au voisinage de tout point de $\mathrm{Res}(T)$.

2. (4) L'ensemble $\mathrm{Res}(T)$ étant ouvert, $\sigma(T)$ est fermé. De plus, le 2.(2) implique que si $\lambda \in \sigma(T)$, alors $|\lambda| \leqslant \|T\|_{\mathscr{L}(E)}$: $\sigma(T)$ est fermé borné dans $\mathbf{C}$, donc compact.

Si $\sigma(T)$ était vide, on aurait $\mathrm{Res}(T) = \mathbf{C}$ et pour $(x,\ell) \in E \times E'$ donnés, l'application Φ définie au 2.(3) serait développable en série entière au voisinage de tout point de $\mathbf{C}$, donc holomorphe sur $\mathbf{C}$ tout entier.
Or, d'après le 2.(2) encore, si $|\lambda| > \|T\|_{\mathscr{L}(E)}$, alors

$$|\Phi(\lambda)| \leqslant \|\ell\|_{E'}\|R_\lambda(T)\|_{\mathscr{L}(E)}\|x\|_E \leqslant \frac{\|\ell\|_{E'}\|x\|}{|\lambda| - \|T\|_{\mathscr{L}(E)}}.$$

La fonction Φ est ainsi bornée sur $\mathbf{C}$ (car elle est bornée sur le compact $B(0,\|T\|_{\mathscr{L}(E)}+1)$, et si $|\lambda|\geqslant\|T\|_{\mathscr{L}(E)}+1$, alors $|\Phi(\lambda)|\leqslant\|\ell\|_{E'}\|x\|$). D'après le théorème de Liouville, rappelé dans l'énoncé, Φ est constante sur $\mathbf{C}$. Cependant la majoration ci-dessus entraîne

$$\lim_{|\lambda|\to+\infty}\Phi(\lambda)=0.$$

Il s'ensuit que Φ est identiquement nulle sur $\mathbf{C}$. Soient $\ell\in E'\setminus\{0\}$ et $y\in E$ tel que $\ell(y)\neq 0$. On pose $x=T(y)$. Comme $0\in\operatorname{Res}(T)$, on a $\ell(-y)=\ell(R_0(T)x)=0$ ce qui ne se peut. On en conclut que $\sigma(T)$ est non vide.

Remarque 4 *On peut justifier que $\sigma(T)\neq\emptyset$ en utilisant la formule des résidus et la fomule intégrale de Cauchy. En effet, on a vu que pour $|\lambda|>\|T\|$ on a $R_\lambda(T)=\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda^k}T^k$ et donc*

$$\Phi(\lambda)=\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda^k}\ell(T^kx),$$

qui peut s'interpréter comme une série de Laurent pour Φ, dont le premier terme est $\frac{\ell(x)}{\lambda}$. Soit $m>\|T\|$; on définit dans le plan complexe le contour $\mathscr{C}=\{\lambda\in\mathbf{C},\ |\lambda|=m\}$. On obtient alors, par la formule des résidus,

$$\oint_{\mathscr{C}}\Phi(\lambda)\frac{\mathrm{d}\lambda}{2i\pi}=\ell(x).$$

Mais, si $\sigma(T)=\emptyset$, la fonction Φ est analytique sur $\mathbf{C}$ tout entier et cette intégrale vaut 0 pour tous ℓ,x, d'après la formule intégrale de Cauchy.

2. (5) Comme $M\neq E$, il existe $x\in E\setminus M$ et, M étant fermé, $\mathrm{d}(x,M)>0$. En effet si on suppose qu'il existe une suite $\left(y_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de M telle que $\mathrm{d}(x,M)=0=\lim_{n\to\infty}\|x-y_n\|$, alors ceci entraîne que y_n tend vers x dans E et donc que $x\in M$ puisque M est fermé.

Notons $\delta=\mathrm{d}(x,M)>0$. Par définition de la distance à un sous-ensemble, il existe $y\in M$ tel que $\delta<\|x-y\|\leqslant 2\delta$. On pose $z=\frac{x-y}{\|x-y\|}$ et on a, pour tout $\xi\in M$, $\|z-\xi\|=\frac{1}{\|x-y\|}\|x-(y+\|x-y\|\xi)\|$. Or, puisque M est un sous-espace-vectoriel de E, $y+\|x-y\|\xi\in M$. Il s'ensuit que $\|z-\xi\|\geqslant\frac{1}{2\delta}\,\delta=\frac{1}{2}$. Ce résultat étant acquis, lorsque E est de dimension infinie, on définit par récurrence :

– Soit $x_0\in E$ tel que $\|x_0\|=1$.
– Soit $n\in\mathbf{N}$; si $(x_0,\dots,x_n)$ sont définis et vérifient les conditions requises, on pose $M_n=\operatorname{Vect}(x_0,\dots,x_n)$. C'est un sous-espace de dimension finie, donc fermé et $M_n\neq E$. D'après ce qui précède, il existe x_{n+1} de norme 1 tel que $\mathrm{d}(x_{n+1},M_n)\geqslant\frac{1}{2}$. En particulier, pour tous $k<n$, on a $\|x_{n+1}-x_k\|\geqslant\frac{1}{2}$.

Ce procédé prouve l'existence d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de vecteurs unitaires tels que pour tous $n\neq m$, on a $\|x_n-x_m\|\geqslant\frac{1}{2}$.

2. (6) Si $0\notin\sigma(T)$, alors T est inversible dans $\mathscr{L}(E)$. Considérons la suite $\left(x_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ construite dans 2.(5). En particulier cette suite est bornée, et on peut en extraire une sous-suite $\left(x_{n_k}\right)_{k\in\mathbf{N}}$ telle que $\left(T(x_{n_k})\right)_{k\in\mathbf{N}}$ converge, puisque T est compact. Comme T^{-1} est continue, la suite $\left(x_{n_k}=T^{-1}T(x_{n_k})\right)_{k\in\mathbf{N}}$ converge également, ce qui contredit le fait que $\|x_n-x_m\|\geqslant\frac{1}{2}$ pour $n\neq m$. On en conclut que $0\in\sigma(T)$.

Soit à présent une valeur propre $\lambda\neq 0$ de T. L'ensemble $\operatorname{Ker}(\lambda\mathbf{1}-T)$ est un sous-espace vectoriel de E et il est fermé comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue $\lambda\mathbf{1}-T$. Ainsi, si $\operatorname{Ker}(\lambda\mathbf{1}-T)$ était de dimension infinie, grâce à 2.(5), on pourrait trouver une suite $\left(x_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ de vecteurs unitaires éléments de $\operatorname{Ker}(\lambda\mathbf{1}-T)$ et tels que $\forall n\neq m$, $\|x_n-x_m\|\geqslant\frac{1}{2}$. Comme T est compact, on peut extraire $\left(x_{n_k}\right)_{k\in\mathbf{N}}$ telle que $T(x_{n_k})$ converge, et comme $x_{n_k}=\frac{1}{\lambda}T(x_{n_k})$, la suite $\left(x_{n_k}\right)_{k\in\mathbf{N}}$ converge également, ce qui est impossible. Nécessairement, on a donc

$$\dim[\operatorname{Ker}(\lambda\mathbf{1}-T)]<+\infty.$$

2. (7) On reprend les étapes de l'énoncé.

i) On raisonne par l'absurde, en exhibant une suite dont les éléments sont normalisés $\|x_n\| = 1$ et tels que $\|\lambda x_n - Tx_n\| \leqslant 1/n$ tend vers 0. Or, T étant compact, on peut extraire une sous suite telle que $Tx_{n_k} \to y$ dans E. Alors on a $x_{n_k} = \frac{1}{\lambda}(\lambda x_{n_k} - Tx_{n_k}) + \frac{1}{\lambda} Tx_{n_k} \to \frac{1}{\lambda} y$, la limite étant de norme 1. Par continuité, il s'ensuit que $Tx_{n_k} \to \frac{1}{\lambda} Ty$ et finalement il vient $(\lambda \mathbf{1} - T)x_{n_k} \to 0 = y - \frac{1}{\lambda} Ty$. Comme $y \neq 0$ ceci nie le fait que $\lambda \mathbf{1} - T$ est injectif.
On a en déduit bien l'existence d'un certain $\alpha > 0$ tel que

$$(\star) \qquad \|\lambda x - Tx\| \geqslant \alpha \|x\|$$

pour tout $x \in E$.
Soit une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathscr{F}$ telle que $x_n - Tx_n \to y$. Alors l'inégalité $(\star)$ montre que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy, donc admet une limite $x \in \mathscr{F}$ et par continuité on a $y = x - Tx$. L'image par $\lambda \mathbf{1} - T$ de $\mathscr{F}$ est donc fermée.

ii) Bien sûr on a $\mathrm{Im}((\lambda \mathbf{1} - T)^{n+1}) \subset \mathrm{Im}(((\lambda \mathbf{1} - T)^n)$ car $(\lambda \mathbf{1} - T)^{n+1} x = (\lambda \mathbf{1} - T)^n (\lambda \mathbf{1} - T)x$. Afin de montrer que ces inclusions sont strictes, on raisonne encore par l'absurde en supposant que $\mathrm{Im}(((\lambda \mathbf{1} - T)^{n+1}) = \mathrm{Im}(((\lambda \mathbf{1} - T)^{n+1})$. Alors pour tout $x \in E$ il existe $y \in E$ tel que $(\lambda \mathbf{1} - T)^{n+1} y - (\lambda \mathbf{1} - T)^n x = 0 = (\lambda \mathbf{1} - T)(\lambda \mathbf{1} - T)^n y - (\lambda \mathbf{1} - T)^{n-1} x)$. Or $(\lambda \mathbf{1} - T)$ est injectif donc on a $(\lambda \mathbf{1} - T)^n y - (\lambda \mathbf{1} - T)^{n-1} x = 0 = (\lambda \mathbf{1} - T)(\lambda \mathbf{1} - T)^{n-1} y - (\lambda \mathbf{1} - T)^{n-2} x)$.... En itérant ainsi on obtient $x = (\lambda \mathbf{1} - T) y$ qui contredit le fait que $\mathrm{Im}(\lambda \mathbf{1} - T) \neq E$.

iii) Du i) on déduit que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathrm{Im}\big((\lambda \mathbf{1} - T)^n\big)$ est fermé. Le 2.(5) et le caractère strict des inclusions établi en iii) assurent alors l'existence de $x_n \in \mathrm{Im}\big((\lambda \mathbf{1} - T)^n\big)$ tel que $\|x_n\| = 1$ et $\mathrm{d}(x_n, \mathrm{Im}\big((\lambda \mathbf{1} - T)^{n+1}\big)) \geqslant 1/2$.

iv) On remarque alors que, pour $p \geqslant n$

$$Tx_n - Tx_p = (\lambda x_p - Tx_p) - (\lambda x_n - Tx_n) - \lambda x_p + \lambda x_n$$

où $(\lambda x_p - Tx_p) \in \mathrm{Im}((\lambda \mathbf{1} - T)^{p+1}) \subset \mathrm{Im}((\lambda \mathbf{1} - T)^{n+1})$, $\lambda x_p \in \mathrm{Im}((\lambda \mathbf{1} - T)^p) \subset \mathrm{Im}((\lambda \mathbf{1} - T)^{n+1})$. Il s'ensuit donc que

$$\|Tx_n - Tx_p\| \geqslant \mathrm{d}(x_n, \mathrm{Ran}((\lambda \mathbf{1} - T)^{n+1}) \geqslant 1/2.$$

Donc, aucune sous-suite ne peut être extraite de $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $(Tx_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ soit de Cauchy. Ceci contredit le fait que $\|x_n\| = 1$ et T est compact. On a donc forcément $\mathrm{Im}(\lambda \mathbf{1} - T) = E$ et donc $\lambda \in \mathrm{Res}(T)$.

Il résulte de la discussion qui précède que, si $\lambda \neq 0$ n'est pas valeur propre de T, alors $\lambda \mathbf{I} - T$ est injectif, et aussi surjectif. En outre, le i) montre que $\forall y \in E$, on a l'estimation

$$\|(\lambda \mathbf{I} - T)^{-1} y\| \leqslant \frac{\|y\|}{\alpha},$$

et $(\lambda \mathbf{I} - T)^{-1}$ est donc continu (on pouvait aussi conclure sur ce point en évoquant directement le théorème de l'inverse borné, corollaire du théorème de l'application ouverte [5, Cor. 5.45]), et $\lambda \in \mathrm{Res}(T)$. Par contraposée, si $\lambda \neq 0$ appartient au spectre de T, alors λ est valeur propre de T.

Commentaire 3 *Il s'agissait là de développements très classiques de la théorie des opérateurs, nécessitant aux questions 2.(3) et 2.(4) des arguments d'analyse complexe, et beaucoup de candidats y ont trouvé matière à s'exprimer, notamment dans les questions 2.(1) à 2.(4), puis dans une moindre mesure 2.(5) et 2.(6). Dans la question 2.(1) il fallait bien mettre en évidence que la série $\sum_{k=0}^{\infty} T^k$ converge dans $\mathscr{L}(E)$ et donc que la somme $(I-T)^{-1}$ est bien un opérateur continu. L'estimation justifiant le comportement de $R_\lambda(T)$ quand $\lambda \to 0$ n'a pas toujours été énoncée clairement. La question 2.(7) a consitué un obstacle infranchissable pour la très grande majorité des candidats, y compris pour ceux qui avaient traité correctement les questions précédentes.*

Partie III : Exemple et contre-exemple sur un espace de fonctions

3. (1) On traite des deux items de la façon suivante.

i) Une application directe du théorème de Lebesgue montre que $\mathscr{I}[f] \in C^0([0,1])$ pour tout $f \in C^0([0,1])$ (en fait f intégrable suffirait ; bien sûr on pouvait directement évoquer la continuité d'une intégrale fonction de la borne supérieure d'une fonction continue). L'application $f \mapsto I[f]$ est clairement linéaire et elle est continue en vertue de l'inégalité $|\mathscr{I}[f](x) - \mathscr{I}[g](x)| \leqslant \|f-g\|_\infty$. Bien sûr si $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [0,1]$ alors $y \mapsto \mathscr{I}[f](y)$ est une fonction positive. Mais on note que $\mathscr{I}$ n'est pas fortement positif au sens où il existe des fonctions positives non identiquement nulles pour lesquelles la fonction $x \mapsto \mathscr{I}[f](x)$ n'est pas à valeurs *strictement* positives. Enfin le théorème d'Arzela–Ascoli montre que $\mathscr{I}$ est compact puisque $|\mathscr{I}[f](x) - \mathscr{I}[f](y)| \leqslant |x-y|\|f\|_\infty$. Ainsi l'image par $\mathscr{I}$ de tout ensemble borné $\mathscr{F} \subset C^0([0,1])$ est à la fois uniformément borné et équi-continu.

ii) En fait, pour $f \in C^0([0,1])$, $\mathscr{I}[f]$, en tant qu'intégrale fonction de la borne supérieure d'une fonction continue, est de classe C^1. Soit $(\lambda, f) \in \mathbf{C} \times C^0([0,1])$ tel que $I[f] = \lambda f$. En dérivant la relation $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda f(x)$ qui est satisfaite pour tout $x \in [0,1]$, on obtient $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = \lambda f'(x)$.

– Si $\lambda = 0$, alors f est identiquement nulle,

– Si $\lambda \neq 0$, $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = e^{\frac{x}{\lambda}} f(0)$. Or par définition $f(0) = \frac{1}{\lambda}\mathscr{I}[f](0) = \frac{1}{\lambda}\int_0^0 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et donc f est encore identiquement nulle.

Il n'existe donc pas de fonction non nulle $f \in C^0([0,1])$ telle que $\mathscr{I}[f]$ soit proportionnelle à f : $\mathscr{I}$ n'admet pas de valeur propre.

3. (2) Comme f est continue, on commence par remarquer que

$$\forall n \in \mathbf{Z}, \qquad |\widehat{f}(n)| = \Big|\int_{-1/2}^{1/2} e^{-2in\pi x} f(x)\,\mathrm{d}x\Big| \leqslant \|f\|_\infty.$$

Il s'ensuit que pour tous $n \in \mathbf{Z}$ et $x \in \mathbf{R}$, on a aussi

$$\Big|\frac{e^{2i\pi n x}}{a^2 + 4\pi^2 n^2}\widehat{f}(n)\Big| \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{a^2+4\pi^2 n^2}.$$

La série de fonctions définissant $T[f]$ converge ainsi normalement sur $\mathbf{R}$: $T[f]$ est définie et continue (on peut aussi évoquer le théorème de Lebesgue, en assimilant les séries à des intégrales pour la mesure de comptage, pour justifier la continuité de $T[f]$) sur $\mathbf{R}$). La 1-périodicité est d'ailleurs évidente, ainsi que le caractère linéaire de T. En outre, la majoration précédente garantit que

$$\|T[f]\|_\infty \leqslant \Big(\sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{1}{a^2+4\pi^2 n^2}\Big)\|f\|_\infty$$

T est donc bien un opérateur appartenant à $\mathscr{L}(C^0_\#)$.

3. (3) Si pour tout $x \in \mathbf{R}$, $T[f](x)$ s'exprime sous la forme du produit de convolution

$$T[f](x) = \int_{-1/2}^{1/2} k(x-y)\, f(y)\,\mathrm{d}y = k * f(x),$$

alors $\forall n \in \mathbf{Z}$, on a $\widehat{T[f]}(n) = \widehat{k}(n) \times \widehat{f}(n)$. Or, la série trigonométrique définissant $T[f]$ convergeant normalement, on a : $\forall n \in \mathbf{Z}$, $\widehat{T[f]}(n) = \frac{\widehat{f}(n)}{a^2+4\pi^2 n^2}$. Cherchons alors une constante J telle que

$$\forall n \in \mathbf{Z}, \qquad \widehat{k}(n) = \frac{1}{a^2+4\pi^2 n^2}.$$

Il vient, $\forall n \in \mathbf{Z}$,

$$\begin{aligned}
2a\widehat{k}(n) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-a|x|}e^{-2in\pi x}\,\mathrm{d}x + J\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cosh(ax)e^{-2in\pi x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-ax}e^{-2in\pi x}\,\mathrm{d}x + \int_{-\frac{1}{2}}^{0} e^{ax}e^{-2in\pi x}\,\mathrm{d}x + \frac{J}{2}\Big(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{ax}e^{-2in\pi x}\,\mathrm{d}x + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-ax}e^{-2in\pi x}\,\mathrm{d}x\Big) \\
&= \left(1-(-1)^n e^{-\dfrac{a}{2}}\right)\left(\frac{1}{a+2in\pi}+\frac{1}{a-2in\pi}\right) + \tfrac{J}{2}(-1)^n(e^{\frac{a}{2}}-e^{-\frac{a}{2}})\left(\frac{1}{a+2in\pi}+\frac{1}{a-2in\pi}\right) \\
&= \frac{2a}{a^2+4n^2\pi^2}\Big(1-(-1)^n\Big(e^{-\frac{a}{2}} - J\sinh\Big(\frac{a}{2}\Big)\Big)\Big).
\end{aligned}$$

Posons $J = \frac{e^{-\frac{a}{2}}}{\sinh(\frac{a}{2})} > 0$; ces calculs montrent qu'avec cette valeur de J, $\widehat{k}(n) = \frac{1}{a^2+4\pi^2n^2}$, pour tout $n \in \mathbf{Z}$. De plus, pour toute fonction $f \in C^0_\#$, on a $k * f \in C^0_\#$ et pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $\widehat{k*f}(n) = \widehat{k}(n) \times \widehat{f}(n)$. Les deux fonctions continues 1-périodiques $T[f]$ et $k * f$ ont mêmes coefficients de Fourier, elles sont donc égales (appliquer la formule de Parseval à $T[f] - k * f$), et finalement

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad T[f](x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} k(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Remarque 5 *Avec un minimum de connaissances sur la théorie des distributions on pouvait reconnaître que $T[f]$ n'est autre que la solution u de $(a^2 - \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2})u = f$, satisfaisant des conditions de $1-$périodicité. On trouvera des détails sur ce point de vue dans [11, Chap. IV, sp. Exercice IV-16]. Autrement dit la fonction k recherchée correspond à la solution élémentaire de cette équation : $(a^2 - \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2})k = \delta_{x=0}$, équivalente en termes de coefficients de Fourier à $\widehat{k}(n) = \frac{1}{a^2+4\pi^2n^2}$. La détermination de k repose sur les considérations élémentaires suivantes. Tout d'abord, on peut observer que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^{-a|x|}) = -a\ \mathrm{sgn}(x)\ e^{-a|x|}$ et donc $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(e^{-a|x|}) = -2a\delta_{x=0} + a^2e^{-a|x|}$. Mais cette fonction ne satisfait pas les conditions de $1-$périodicité. L'idée est de lui ajouter une fonction annulant l'opérateur $a^2 - \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$. On pose donc $\phi_J(x) = \frac{1}{a}e^{-a|x|} + J\cosh(ax)$ et on cherche $J \in \mathbf{R}$ de manière à ce que cette fonction soit $1-$périodique : les valeurs en $x = \pm 1/2$ de la fonction et de ses dérivées doivent coïncider. Comme ϕ_J est paire on a bien $\phi_J(1/2) = \phi_J(-1/2)$ pour toute valeur de J. En revanche, $\phi'_J(1/2) = \phi'_J(-1/2)$ impose de prendre*

$$J = \frac{e^{-\frac{a}{2}}}{\sinh(\frac{a}{2})} = \frac{1}{e^a-1} > 0.$$

3. (4) La fonction k étant continue et strictement positive, si $f \in C^0_\#$, vérifie $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [0,1]$, alors $T[f](x) \geqslant 0$ sur $[0,1]$. Si pour une telle fonction $T[f](x) = 0$, alors pour tout $y \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, on a $k(x-y)f(y) = 0$, ce qui entraîne $f(y) = 0$ sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, donc sur $[0,1]$ par 1-périodicité. On en déduit que si $f \in C^0_\#$ est positive et non identiquement nulle alors $T[f](x) > 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

3. (5) Soit $\big(f_n\big)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite bornée de fonctions de $C^0_\#$, et $0 < M < \infty$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}$, on a $\|f_n\|_\infty \leqslant M$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $(x, x') \in [0,1]^2$, on obtient

$$|T[f_n](x) - T[f_n](x')| = \Big|\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \big(k(x-y) - k(x'-y)\big)f_n(y)\,\mathrm{d}y\Big| \leqslant M\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |k(x-y) - k(x'-y)|\,\mathrm{d}y.$$

Or k est continue 1-périodique, donc uniformément continue sur une période : pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta(\epsilon) > 0$, tel que $\forall (t, t') \in \mathbf{R}^2$, si $|t - t'| \leqslant \eta(\epsilon)$ alors $|k(t) - k(t')| \leqslant \epsilon$. Il s'ensuit que pour tout $(x, x') \in [0,1]^2$ vérifiant $|x - x'| \leqslant \frac{\eta(\epsilon)}{M}$ on a

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad |T[f_n](x) - T[f_n](x')| \leqslant \epsilon.$$

On peut apliquer le théorème d'Arzela–Ascoli qui assure qu'il existe une sous-suite $\big(T[f_{n_k}]\big)_{k\in\mathbf{N}}$ extraite de $\big(T[f_n]\big)_{n\in\mathbf{N}}$ qui converge uniformément (vers une fonction continue et 1-périodique, car les $T[f_n]$ le sont). L'opérateur T est bien compact sur $C^0_\#$.

Remarque 6 *Afin d'appliquer le thérorème d'Arzela–Ascoli, on pouvait aussi dériver $T[f]$. On prendra garde toutefois à la justification de la dérivation sous le signe somme puisqu'on ne dispose pas de la convergence normale de la série dérivée de $\sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{\widehat{f}(n)}{a^2+4\pi^2n^2}e^{2i\pi nx}$. En revanche, on peut simplement appliquer le théorème de Lebesgue de dérivation sous le signe somme à partir de la formule de convolution : $y \in [-1/2, 1/2]$ étant fixé, la fonction $x \mapsto \big(e^{-a|x-y|} + J\cosh(a(x-y))\big)f(y)$ est dérivable pour presque tout $x \in [0,1]$ et sa dérivée est $a\big(-\operatorname{sgn}(x-y)e^{-a|x-y|} - J\sinh(a(x-y))\big)f(y)$, fonction qu'on peut dominer par la fonction intégrable $C|f(y)|$, pour une certaine constante $0 < C < \infty$, puisque la fonction $t \mapsto \operatorname{sgn}(t)e^{-a|t|} - J\sinh(at)$ est continue par morceaux et bornée sur $[-1,1]$. On en déduit que $|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}T[f](x)| \leqslant C\|f\|_\infty$, puis, en conséquence, que T est un opérateur compact sur $C^0_\#$.*

3. (6) On a vu au 3.(3) que pour tout $n \in \mathbf{Z}$, le $n^{\text{ème}}$coefficient de Fourier de $T[f]$ est $\widehat{T[f]}(n) = \widehat{k}(n)\times\widehat{f}(n)$. Soit $f \in C^0_\# \setminus \{0\}$ vérifiant $T[f] = \lambda f$. Alors $\forall n \in \mathbf{Z}$, on a $\widehat{k}(n) \times \widehat{f}(n) = \lambda\widehat{f}(n)$. De plus, f n'étant pas identiquement nulle, il existe $n_0 \in \mathbf{Z}$ tel que $\widehat{f}(n_0) \neq 0$ (c'est une conséquence de la formule de Parseval, et de la continuité de f). Ainsi, on obtient

$$\lambda = \widehat{k}(n_0) = \frac{1}{a^2 + 4\pi^2 n_0^2}.$$

Cette remarque motive qu'on cherche des fonctions propres sous la forme de fonctions n'ayant qu'un seul coefficient de Fourier non nul. Pour $n \in \mathbf{Z}$, on introduit la fonction $e_n : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ définie par : $\forall x \in \mathbf{R}$, $e_n(x) = e^{2in\pi x}$. Cette fonction est 1−périodique et on a évidemment $T[e_n] = \frac{1}{a^2+4\pi^2n^2}e_n$: l'ensemble des valeurs propres de T est donc $\big\{\frac{1}{a^2+4\pi^2n^2},\ n \in \mathbf{Z}\big\} = \big\{\frac{1}{a^2+4\pi^2n^2},\ n \in \mathbf{N}\big\}$. En particulier, $\widehat{k}(0) = \frac{1}{a^2}$ est donc l'unique valeur propre de module maximal et la fonction $e_0 : x \mapsto 1$ est un vecteur propre associé.
Soit alors $f \in C^0_\#$ telle que $T[f] = \frac{1}{a^2}f$. On a donc $\big(\widehat{k}(n) - \frac{1}{a^2}\big)\widehat{f}(n) = 0$. Comme $\forall n \in \mathbf{Z}\setminus\{0\}$, on a $\widehat{k}(n) \neq \frac{1}{a^2}$, on en déduit $\widehat{f}(n) = 0$, pour tout $n \neq 0$. Les deux fonctions continues 1-périodiques $x \mapsto f(x)$ et $x \mapsto \widehat{f}(0) = \int_{-1/2}^{+1/2} f\,\mathrm{d}x$ ont les mêmes coefficients de Fourier : elles sont égales, et f est constante. Le sous-espace propre associé à $\frac{1}{a^2}$ est donc la droite vectorielle engendrée par e_0 (*i.e.* les fonctions constantes).

Enfin, pour tout $f \in C^0_\#$, d'après le 3.(3), k étant positive, on obtient l'estimation suivante, $\forall x \in \mathbf{R}$:

$$|T[f](x)| \leqslant \Big(\int_{-\frac12}^{\frac12} k(x-y)\,\mathrm{d}y\Big)\|f\|_\infty = \frac{1}{a^2}\|f\|_\infty.$$

On en déduit que $\|T[f]\|_\infty \leqslant \frac{1}{a^2}\|f\|_\infty$ et on a égalité pour $f = e_0$. Il s'ensuit que

$$\|T\| = \frac{1}{a^2}.$$

Remarque 7 *On pouvait commencer par quelques remarques préliminaires. Tout d'abord, T est auto–adjoint :*

$$\int_{-1/2}^{+1/2} Tf\,\overline{g}\,\mathrm{d}x = \int_{-1/2}^{+1/2} f\,\overline{Tg}\,\mathrm{d}x,$$

ce qui implique déjà que les valeurs propres de T sont réelles : soit $\lambda \in \mathbf{C}, f \in C^0_\#\setminus\{0\}$ vérifiant $Tf = \lambda f$; alors, on a

$$\int Tf\,\overline{f}\,\mathrm{d}x = \lambda\|f\|^2_{L^2} = \int_{-1/2}^{+1/2} f\,\overline{Tf}\,\mathrm{d}x = \overline{\int_{-1/2}^{+1/2} \overline{f}\,Tf\,\mathrm{d}x},$$

d'où $\lambda \in \mathbf{R}$. Plus précisément en utilisant la formule de Parseval on obtient

$$\int_{-1/2}^{+1/2} Tf\,\overline{f}\,\mathrm{d}x = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{|\widehat{f}(n)|^2}{a^2+4\pi n^2} = \lambda\|f\|^2_{L^2} \geqslant 0$$

qui prouve que les valeurs propres sont des réels positifs. Comme l'opérateur T est compact, les résultats de la Section 4.2 impliquent que le spectre de T est composé de 0 et d'éventuelles valeurs propres, les sous-espaces propres de T étant de dimension finie. On note que si f est vecteur propre pour la valeur propre λ alors $\mathrm{Re}(f)$ *et* $\mathrm{Im}(f)$ *le sont aussi. On pouvait donc se contenter de décrire les sous-espaces propres à l'aide de bases formées de fonctions propres réelles.*

La recherche des fonctions propres pouvait aussi exploiter la Remarque 5 : on cherche en fait les couples (λ, u) solutions de $(a^2-\lambda)u - \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}u = 0$. Cette constatation conduisait immédiatement à l'identification du spectre de T.

Plus généralement, cette étude s'inscrit dans le champ de l'analyse spectrale des opérateurs compacts de la forme $f \mapsto \sigma \star f$ et le lien qu'on peut établir avec les séries de Fourier [13].

3. (7) La forme linéaire ψ sur $C^0_\#$ définie par

$$\forall f \in C^0_\#, \qquad \psi(f) = \int_{-1/2}^{1/2} f(t)\,\mathrm{d}t = \widehat{f}(0)$$

est continue, car $|\psi(f)| \leqslant \|f\|_\infty$. Son noyau V est donc fermé (comme image réciproque par une application continue du fermé $\{0\}$). De plus, si $g \in V$, alors $\psi(T[g]) = \widehat{T[g]}(0) = \widehat{k}(0) \times \widehat{g}(0) = 0$. L'ensemble V est donc stable par T.

Remarque 8 *On pouvait aussi simplement utiliser le théorème de Fubini pour calculer directement, pour $g \in V$*

$$\begin{aligned}\int_{-1/2}^{1/2} T[g]\,\mathrm{d}x &= \int_{-1/2}^{1/2}\left(\int_{-1/2}^{1/2} k(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1/2}^{1/2}\left(\int_{-1/2}^{1/2} k(x-y)\,\mathrm{d}x\right)g(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-1/2}^{1/2} k(z)\,\mathrm{d}z\int_{-1/2}^{1/2} g(y)\,\mathrm{d}y = 0.\end{aligned}$$

3. (8) En exploitant le fait que $\widehat{T[f]}(k) = \frac{\widehat{f}(k)}{a^2+4\pi^2k^2}$, un raisonnement par récurrence immédiat montre que

$$\forall n \in \mathbf{N}\setminus\{0\}, \qquad T^n[f](x) = \frac{1}{a^{2n}}\widehat{f}(0) + \sum_{k\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}} \frac{e^{2ik\pi x}}{(a^2+4\pi^2k^2)^n}\widehat{f}(k).$$

Or, pour $k \in \mathbf{Z}\setminus\{0\}$, $\frac{a^2}{a^2+4k^2\pi^2} < 1$ de sorte que, $x \in [0,1]$ étant fixé, on a :

$$\forall n \geqslant 1, \forall k \in \mathbf{Z}\setminus\{0\}, \qquad \left|\frac{a^{2n}e^{2ik\pi x}}{(a^2+4\pi^2k^2)^n}\widehat{f}(k)\right| \leqslant \frac{a^2\|f\|_\infty}{a^2+4\pi^2k^2}$$

qui est le terme général d'une série à termes positifs (on somme sur k) convergente ; la série de fonctions $h_k : x \mapsto \frac{a^{2n}e^{2ik\pi x}}{(a^2+4\pi^2k^2)^n}\widehat{f}(k)$ converge donc normalement sur $\mathbf{Z}\setminus\{0\}$, et on peut permuter (c'est encore une application du théorème de Lebesgue)

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}} \frac{a^{2n}e^{2ik\pi x}}{(a^2+4\pi^2k^2)^n}\widehat{f}(k) = \sum_{k\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}}\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{a^{2n}e^{2ik\pi x}}{(a^2+4\pi^2k^2)^n}\right)\widehat{f}(k) = 0.$$

Enfin, puisque $\widehat{f}(0) \neq 0$, on en déduit que $T^n[f](x)$ est équivalent à $\frac{1}{a^{2n}}\widehat{f}(0)$ quand $n \to +\infty$.

Commentaire 4 *Un nombre encore significatif de candidats a pu se lancer dans cette partie, malheureusement en présentant des argumentations souvent trop fragiles. On attendait une justification soignée de l'exploitation du Théorème d'Arzela-Ascoli en 3.(1)-i), ainsi qu'en 3.(5), et un raisonnement clair et synthétique pour 3.(1)-ii). La continuité sur $[-1,1]$ de $x \mapsto T[f](x)$ n'a que trop rarement été justifiée de façon convaincante. Les calculs requis à la question 1.(3) ont stoppé nombre de candidats, bien qu'ils aient pu entrevoir la stratégie à suivre.*

Partie IV : Un théorème de point fixe

4. (1) Pour $(x, y) \in B(0,1)^2$, on a

$$\|f(x)-f(y)\|_2^2 = \left(\sqrt{1-\|x\|_2^2}-\sqrt{1-\|y\|_2^2}\right)^2+\sum_{k=0}^{+\infty}|x_k-y_k|^2 = \left(\sqrt{1-\|x\|_2^2}-\sqrt{1-\|y\|_2^2}\right)^2+\|x-y\|_2^2.$$

L'application qui à $x \in B(0,1)$ associe $\sqrt{1-\|x\|_2^2}$ étant continue, f est bien continue sur ℓ^2. De plus, $\|f(x)\|_2^2 = 1-\|x\|_2^2+\|x\|_2^2 = 1$: f est à valeurs dans la sphère unité. Si f admettait un point fixe $x = f(x)$, alors $\|x\|_2 = 1$, et on aurait $x = (x_0, x_1, x_2, \ldots) = (0, x_0, x_1, \ldots)$, autrement dit $x_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbf{N}\setminus\{0\}$, $x_n = x_{n-1}$. Ceci implique donc $x_n = 0$ pour tout entier n, en contradiction avec $\|x\|_2 = 1$. L'application f n'a donc pas de point fixe.

4. (2) Etudions les propriétés des fonctions Ψ et f_n.

i) Chacune des applications ψ_i est continue puisque $\psi_i(y) = \left[1/n-\|y-y_i\|\right]_+$, avec $s \in \mathbf{R} \mapsto [s]_+ = \max(s,0) = \frac{1}{2}(s+|s|)$, s'écrit comme composée d'applications continues. Donc Ψ est continue. Soit $y \in \overline{f(B)}$. Alors il existe $i_0 \in \{1,\ldots,N_n\}$ tel que $y \in \mathring{B}(y_{i_0}, 1/n)$ et donc on a $\psi_{i_0}(y) > 0$ ainsi que $\Psi(y) > 0$. La fonction Ψ est continue sur le compact $\overline{f(B)}$, donc elle y atteint son minimum δ, qui est strictement positif d'après ce qu'on vient de voir. Ainsi, on a montré qu'il existe $\delta > 0$ ($\delta = \Psi(\bar{y}) > 0$ pour un certain $\bar{y} \in \overline{f(B)}$), tel que pour tout $y \in \overline{f(B)}$, on ait $\Psi(y) \geqslant \delta > 0$.

ii) Si $x \in B$, alors $f(x) \in f(B)$, ce qui autorise à définir $f_n(x)$ puisque $\Psi(f(x)) > 0$. Alors, on a

$$\|f(x)-f_n(x)\| = \left\|\frac{1}{\Psi(f(x))}\sum_{i=1}^{N_n}\psi_i(f(x))(y_i-f(x))\right\| \leqslant \frac{1}{\Psi(f(x))}\sum_{i=1}^{N_n}\psi_i(f(x))\|y_i-f(x)\|$$

puisque les $\psi_i(f(x))$ sont $\geqslant 0$. Or, pour $i \in \{1,\ldots,n\}$ donné, ou bien $\|y_i-f(x)\| > \frac{1}{n}$ et dans ce cas $\psi_i(f(x))\|y_i-f(x)\| = 0 \leqslant \frac{1}{n}\psi_i(f(x))$, ou bien $\|y_i-f(x)\| \leqslant \frac{1}{n}$ et l'inégalité $\psi_i(f(x))\|y_i-f(x)\| \leqslant \frac{1}{n}\psi_i(f(x))$ est clairement satisfaite. Il en découle que

$$\|f(x)-f_n(x)\| \leqslant \frac{1}{\Psi(f(x))}\sum_{i=1}^{N_n}\psi_i(f(x))\times\frac{1}{n} = \frac{1}{n}.$$

4. (3) On va maintenant exploiter le théorème de Brouwer et la compacité de l'application f.

i) Formons $F = \mathrm{Vect}(y_1,\ldots,y_{N_n})$. On note $C = B\cap F$. Cet ensemble C est :
- borné, car B l'est ;
- fermé, en tant qu'intersection de deux fermés : F, qui est un sous-espace de dimension finie, et B ;
- convexe, car F et B le sont ;
- non-vide, car C contient au moins les $y_i \in \overline{f(B)}$, sous-ensemble du fermé B.

Par construction, f_n applique C dans F et c'est une application continue sur C (car Ψ et les ψ_i le sont). De plus, pour tout $x \in C$, $f_n(x)$ apparaît comme combinaison convexe des $\{y_1,\ldots,y_{N_n}\}$, qui sont éléments de C. Donc, par par convexité de C, on a $f_n(x) \in C$. Enfin, C étant inclus dans F, espace de dimension finie, on peut appliquer le théorème de Brouwer à $f_n : C \to C$: il existe $x_n \in C \subset B$, tel que $f_n(x_n) = x_n$.

ii) La suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée, car à valeurs dans B ; on peut donc en extraire une sous-suite telle que $\left(f(x_{n_k})\right)_{k\in\mathbf{N}}$ converge vers $x \in \overline{f(B)} \subset B$. Puisque $\forall k \in \mathbf{N}$, on a $\|f(x_{n_k})-x_{n_k}\| = \|f(x_{n_k})-f_{n_k}(x_{n_k})\| \leqslant \frac{1}{n_k}$, il s'ensuit que

$$\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = x.$$

Enfin, f étant continue, on a aussi

$$\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = f(x) = x.$$

Remarque 9 *Il est bien connu que la limite d'opérateurs linéaires continus de rang fini est un opérateur compact [1, Cor. VI.2]. La réciproque est une question délicate à laquelle la réponse est en général négative : un opérateur compact sur un espace de Banach n'est pas nécessairement limite d'opérateurs de rang fini (un premier contre-exemple est dû à [4] et le cas, découvert plus récemment [12], de l'espace $\mathscr{L}(H)$ des opérateurs continus sur un espace de Hilbert H de dimension infinie est particulièrement frappant). La réciproque ne devient vraie que moyennant des hypothèses de structure supplémentaire sur l'espace de Banach, comme par exemple si cet espace est un espace de Hilbert. Ici, on démontre un procédé général d'approximation d'applications compactes —- linéaires ou non —- par des applications de rang fini qui sont, elles, toujours non–linéaires.*

Remarque 10 *Dans le théorème de point fixe de Schauder le fait que l'ensemble invariant C soit borné est crucial, comme le montre le contre-exemple suivant. L'application $f : x \in \mathbf{R} \mapsto x^2 + 1 \in \mathbf{R}$ est continue et compacte ; toutefois elle n'admet pas de point fixe.*

En pratique, la compacité est souvent une propriété "facile" à démontrer, conséquence d'estimations a priori et de propriétés fonctionnelles (typiquement $f(x)$ est élément d'un ensemble qui s'injecte de manière compacte dans l'espace E). Mais la continuité peut poser des difficultés ; en particulier on ne peut se contenter d'exploiter la propriété de compacité qui ne permettrait de conclure quà la convergence de suites extraites.

Commentaire 5 *Les questions 4.(1) et 4.(2) restaient tout à fait accessibles et la qualité de la rédaction des réponses était un élément discriminant, notamment pour justifier la continuité et la stricte positivité de la fonction Ψ. L'exploitation du théorème de Brouwer et du raisonnement par compacité en 4.(3) représentaient un niveau de difficulté plus conséquent et seuls une poignée de candidats ont pu s'y exprimer.*

Partie V : Application en théorie spectrale

5. (1) L'ensemble C contient 0, et est fermé, car toute limite uniforme de fonctions positives est en particulier limite simple de fonctions positives, donc est positive. Pour $(f,g,\alpha,\beta) \in C^2 \times (\mathbf{R}^+)^2$, on a évidemment $\alpha f + \beta g \in C$. Si f et $-f$ sont dans C, alors $\forall x \in [a,b], f(x) \geqslant 0$ et $-f(x) \geqslant 0$, donc $f(x) = 0$: f est identiquement nulle.

D'autre part, étant donné $f \in C$

- Si $\forall x \in [a,b], f(x) > 0$, alors f, continue sur le compact $[a,b]$ y atteint un minimum $\delta > 0$, et $\forall g \in C^0([a,b],\mathbf{R})$, si $\|f-g\|_\infty \leqslant \frac{\delta}{2}$, alors $\forall x \in [a,b], g(x) \geqslant f(x) - \|f-g\|_\infty \geqslant \frac{\delta}{2} > 0$. La boule ouverte de centre f et de rayon $\frac{\delta}{2}$ est donc incluse dans C, et $f \in \mathring{C}$.
- Si au contraire $\exists x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = 0$, alors $\forall \alpha > 0$ la fonction $g = f - \frac{\alpha}{2}$ appartient à la boule ouverte de centre f et de rayon α, mais $g(x_0) = -\frac{\alpha}{2} < 0$, donc $g \notin C$. Ceci prouve que f n'est pas intérieur à C.

Finalement, on a établi l'égalité $\mathring{C} = \{f \in C^0([a,b],\mathbf{R}), \text{tel que pour tout } x \in [a,b], f(x) > 0\}$.

Existence d'un vecteur propre dans $\mathring{\mathscr{C}}$.

5. (2) Observons tout d'abord que comme $\mathring{\mathscr{C}}$ est non-vide, $\mathscr{C} \neq \{0\}$, ce qui garantit l'existence de x. L'opérateur T étant fortement positif, $Tx \in \mathring{\mathscr{C}}$. Raisonnons par l'absurde en supposant que pour tout $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, on a $y_n = Tx - x/n \notin \mathscr{C}$. Quand $n \to \infty$, on aurait $y_n \notin \mathscr{C}$ qui converge vers $Tx \in \mathring{\mathscr{C}}$, une contradiction. Donc, pour $\omega > 0$ suffisamment grand, $Tx - \frac{x}{\omega} \in \mathscr{C}$, donc $\omega Tx - x \in \mathscr{C}$, *i.e.* $\omega Tx \geqslant x$.

5. (3) Remarquons ici que, par positivité de T, si $z_1 \geqslant z_2$, alors $z_1 - z_2 \in \mathscr{C}$, et $T(z_1 - z_2) \in \mathscr{C}$ *i.e.* $Tz_1 \geqslant Tz_2$. De plus, par définition d'un cône, $\geqslant$ est une relation d'ordre partiel sur E, compatible avec + et le produit

par un scalaire positif.
Ceci étant, comme $y \geqslant 0$, on a $Ty \geqslant 0$ et $y = MT(y + \epsilon x) = MTy + \epsilon MTx \geqslant \epsilon MTx \geqslant \epsilon Mx$ (puisqu'on a supposé $\omega = 1$). Soit alors $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$; si $y \geqslant \epsilon M^n x$, alors $y = MTy + \epsilon MTx \geqslant MTy \geqslant MT(\epsilon M^n x) = \epsilon M^{n+1} Tx \geqslant \epsilon M^{n+1} x$. Le résultat requis en découle par récurrence.
Si on avait $M > 1$, alors $\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, $\frac{y}{M^n} - \epsilon x \in \mathscr{C}$, et comme cette suite converge vers $-\epsilon x$ et que $\mathscr{C}$ est fermé, on aurait $-\epsilon x \in \mathscr{C}$, donc $-x \in \mathscr{C}$ et $x \in \mathscr{C}$, d'où $x = 0$ ce qui est exclu. Nécessairement, un réel M vérifiant les hypothèses de 5.(3) vérifie $0 \leqslant M \leqslant 1$.

5. (4) On va obtenir une valeur propre et un vecteur propre associé dans $\mathring{\mathscr{C}}$ par un procédé d'approximation.

i) Soit $(y_1, y_2, t) \in (\mathscr{C}_\epsilon)^2 \times [0,1]$; on a

$$ty_1 + (1-t)y_2 \geqslant t\epsilon x + (1-t)\epsilon x = \epsilon x \quad \text{et} \quad \|ty_1 + (1-t)y_2\| \leqslant t\|y_1\| + (1-t)\|y_2\| \leqslant R.$$

De plus, $x \geqslant 0$ et $ty_1 + (1-t)y_2 \geqslant x$, donc $ty_1 + (1-t)y_2 \in \mathscr{C}$: $\mathscr{C}_\epsilon$ est bien convexe. De plus, $\mathscr{C}_\epsilon \subset B(0,R)$, donc $\mathscr{C}_\epsilon$ est borné.
Soit $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{C}_\epsilon$ qui converge vers $y \in E$. Alors $\forall n \in \mathbf{N}$, $y_n - \epsilon x \in \mathscr{C}$ et, $\mathscr{C}$ étant fermé, $y - \epsilon x \in \mathscr{C}$ *i.e.* $y \geqslant \epsilon x$, donc $y \in \mathscr{C}$. D'autre part, $\forall n \in \mathbf{N}$, $\|y_n\| \leqslant R$, donc $\|y\| \leqslant R$. Ainsi, $y \in \mathscr{C}_\epsilon$, et $\mathscr{C}_\epsilon$ est fermé.
Enfin, si $0 \in \mathscr{C}_\epsilon$, alors $0 \geqslant \epsilon x$, donc $-\epsilon x \in \mathscr{C}$ et x et $-x$ appartiennent à $\mathscr{C}$, d'où $x = 0$, ce qui n'est pas. Donc $0 \notin \mathscr{C}_\epsilon$. Ce dernier point justifie la définition de T_ϵ.

ii) Comme $\epsilon x \geqslant \epsilon x$ et $\epsilon x \in \mathscr{C}$, si $R \geqslant \epsilon\|x\|$ alors $\epsilon x \in \mathscr{C}_\epsilon$, qui est donc non-vide. En outre, si $y \in \mathscr{C}_\epsilon$, alors $\frac{y}{\|y\|} \in \mathscr{C}$, donc $T(\frac{y}{\|y\|}) \in \mathscr{C}$, et $T_\epsilon(y) = T(\frac{y}{\|y\|}) + \epsilon Tx \geqslant \epsilon x \geqslant 0$. Enfin, on a

$$\|T_\epsilon(y)\| \leqslant \|T\|(1 + \epsilon\|x\|).$$

Donc en choisissant $R \geqslant \|T\|(1+\epsilon\|x\|)$, on obtient $\|T_\epsilon(y)\| \leqslant R$. En conclusion, si

$$R \geqslant \max\{\epsilon\|x\|, \|T\|(1+\epsilon\|x\|)\}$$

alors $\mathscr{C}_\epsilon$ est non-vide et T_ϵ est une application de $\mathscr{C}_\epsilon$ dans $\mathscr{C}_\epsilon$.
Par ailleurs, T_ϵ est continue (car T et $\|\cdot\|$ le sont). Soit $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{C}_\epsilon$. Une telle suite est bornée puisque $\mathscr{C}_\epsilon$ est borné. La suite $\frac{y_n}{\|y_n\|} + \epsilon x$ est bornée. Comme T est compact, on peut extraire une sous-suite telle que $\left(T(\frac{y_{n_k}}{\|y_{n_k}\|})\right)_{k\in\mathbf{N}}$ converge. Alors $T_\epsilon(y_{n_k}) = T\left(\frac{y_{n_k}}{\|y_{n_k}\|} + \epsilon x\right) \in \mathscr{C}_\epsilon$ converge, vers un élément de $\mathscr{C}_\epsilon$ puisque $\mathscr{C}_\epsilon$ est fermé : T_ϵ est bien une application compacte.

iii) On peut appliquer le Théorème 2 à T_ϵ sur $\mathscr{C}_\epsilon$. En conséquence, il existe $y_\epsilon \in \mathscr{C}_\epsilon$ tel que $T_\epsilon(y_\epsilon) = y_\epsilon$. Avec $M_\epsilon = \|y_\epsilon\|$ et $z_\epsilon = \frac{y_\epsilon}{\|y_\epsilon\|}$, on a $Tz_\epsilon = M_\epsilon T(z_\epsilon + \epsilon x)$ de sorte que le 5.(3) s'applique, et permet d'affirmer que $0 \leqslant M_\epsilon \leqslant 1$.

iv) Soit $n \in \mathbf{N}$; la suite $\left(M_{\frac{1}{n+1}}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est à valeurs dans le compact $[0,1]$, alors que la suite $\left(T(z_{\frac{1}{n+1}})\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est à valeurs dans le compact $\overline{T(B(0,1))} \subset E$. On peut donc en extraire une sous-suite, qu'on désignera par les indices $\epsilon_n > 0$, où $\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$, telle que $(M_{\epsilon_n})_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\lambda \in [0,1]$ et $(Tz_{\epsilon_n})_{n\in\mathbf{N}}$ converge dans E. On note alors que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a d'une part

$$\|z_{\epsilon_n}\| = 1 \leqslant M_{\epsilon_n}\|T\|(1 + \epsilon_n\|x\|)$$

et d'autre part

$$z_{\epsilon_n} = M_{\epsilon_n} T(z_{\epsilon_n}) + M_{\epsilon_n}\epsilon_n Tx.$$

En passant à la limite $n \to \infty$ on déduit de la première inégalité que $\lambda \neq 0$ (précisément $\lambda \geqslant 1/\|T\|$) alors que la second relation prouve que la suite $(z_{\epsilon_n})_{n\in\mathbf{N}}$ admet une limite $z \in E$ vérifiant donc

$$z = \lambda Tz, \qquad \|z\| = 1$$

en exploitant la continuité de T.
Enfin, $\forall n \in \mathbf{N}$, on a $z_{\epsilon_n} = \frac{y_{\epsilon n}}{\|y_{\epsilon_n}\|} \in \mathscr{C}$ (puisque les y_{ϵ_n} appartiennent à $\mathscr{C}_{\epsilon_n} \subset \mathscr{C}$). Donc, $\mathscr{C}$ étant fermé, on en déduit que $z \in \mathscr{C}$. Or $z \neq 0$ (il est unitaire), d'où $Tz \in \mathring{\mathscr{C}}$ et finalement

$$z \in \mathring{\mathscr{C}}.$$

Unicité.

5. (5) On garde les notations z et λ de la question précédente.

i) Soit $s \in \mathscr{A}$, et $s' \in [0, s]$; alors $z - s'z' = z - sz' + (s - s')z' \in \mathscr{C}$ (car $z - sz'$ et z' appartiennent à $\mathscr{C}$, et $s - s' \geqslant 0$). Ainsi, $s' \in \mathscr{A}$, et $\mathscr{A}$ est un intervalle.
Soit $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{A}$ qui converge vers $s \in \mathbf{R}$. Alors, on a

$$z - sz' = \lim_{n\to+\infty} z - s_n z' \in \mathscr{C}$$

puisque $\mathscr{C}$ est fermé, donc $s \in \mathscr{A}$, et $\mathscr{A}$ est fermé.
Si $\mathscr{A}$ était non borné, il existerait une suite $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathscr{A}$, strictement positifs, de limite $+\infty$. Alors $\forall n \in \mathbf{N}$, $\frac{z}{s_n} - z' \in \mathscr{C}$, donc, $\mathscr{C}$ étant fermé, par passage à la limite on obtient $-z' \in \mathscr{C}$. Or, par hypothèse $z' \in \mathring{\mathscr{C}} \subset \mathscr{C}$, donc $z' = 0$, qui contredit le fait que $z' \in \mathring{\mathscr{C}}$. L'ensemble $\mathscr{A}$ est donc borné.
Enfin, comme $z \in \mathring{\mathscr{C}}$, pour $s > 0$ suffisamment petit, $z - sz' \in \mathscr{C}$ et $\mathscr{A}$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

ii) On peut donc définir $s_0 = \max \mathscr{A} > 0$, et on a $z - s_0 z' \in \mathscr{C}$. Il s'ensuit que

$$T(z - s_0 z') = \frac{z}{\lambda} - \frac{s_0}{\mu} z' \in \mathscr{C},$$

puis que $z - \frac{\lambda s_0}{\mu} z' \in \mathscr{C}$. Par définition de s_0, on en déduit que $\frac{\lambda s_0}{\mu} \leqslant s_0$, c'est-à-dire $\frac{\lambda}{\mu} \leqslant 1$ et $\lambda \leqslant \mu$. Cependant z et z' jouent des rôles symétriques, et on a également $\mu \leqslant \lambda$. Finalement on a donc $\lambda = \mu$.

5. (6) Notons que $\nu \neq 0$ (sinon, on aurait $z' = 0$ alors que $z' \notin \mathscr{C} \cup (-\mathscr{C})$). On vérifie de même qu'au 5.(5)-i) que $\mathscr{B}_+$ et $\mathscr{B}_-$ sont des parties fermées (cela provient de ce que $\mathscr{C}$ est fermé), bornées (sinon, il existerait une suite $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments strictement positifs de limite $+\infty$ dans $\mathscr{B}_+$ ou $\mathscr{B}_-$, et $\forall n \in \mathbf{N}$, $\frac{z}{s_n} + z' \in \mathscr{C}$ ou $\forall n \in \mathbf{N}$, $\frac{z}{s_n} - z' \in \mathscr{C}$; par passage à la limite, on aurait $z' \in \mathscr{C}$ ou $-z' \in \mathscr{C}$, ce qui n'est pas) de $\mathbf{R}^+$, non réduites à $\{0\}$ (car $z \in \mathring{\mathscr{C}}$). La seule différence avec la discussion du 5.(5)-i) provient du fait $\mathscr{B}_+$ et $\mathscr{B}_-$ ne sont pas a priori des intervalles [1]. Néanmoins, on peut encore définir $s_+ = \max \mathscr{B}_+ > 0$ (resp. $s_- = \max \mathscr{B}_- > 0$).

Ainsi, $\lambda(z + s_+ z') \in \mathscr{C}$ et est $\neq 0$ (sinon, $z' = -\frac{z}{s_+} \in -\mathscr{C}$), donc $T\big(\lambda(z + s_+ z')\big) = z + \frac{\lambda s_+}{\nu} z' \in \mathring{\mathscr{C}}$. De même, $z - \frac{\lambda s_-}{\nu} z' \in \mathring{\mathscr{C}}$. Distinguons suivant le signe de ν.

– Si $\nu > 0$, alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $z + \left(\frac{\lambda s_+}{\nu} + \epsilon\right) z' \in \mathscr{C}$, donc, par définition de s_+ :

$$\frac{\lambda s_+}{\nu} < \frac{\lambda s_+}{\nu} + \epsilon \leqslant s_+.$$

Comme $s_+ > 0$, il en résulte que $\frac{\lambda}{\nu} < 1$, donc

$$\lambda < \nu = |\nu|.$$

– Si $\nu < 0$, on écrit que d'une part $z - \frac{\lambda s_+}{|\nu|} z' \in \mathring{\mathscr{C}}$ et que, d'autre part, $z + \frac{\lambda s_-}{|\nu|} z' \in \mathring{\mathscr{C}}$. On en déduit qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $z - \left(\frac{\lambda s_+}{|\nu|} + \epsilon\right) z' \in \mathscr{C}$, et $z + \left(\frac{\lambda s_-}{|\nu|} + \epsilon\right) z' \in \mathscr{C}$ ce qui implique

$$\frac{\lambda s_+}{|\nu|} + \epsilon \leqslant s_- \quad \text{et} \quad \frac{\lambda s_-}{|\nu|} + \epsilon \leqslant s_+$$

On en déduit que

$$\frac{\lambda}{|\nu|} < \min\left\{\frac{s_+}{s_-}, \frac{s_-}{s_+}\right\}.$$

Or $\min\{\frac{s_+}{s_-}, \frac{s_-}{s_+}\} \leqslant 1$, donc on obtient

$$\lambda < |\nu|.$$

1. En fait ils le sont : soit $s \in \mathscr{B}_+$ et $0 \leqslant s' \leqslant s$ qu'on 'ecrit $s' = \theta s$, avec $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ de sorte que $z - s'z' = (1-\theta)z + \theta(z - sz') \in \mathscr{C}$, comme combinaison convexe d'éléments de $\mathscr{C}$. Un raisonnement similaire s'applique à $\mathscr{B}_-$.

Soit à présent $y \in \mathrm{Ker}(\lambda T - \mathbf{1})$. D'après ce qu'on vient de voir, $y \in \mathscr{C} \cup (-\mathscr{C})$, de même que λy puisque $\lambda > 0$. Si $y \neq 0$, alors $y = T(\lambda y) \in \mathring{\mathscr{C}}$ ou $-y = T(-\lambda y) \in \mathring{\mathscr{C}}$. Quitte à remplacer y par $-y$, on peut supposer $y \in \mathring{\mathscr{C}}$. Le 5.(5)-i) s'applique, et on peut définir $s_0 = \max\{s \geqslant 0, z - sy \in \mathscr{C}\}$. On a $\lambda(z - s_0 y) \in \mathscr{C}$, et si $z \neq s_0 y$, alors $T(\lambda(z - s_0 y)) = z - s_0 y \in \mathring{\mathscr{C}}$. On peut donc trouver $\epsilon > 0$ tel que $z - (s_0 + \epsilon) y \in \mathscr{C}$, ce qui contredit la définition de s_0. Ainsi, $y = \frac{z}{s_0} \in \mathrm{Vect}\{z\}$, et en définitive

$$\mathrm{Ker}(\lambda T - \mathbf{1}) = \mathrm{Vect}\{z\}.$$

Remarque 11 *: Tout cela justifie que $\rho = \frac{1}{\lambda}$ est valeur propre de T, que le sous-espace propre associé est de dimension 1, et que les autres valeurs propres réelles de T sont, en module, strictement inférieures à ρ. On peut d'ailleurs, par une méthode similaire, montrer qu'il en est de même pour les valeurs propres complexes différentes de ρ, voir [3, Tome 2, Annexe du Chap. 8, p. 220] ou [10].*

Commentaire 6 *L'exemple proposé à la question 5.(1) permettait d'évaluer la qualité du raisonnement mathématique et la solidité des connaissances sur les espaces de fonctions continues. La suite de cette partie faisait appel à des raisonnements plus abstraits et peu de candidats s'y sont aventurés.*

Partie VI : Un exemple sur un espace de suites

6. (1) Il vient : $\|x - x^{(p)}\|_2 = |x_p + \frac{1}{p}|$, et $\lim_{p\to+\infty} x_p = 0$ (car la série $\sum_{p\in\mathbf{Z}} |x_p|^2$ converge), donc

$$\lim_{p\to+\infty} \|x - x^{(p)}\|_2 = 0.$$

Or la suite $(x^{(p)})_{p\in\mathbf{N}}$ est à valeurs dans le complémentaire de l'ensemble $\mathscr{C}$ des suites réelles positives : ce complémentaire est dense dans $\ell^2(\mathbf{Z})$, donc $\mathscr{C}$ est d'intérieur vide.

6. (2) Formons $\Phi : \mathbf{h}_\kappa \to \ell^2(\mathbf{Z})$ définie par :

$$\forall u = (u_n)_{n\in\mathbf{Z}} \in \mathbf{h}_\kappa, \qquad \Phi(u) = \big((\sqrt{1+\kappa_n})u_n\big)_{n\in\mathbf{Z}}.$$

Cette application Φ est clairement linéaire et bijective, et $\forall (u, v, \alpha, \beta) \in (\mathbf{h}_\kappa)^2 \times \mathbf{C}^2, \Phi(u)$ et $\Phi(v)$ appartiennent à $\ell^2(\mathbf{Z})$, donc aussi $\alpha\Phi(u) + \beta\Phi(v)$. Il s'ensuit que $\alpha u + \beta v = \Phi^{-1}\big(\alpha\Phi(u) + \beta\Phi(v)\big)$ appartient à $\mathbf{h}_\kappa$, qui est donc un $\mathbf{C}$-espace vectoriel. Comme $\forall u \in \mathbf{h}_\kappa$, $\mathscr{N}(u) = \|\Phi(u)\|_2$, $\mathscr{N}$ est une norme et Φ définit une isométrie linéaire bijective de $\big(\mathbf{h}_\kappa, \mathscr{N}\big)$ sur $\big(\ell^2(\mathbf{Z}), \|\cdot\|_2\big)$; ce dernier étant un espace de Hilbert, le premier l'est tout autant.

6. (3) Remarquons tout d'abord que, comme $\lim_{|n|\to+\infty} \kappa_n = +\infty$, on a

$$\lim_{|n|\to+\infty} \frac{\mu+\kappa_n}{1+\kappa_n} = \mu > 0$$

et la suite $\frac{\mu+\kappa_n}{1+\kappa_n}$ étant à valeurs strictement positives :

$$\exists (a, b) \in (\mathbf{R}_+^*)^2,\ \forall n \in \mathbf{Z}, \qquad a \leqslant \frac{\mu+\kappa_n}{1+\kappa_n} \leqslant b.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique alors que

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} |(\mu+\kappa_n)\overline{u_n} v_n| \leqslant b \sum_{n\in\mathbf{Z}} (\sqrt{1+\kappa_n})|u_n|(\sqrt{1+\kappa_n})|v_n| \leqslant b\mathscr{N}(u)\mathscr{N}(v) < +\infty.$$

Rappelons par ailleurs que $\forall (z,z') \in \mathbf{C}^2, |z-z'|^2 \leqslant (|z|+|z'|)^2 \leqslant 2(|z|^2+|z'|^2)$. En outre, pour tout $n \in \mathbf{Z}, 1 \leqslant 1+\kappa_n$, de sorte que $\mathbf{h}_\kappa \subset \ell^2(\mathbf{Z})$, et si $u \in \mathbf{h}_\kappa$, alors $\|u\|_2 \leqslant \mathcal{N}(u)$. En invoquant à nouveau l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on déduit de tout cela :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbf{Z}} |(\overline{u_{n+1}}-\overline{u_n})(v_{n+1}-v_n)| &\leqslant \sqrt{\sum_{n\in\mathbf{Z}} |u_{n+1}-u_n|^2}\sqrt{\sum_{n\in\mathbf{Z}} |v_{n+1}-v_n|^2} \\
&\leqslant 2\sqrt{\sum_{n\in\mathbf{Z}} |u_{n+1}|^2+|u_n|^2}\sqrt{\sum_{n\in\mathbf{Z}} |v_{n+1}|^2+|v_n|^2} \\
&\leqslant 4\|u\|_2\|v\|_2 \leqslant 4\mathcal{N}(u)\mathcal{N}(v) < +\infty.
\end{aligned}$$

Il en résulte que $a(u,v)$ est bien définie pour tous u,v dans $\mathbf{h}_\kappa$; les majorations précédentes prouvent de plus que

$$\forall u \in \mathbf{h}_\kappa, \qquad a(u,u) \leqslant (b+4)\mathcal{N}(u)^2.$$

D'autre part, on a

$$a(u,u) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \Big((\mu+\kappa_n)|u_n|^2 + |u_{n+1}-u_n|^2\Big) \geqslant \sum_{n\in\mathbf{Z}} a(1+\kappa_n)|u_n|^2 = a\mathcal{N}(u)^2.$$

On peut donc poser $\alpha = a > 0, \beta = b+4 > 0$. Enfin, il est clair que a est une forme sesquilinéaire hermitienne définie positive, donc définit un produit scalaire sur $\mathbf{h}_\kappa$; l'encadrement qu'on vient de prouver garantit que $\mathcal{N}' : u \mapsto \sqrt{a(u,u)}$ est une norme équivalente à $\mathcal{N}$ sur $\mathbf{h}_\kappa$, et $\big(\mathbf{h}_\kappa, \mathcal{N}'\big)$ est encore un espace de Hilbert.

6. (4) Comme $v \in \mathbf{h}_\kappa \subset \ell^2(\mathbf{Z})$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne l'estimation

$$|\sum_{n\in\mathbf{Z}} \overline{f_n} v_n| \leqslant \|f\|_2\|v\|_2 \leqslant \|f\|_2\mathcal{N}(v) < +\infty.$$

Ceci montre que $\sum_{n\in\mathbf{Z}} \overline{f_n} v_n$ est bien définie. D'ailleurs $L_f : v \mapsto \sum_{n\in\mathbf{Z}} \overline{f_n} v_n$ est trivialement une forme linéaire sur $\mathbf{h}_\kappa$ et la majoration obtenue établit que L_f est une forme linéaire continue sur $\big(\mathbf{h}_\kappa, \mathcal{N}\big)$.

– Supposons d'abord que (2) est réalisée. Soit $v \in \mathbf{h}_\kappa$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbf{Z}} (\overline{2u_n}-\overline{u_{n+1}}-\overline{u_{n-1}})v_n &= -\sum_{n\in\mathbf{Z}} (\overline{u_{n+1}}-\overline{u_n})v_n + \sum_{n\in\mathbf{Z}} (\overline{u_n}-\overline{u_{n-1}})v_n \\
&= \sum_{n\in\mathbf{Z}} (\overline{u_{n+1}}-\overline{u_n})v_{n+1} - \sum_{n\in\mathbf{Z}} (\overline{u_{n+1}}-\overline{u_n})v_n \\
&= \sum_{n\in\mathbf{Z}} (\mu+\kappa_n)\overline{u_n}v_n + \sum_{n\in\mathbf{Z}} (\overline{u_{n+1}}-\overline{u_n})(v_{n+1}-v_n) = a(u_n,v_n).
\end{aligned}$$

(Toutes les séries écrites convergent bien d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, puisque u et v appartiennent à $\mathbf{h}_\kappa \subset \ell^2(\mathbf{Z})$.) En utilisant (2), on obtient bien,

$$a(u,v) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \overline{f_n} v_n = L_f(v).$$

– Réciproquement, supposons que (3) est satisfaite. On introduit la suite $v^{(n)} \in \mathbf{h}_\kappa$ définie par

$$\forall p \in \mathbf{Z}, \qquad v_p^{(n)} = \delta_{p,n}.$$

On note que

$$v_n^{(n)} - v_{n-1}^{(n)} = 1, \qquad v_{n+1}^{(n)} - v_n^{(n)} = -1, \qquad \forall p \notin \{n,n+1\},\ v_p^{(n)} - v_{p-1}^{(n)} = 0.$$

En utilisant (3) avec $v = v^{(n)}$, on obtient donc $(\mu+\kappa_n)\overline{u_n} + (\overline{2u_n} - \overline{u_{n+1}} - \overline{u_{n-1}}) = \overline{f_n}$. Ceci valant $\forall n \in \mathbf{Z}$, (2) est également vérifiée.

Par ailleurs, L_f étant une forme linéaire continue sur $(\mathbf{h}_\kappa, \mathcal{N})$, c'est aussi une forme linéaire continue sur $(\mathbf{h}_\kappa, \mathcal{N}')$, puisque $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ sont des normes équivalentes. Le théorème de représentation de Riesz assure l'existence d'un unique $u \in \mathbf{h}_\kappa$ tel que $\forall v \in \mathbf{h}_\kappa,\ a(u,v) = L_f(v)$. Ainsi, (3) —- donc aussi (2) —- admet une unique solution $u \in \mathbf{h}_\kappa$.

6. (5) Pour tous $n \in \mathbf{Z}$ et $p \in \mathbf{N}$, on a

$$|u_n^{(p)}| \leqslant \sqrt{1+\kappa_n}|u_n^{(p)}| \leqslant \mathcal{N}(u^{(p)}) \leqslant M.$$

Pour $n \in \mathbf{Z}$ fixé, la suite $\left(u_n^{(p)}\right)_{p\in\mathbf{N}}$ est donc bornée dans $\mathbf{C}$. Le procédé d'extraction diagonale permet alors de former $k \mapsto p_k$, strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ telle que $\forall n \in \mathbf{Z}$, il existe $a_n \in \mathbf{C}$ vérifiant

$$\lim_{k\to+\infty} u_n^{(p_k)} = a_n.$$

Fixons $A \in \mathbf{N}$. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a

$$\sum_{n=-A}^{A} (1+\kappa_n)|u_n^{(p_k)}|^2 \leqslant M^2.$$

Donc, en passant à la limite dans cette somme finie, il vient

$$\sum_{n=-A}^{A} (1+\kappa_n)|a_n|^2 \leqslant M^2.$$

Ses sommes partielles étant majorées, la série à termes positifs $\sum_{n\in\mathbf{Z}}(1+\kappa_n)|a_n|^2$ converge, donc $a = (a_n)_{n\in\mathbf{Z}} \in \mathbf{h}_\kappa \subset \ell^2(\mathbf{Z})$ avec $\mathcal{N}(a) \leqslant M$.

Soit à présent $\varepsilon > 0$. On décompose

$$\|u^{(p_k)} - a\|_2^2 = \sum_{n=-A_0}^{A_0} |u_n^{(p_k)} - a_n|^2 + \sum_{|n|\geqslant A_0+1} \frac{1+\kappa_n}{1+\kappa_n}|u_n^{(p_k)} - a_n|^2$$

Comme $\lim_{|n|\to+\infty} \kappa_n = +\infty$, on peut trouver $A_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}$, si $|n| \geqslant A_0$, alors $\frac{1}{1+\kappa_n} \leqslant \frac{\varepsilon^2}{8M^2}$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\sum_{|n|\geqslant A_0+1} \frac{1+\kappa_n}{1+\kappa_n}|u_n^{(p_k)} - a_n|^2 &\leqslant \frac{\varepsilon^2}{8M^2}\mathcal{N}(u_n^{(p_k)} - a_n)^2 \\
&\leqslant \frac{\varepsilon^2}{8M^2}\mathcal{N}(u_n^{(p_k)} - a_n)^2 \leqslant \frac{\varepsilon^2}{8M^2}\ 2\left(\mathcal{N}(u_n^{(p_k)})^2 + \mathcal{N}(a_n)^2\right) \\
&\leqslant \frac{\varepsilon^2}{8M^2}\ 4M^2 \leqslant \frac{\varepsilon^2}{2}.
\end{aligned}$$

Par aillleurs, A_0 étant ainsi fixé, on a

$$\lim_{k\to+\infty} \sum_{n=-A_0}^{A_0} |u_n^{(p_k)} - a_n|^2 = 0.$$

Donc, il existe $K \in \mathbf{N}$ tel que $\forall k \geqslant K$, on a

$$\sum_{n=-A_0}^{A_0} |u_n^{(p_k)} - a_n|^2 \leqslant \frac{\varepsilon^2}{2},$$

et finalement

$$\|u^{(p_k)} - a\|_2 \leqslant \varepsilon$$

dès lors que $k \geqslant K$. Ceci achève d'établir que $\left(u^{(p_k)}\right)_{k\in\mathbf{N}}$ converge vers a dans $\left(\ell^2(\mathbf{Z}), \|\cdot\|_2\right)$.

Considérons $\left(f^{(p)}\right)_{p\in\mathbf{N}}$ une suite bornée d'éléments de $\left(\ell^2(\mathbf{Z}),\|\cdot\|_2\right)$. On lui associe la suite définie par $u^{(p)}=S(f^{(p)})\in\mathbf{h}_\kappa$. Les inégalités établies dans les questions précédentes conduisent à

$$\alpha\mathcal{N}(u^{(p)})^2\leqslant a(u^{(p)},u^{(p)})=L_{f^{(p)}}(u^{(p)})\leqslant\|f^{(p)}\|_2\mathcal{N}(u^{(p)}),$$

pour tout $p\in\mathbf{N}$. On en déduit que $\mathcal{N}(u^{(p)})\leqslant\frac{\|f^{(p)}\|_2}{\alpha}$. La suite $\left(u^{(p)}\right)_{p\in\mathbf{N}}$ est donc bornée dans $\left(\mathbf{h}_\kappa,\mathcal{N}\right)$, et ce qu'on vient de voir assure l'existence d'une sous-suite convergente dans $\left(\ell^2(\mathbf{Z}),\|\cdot\|_2\right)$: S est une application compacte. Son caractère linéaire est d'ailleurs immédiat, et puisque S est compacte, l'image de la boule unité est bornée : $S\in\mathcal{L}\left(\ell^2(\mathbf{Z})\right)$.

6. (6) Si $\left(f_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est à valeurs réelles, la suite $\left(\overline{u_n}\right)_{n\in\mathbf{Z}}\in\mathbf{h}_\kappa$ est également solution de (2). Par unicité, on en déduit que $\forall n\in\mathbf{Z}$, $\overline{u_n}=u_n$ et $\left(u_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est à valeurs réelles.

On suppose maintenant que $\left(f_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est à valeurs positives. Pour tout $n\in\mathbf{Z}$, on pose $v_n=\min(0,u_n)\leqslant 0$. Soit $n\in\mathbf{Z}$:
- si $u_n\geqslant 0$, alors $v_n=0$ et $u_nv_n=0$;
- si $u_n<0$, alors $v_n=u_n$ et $u_nv_n=u_n^2>0$.

Quant à $(u_{n+1}-u_n)(v_{n+1}-v_n)$, distinguons :
- Si u_{n+1} et u_n sont $\geqslant 0$, alors $v_{n+1}=v_n=0$.
- Si $u_n\geqslant 0$ et $u_{n+1}<0$, alors $v_n=0$ et $v_{n+1}=u_{n+1}$, d'où $(u_{n+1}-u_n)(v_{n+1}-v_n)=u_{n+1}^2-u_nu_{n+1}\geqslant 0$.
- Si $u_n<0$ et $u_{n+1}\geqslant 0$, alors $v_n=u_n$ et $v_{n+1}=0$ d'où $(u_{n+1}-u_n)(v_{n+1}-v_n)=-u_{n+1}u_n+u_n^2\geqslant 0$
- Si enfin u_n et u_{n+1} sont <0, alors $v_n=u_n$ et $v_{n+1}=u_{n+1}$, d'où $(u_{n+1}-u_n)(v_{n+1}-v_n)=(u_{n+1}-u_n)^2\geqslant 0$.

Dans tous les cas, on observe que $(u_{n+1}-u_n)(v_{n+1}-v_n)\geqslant 0$ et $u_nv_n\geqslant 0$. Donc, on est conduit à l'inégalité

$$0\leqslant\sum_{n\in\mathbf{Z}}(1+\kappa_n)u_nv_n\leqslant\sum_{n\in\mathbf{Z}}(1+\kappa_n)u_nv_n+(u_{n+1}-u_n)(v_{n+1}-v_n)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}f_nv_n\leqslant 0$$

car $\forall n\in\mathbf{Z}$, on a $f_n\geqslant 0$ et $v_n\leqslant 0$. Il s'ensuit que $\forall n\in\mathbf{Z}$, $u_nv_n=0$, et donc $u_n\geqslant 0$.

6. (7) Supposons que $f_n\geqslant 0$ pour tout $n\in\mathbf{Z}$. On vient déjà de voir que $\forall n\in\mathbf{Z}$, $u_n\geqslant 0$. S'il existe $n_0\in\mathbf{Z}$ tel que $u_{n_0}=0$, alors, en reportant dans (2), on obtient

$$0\geqslant -u_{n_0-1}-u_{n_0+1}=f_{n_0}\geqslant 0,$$

qui entraîne $u_{n_0-1}=u_{n_0+1}=0=f_{n_0}$. Par récurrence (ascendante et descendante), on en déduit que $\forall n\in\mathbf{Z}$, $u_n=0$ et $f_n=0$. Par contraposée, s'il existe $n_0\in\mathbf{Z}$ tel que $f_{n_0}>0$ alors $u_n>0$ pour tout $n\in\mathbf{Z}$.

6. (8) Il est clair que m est fini : soit $f\in\ell^2\setminus\{0\}$, alors $S(f)\neq 0$ et $u=\frac{S(f)}{\|S(f)\|_2}$ est unitaire et vérifie $0<a(u,u)\leqslant\frac{f}{\|S(f)\|_2}<\infty$. La suite $\left(a(u^{(p)},u^{(p)})\right)_{p\in\mathbf{N}}$ converge (dans $\mathbf{R}$), donc elle est bornée. On note $B=\sup_{p\in\mathbf{N}}a(u^{(p)},u^{(p)})$. Il vient :

$$\forall p\in\mathbf{N},\qquad \alpha\mathcal{N}(u^{(p)})^2\leqslant a(u^{(p)},u^{(p)})\leqslant B,$$

donc $\mathcal{N}(u^{(p)})\leqslant\sqrt{\frac{B}{\alpha}}$: $\left(u^{(p)}\right)_{p\in\mathbf{N}}$ est bornée dans $\mathbf{h}_\kappa$. Le 6.(5) entraîne alors l'existence d'une sous-suite $\left(u^{(p_k)}\right)_{k\in\mathbf{N}}$ qui converge dans $\left(\ell^2(\mathbf{Z}),\|\cdot\|_2\right)$ vers un élément u de $\mathbf{h}_\kappa$. Comme $\forall p\in\mathbf{N}$, $\|u^{(p)}\|_2=1$, et qu'on a convergence en au sens de la norme $\|.\|_2$, on a aussi $\|u\|_2=1$.

Par ailleurs, on a également vu au 6.(5) que

$$\forall n\in\mathbf{Z},\qquad \lim_{k\to+\infty}u_n^{(p_k)}=u_n.$$

Soit $A\in\mathbf{N}$. Il vient :

$$\sum_{n=-A}^{A}\left((1+\kappa_n)(u_n^{(p_k)})^2+(u_{n+1}^{(p_k)}-u_n^{(p_k)})^2\right)\leqslant a(u^{(p_k)},u^{(p_k)}).$$

L'entier A étant fixé, lorsque $k \to +\infty$, on obtient :

$$\sum_{n=-A}^{A} \Big((1+\kappa_n) u_n^2 + (u_{n+1}-u_n)^2 \Big) \leqslant m.$$

Ceci valant pour tout $A \in \mathbf{N}$, il s'ensuit que $a(u,u) \leqslant m$, et, par définition de m, qu'en fait $a(u,u) = m$. Notons que $u \neq 0$, donc $m = a(u,u) > 0$.

Remarque 12 *Un raisonnement légèrement différent pouvait être adopté, exploitant le fait que la suite $\big(u^{(p)}\big)_{n\in]\mathbf{N}}$, bornée dans l'espace de Hilbert séparable $(\mathbf{h}_\kappa, \mathcal{N}')$, est relativement compacte pour la topologie faible correspondante [5, Chap. 7]. Autrement dit, on peut supposer qu'une suite extraite $\big(u^{(p_k)}\big)_{k\in\mathbf{N}}$ vérifie à la fois $u^{p_k} \to u$ dans ℓ^2 quand $k \to \infty$ (et donc en particulier $\|u\|_2 = 1$) et*

$$\lim_{k\to\infty} a(u^{(p_k)}, v) = a(u,v) \qquad \forall\, v \in \mathbf{h}_\kappa.$$

Il s'ensuit notamment que

$$a(u^{(p_k)}, u^{(p_k)}) = a(u^{(p_k)} - u, u^{(p_k)} - u) + 2\mathrm{Re}\big(a(u^{(p_k)}, u)\big) - a(u,u) \geqslant 2\mathrm{Re}\big(a(u^{(p_k)}, u)\big) - a(u,u)$$

conduit à

$$m \geqslant 2\mathrm{Re}\big(a(u,u)\big) - a(u,u) = a(u,u)$$

lorsque $k \to \infty$. Alors, la définition de m implique qu'en fait $a(u,u) = m$.

6. (9) La relation à exploiter est vraie si $u + tv = 0$, et si $u + tv \neq 0$, alors, le vecteur $\frac{u+tv}{\|u+tv\|_2}$ étant unitaire dans ℓ^2, on a par définition de m : $a(u+tv, u+tv) \geqslant m\|u+tv\|_2^2$. En développant cette expression, on obtient, pour tout $t \in \mathbf{R}$:

$$a(u,u) + 2t\mathrm{Re}\big(a(u,v)\big) + t^2 a(v,v) \geqslant m\big(\|u\|_2^2 + 2t\mathrm{Re}\big((u|v)\big) + t^2\|v\|_2^2\big),$$

où $(u|v)$ désigne le produit scalaire dans ℓ^2 :

$$(u|v) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \overline{u_n} v_n.$$

Compte-tenu du fait que $a(u,u) = m = m\|u\|_2^2$, il vient donc

$$\forall\, t \in \mathbf{R}, \qquad 2t\mathrm{Re}\big(a(u,v) - m(u|v)\big) + t^2\big(a(v,v) - m\|v\|_2^2\big) \geqslant 0.$$

Ceci implique (former le discriminant, nécessairement négatif, de ce polynôme réel du second degré en t, ou bien étudier ce polynôme au voisinage de 0) $\mathrm{Re}\big(a(u,v) - m(u|v)\big) = 0$. En appliquant ce résultat à iv à la place de v, on a également $\mathrm{Im}\big(a(u,v) - m(u|v)\big) = 0$. Finalement, on a donc

$$\forall\, v \in \mathbf{h}_\kappa, \qquad a\big(\frac{1}{m}u, v\big) = (u|v).$$

Comme $\frac{1}{m}u \in \mathbf{h}_\kappa$, par unicité de la solution de (3) associée à $f = u \in \mathbf{h}_\kappa \subset \ell^2(\mathbf{Z})$, on en déduit

$$Su = \frac{1}{m}u.$$

6. (10) On a vu que S est un opérateur compact dans un espace de Hilbert (donc de Banach). La partie 2 garantit que si $\lambda \in \sigma(S) \setminus \{0\}$, alors λ est valeur propre de S. Soit donc $v \in \ell^2(\mathbf{Z}) \setminus \{0\}$ tel que $Sv = \lambda v$. Comme $\lambda \neq 0$, on a $v = \frac{1}{\lambda} Sv \in \mathbf{h}_\kappa$. Quitte à remplacer v par $\frac{v}{\|v\|_2}$, on peut supposer $\|v\|_2 = 1$. On a alors, d'après (3) :

$$\forall\, w \in \mathbf{h}_\kappa, \qquad a(Sv, w) = a(\lambda v, w) = \overline{\lambda} a(v,w) = (v|w).$$

En particulier, avec $w = v$, on obtient $\overline{\lambda}a(v,v) = \|v\|_2^2 = 1$ qui implique $\overline{\lambda} \in \mathbf{R}_+ \setminus \{0\}$ donc $\lambda \in \mathbf{R}_+ \setminus \{0\}$. De plus, par définition de m, on a $a(v,v) = \frac{1}{\lambda} \geqslant m$, c'est-à-dire $0 < \lambda \leqslant \frac{1}{m}$.

Notons aussi que 0 n'est pas valeur propre : tout vecteur propre associé serait orthogonal à $\mathbf{h}_\kappa$ tout entier pour le produit scalaire défini par a, donc un tel vecteur serait nul.

6. (11) Commençons par quelques remarques préliminaires :

a) Si $u = S(f)$, avec $f \in \ell^2$, on observe que, par unicité de la solution de (3), $\mathrm{Re}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont les solutions de (3) avec comme second membre $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$, respectivement : autrement dit, on a $\mathrm{Re}(u) = S\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(u) = S\mathrm{Im}(f)$.

b) Si f et g sont des suites de ℓ^2 *réelles*, telles que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $f_n \geqslant g_n$, alors $u = S(f)$ et $v = S(g)$ vérifient $u - v = S(f-g)$ et donc, d'après 6.(6), pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $u_n \geqslant v_n$ et même, avec 6.(7), $u_n > v_n$ pourvu que les suites f et g différent pour au moins un terme.

c) L'opérateur S est auto-adjoint pour le produit scalaire usuel de ℓ^2. En effet, notons $u = S(f)$ et $v = S(g)$ pour f et g donnés dans ℓ^2. Alors on a

$$\begin{aligned}(f|S(g)) &= (f|v) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \overline{u_n}v_n = a(u,v)\\ &= \overline{\sum_{k\in\mathbf{Z}} \Big((\mu+\kappa_n)\overline{u_n}v_n + (\overline{u_{n+1}} - \overline{u_n})(v_{n+1}-v_n)\Big)}\\ &= \overline{a(v,u)} = \overline{(g|u)} = (u|g) = (S(f)|g).\end{aligned}$$

En particulier, ceci est un autre moyen d'obtenir que les valeurs propres de S sont réelles.

Soit $v = (v_n)_{n\in\mathbf{Z}} \in \ell^2(\mathbf{Z}) \setminus \{0\}$ tel que $Sv = \frac{1}{m}v$. De même qu'à la question précédente, on peut supposer $\|v\|_2 = 1$. D'après (3), on a

$$a(Sv,v) = \frac{1}{m}a(v,v) = (v|v) = 1,$$

donc $a(v,v) = m$. Formons $|v| = \big(|v_n|\big)_{n\in\mathbf{Z}}$. Comme $\forall (z,z') \in \mathbf{C}^2$, $||z| - |z'|| \leqslant |z - z'|$, il vient donc :

$$\begin{aligned}a(|v|,|v|) &= \sum_{n\in\mathbf{Z}} \Big((1+\kappa_n)|v_n|^2 + ||v_{n+1}| - |v_n||^2\Big)\\ &\leqslant \sum_{n\in\mathbf{Z}} \Big((1+\kappa_n)|v_n|^2 + |v_{n+1} - v_n|^2\Big) = a(v,v) = m.\end{aligned}$$

Comme $\||v|\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbf{Z}} |v_n|^2 = \|v\|_2^2 = 1$, nécessairement (par définition de m) on a en fait $a(|v|,|v|) = m$. On en déduit aussi

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbf{N}, \qquad ||v_{n+1}| - |v_n||^2 &= |v_{n+1} - v_n|^2\\ &= |v_{n+1}|^2 + |v_n|^2 - 2|v_n||v_{n+1}| = |v_{n+1}|^2 + |v_n|^2 - 2\mathrm{Re}\big(\overline{v_n}v_{n+1}\big)\end{aligned}$$

d'où, $\forall n \in \mathbf{Z}$, $|v_n||v_{n+1}| = \mathrm{Re}\big(\overline{v_n}v_{n+1}\big)$. En appliquant le raisonnement du 1.(1), on en conclut que $\forall n \in \mathbf{Z}$, il existe $w_n \in \mathbf{C}$ tel que

$$|w_n| = 1, \qquad v_{n+1} = w_n|v_{n+1}|, \qquad v_n = w_n|v_n|.$$

Par récurrence ascendante et descendante à partir de $n_0 \in \mathbf{Z}$ tel que $v_{n_0} \neq 0$, il s'ensuit que

$$\exists \theta \in [0, 2\pi[,\ \forall n \in \mathbf{Z}, \qquad v_n = e^{i\theta}|v_n|.$$

On écrit ceci sous la forme $v = e^{i\theta}|v|$, qui conduit à $S(|v|) = e^{-i\theta}S(v) = \frac{1}{m}e^{-i\theta}v = \frac{1}{m}|v|$. Alors 6.(7) permet d'affirmer que$\forall n \in \mathbf{Z}$, on a $|v_n| > 0$, puisque $|v|$ est une suite à termes positifs non identiquement nulle.

Ce qu'on vient d'établir vaut en particulier pour la suite u définie au 6.(8), qui vérifie donc $S(|u|) = \frac{1}{m}|u|$. En nous inspirant de la partie 1, dans l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbf{Z})$ on décompose $v = \tau|u| + w$, où $\tau \in \mathbf{C}$, et $(|u||w) = 0$. Alors $Sw = S(v - \tau|u|) = \frac{1}{m}w$. Donc, d'après ce qui précède, on a aussi $\exists \vartheta \in [0, 2\pi[$, tel que $w = e^{i\vartheta}|w|$. Il vient :

$$0 = (|u||w) = e^{i\vartheta}(|u|||w|) = e^{i\vartheta}\sum_{n\in\mathbf{Z}} |u_n||w_n|.$$

Et comme pour tout $n \in \mathbf{Z}$, on a vu que $|u_n| > 0$, il en découle que w est identiquement nulle, ce qui signifie que $v \in \mathrm{Vect}(|u|)$. Le sous-espace propre de S associé à $\frac{1}{m}$ est bien une droite vectorielle engendrée par une suite à termes strictement positifs.

Remarque 13 *On pouvait aussi raisonner en s'affranchissant du cadre complexe. En utilisant a) on remarque que u est vecteur propre de S si et seulement si* $\mathrm{Re}(u)$ *et* $\mathrm{Im}(u)$ *le sont également. On peut donc se contenter d'étudier le cas des suites à valeurs réelles. Pour u à valeurs réelles on a, pour tout* $n \in \mathbf{Z}$, $|u_n| \geqslant u_n \geqslant -|u_n|$ *qui entraîne, d'après b) que* $(S|u|)_n \geqslant (Su)_n \geqslant -(S|u|)_n$, *pour tout* $n \in \mathbf{Z}$, *en notant* $|u|$ *la suite de composantes* $|u_n|$. *Supposons que* $S(u) = \frac{1}{m}u$. *Alors on a* $(S|u|)_n \geqslant |(Su)_n| = \frac{1}{m}|u_n|$, *pour tout* $n \in \mathbf{Z}$. *Il s'ensuit que*

$$(S|u||S|u|) = \|S|u|\|_{\ell^2}^2 \geqslant \frac{1}{m}(S|u|||u|) = \frac{1}{m}a(S|u|, S|u|)$$

puisque $S|u|$ *satisfait, pour tout* $w \in \mathrm{h}_\kappa$, *l'équation* $a(S|u|, w) = (w||u|)$. *Par définition de m on en déduit qu'en fait* $S|u| = \frac{1}{m}|u|$. *En particulier, ce raisonnement s'applique à la suite u obtenue en 6.(8), qui est non identiquement nulle : les composantes de* $|u|$ *sont donc positives et non identiquement nulles, de sorte que, d'après 6.(7), celles de* $S|u|$ *sont strictement positives. Comme* $S|u| = \frac{1}{m}|u|$, *on en conclut que les composantes de* $|u|$ *sont strictement positives.*

Considérons alors v un autre vecteur propre de S associé à la valeur propre $\frac{1}{m}$. *Si* $\dim\big(\mathrm{Ker}(S - \frac{1}{m}\mathbf{1})\big) > 1$, *on peut supposer que* $(v||u|) = 0$. *En particulier v prend donc des valeurs positives et négatives. On note* $v_n^\pm = \max(\pm v_n, 0) \geqslant 0$ *de sorte que* $v_n = v_n^+ - v_n^-$ *et* $|v_n| = v_n^+ + v_n^-$. *Il vient, pour tout* $n \in \mathbf{Z}$,

$$\frac{1}{m}|v_n| = |(Sv)_n| = |(Sv^+)_n - (Sv^-)_n| \leqslant |(Sv^+)_n| + |(Sv^-)_n| = (Sv^+)_n + (Sv^-)_n = (S|v|)_n.$$

De plus, il existe au moins un indice pour lequel cette inégalité est stricte puisque $|a-b| = |a|+|b|$ *avec* $a, b \geqslant 0$ *n'a lieu que si* $a = 0$ *ou* $b = 0$ *: supposer l'égalité pour tout n nierait le fait que v est orthogonal à* $|u|$. *On obtient alors*

$$\frac{1}{m}(|u|||v|) < (|u||S|v|).$$

Or S est autoadjoint donc le terme de droite vaut $(S|u|||v|) = \frac{1}{m}(|u|||v|)$, *d'où une contradiction.*

Commentaire 7 *L'exemple proposé à la question 6.(1) permettait encore d'apprécier la capacité à mener un raisonnement sur une situation relativement élémentaire dans un espace de suites numériques. La suite faisait appel à des techniques classiques de résolution de problèmes variationnels, qu'on rencontre par exemple dans l'analyse d'équations aux dérivées partielles elliptiques. Une faible proportion des candidats a pu explorer cette partie du sujet.*

Bibliographie

[1] H. BRÉZIS : *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.* Masson, 1993.

[2] J.-M. CUSHING : *An introduction to structured population dynamics.* CBMS-NSFT Regional Conference Series in Applied Mathematics. SIAM, 1998.

[3] R. DAUTRAY et J.-L. LIONS : *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques.* Masson, 1984.

[4] P. ENFLO : A counterexample to the approximation property in Banach spaces. *Acta Math.*, 130:309–317, 1973.

[5] T. GOUDON : *Intégration. Intégrale de Lebesgue et introduction à l'analyse fonctionnelle.* Références sciences. Ellipses, 2011.

[6] R. A. HORN et C. R. JOHNSON : *Matrix analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, 1990. Corrected reprint of the 1985 original.

[7] M. G. KREĬN et M. A. RUTMAN : Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space. *Amer. Math. Soc. Translation*, 1950(26):128, 1950.

[8] P. D. LAX : *Functional analysis.* Pure and Applied Mathematics (New York). Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 2002.

[9] P. MICHEL : *Principe d'entropie relative généralisée et dynamique de populations structurées.* Thèse de doctorat, Université de Paris-Dauphine, 2005.

[10] H. H. SCHAEFER : *Banach lattices and positive operators.* Springer-Verlag, New York, 1974. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 215.

[11] L. SCHWARTZ : *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques.* Enseignement des Sciences. Hermann, 1965.

[12] A. SZANKOWSKI : $B(\mathscr{H})$ does not have the approximation property. *Acta Math.*, 147(1-2):89–108, 1981.

[13] A. WEIL : *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications.* Actual. Sci. Ind., no. 869. Hermann et Cie., Paris, 1940.

Chapitre 5

Épreuves orales : Algèbre et Géométrie ; Analyse et Probabilités ; Mathématiques pour l'Informatique ; Informatique-Option D

5.1 Organisation des épreuves 2012

Pour les candidats de l'option D, des changements de modalités sur les leçons de mathématiques sont intervenus lors du concours 2009. Ces candidats tirent un couple de sujets au sein d'une liste d'une quarantaine de sujets d'algèbre, d'analyse et de probabilités extraite de la liste générale des autres options du concours.

Tous les candidats tirent un couple de sujets. Le candidat est libre de choisir le sujet qui lui plait.

À l'issue de la période de préparation qui dure 3 heures pour "Analyse et Probabilités" et 3h30 pour l'épreuve "Algèbre et Géométrie" ou "Mathématiques pour l'Informatique" (cette extension de 30mn est due au temps de préparation pour l'épreuve "Agir en fonctionnaire de l'État et de façon éthique et responsable", voir le chapitre 7) durant laquelle le candidat dispose des livres de la bibliothèque de l'Agrégation ou de ses propres ouvrages (avec un numéro ISBN et non annotés) mais n'a pas accès à Internet (ni bien-sûr à son téléphone portable ou tout autre objet électronique !), le jury fait procéder à la photocopie des plans préparés par les candidats. Ces derniers sont manuscrits, comportent 3 pages A4 ***au maximum*** et possèdent une marge de 1 cm sur tous les côtés afin d'éviter tout problème lors de la photocopie. *Il est conseillé de ne pas utiliser de stylos de couleurs.* Il est en revanche conseillé de soigner la présentation du plan écrit, de mettre des titres, d'encadrer les formules, *etc.* pour qu'il soit le plus lisible possible. En particulier il est vain de vouloir écrire petit dans l'espoir de placer plus de contenu ; on perd en clarté et le jury n'est pas disposé à utiliser une loupe. Les plans peuvent être complétés par une quatrième page consacrée aux figures. Il faut noter clairement sur le plan les développements proposés.

Le candidat *peut utiliser sa copie du plan pendant toute l'épreuve* et pourra utiliser les notes manuscrites produites durant la préparation, pendant la première phase de l'interrogation dite « présentation du plan ».

L'épreuve s'organise en trois temps, prévus pour une durée totale d'un maximum de 50 minutes environ : une présentation du plan éventuellement suivie d'une brève discussion, un développement de 15 minutes maximum et enfin une partie consacrée au dialogue et aux questions.

Le jury ne cherche pas à déstabiliser le candidat pendant l'épreuve.

5.1.1 Première partie : présentation du plan

Le candidat est convié à utiliser son temps de parole, **8 minutes maximum**, pour présenter, argumenter, mettre en valeur et faire une synthèse de son plan.

Le plan écrit n'est ni une énumération de paragraphes, ni un exposé complet avec développement des démonstrations. Il définit avec précision les notions introduites, donne les *énoncés complets* des résultats fondamentaux, cite des exemples et des applications. La formalisation mathématique doit être soignée et l'utilisation des symboles mathématiques correcte. Le jury conseille vivement aux candidats de soigner tant leurs écrits que leur expression orale. ***Le plan doit être maîtrisé***, c'est à dire que les résultats exposés doivent être compris ainsi que l'organisation d'ensemble. Il est souhaitable que le candidat connaisse dans leurs grandes lignes, les démonstrations des résultats figurant au programme du concours : le jury pourra appliquer ce critère pour évaluer la maîtrise du plan. C'est au candidat de circonscrire son plan, notamment en ce qui concerne les énoncés débordant largement le cadre du programme. Le jury ne cherche pas des plans absolument originaux, le plus important est que le plan soit bien structuré, maîtrisé par le candidat et qu'y figure une quantité substantielle d'exemples.

Il s'agit d'une épreuve orale, il est donc inutile de recopier le plan au tableau, dans la mesure où le jury possède une copie du texte. Toutefois il peut être utile d'utiliser le tableau pour écrire l'architecture du plan, les théorèmes importants ou un exemple significatif, voire faire un dessin !

Il est souhaitable que le candidat utilise son temps de parole pour expliquer de façon systématique les articulations principales de son plan. Les détails techniques, s'ils sont clairement écrits dans le plan, pourront ne pas être repris oralement. Le candidat peut faire un bref exposé introductif et commenter utilement ensuite ses résultats principaux, les outils développés, l'organisation d'ensemble et les méthodes utilisées. Il peut être utile de consacrer du temps à un exemple pertinent qui éclaire la problématique de la leçon, à faire usage du tableau pour illustrer ses propos.

Le plan est malheureusement rarement commenté. Le candidat se contente trop souvent d'une présentation linéaire, sans expliquer ou mettre en valeur les articulations du plan, ni faire ressortir les méthodes ou les résultats importants. Parfois le candidat, se met à parler extrêmement rapidement ce qui rend incompréhensible les mathématiques présentées. Si le candidat énonce un théorème particulièrement difficile, il faut qu'il soit *contextualisé* en montrant comment il répond à des problématiques naturelles de la leçon ou en donnant des applications internes ou externes de la théorie dont il est issu.

La présentation orale, l'organisation et la cohérence globale du plan écrit constituent des éléments importants d'appréciation.

Insistons sur le fait que la recopie de plans disponibles sur Internet ou dans des livres spécialisés, ne constitue pas un travail suffisant de préparation du concours. L'exposé oral ne peut être maîtrisé s'il ressemble à une récitation. Quelques rares candidats prennent des libertés quant au libellé de la leçon ; les titres des leçons définissent un champ clair qu'il faut traiter entièrement. **Le hors sujet est lourdement sanctionné**.

À la fin de cette présentation, le jury peut éventuellement questionner très brièvement le candidat. On peut aborder quelques points techniques, sans entrer dans des détails qui retarderaient le début du développement.

5.1.2 Deuxième partie : le développement

Le jury veille à la cohérence du plan et des propositions de développements eu égard au niveau du candidat. Il est souhaitable que le candidat recherche une adéquation entre son niveau intrinsèque et les développements proposés. Un candidat ne sera pas avantagé, s'il présente un développement non maîtrisé ou mal compris ou exposé trop rapidement. Il faut toutefois veiller à rester au niveau de l'Agrégation ; les développements de niveau d'une classe de Terminale ou d'une première année post-bac ne peuvent constituer une proposition acceptable.

Le jury demande au candidat de présenter *deux développements au moins*. Ceux-ci doivent être clairement mentionnés sur le plan écrit et non pas vaguement évoqués à l'oral. Le candidat doit préciser ce qu'il va démontrer et, le cas échéant, les résultats de son plan qu'il va admettre. Le candidat dispose de 15mn (maximum) pour mener à bien ce développement. Le jury demande au candidat de bien gérer son tableau, en particulier le candidat demandera aux membres du jury l'autorisation d'effacer. Le jury souhaite, dans la mesure du possible, que le candidat efface le moins possible le tableau pendant cette période.

Lors du développement, le jury attend du candidat des explications sur la preuve et sur l'utilisation pertinente des notions développées durant l'exposé oral ; il peut être opportun, lors du développement, de se référer explicitement au plan présenté.

Trop peu de candidats commencent leur développement par une rapide exposition des grandes idées ou étapes de ce dernier. Le jury aimerait avoir une petite explication de la démarche au début du développement. Il est inutile de se précipiter ou de parler trop vite ; on veillera au contraire à préciser ses notations, à soigner sa présentation, à placer sa voix et à regarder de temps en temps le jury !

Le développement ressemble parfois à une succession plus ou moins convaincante de résultats intermédiaires *ad hoc*. La récitation d'un développement est lourdement sanctionnée ; le jury veille à ce que les futurs enseignants comprennent ce qu'ils exposent et sachent exposer ce qu'ils comprennent. C'est une qualité essentielle d'un futur agrégé.

On ne saurait trop conseiller aux candidats d'illustrer leur développement (et éventuellement leur plan) par un ou plusieurs dessins : l'exposé y gagnerait en clarté pour le jury, le candidat pourrait ainsi montrer un souci louable de pédagogie.

Rappelons que le développement doit être en rapport avec le sujet traité, la leçon présentée et le plan écrit. Tout hors sujet est sévèrement sanctionné. L'utilisation d'un résultat non présent dans le plan écrit doit être explicitement signalée par le candidat. Toute utilisation d'un lemme non démontré et enfermant l'essence de la preuve est sanctionnée. Le jury peut exiger la démonstration d'un lemme, soit-disant admis, si celui-ci est essentiellement le cœur du développement. Il faut éviter de présenter ou d'utiliser un résultat préliminaire ou intermédiaire sans explications convaincantes. Dans le cas d'un développement ambitieux, il ne faut pas négliger les cas élémentaires et les détails utiles à la compréhension du jury.

Comme mentionné précédemment le candidat *peut utiliser sa copie du plan pendant toute l'épreuve* et ses notes manuscrites produites durant la préparation, uniquement durant la première phase de l'interrogation dite « présentation du plan », mais il ne pourra les utiliser pendant le développement.

Enfin, même si le jury laisse évoluer le candidat durant son développement, en intervenant le moins possible, il peut, en cas de lacunes ou d'erreurs manifestes, interrompre le candidat pour demander des explications. Cette intervention ne donne pas droit à une extension du temps consacré au développement.

La pertinence des explications, le souci pédagogique, la capacité à mener à bien et complètement le sujet dans le temps imparti, l'aisance technique sont des éléments importants d'appréciation. Par ailleurs le candidat doit s'attendre à être interrogé lors de la période de discussion sur des applications ou illustrations élémentaires de son développement. Il est donc essentiel qu'il soit capable de reconnaître dans une question donnée un cas particulier simple du résultat général qu'il vient d'exposer.

5.1.3 Troisième partie : questions et dialogue

Le jury vérifie systématiquement la maîtrise approfondie du plan présenté. C'est à dire qu'une part importante de la discussion portera sur le plan, ou trouvera sa source dans le plan présenté par le candidat. De manière générale, il faut éviter de dépasser largement son niveau. Pour assimiler les notions il faut, durant l'année de préparation, se demander si on est capable de les mettre en œuvre sur des exemples simples et, pour certains théorèmes, si on a réfléchi à des exemples ou des contre-exemples. Le candidat doit être conscient que s'il met un énoncé dans son plan, il doit se préparer à des questions élémentaires voire considérées comme évidentes auxquelles il doit répondre avec précision, et à des calculs éventuels sur ce point.

Une fois de plus, insistons sur le fait qu'il est essentiel de bien maîtriser ce que l'on propose.

Le jury pose aussi des exercices en rapport direct avec la leçon, mais ne s'attend pas à ce que le candidat trouve une solution immédiatement. Le but est plutôt de voir évoluer le futur agrégé dans une démarche scientifique rigoureuse et méthodique. Le candidat doit réfléchir, utiliser son plan et rattacher l'exercice à sa leçon. Le fait de ne pas résoudre un exercice ne doit pas être compris comme un échec et le candidat ne doit pas se décourager. *Il doit au contraire rester attentif aux suggestions du jury*; la qualité du dialogue, les réponses aux questions, l'utilisation du plan écrit et l'écoute dont le candidat fait preuve sont des éléments importants de notation.

Pendant cette discussion le jury veille à laisser un temps raisonnable au candidat pour réfléchir, sans le submerger de questions.

Rappelons que l'objet du concours est de recruter de futurs enseignants.

5.2 Rapport détaillé sur les épreuves orales

Le jury suggère la lecture des rapports de ces cinq dernières années. Les commentaires précis sur les leçons y restent d'actualité.

Voici quelques remarques concernant certaines leçons de la session 2012, reprenant pour partie les commentaires des années précédentes. Les candidats sont invités à étendre ces commentaires aux leçons non commentées.

Les candidats prendront garde au fait que la numérotation des leçons a changé durant la session 2012.

Les candidats de l'option D consulteront la liste *ad hoc* des titres (repérés par un numéro unique) reprenant ceux de l'oral des options A,B, C, en algèbre et analyse.

5.2.1 Leçons d'Algèbre et Géométrie

Généralement, le jury apprécie que les candidats soient en mesure d'appliquer les résultats élémentaires mais fondamentaux de leur leçon. Par exemple et sans prétention à l'exhaustivité, la capacité (dans des cas simples) à :

– justifier la diagonalisabilité ou déterminer un polynôme annulateur d'une matrice (par exemple triangulaire) ;

– effectuer les manipulations élémentaires sur les éléments appartenant à diverses structures algébriques standards ($\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, $\mathscr{S}_n$, etc.) ;

– mettre en oeuvre des algorithmes exposés dans le plan (opérations élémentaires sur des systèmes ou des déterminants, réduction de Gauss d'une forme quadratique, etc.).

Les leçons d'algèbre sont de difficultés variables, mais le candidat ne sera jamais confronté au choix entre deux leçons de niveau difficile. En revanche, le jury comprendra qu'un candidat de niveau faible ou moyen choisisse une leçon facile plutôt d'une leçon plus difficile.

Les leçons de géométrie sont souvent délaissées. C'est bien anormal pour de futurs professeurs qui auront à enseigner la géométrie (même si sa place à tendance à diminuer) qui fournit de nombreux exemples et applications des notions algébriques, par exemple en théorie des groupes. À ce propos, rappelons qu'un dessin au tableau est souvent apprécié et soulignons que le jury n'est pas vraiment regardant sur les qualités esthétiques du dessin.
Le titre des leçons comportent souvent les mots « exemples » et « applications ». Il faudra bien distinguer les deux termes ; un exemple n'est pas en soi une application et inversement. Les leçons d'exemples devraient être construites à partir des connaissances théoriques du candidat et ne pas contenir uniquement de la théorie. Le jury a noté que les notions de quotients échappent souvent au candidat.
La théorie des représentations est apparue au programme. Elle est naturellement reliée à bon nombre leçons. Mise à part les leçons qui la concerne directement, on peut suggérer par exemple : 101, 102, 103, 105, 124, 154.

Voici quelques points plus spécifiques du jury.

5.2.2 Commentaires sur les leçons d'algèbre et géométrie

leçon 101 : Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

Il faut bien dominer les deux approches de l'action de groupe : l'approche naturelle et l'approche, plus subtile, via le morphisme qui relie le groupe agissant et le groupe des permutations de l'ensemble sur lequel il agit. Des exemples de nature différente doivent être présentés : actions sur un ensemble fini, sur un espace vectoriel (en particulier les représentations), sur un ensemble de matrices, sur des polynômes. Les exemples issus de la géométrie ne manquent pas (groupes d'isométries d'un solide). Certains candidats décrivent les actions naturelles de $PGL(2,\mathbf{F}_q)$ sur la droite projective qui donnent des injections intéressantes pour $q=2,3$ et peuvent plus généralement en petit cardinal donner lieu à des isomorphismes de groupes.

leçon 102 : Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.

Cette leçon est encore abordée de façon élémentaire sans réellement voir où et comment les complexes de modules 1 et les racines de l'unité apparaissent dans divers domaines des mathématiques (polynômes cyclotomiques, théorie des représentations, spectre de certaines matrices remarquables).

leçon 103 : Exemples et applications des notions de sous-groupe distingué et de groupe quotient.

Les candidats parlent de groupe simple et de sous-groupe dérivé ou de groupe quotient sans savoir utiliser ces notions. Entre autres, il faut savoir pourquoi on s'intéresse particulièrement aux groupes simples. La notion de produit semi-direct n'est plus au programme, mais lorsqu'elle est utilisée il faut savoir la définir proprement et savoir reconnaître des situations simples où de tels produits apparaissent (le groupe diédral D_n par exemple).

On pourra noter que les tables de caractères permettent d'illustrer toutes ces notions.

leçon 104 : Groupes finis. Exemples et applications.

Les exemples doivent figurer en bonne place dans cette leçon. On peut par exemple étudier les groupes de symétries A_4, S_4, A_5 et relier sur ces exemples géométrie et algèbre, les représentations ayant ici toute leur place. Le théorème de structure des groupes abéliens finis doit être connu.

On attend des candidats de savoir manipuler correctement les éléments de quelques structures usuelles ($\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathscr{S}_n$, etc.). Par exemple, proposer un générateur simple de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ voire tous les générateurs, calculer aisément un produit de deux permutations, savoir décomposer une permutation en produit de cycles à support disjoint.
Il est important que la notion d'ordre d'un élément soit mentionnée et comprise dans des cas simples.

leçon 105 : Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

Il faut relier rigoureusement les notions d'orbites et d'action de groupe et savoir décomposer une permutation en cycles disjoints. Des dessins ou des graphes illustrent de manière commode ce que sont les permutations. Par ailleurs un candidat qui se propose de démontrer que *tout groupe simple d'ordre* 60 *est isomorphe à* A_5 devrait aussi savoir montrer que A_5 est simple.

L'existence du morphisme signature est un résultat non trivial mais ne peut pas constituer, à elle seule, l'objet d'un développement.

Comme pour toute structure algébrique, il est souhaitable de s'intéresser aux automorphismes du groupe symétrique. Les applications du groupe symétrique ne concernent pas seulement les polyèdres réguliers. Il faut par exemple savoir faire le lien avec les actions de groupe sur un ensemble fini. Il est important de savoir déterminer les classes de conjugaisons du groupe symétrique par la décomposition en cycles.

leçon 106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de GL(E). Applications.

Cette leçon est souvent présentée comme un catalogue de résultats épars et zoologiques sur $GL(E)$. Il faudrait que les candidats sachent faire correspondre, sous-groupes et noyaux ou stabilisateurs de certaines actions naturelles (sur des formes quadratiques, symplectiques, sur des drapeaux, sur une décomposition en somme directe, *etc.*). À quoi peuvent servir des générateurs du groupe $GL(E)$? Qu'apporte la topologie dans cette leçon ? Il est préférable de se poser ces questions avant de les découvrir le jour de l'oral.

Certains candidats affirment que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense (respectivement ouvert) dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Il est judicieux de préciser les hypothèses nécessaires sur le corps $\mathbb{K}$ ainsi que la topologie sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Il faut aussi savoir réaliser S_n dans $GL(n,\mathbf{R})$ et faire le lien entre signature et déterminant.

leçon 107 : Représentations et caractères d'un groupe fini sur un C-espace vectoriel.

Le jury a été généralement bienveillant pour cette leçon, vu que la théorie des représentations était au programme depuis peu. Il s'agit d'une leçon où théorie et exemples doivent apparaître. Le candidat doit d'une part savoir dresser une table de caractères pour des petits groupes. Il doit aussi savoir tirer des informations sur le groupe à partir de sa table de caractères.

leçon 108 : Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

C'est une leçon qui demande un minimum de culture mathématique. Peu de candidats voient l'utilité des parties génératrices dans l'analyse des morphismes de groupes.

leçon 109 : Représentations de groupes finis de petit cardinal.

Il s'agit d'une leçon où le matériel théorique doit figurer pour ensuite laisser place à des exemples. Les représentations peuvent provenir d'actions de groupes, de groupes d'isométries, d'isomorphismes exceptionnels entre groupes de petit cardinal... Inversement, on peut chercher à interpréter des représentations de façon géométrique, mais il faut avoir conscience qu'une table de caractères provient généralement de représentations complexes et non réelles (a priori). Pour prendre un exemple ambitieux, la construction de l'icosaèdre à partir de la table de caractères de $\mathscr{A}_5$ demande des renseignements sur l'indice de Schur (moyenne des caractères sur les carrés des éléments du groupe).

leçon 120 : Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

Cette leçon classique demande toutefois une préparation minutieuse. Tout d'abord n n'est pas forcément un nombre premier. Il serait bon de connaître les sous-groupes de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et les morphismes de groupes de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$

Bien maîtriser le lemme chinois et sa réciproque. Savoir appliquer le lemme chinois à l'étude du groupe des inversibles. Distinguer clairement propriétés de groupes additifs et d'anneaux. Connaître les automorphismes, les nilpotents, les idempotents. Enfin, les candidats sont invités à rendre hommage à Gauss en présentant quelques applications arithmétiques des anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, telles l'étude de quelques équations diophantiennes bien choisies.

leçon 121 : Nombres premiers. Applications.

Il s'agit d'une leçon pouvant être abordée à divers niveaux. Attention au choix des développements, ils doivent être pertinents (l'apparition d'un nombre premier n'est pas suffisant !). La réduction modulo p n'est pas hors-sujet et constitue un outil puissant pour résoudre des problèmes arithmétiques simples. La répartition des nombres premiers est un résultat historique important, qu'il faudrait citer. Sa démonstration n'est bien-sûr pas exigible au niveau de l'Agrégation. Quelques résultats sur la géométrie des corps finis sont les bienvenus.

leçon 122 : Anneaux principaux. Applications.

Les plans sont trop théoriques. Il est possible de présenter des exemples d'anneaux principaux classiques autres que $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{K}[X]$ (décimaux, entiers de Gauss ou d'Eisenstein), accompagnés d'une description de leurs irréductibles. Les applications en algèbre linéaire ne manquent pas, il serait bon que les candidats les illustrent. Par exemple, il est étonnant de ne pas voir apparaître la notion de polynôme minimal parmi les applications.

On peut donner des exemples d'anneaux non principaux.

leçon 123 : Corps finis. Applications.

Un candidat qui étudie les carrés dans un corps fini doit savoir aussi résoudre les équations de degré 2. Les constructions des corps de petit cardinal doivent avoir été pratiquées. Les injections des divers $\mathbf{F}_q$ doivent être connues.

Le théorème de Wedderburn ne doit pas constituer le seul développement de cette leçon. En revanche, les applications des corps finis ne doivent pas être négligées. Le théorème de l'élément primitif, s'il est énoncé, doit pouvoir être utilisé.

leçon 124 : Anneau des séries formelles. Applications.

C'est une leçon qui doit être illustrée par de nombreux exemples et applications, souvent en lien avec les séries génératrices ; combinatoire, calcul des sommes de Newton, relations de récurrence, nombre de partitions, représentations et séries de Molien, *etc.*

leçon 125 : Extensions de corps. Exemples et applications.

Très peu de candidats ont choisi cette leçon d'un niveau difficile. On doit y voir le théorème de la base téléscopique et ses applications à l'irréductibilité de certains polynômes, ainsi que les corps finis. Une version dégradée de la théorie de Galois (qui n'est pas au programme) est très naturelle dans cette leçon.

leçon 140 : Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.

Voici une leçon qui avait disparu et qui revient à l'oral de l'Agrégation. Le bagage théorique est somme toute assez classique, même si parfois le candidat ne voit pas l'unicité de la décomposition en éléments simples en terme d'indépendance en algèbre linéaire. Ce sont surtout les applications qui sont attendues : séries génératrices (avec la question à la clef : à quelle condition une série formelle est-elle le développement d'une fraction rationnelle), automorphismes de $K(X)$, version algébrique du théorème des résidus.

Le théorème de Lüroth n'est pas obligatoire et peut même se révéler un peu dangereux.

leçon 141 : Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

Les applications ne concernent pas que les corps finis. Il existe des corps algébriquement clos de caractéristique nulle autre que $\mathbf{C}$. Un polynôme réductible n'admet pas forcément de racines. Il est instructif de chercher des polynômes irréductibles de degré 2, 3, 4 sur $\mathbf{F}_2$. Il faut connaître le théorème de la base téléscopique ainsi que les utilisations artithmétiques (utilisation de la divisibilité) que l'on peut en faire dans l'étude de l'irréductibilité des polynômes.

leçon 142 : Algèbre des polynômes à plusieurs indéterminées. Applications.

La leçon ne doit pas se concentrer exclusivement sur les aspects formels ni sur les les polynômes symétriques.

Les aspects arithmétiques ne doivent pas être négligés. Il faut savoir montrer l'irréductibilité d'un polynôme à plusieurs indéterminées en travaillant sur un anneau de type $A[X]$, où A est factoriel.

Le théorème fondamental sur la structure de l'algèbre des polynômes symétriques est vrai sur $\mathbf{Z}$. L'algorithme peut être présenté sur un exemple.

Les applications aux quadriques, aux relations racines cœfficients ne doivent pas être négligées. On peut faire agir le groupe $GL(n,\mathbf{R})$ sur les polynômes à n indéterminées de degré inférieur à 2.

leçon 143 : Résultant. Applications.

Le caractère entier du résultant (il se définit sur $\mathbf{Z}$) doit être mis en valeur et appliqué.

La partie application doit montrer la diversité du domaine (par exemple en arithmétique, calcul d'intersection/élimination, calcul différentiel).

Il ne faut pas perdre de vue l'application linéaire sous-jacente $(U,V) \mapsto AU+BV$ qui lie le résultant et le PGCD de A et B.

leçon 144 : Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Localisation des racines dans les cas réel et complexe.

Il s'agit d'une leçon au spectre assez vaste. On peut y traiter de méthodes de résolutions, de théorie des corps (voire théorie de Galois si affinités), de topologie (continuité des racines) ou même de formes quadratiques.

leçon 150 : Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

Cette leçon n'a pas souvent été prise, elle demande un certain recul. Les actions ne manquent pas et selon l'action on pour dégager d'une part des invariants (rang, matrices échelonnées réduites), d'autre par des algorithmes. On peut aussi, si l'on veut aborder un aspect plus théorique, faire apparaître à travers ces actions quelques décompositions célèbres.

leçon 151 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

C'est une leçon qui contrairement aux apparences est devenue difficile pour les candidats. Nombre d'entre eux n'ont pas été capables de donner des réponses satisfaisantes à des questions élémentaires comme : un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie, est-il aussi de dimension finie ?

Il faut bien connaître les théorèmes fondateurs de la théorie des espaces vectoriels de dimension finie en ayant une idée de leurs preuves.

leçon 152 : Déterminant. Exemples et applications.

Il faut que le plan soit cohérent ; si le déterminant n'est défini que sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, il est délicat de définir $\det(A - XI_n)$ avec A une matrice carrée. L'interprétation du déterminant comme volume est essentielle. Beaucoup de candidats commencent la leçon en disant que le sous-espace des formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n est de dimension 1, ce qui est fort à propos. Toutefois, il est essentiel de savoir le montrer.

Le jury ne peut se contenter d'un Vandermonde ou d'un déterminant circulant ! Le résultant et les applications simples à l'intersection ensembliste de deux courbes algébriques planes peuvent trouver leur place dans cette leçon. D'une manière générale on attend pendant le développement l'illustration d'un calcul ou la manipulation de déterminants non triviaux.

Il serait bien que la continuité du déterminant trouve une application, ainsi que son caractère polynomiale.

leçon 153 : Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

Les polynômes d'un endomorphisme ne sont pas tous nuls ! Il faut consacrer une courte partie de la leçon à l'algèbre $\mathbf{K}[u]$, connaître sa dimension sans hésiter. Les propriétés globales pourront être étudiées par les meilleurs. Le jury souhaiterait voir certains liens entre réduction et structure de l'algèbre $\mathbf{K}[u]$. Le candidat peut s'interroger sur les idempotents et le lien avec la décomposition en somme de sous-espaces caractéristiques.

Le jury ne souhaite pas avoir un catalogue de résultats autour de la réduction, mais seulement ce qui a trait aux polynômes d'endomorphismes. Il faut bien préciser que dans la réduction de Dunford, les composantes sont des polynômes en l'endomorphisme.

L'aspect *applications* est trop souvent négligé. On attend d'un candidat qu'il soit en mesure, pour une matrice simple de justifier la diagonalisabilité et de déterminer un polynôme annulateur (voire minimal). Il est souhaitable que les candidats ne fassent pas la confusion entre diverses notions de multiplicité pour une valeur propre λ donnée (algébrique ou géométrique). Enfin rappelons que pour calculer A^k, il n'est pas nécessaire en général de faire la réduction de A (la donnée d'un polynôme annulateur de A suffit bien souvent).

leçon 154 : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Les candidats doivent s'être interrogés sur les propriétés de l'ensemble des sous-espaces stables par un endomorphisme. Des études détaillées de cas sont les bienvenues. La décomposition de Frobenius trouve tout à fait sa place dans la leçon. Notons qu'il a été ajouté la notion de familles d'endomorphismes. Ceci peut déboucher par exemple sur des endomorphismes commutant entre eux ou sur la théorie des représentations.

leçon 155 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Il faut pouvoir donner des exemples naturels d'endomorphismes diagonalisables et des critères. Le calcul de l'exponentielle d'un endomorphisme diagonalisable est immédiat une fois que l'on connaît les valeurs propres et ceci sans diagonaliser la matrice, par exemple à l'aide des projecteurs spectraux.

On peut sur le corps des réels et des complexes donner des propriétés topologiques, et sur les corps finis, dénombrer les endomorphismes diagonalisables, ou possédant des propriétés données, liées à la diagonalisation.

Mentionnons que l'affirmation «l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$» nécessite quelques précisions sur le corps $\mathbb{K}$ et la topologie choisie pour $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

leçon 156 : Exponentielle de matrices. Applications.

C'est une leçon difficile et ce n'est pas une leçon d'analyse. Il faut toutefois pouvoir justifier clairement la convergence de la série exponentielle. Les questions de surjectivité ou d'injectivité doivent être abordées. Par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle dans l'image $\exp(\mathrm{Mat}(2,\mathbf{R}))$? La matrice blocs $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ est-elle dans l'image $\exp(\mathrm{Mat}(4,\mathbf{R}))$?

La décomposition de Dunford multiplicative (décomposition de Jordan) de $\exp(A)$ doit être connue. Les groupes à un paramètre peuvent trouver leur place dans cette leçon. On peut s'interroger si ces sous-groupes constituent des sous-variétés fermées de $GL(n,\mathbf{R})$. L'étude du logarithme (quand il est défini) trouve toute sa place dans cette leçon. Si on traite du cas des matrices nilpotentes, on pourra invoquer le calcul sur les développements limités.

Les applications aux équations différentielles doivent être évoquées sans constituer l'essentiel de la leçon. On pourra par exemple faire le lien entre réduction et comportement asymptotique.

Les notions d'algèbres de Lie ne sont pas au programme de l'agrégation, on conseille de n'aborder ces sujets qu'à condition d'avoir une certaine solidité. Sans aller si loin, on pourra donner une application de l'exponentielle à la décomposition polaire de certains sous-groupes fermés de GL_n (groupes orthogonaux par exemple).

leçon 157 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Il est possible de mener une leçon de bon niveau, même sans la décomposition de Jordan à l'aide des noyaux itérés. On doit savoir déterminer si deux matrices nilpotentes sont semblables grâce aux noyaux itérés (ou grâce à la décomposition de Jordan si celle-ci est maîtrisée).

Notons que l'étude des nilpotents en dimension 2 débouche naturellement sur des problèmes de quadriques et l'étude sur un corps fini donne lieu à de jolis problèmes de dénombrement.

leçon 158 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

C'est une leçon transversale. La notion de signature doit figurer dans la leçon et on ne doit surtout pas se cantonner au cas des matrices définies positives. Curieusement, il est fréquent que le candidat énonce l'existence de la signature d'une matrice symétrique réelle sans en énoncer l'unicité dans sa classe de congruence. On doit faire le lien avec les formes quadratiques et les formes hermitiennes. La partie réelle et la partie imaginaire d'un produit hermitien définissent des structures sur l'espace vectoriel réel sous-jacent.

leçon 159 : Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.

Il est important de replacer la thématique de la dualité dans cette leçon. Les liens entre base duale et fonctions de coordonnées doivent être parfaitement connus. Savoir calculer la dimension d'une intersection d'hyperplans est au cœur de la leçon. L'utilisation des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes permet facilement d'obtenir les équations d'un sous-espace vectoriel ou d'exhiber une base d'une intersection d'hyperplans. Cette leçon peut être traitée sous différents aspects : géométrie, algèbre, topologie, analyse *etc.* Il faut que les développements proposés soient en lien direct, comme toujours, avec la leçon ; proposer la trigonalisation simultanée est un peu osé ! Enfin rappeler que la différentielle d'une fonction réelle est une forme linéaire semble incontournable.

leçon 160 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

Les candidats doivent bien prendre conscience que le caractère euclidien de l'espace est essentiel pour que l'endomorphisme soit remarquable. Par exemple, des développements comme le lemme des noyaux ou la décomposition de Dunford n'ont rien à faire ici. En revanche, l'utilisation du fait que l'orthogonal d'un sous-espace stable par un endomorphisme est stable par l'adjoint doit être mis en valeur. La notion de forme normale (ou forme réduite) d'un endomorphisme remarquable est centrale dans la leçon.

leçon 161 : Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Forme réduite. Applications en dimensions 2 et 3.

La classification des isométries en dimension 2 ou 3 est exigible ainsi que le théorème de décomposition commutative. En dimension 3 : déplacements (translation, rotations, vissage) ; antidéplacements (symétries planes, symétries glissées, et isométrie négative à point fixe unique).

leçon 162 : Systèmes d'équations linéaires ; opérations, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

Le jury n'attend pas *une version à l'ancienne* articulée autour du théorème de Rouché-Fontené qui n'est pas d'un grand intérêt dans sa version traditionnellement exposée.

La leçon doit impérativement présenter la notion de système échelonné, avec une définition précise et correcte et situer l'ensemble dans le contexte de l'algèbre linéaire (sans oublier la dualité !). Par exemple les relations de dépendances linéaires sur les colonnes d'une matrice échelonnée sont claires et permettent de décrire simplement les orbites de l'action à gauche de $GL(n,\mathbf{K})$ sur $M_n(\mathbf{K})$ donnée par $(P,A) \mapsto PA$. Le candidat doit pouvoir écrire un système d'équations de l'espace vectoriel engendré par les colonnes.

Un point de vue opératoire doit accompagner l'étude théorique et l'intérêt pratique (algorithmique) des méthodes présentées doit être expliqué y compris sur des exemples simples où l'on attend parfois une résolution explicite.

leçon 170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

Le candidat ne doit pas se contenter de travailler sur $\mathbf{R}$. Il faut savoir que les formes quadratiques existent sur le corps des complexes et sur les corps finis et savoir les classifier. On ne doit pas négliger l'interprétation géométrique des notions introduites (lien entre coniques, formes quadratiques, cônes isotropes) ou les aspects élémentaires (par exemple le discriminant de l'équation $ax^2+bx+c=0$ et la signature de la forme quadratique $ax^2+bxy+cy^2$). On ne peut se limiter à des considérations élémentaires d'algèbre linéaire. Les formes quadratiques ne sont pas toutes non dégénérées (la notion de quotient est utile pour s'y ramener).

L'algorithme de Gauss doit être énoncé et pouvoir être pratiqué sur une forme quadratique de $\mathbf{R}^3$. Le lien avec la signature doit être clairement énoncé. Malheureusement la notion d'isotropie est mal maîtrisée par les candidats, y compris les meilleurs d'entre eux. Le cône isotrope est un aspect important de cette leçon, qu'il faut rattacher à la géométrie différentielle. Il est important d'illustrer cette leçon d'exemples naturels.

leçon 171 : Formes quadratiques réelles. Exemples et applications.

La preuve de la loi d'inertie de Silvester doit être connue et le candidat doit avoir compris la signification géométrique de ces deux entiers composant la signature d'une forme quadratique réelle ainsi que leur caractère classifiant. La différentielle seconde d'une fonction de plusieurs variables est une forme quadratique importante.

leçon 180 : Coniques. Applications.

La définition des coniques affines non dégénérées doit être connue. Les propriétés classiques des coniques doivent être présentées. Bien distinguer les notions affines, métriques ou projectives, la classification des coniques étant sensiblement différente selon le cas.

On peut se situer sur un autre corps que celui des réels. Le lien entre classification des coniques et classification des formes quadratiques peut être établi à des fins utiles.

leçon 181 : Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

On attend des candidats qu'ils parlent de coordonnées barycentriques et les utilisent par exemple dans le triangle (coordonnées barycentriques de certains points remarquables). Il est judicieux de parler d'enveloppe convexe, de points extrémaux, ainsi que des applications qui en résultent.

leçon 182 : Applications des nombres complexes à la géométrie.

Cette leçon ne saurait rester au niveau de la Terminale. Une étude de l'exponentielle complexe et des homographies de la sphère de Riemann est tout à fait appropriée. La réalisation du groupe SU_2 dans le corps des quaternions et ses applications peuvent trouver sa place dans la leçon.

leçon 183 : Utilisation des groupes en géométrie.

C'est une leçon transversale et difficile qui peut aborder des aspects variés selon les structures algébriques présentes. D'une part un groupe de transformations permet de ramener un problème de géométrie à un problème plus simple. D'autre part, les actions de groupes sur la géométrie permettent de dégager des invariants (angle, birapport) essentiels. On retrouvera encore avec bonheur les groupes d'isométries d'un solide.

leçon 190 : Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

Il faut dans un premier temps dégager clairement les méthodes et les illustrer d'exemples significatifs. L'utilisation de séries génératrices est un outil puissant pour le calcul de certains cardinaux. Le jury s'attend à ce que les candidats sachent calculer des cardinaux classiques et certaines probabilités ! L'introduction des corps finis (même en se limitant aux cardinaux premiers) permettent de créer un lien fécond avec l'algèbre linéaire.

5.2.3 Leçons d'Analyse et Probabilités

Le jury rappelle que le chapitre des probabilités a vocation à se développer dans l'enseignement secondaire et post-baccalauréat. Les candidats à un futur poste d'enseignant en mathématiques doivent maîtriser les notions centrales de ces thématiques.

Il y a cinq leçons de probabilités. Les leçons de probabilités peuvent toutes se traiter à un niveau raisonnable, et mettent en jeu des outils qui sont au coeur du programme d'analyse de l'agrégation. Le jury s'étonne du petit nombre de candidats qui choisissent ces leçons, alors qu'elles ne recèlent pas de piège ou de danger particulier.

Cette remarque peut être étendue à l'analyse complexe, dont il n'est pas nécessaire de souligner l'importance et les très nombreuses applications en mathématiques fondamentales ou appliquées. Il est patent que les connaissances sur les fonctions holomorphes, leur comportement au bord du domaine de convergence, les espaces fonctionnels qu'elles constituent, les concepts topologiques qu'elles mettent en œuvre (familles normales, simple connexité) sont globalement en recul. Les candidats en sont sans doute conscients puisqu'ils évitent souvent les leçons correspondantes. L'analyse complexe est cependant appelée à conserver dans le programme de l'agrégation la place centrale que lui impose son importance scientifique. Les candidats sont invités à en prendre acte et à se préparer en conséquence.

Généralement, le jury apprécie que les candidats soient en mesure d'appliquer les résultats élémentaires mais fondamentaux de leur leçon, par exemple : justifier une permutation limite-intégrale ; résoudre une équation différentielle simple ; étudier la convergence d'une suite ou d'une série (numérique, de fonctions, de variables aléatoires).

De nombreux candidats ont présenté au jury d'analyse des plans raisonnables, suivis d'un développement correctement mené, car soigneusement appris et révisé pendant les trois heures de préparation. Cependant, la première question du jury a souvent révélé une incompréhension réelle du sujet traité. Rappelons aux candidats qu'ils peuvent s'attendre, après leur plan, à quelques questions portant sur un cas particulièrement simple d'application du théorème présenté, ou sur des situations proches qui soulignent l'utilité des hypothèses ou la portée des arguments de la preuve qu'ils viennent de développer. Si ces questions restent sans réponse, le jury sera conduit à la conclusion que le candidat n'a fait que restituer mécaniquement quelques pages apprises à la va-vite et sa note s'en ressentira. Il est attendu des candidats qu'ils aient compris les notions mathématiques au programme de l'agrégation.

Il est légitime qu'un candidat ignore certains résultats, le jury ne prétend pas à l'omniscience et ne l'attend pas des candidats. Cependant, un candidat qui se montre capable de proposer des pistes de solution aux questions qu'on lui pose impressionne très favorablement le jury. Il faut donc apprendre, mais surtout comprendre.

Il est également souhaitable que les candidats gardent à l'esprit la nature des objets qu'ils sont en train de manipuler : quantités numériques, variables muettes, indéterminées, inconnues, paramètres, vecteurs, fonctions, opérateurs.... Cela est assez sensible en analyse où par exemple, la question “à quel espace appartiennent les deux termes de votre équation ?" peut se révéler embarrassante. Le calcul différentiel est particulièrement délicat à cet égard, et on recommande aux candidats qui préparent l'agrégation de s'astreindre à la rigueur dans les leçons correspondantes.

Le jury observe enfin que d'assez nombreux candidats, dont le niveau est convenable et qui ont soigneusement préparé l'agrégation, ont répété une petite quinzaine de développements choisis pour leur caractère bien classique et répartis de façon à couvrir une bonne moitié des leçons possibles. Ce mode de préparation est compréhensible et parfois efficace. Mais il faut souligner qu'un développement pertinent mais un peu original est bien récompensé. Les candidats sont donc invités à sortir des sentiers battus : une petite prise de risque sera reconnue et appréciée.

Voici quelques points plus spécifiques concernant les leçons :

5.2.4 Commentaires sur les leçons d'Analyse et Probabilités

203 - Utilisation de la notion de compacité. Il est important de ne pas concentrer la leçon sur la compacité générale (confusion générale entre *utilisation de la notion compacité* et *notion de compacité*), sans proposer des exemples significatifs d'utilisation (Stone-Weierstrass, point fixe, voire étude qualitative d'équations différentielles, *etc.*). Les familles normales de fonctions holomorphes fournissent des exemples fondamentaux d'utilisation de la compacité. Les applications linéaires compactes sur l'espace de Hilbert ou sur un espace de Banach relèvent également de cette leçon, et on pourra développer par exemple leurs propriétés spectrales. Enfin certains candidats présentent des applications du théorème d'Ascoli (par exemple les opérateurs intégraux à noyau continu, le théorème de Peano, *etc*).

204 - Connexité. Exemples et applications. Il est important de présenter des résultats naturels dont la démonstration utilise la connexité ; par exemple, diverses démonstrations du théorème de d'Alembert-Gauss. On distinguera bien connexité et connexité par arcs, mais il est pertinent de présenter des situations où ces deux notions coïncident.

205 - Espaces complets. Exemples et applications. Le théorème de Baire trouve naturellement sa place dans cette leçon, mais il faut l'accompagner d'applications. Rappelons que celles-ci ne se limitent pas aux théorèmes de Banach-Steinhaus et du graphe fermé, mais qu'on peut évoquer au niveau de l'agrégation l'existence de divers objets : fonctions continues nulle part dérivables, points de continuité pour les limites simples de suites de fonctions continues, vecteurs à orbite dense pour certains opérateurs linéaires, etc.

206 - Théorèmes de points fixes. Les applications aux équations différentielles sont importantes. Il faut préparer des contre-exemples pour illustrer la nécessité des hypothèses. Il est envisageable d'admettre le théorème de point fixe de Brouwer et d'en développer quelques conséquences.

207 - Prolongement de fonctions. Les candidats exploitent rarement toutes les potentialités de cette leçon très riche. Le prolongement analytique relève bien sûr de cette leçon, ainsi que le théorème de Hahn-Banach, le prolongement de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sur un segment en fonctions de la même classe, le théorème de Tietze sur l'extension des fonctions continues définies sur un sous-ensemble fermé d'un espace métrique, l'intégrale de Riemann, la transformation de Fourier sur L^2 et l'extension des fonctions Lipschitziennes définies sur un sous-ensemble (pas nécesairement dense) d'un espace métrique.

208 - Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples. La justification de la compacité de la boule unité en dimension finie doit être donnée. Le théorème d'équivalence des normes en dimension finie, ou le caractère fermé de tout sous-espace de dimension finie d'un espace normé, sont des résultats fondamentaux à propos desquels les candidats doivent se garder des cercles vicieux.

213 - Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Il est important de faire la différence entre base algébrique et base hilbertienne. Il faut connaître quelques critères simples pour qu'une famille orthogonale forme une base hilbertienne. Le théorème de projection sur les convexes fermés (ou sur un sous-espace vectoriel fermé) d'un espace de Hilbert H est régulièrement mentionné. En revanche, la possibilité de construire de façon élémentaire le dit-projeté dans le cas particulier d'un sous-espace vectoriel de dimension finie semble inconnue de nombreux candidats. Les candidats doivent s'intéresser au sens des formules $x = \sum_{n\geqslant 0} (x|e_n)e_n$ et $||x||^2 = \sum_{n\geqslant 0} (x|e_n)^2$ en précisant les hypothèses sur la famille $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et en justifiant la convergence.

214 - Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. On attend des applications en géométrie différentielle (notamment dans la formulation des multiplicateurs de Lagrange). Rappelons que les sous-variétés sont au programme.

215 - Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications. Il faudrait que les candidats à l'agrégation sachent que les différentielles d'ordre supérieur $d^k f(a)$ définissent des applications k-linéaires (sur quel espace ?). Il faut savoir calculer sur des exemples simples, la différentielle d'une fonction, ou effectuer un développement limité à l'ordre 1 d'une fonction.

217 - Sous-variétés de $\mathbf{R}^n$. Exemples. Cette leçon n'a pas eu beaucoup de succès, c'est bien dommage. Elle ne saurait être réduite à un cours de géométrie différentielle abstraite ; ce serait un contresens. Le jury attend une leçon concrète, montrant une compréhension géométrique locale. Aucune notion globale n'est exigible, ni de notion de variété abstraite. Le candidat doit pouvoir être capable de donner plusieurs représentations locales (paramétriques, équations, *etc.*) et d'illustrer la notion d'espace tangent sur des exemples classiques. Le jury invite les candidats à réfléchir à la pertinence de l'introduction de la notion de sous-variétés. En ce qui concerne les surfaces de $\mathbf{R}^3$, les candidats sont invités à réfléchir aux notions de formes quadratiques fondamentales et à leurs interprétations géométriques.

Le théorème des extrema liés peut être évoqué dans cette leçon. Les groupes classiques donnent des exemples utiles de sous-variétés.

218 - Applications des formules de Taylor. Il faut connaître les formules de Taylor des polynômes et certains développements très classiques. Il y a de très nombreuses applications en géométrie et probabilités (le théorème central limite). On peut aussi penser à la méthode de Laplace, du col, de la phase stationnaire ou aux inégalités $||f^{(k)}|| \leqslant 2^{k(n-k)/2}||f||^{1-k/n}||f^{(n)}||^{k/n}$ (lorsque f et sa dérivée n-ème sont bornées). On soignera particulièrement le choix des développements.

219- Problèmes d'extremums. Il faut bien faire la distinction entre propriétés locales (caractérisation d'un extremum) et globales (existence par compacité, par exemple). Dans le cas important des fonctions convexes, un minimum local est également global. Les applications de la minimisation des fonctions convexes sont nombreuses et elles peuvent illustrer cette leçon.

220 - Équations différentielles $X' = f(t,X)$. Exemples d'études qualitatives des solutions. Le lemme de Gronwall semble trouver toute sa place dans cette leçon mais est rarement énoncé. L'utilisation du théorème de Cauchy-Lipschitz doit pouvoir être mise en œuvre sur des exemples concrets. Les études qualitatives doivent être préparées et soignées.

221 - Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Le cas des systèmes à cœfficients constants fait appel à la réduction des matrices qui doit être connue et pratiquée. L'utilisation des exponentielles de matrices doit pouvoir s'expliquer. Dans le cas général, certains candidats évoquent les généralisations de l'exponentielle (résolvante) via les intégrales itérées.

226 - Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Le jury attend d'autres exemples que la traditionnelle suite récurrente $u_{n+1} = \sin(u_n)$. Les suites homographiques réelles ou complexes fournissent des exemples intéressants, rarement évoqués. La méthode du gradient ou les méthodes de Jacobi ou de Gauss-Siedel fournissent des exemples naturels et utiles de suites vectorielles. Le théorème de Sharkovski sur l'itération des fonctions continues sur un intervalle est un résultat récent qui peut se traiter entièrement au niveau de l'agrégation, et il trouve sa place dans cette leçon.

228 - Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Un plan découpé en deux parties (I - Continuité, II - Dérivabilité) n'est pas le mieux adapté. Les candidats doivent disposer d'un exemple de fonction dérivable de la variable réelle qui ne soit pas continûment dérivable. La dérivabilité presque partout des fonctions Lipschitziennes relève de cette leçon.

229 - Fonctions monotones. Fonctions convexes. Les candidats sont invités à réfléchir à l'incidence de ces notions en théorie des probabilités. La dérivabilité presque partout des fonctions monotones est un résultat important. Il est souhaitable d'illustrer la présentation de la convexité par des dessins clairs, même si ces dessins ne peuvent remplacer un calcul. On notera que la monotonie concerne (à ce niveau) les fonctions réelles d'une seule variable réelle, mais que la convexité concerne également les fonctions définies sur une partie convexe de $\mathbb{R}$, qui fournissent de beaux exemples d'utilisation. L'espace vectoriel engendré par les fonctions monotones (les fonctions à variation bornée) relève de cette leçon. La dérivation au sens des distributions fournit les caractérisations les plus générales de la monotonie et de la convexité et les candidats bien préparés peuvent s'aventurer utilement dans cette direction.

230 - Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles. De nombreux candidats commencent leur plan par une longue exposition des conditions classiques assurant la convergence ou la divergence des séries numériques. Sans être véritablement hors sujet, cette exposition ne doit pas former l'essentiel du plan. Le thème central de la leçon est en effet le comportement asymptotique des restes et sommes partielles (équivalents, etc...) et leurs applications diverses, comme par exemple des résultats d'irrationalité, voire de transcendance.

232 - Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples. Le jury attire l'attention sur le fait que X peut désigner un vecteur.

234 - Espaces L^p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. Le jury a apprécié les candidats sachant montrer qu'avec une mesure finie $L^2 \subset L^1$ (ou même $L^p \subset L^q$ si $p \geqslant q$). Il est important de pouvoir justifier l'existence de produits de convolution (exemple $L^1 \star L^1$).

240 - Transformation de Fourier, produit de convolution. Applications. Cette leçon ne doit pas se limiter à une analyse algébrique de la transformation de Fourier. C'est bien une leçon d'analyse, qui nécessite une étude soigneuse des hypothèses, des définitions et de la nature des objets manipulés. La transformation de Fourier des distributions tempérées trouve sa place ici. Certains candidats considérent l'extension de la transformée de Fourier à la variable complexe, riche d'applications (dans la direction du théorème de Paley-Wiener, par exemple).

243 - Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Il faut éviter de ne parler que de dérivabilité par rapport à une variable réelle quand on énonce (ou utilise) ensuite ces résultats sur les fonctions holomorphes. Les séries entières fournissent une méthode puissante d'extension des fonctions au plan complexe, puis au calcul fonctionnel et cela peut être évoqué. Le comportement au bord du disque de convergence (Théorèmes d'Abel, de Tauber et de Hardy-Littlewood) fournit de bons thèmes de développement applicables par exemple à des conditions suffisantes pour que le produit de Cauchy de deux séries semi-convergentes soit convergent.

245 - Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de C. Les conditions de Cauchy-Riemann doivent être parfaitement connues et l'interprétation de la différentielle en tant que similitude directe doit être comprise. La notation $\int_\gamma f(z)dz$ a un sens précis, qu'il faut savoir expliquer. Par ailleurs il faut connaître la définition d'une fonction méromorphe (l'ensemble des pôles doit être une partie fermée discrète) !

246 - Série de Fourier. Exemples et applications Les différents modes de convergence (L^2, Fejer, Dirichlet *etc*...) doivent être connus. Il faut avoir les idées claires sur la notion de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux (elles ne sont pas forcément continues). Dans le cas d'une fonction continue et $\mathscr{C}^1$ par morceaux on peut conclure sur la convergence normale de la série Fourier sans utiliser le théorème de Dirichlet. Cette leçon ne doit pas se réduire à un cours abstrait sur les cœfficients de Fourier.

Les leçons 254 et 255 qui portent sur la théorie des distributions et son utilisation ont été choisies par quelques candidats, qui étaient souvent bien préparés et dont la présentation s'est avérée satisfaisante. Rappelons une fois de plus que les attentes du jury sur ces leçons restent modestes, et se placent au niveau de ce qu'un cours de M1 standard sur le sujet peut contenir. Ainsi, il peut être utile d'avoir compris pourquoi la métrique de l'espace de Schwartz est définie par une suite de semi-normes et ne peut pas l'être par une norme unique, mais aucune subtilité topologique portant sur l'espace des distributions tempérées n'est attendue. Les candidats sont invités à présenter des situations simples où les distributions sont effectivement utilisées, et à avoir les idées claires sur ce qu'est le support d'une distribution ou son ordre. Les thèmes de développement possibles incluent les formules de saut, les solutions élémentaires (pour le Laplacien par exemple), les conditions sous lesquelles le produit de convolution de deux distributions peut être défini, ou son associativité dans certains cas. La dérivation au sens des distributions des fonctions d'une seule variable réelle fournit déjà une problématique intéressante. Des applications simples aux équations aux dérivées partielles linéaires sont également les bienvenues.

5.2.5 Remarques sur l'épreuve de leçon de mathématiques - Option D

Dans cette épreuve, le candidat tire un couple de sujets au sein d'une liste d'une quarantaine de sujets d'algèbre et d'analyse extraite de la liste générale des autres options du concours. **Il n'y a donc plus nécessairement un sujet d'algèbre et un sujet d'analyse !** Il peut y avoir deux sujets d'algèbre ou deux sujets d'analyse, par exemple : *Loi binomiale* et *Fonctions monotones*. Le programme précise en effet :

> *Les candidats se verront proposer deux sujets, dans un corpus d'algèbre, de géométrie, d'analyse et de probabilités.*

Il est donc impératif que les candidats ajustent leur préparation à cette organisation.

Le jury a interrogé les candidats dans le même esprit que dans les autres options et les critères d'évaluation étaient strictement identiques.

Notons toutefois que lorsqu'ils avaient le choix, les candidats ont le plus souvent préféré les sujets d'algèbre à ceux d'analyse. Nous conseillons vivement aux futurs candidats de cette option de ne pas négliger leur formation en analyse et probabilités.

Les remarques détaillées concernant cette épreuve ne sont pas différentes des remarques concernant les épreuves de leçon des autres options, et le lecteur est invité à se reporter à la section du rapport consacrée à ce point.

5.3 Epreuves orales Option D : Informatique

5.3.1 Remarques sur l'épreuve de leçon d'informatique - Option D

Cette épreuve a évolué en 2011 : la liste des leçons a été refondue. Essentiellement, les leçons de *programmation* (langages typés, sémantique, typage, compilation) ont été retirées de la liste ainsi que certaines leçons élémentaires d'*algorithmique*. Par contre, la liste de leçons a été enrichie en ce qui concerne la *logique*, en particulier son application aux preuves de programme. Nous espérons que ces modifications contribueront à faciliter la tâche des préparateurs en recentrant les sujets sur 4 domaines bien identifiés : algorithmique, calculabilité et complexité, langages et automates, logique et preuves.

De manière générale, le jury a plutôt été heureusement surpris par la qualité de certaines leçons présentées, notamment parmi les leçons les plus avancées, ce qui confirme le bon travail des préparations spécifiques en amont du concours. Ceci est particulièrement net dans la bonne focalisation des présentations. Beaucoup de candidats cernent bien le sujet de leurs leçons et proposent des développements intéressants mais le niveau est assez hétérogène, ce qui conduit à une grande dispersion des notes.

Organisation de la leçon- Une tentation bien compréhensible pour les candidats est de *mathématiser* les sujets de leçons en oubliant l'aspect informatique. Ainsi, sur le sujet *Langages algébriques*, il était tentant de faire une leçon centrée sur un aspect théorique unique comme le Lemme d'itération d'Ogden, en oubliant complètement les aspects plus concrets de ce domaine et ses multiples applications, par exemple à l'analyse syntaxique et aux compilateurs.

Les candidats de niveau moyen ont en effet souvent montré des connaissances assez solides pour les résultats théoriques, mais par contre un manque de réflexion manifeste en ce qui concerne leurs applications et exemples concrets de mise en oeuvre.

Le jury tient donc à rappeler qu'il s'agit bien d'une épreuve d'*informatique fondamentale*, et non pas d'outils mathématiques pour l'informatique. Il appartient au candidat de montrer la pertinence des outils mathématiques qu'il développe vis-à-vis des objectifs du thème informatique développé dans la leçon.

La présentation d'outils mathématiques pour eux-mêmes, en particulier lorsqu'il s'agit d'outils sophistiqués comme ceux de la théorie de la calculabilité ou de la théorie des types, s'apparente donc à un *hors-sujet*. Ce point avait déjà été souligné dans les précédents rapports et les titres des leçons ont été affinés en conséquence. Les titres des leçons concernant des modèles formels de l'informatique sont maintenant libellés en mentionnant explicitement *exemples et applications*.

Les deux questions-clés de cette épreuve sont toujours les mêmes.
- À quoi cet outil mathématique sert-il dans le cadre informatique considéré ? Pouvez-vous décrire quelques exemples pertinents de son application concrète ?
- La complexité ou le coût de son utilisation sont-ils bien compensés par la qualité supplémentaire d'information qu'il permet d'obtenir ?

Ces questions sont très souvent posées par le jury, sous une forme ou une autre. Le jury invite les candidats à se préparer tout particulièrement à gérer ce type de questions, centrales dans la pédagogie de l'informatique au niveau des lycées et des classes préparatoires.

Interaction avec le jury- Une large partie de l'épreuve est consacrée à l'interaction avec le jury. En informatique, cette interaction ne prend habituellement pas la forme d'un exercice d'application. Il s'agit plutôt d'explorer de manière plus approfondie les notions qui ont été présentées, les domaines connexes, et surtout les *exemples d'application* de ces notions.

L'interaction est conduite sous la forme d'un *dialogue* avec le candidat. Le jury respecte le niveau choisi par le candidat : les questions s'ajustent à ce niveau.

Ce long temps d'interaction doit être considéré comme une *occasion privilégiée* pour le candidat de montrer ses connaissances ! À lui de guider le jury dans la direction adéquate. Il est indispensable que les candidats s'entraînent à ce type d'exercice avec leurs préparateurs.

Chapitre 6

Épreuve orale de modélisation

6.1 Recommandations du jury, communes aux 3 options

Le jury recommande instamment aux candidats et aux préparateurs de lire avec la plus grande attention les recommandations émises dans le rapport du concours (voire ceux des années précédentes) et de **les prendre au pied de la lettre**.

Privilégier les aspects élémentaires du programme : plus que des raffinements techniques, la difficulté de l'épreuve consiste à "mettre en situation" les énoncés les plus classiques du programme. L'exposé doit apporter une plus-value mathématique au texte, en détaillant la formalisation du problème et en expliquant comment l'application de théorèmes du programme permet de répondre, au moins partiellement, à la question posée. Ceci suppose que le candidat est capable de donner un énoncé précis et rigoureux, dans cette épreuve comme dans les autres.

La capacité à illustrer le texte à l'aide de l'outil informatique est une attente forte du jury qui en fait un élément incompressible de l'évaluation. Le rapport détaille les ambitions strictement délimitées de cet aspect de l'épreuve. La configuration informatique en vigueur au concours est téléchargeable sur le site de l'agrégation, à l'exception des logiciels commerciaux. Les candidats peuvent ainsi se familiariser avec l'environnement de travail qu'ils rencontreront durant l'épreuve. Les logiciels libres, comme Scilab, Octave, Maxima, Sage..., permettent à tous de s'entraîner durant l'année.

Notons, dès à présent, qu'une évolution sensible des logiciels disponibles prendra effet à partir de la **session 2015**. Seuls les logiciels « libres » seront disponibles. Le jury invite les préparateurs à consulter régulièrement le site de l'agrégation `http://www.agreg.org`, pour se tenir informés des évolutions.

Le jury met en garde les candidats quant à la tentation de faire des impasses : les couplages et la rédaction des textes tendent à balayer de larges pans du programme et rendent perdants de tels paris.

Le jury tient à souligner les attentes partagées entre les trois options A (Probabilités et Statistiques), B (Calcul Scientifique) et C (Calcul Formel).

Dans cette épreuve, le candidat est appelé à **faire preuve d'initiative** pour s'exprimer et manifester ses qualités pédagogiques et de synthèse. Le texte fourni est un point de départ pour construire et exposer un traitement mathématique d'un problème "concret" en s'appuyant sur les éléments, généralement partiels, fournis par le texte. La présentation doit s'appuyer sur un dosage cohérent et harmonieux entre introduction motivée de modèles, preuves mathématiques, illustrations informatiques, critiques éventuelles du texte, réponses aux questions et mise en lumière de connaissances. Il n'y a pas de "format type" et des prestations très différentes, dans leur forme et leur contenu, sur un même texte, éventuellement traité de façon partielle mais en profondeur, peuvent conduire également à des notes élevées.

Comme le candidat se le voit rappeler en début d'épreuve, il doit exposer son travail à un public qui n'est pas censé connaître le texte, et ce de façon à le lui faire comprendre. Le jury, tout en étant conscient des difficultés du concours, attend un minimum d'aisance au tableau, la manifestation d'une certaine volonté de capter l'attention de l'auditoire et un discours clair et précis. Il est recommandé aux candidats de consacrer une partie de leur temps de préparation à s'interroger sur la stratégie d'exploitation du tableau et d'utilisation de l'outil informatique qui leur permettra de mettre au mieux en valeur leurs connaissances et leur compréhension du texte ou d'une partie de celui-ci. Le jury regrette de ne pas voir davantage de dessins (soignés) ou schémas explicatifs qui peuvent rendre l'argumentation plus claire et convaincante. La capacité à revenir sur le problème de départ et à conclure quant à l'efficacité de l'approche mathématique proposée pour y répondre est une qualité très appréciée. La rigueur et la clarté de l'organisation, la gestion du temps, la pertinence des choix opérés parmi les différentes questions soulevées par le texte sont des éléments de l'évaluation. Les qualités de synthèse sont aussi appelées à s'exprimer : il vaut mieux indiquer les étapes cruciales d'un raisonnement que de se lancer dans un long calcul fastidieux qu'on aura du mal à mener à bien. À un survol superficiel de l'intégralité du texte sans apport mathématique ou critique scientifique, le candidat doit préférer une discussion fouillée d'une portion du texte, bâtie sur des arguments mathématiques solides, des simulations pertinentes accompagnées de commentaires de bon aloi.

Le candidat est invité à mobiliser ses connaissances, sur des aspects variés du programme, pour enrichir son propos, en étayant les arguments seulement esquissés dans le texte par des **énoncés précis.** Il est totalement illusoire de chercher à impressionner le jury par une logorrhée de mots savants : les textes proposés peuvent être discutés en exploitant un bagage technique qui n'utilise pas les éléments les plus sophistiqués du programme. Quoi qu'il en soit, le jury ne manque pas de s'attarder sur toute notion amenée par le candidat durant sa présentation et il est toujours dommageable de s'aventurer sur des terrains méconnus. Bien plus qu'une démonstration de virtuosité technique, le jury attend que le candidat montre sa maîtrise d'énoncés relativement simples “en situation” : c'est là que réside une des difficultés principales de l'épreuve. Nombre de candidats éprouvent des difficultés à **formaliser** précisément des notions de base du programme ou à mettre en œuvre certaines de leurs connaissances en algèbre, géométrie, et analyse pour l'étude des modèles. Les textes fournissent souvent des esquisses de démonstrations qui sont précisément destinées à être complétées et commentées. Le jury n'est pas dupe des candidats qui tentent de faire semblant de connaître une notion ou d'avoir compris un point du texte ou une démonstration. Il ne se laisse pas tromper non plus par les candidats qui font des indications du texte un argument d'autorité, tentative maladroite de masquer des insuffisances techniques. Un regard critique (“il faudrait prouver que... mais je n'ai pas réussi à le faire”, “les hypothèses du théorème de XXX que je connais pour aborder des problèmes similaires ne sont pas satisfaites dans le cas présent”...) est une attitude bien plus payante.

Enfin, le jury s'alarme de l'état à proprement parler sinistré des connaissances en **algèbre linéaire** : les notions les plus basiques font l'objet de graves manquements, les manipulations et raisonnements les plus élémentaires sont excessivement laborieux (calcul matriciel, résolution de systèmes linéaires, norme de matrices, décomposition spectrale et réduction).

Illustration informatique : Le jury rappelle son fort attachement à cet aspect de l'épreuve, dont les ambitions sont clairement délimitées. Il ne s'agit en aucun cas, et pour aucune des 3 options, d'un exercice de programmation. L'objectif est d'être capable d'utiliser l'outil informatique pour illustrer, de façon pertinente, le contenu du texte. La réalisation de cet objectif constitue une part incompressible de la note finale attribuée à l'épreuve. Une très bonne évaluation peut résulter d'une exploitation judicieuse de programmes simples, reposant largement sur les routines standards des logiciels fournis (et dont un certain nombre sont disponibles de façon ouverte et gratuite afin de s'entraîner avant le concours). À ce propos il n'est évidemment pas réaliste de découvrir ces logiciels le jour de l'épreuve : la configuration informatique utilisée pour le concours, et sa documentation, à l'exclusion des logiciels commerciaux, sont accessibles et téléchargeables sur le site officiel de l'agrégation et permettent de se familiariser avec l'environnement offert pour l'épreuve. La forme et la nature des illustrations proposées n'obéissent à aucun code préétabli. En revanche, elles doivent faire la preuve d'une véritable réflexion scientifique et être agrémentées de commentaires, sur les résultats et les méthodes. Même si les simulations ne sont pas abouties ("ça ne marche pas"), le jury sait valoriser la démarche suivie lorsqu'elle est clairement argumentée et permettrait, avec des aménagements mineurs, de mettre en évidence des aspects intéressants du texte.

6.2 Organisation de l'épreuve de modélisation

Depuis la session 2006 incluse, deux textes au choix sont proposés à l'épreuve de modélisation. Le jury souhaite rappeler ce qu'il attend des candidats dans cette épreuve. Les remarques concernant l'organisation de l'épreuve de modélisation s'appliquent à toutes les options, y compris à l'épreuve d'« analyse des systèmes informatiques » qui en est la version pour l'option D (informatique). Des remarques supplémentaires, spécifiques à cette épreuve, seront données plus loin, dans le cadre de la partie du rapport consacrée à l'option informatique.

Les textes sont surmontés du bandeau suivant :

> *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Le jury apprécie en effet que le candidat reste honnête quant à sa compréhension du texte, plutôt que de se lancer dans une présentation des parties du texte qu'il ne comprend absolument pas. Vous êtes laissé(e) libre d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur. Le jury aura le texte sous les yeux, mais vous devez considérer qu'il ne l'a pas lu.*

Plus précisément, le jury s'attend à ce que le candidat dégage une problématique, en s'inspirant du texte, pour mettre en valeur sa maturité mathématique et ses connaissances. L'interrogation dure une heure environ (jusqu'à une heure et cinq minutes), pendant laquelle le candidat gère comme il le désire le tableau et les illustrations informatiques qu'il entend présenter (le jury dispose d'écrans de contrôle reproduisant celui du candidat). Le candidat doit préparer un exposé d'environ 40 minutes, les 20-25 minutes restantes étant occupées par les questions du jury.

Le texte est court, environ 5 pages, motivé par un problème concret. Il peut présenter des arguments rapides, voire heuristiques (signalés comme tels). Il ne contient pas d'assertion délibérément trompeuse et se conclut par une liste de suggestions.

Il appartient au candidat de discuter la mathématisation du problème, en particulier d'expliquer les hypothèses faites lors de la modélisation ou du traitement du modèle, de critiquer ou d'améliorer le modèle, du point de vue de l'adéquation à la réalité, de la généralité, de la rigueur, de la simplicité du traitement mathématique subséquent...

Le jury n'ayant *a priori* pas lu le texte, le candidat commencera par présenter celui-ci. Un plan en début d'exposé est apprécié, annonçant en particulier les propriétés du modèle que le candidat va dégager. Il est important d'expliquer le problème et le modèle, de l'illustrer, ainsi que d'y revenir en fin d'exposé. Le modèle mathématique a-t-il les propriétés attendues ? Des propriétés parasites surprenantes ? A-t-on résolu le problème posé ?

Le candidat dispose pendant sa préparation et l'interrogation d'un ordinateur dont la configuration est décrite sur le site de l'agrégation de mathématiques, à l'adresse `http://www.agreg.org`.

Il est vivement souhaité que des illustrations informatiques (simulation, résolution numérique ou formelle, cas particuliers éclairants...) soient présentées, mais *il ne s'agit pas d'une épreuve de programmation.* Un programme qui ne fonctionne pas n'est en rien rédhibitoire et le jury appréciera un regard critique du candidat sur une tentative non aboutie. Une utilisation raisonnée des fonctions des logiciels disponibles est plus appréciée qu'une reprogrammation d'algorithmes standards. Bien intégré dans l'exposé, un tel travail peut en revanche devenir pertinent pour illustrer les insuffisances d'une méthode naïve.

Les suggestions sont facultatives et ne sont là que pour guider la réflexion du candidat sur des points significatifs du texte, ou des exemples utilisables. Certaines d'entre elles sont conçues pour permettre au candidat de comprendre le problème, de « rentrer » dans le modèle.

S'il est exclu de plaquer une démonstration d'un théorème du programme dans l'exposé, les démonstrations mathématiques de certaines assertions du texte sont très appréciées. Lorsqu'une démonstration est ébauchée dans le texte, le candidat peut choisir de la compléter. Il est alors particulièrement apprécié que le candidat précise les points mathématiques nécessaires pour une démonstration rigoureuse. Le candidat peut, tout comme le texte, utiliser des arguments heuristiques s'il les signale comme tels. Cependant le candidat ne doit pas oublier qu'il s'agit d'une épreuve de l'agrégation externe de mathématiques, et qu'un exposé ne comportant aucun argument mathématique précis est vivement déconseillé.

Un travers à éviter à tout prix : la paraphrase linéaire du texte sans aucun apport personnel du candidat, ni mise en perspective, agrémentée de la recopie de toutes les formules rencontrées.

6.3 Remarques spécifiques du jury

Le jury attache un intérêt particulier à l'effort de modélisation (qu'on peut définir comme le passage du « concret » aux mathématiques), à la mise en perspective des applications présentées, ainsi qu'aux illustrations permises par les moyens informatiques mis à disposition des candidats.

Le principal travers observé chez les candidats est la répétition linéaire du texte, y compris des passages non compris en espérant que le jury ne demandera pas de détails. Rappelons qu'utiliser des notions que l'on ne comprend pas, dans cette épreuve comme dans les autres, est une faute lourdement sanctionnée. Enfin, rappelons qu'*aucun développement n'est attendu*. Le candidat est libre de proposer des démonstrations de résultats utilisés, mais le jury peut les refuser, ou demander au candidat d'en donner seulement les grandes lignes.

Quelques qualités appréciées : prise de distance et d'initiative par rapport au texte, étude d'un exemple ou d'un cas simple pour comprendre le texte et le faire comprendre au jury, simplification ou, à l'inverse, généralisation du problème proposé, étude qualitative ou heuristique, critique du modèle.

Sur le plan

Il est conseillé aux candidats de présenter un plan *succinct* de leur exposé, précisant les moments où ils comptent présenter leurs simulations informatiques. Ceci permet au jury de guider les candidats dans leur gestion du temps.

Sur la présentation

Nous rappelons ici que l'agrégation est un concours visant à recruter des *enseignants*. Ainsi seront appréciés une bonne gestion du tableau, un exposé clair et pédagogique, et une bonne capacité à effectuer des calculs analytiques clairs, corrects et lisibles.

6.4 Utilisation de l'outil informatique

Le jury observe avec plaisir une utilisation plus pertinente de l'outil informatique, due certainement à une meilleure préparation des candidats.

Il est attendu du candidat un commentaire sur les résultats de sa simulation (résultats numériques ou graphiques), mais aussi du code mis en œuvre. Le jury regrette toutefois l'utilisation parfois abusive de « boîtes noires » de simulation au sein de leur programme, qui peuvent être source d'incompréhension sur les sorties.

Rappelons que le candidat ne doit pas avoir peur de présenter un programme non abouti. Le jury est sensible à la démarche employée.

D'un point de vue purement pratique, il est dommage de voir des candidats gênés durant l'épreuve de modélisation tout simplement parce qu'ils ne savent pas sauvegarder leur travail sur fichier, certains -rares heureusement- fermant directement l'application en ignorant les messages d'avertissement du logiciel utilisé et perdant ainsi tout ce qu'ils ont fait. Rappelons à ce sujet que le site du jury de l'agrégation décrit dans ses pages les logiciels utilisés et propose des outils pour qu'un candidat puisse se familiariser avec l'environnement proposé (voir `http://agreg.org/Agreg/installation.html`).

6.5 Option A : probabilités et statistiques

L'exposé doit être, idéalement, un dosage cohérent entre introduction motivée de modèles, preuves mathématiques, illustrations informatiques, critiques éventuelles du texte, réponses aux questions et mise en lumière de connaissances. Comme pour l'ensemble des oraux, le caractère dynamique de l'exposé apporte une valeur ajoutée conséquente sur l'évaluation.

Connaissance du programme

Lors de la discussion avec le candidat, le jury peut interroger celui-ci sur la totalité du programme. En particulier, il est systématique que le jury pose des questions de nature statistique à partir des textes à coloration probabiliste et inversement. Un nombre croissant de textes mêlent d'ailleurs les deux aspects, et les couplage de textes n'excluent en rien la possibilité d'avoir 2 textes de la même coloration (par exemple 2 textes traitant essentiellement de statistique). Le jury encourage donc les candidats et les préparateurs à tenir compte de l'ensemble du programme de l'option. Mais les candidats doivent aussi être capables de mettre en œuvre certaines de leurs connaissances en algèbre, géométrie et analyse pour l'étude des modèles.

• Probabilités

Le niveau moyen en probabilités a clairement beaucoup baissé cette année.
- Les difficultés des candidats portent désormais souvent sur l'énoncé exact des définitions et théorèmes au programme (concernant principalement les chaînes de Markov, les martingales, les différentes notions de convergence, les théorèmes limite, ...). Il devient alors illusoire de mettre en oeuvre de manière fructueuse ces notions et résultats lors de l'étude d'un texte si ceux-ci ne sont même pas connus.
- Les candidats ont fréquemment des difficultés pour effectuer des exercices de niveau de première année de licence. Les preuves demandées dans les textes ne sont souvent pas abordées ou juste paraphrasées.

• Statistiques

Le niveau moyen en statistique semble avoir également notablement régressé cette année.
- Les notions élémentaires de statistique paramétrique ne sont souvent pas connues des candidats (estimation, estimation par maximum de vraisemblance, intervalles de confiance, tests paramétriques, modèle linéaire gaussien).
- Le jury a observé qu'il semble souvent plus important aux candidats qu'un estimateur soit sans biais plutôt qu'il soit convergent, alors que la convergence devrait primer (un estimateur doit d'abord "estimer"). L'utilisation de l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev ou du théorème de la limite centrale pour préciser des intervalles de confiance ou des seuils de test devrait être maîtrisée par les candidats.

– Les tests d'adéquation (chi-deux, Kolmogorov-Smirnov) sont au programme et doivent être connus des candidats.

Illustrations informatiques

– Les logiciels de calcul numérique comme Scilab, Octave, et R sont particulièrement adaptés à cette option, tandis que les logiciels de calcul formel comme Maple le sont beaucoup moins. Les candidats ainsi que les préparateurs doivent en tenir compte.
– Nos futurs enseignants gagneraient à apprendre à utiliser des logiciels libres plutôt que des logiciels coûteux du commerce dont les sources sont tenues secrètes.
– Le jury attend des candidats qu'ils accompagnent leurs illustrations informatiques d'explications d'au moins deux ordres : d'une part sur la nature de ce qui est montré (que sont ces nombres ? Qu'y a-t-il en abscisse et en ordonnée dans ce graphique ? Quelles données ont permis de réaliser cet histogramme ?) et d'autre part sur les aspects mathématiques qu'elles illustrent (par exemple une convergence presque sûre, une convergence en loi, l'adéquation d'une loi empirique à un résultat théorique).
– Les illustrations informatiques sont souvent une occasion propice à l'utilisation de tests ou d'intervalles de confiance, pour vérifier que les résultats expérimentaux sont conformes aux résultats théoriques. Sans attendre un développement systématique à ce sujet, le jury apprécie que le candidat mette en valeur sa connaissance de ces outils et précise par exemple si l'écart entre des valeurs empiriques et des valeurs théoriques lui paraît acceptable ou non.
– Les candidats dont les programmes informatiques ne sont pas aboutis ou ne produisent pas les résultats escomptés sont néanmoins invités à expliquer leur démarche et ce qu'ils envisageaient de mettre en œuvre pour illustrer le texte.
– De nombreux textes proposent de travailler sur un jeu de données qui est fourni. Malheureusement trop peu de candidats exploitent cette possibilité.
– Pour illustrer la convergence d'une suite de variables aléatoires lorsque $n \to \infty$, les candidats ont souvent recours à des simulations qui régénèrent tout l'échantillon pour chaque valeur de n choisie (avec par exemple n variant de 1 à 1000) ; ceci ne permet pourtant pas d'exhiber une convergence trajectorielle. Il est plutôt conseillé de générer un seul échantillon de grande taille en début de programme.

Modélisation

Il est rappelé que même si la plupart des textes s'appuient sur des problèmes issus de sciences autres que les mathématiques, aucune connaissance dans ces domaines n'est exigée par le jury. Discuter la modélisation proposée par un texte consiste donc avant tout à dégager les comportements qualitatifs du modèle mathématique proposé, la manière dont il dépend d'éventuels paramètres et, à un niveau tout à fait élémentaire, s'il semble apte à rendre compte des phénomènes qu'il est censé représenter. Le jury s'attend à ce que le candidat ne se contente pas d'un exposé qualitatif et développe, fût-ce partiellement, certains aspects purement mathématiques du texte. A contrario, les interprétations qualitatives du comportement des modèles sont parfois absentes des exposés. Pourtant, montrer que l'on comprend un modèle ne se réduit pas à prouver un théorème.

6.6 Option B : Calcul Scientifique

En ce qui concerne l'option de Calcul Scientifique, le jury s'inquiète du contenu très approximatif des connaissances exhibées par les candidats de cette édition du concours. Il émet les recommandations techniques suivantes :

– **Analyse des équations différentielles ordinaires et calcul différentiel .**

La dérivation de fonctions de $\mathbf{R}^m$ dans $\mathbf{R}^n$ ne devrait pas poser de difficulté au niveau de l'agrégation. Le jury rappelle que les formules de développements de Taylor contiennent généralement un terme de reste, dont l'analyse est un point souvent crucial. Le triptyque "discussion du caractère bien posé, au moins localement en temps/passage du local au global grâce à des estimations sur la solution (conservation, dissipation)/propriétés qualitatives (par exemple analyse de stabilité linéaire)" devrait être un réflexe à la vue de la moindre équation différentielle ordinaire. Beaucoup trop de candidats ne maîtrisent pas les bases du programme sur ce point. Par exemple, un texte indiquant "la solution de l'équation différentielle [...] est définie pour tout temps et reste positive" doit amener à : 1) citer le théorème de Cauchy-Lipschitz, 2) expliquer comment il s'applique dans le contexte présent, 3) établir des estimations sur la solution, 4) en déduire la positivité de la solution et le caractère non borné du temps d'existence.

– **Schémas numériques pour les équations différentielles.**

Le jury considère la description des schémas d'Euler comme un élément central du programme de l'option. Les candidats doivent être capables de présenter clairement les principes guidant l'écriture de ce schéma, ses propriétés de convergence, qui est la notion majeure, stabilité, consistance, les avantages et inconvénients des méthodes explicites et implicites. Beaucoup trop rares sont les candidats capables de formaliser correctement une définition de la convergence d'un schéma numérique. La confusion récurrente entre l'approximation X_n et l'évaluation $X(t_n)$ de la solution au temps t_n, l'incapacité à relier le paramètre n et le pas Δt témoignent d'une compréhension déficiente du sujet. Afin de limiter des confusions coupables, le jury recommande de prohiber toute utilisation de symboles comme $\simeq$, $\approx$ ou bien pire $\sim$, pour relier l'évaluation de la solution aux points de discrétisation et les éléments de la suite numérique définie par le schéma. Attribuer l'intérêt de la notion de stabilité aux "erreurs machines" nous semble aussi faire la démonstration d'une interprétation erronée des enjeux du calcul scientifique.

– **Intégration numérique.**

Ne comprendre l'ordre d'une méthode d'intégration numérique que par le degré des polynômes pour lesquels la formule d'approximation est exacte démontre une incompréhension du sujet. En effet le calcul de l'intégrale d'un polynôme ne pose aucune difficulté et la question centrale est de savoir quantifier la différence entre l'intégrale d'une fonction quelconque et la formule d'approximation correspondante. On revanche, on attend des candidats qu'ils soient effectivement en mesure de faire le lien entre certaines propriétés des polynômes et de telles estimations.

– **Equations aux dérivées partielles.**

Le jury précise que les textes qui évoquent des problèmes d'équations aux dérivées partielles peuvent être abordés avec des outils rudimentaires et ne nécessitent a priori aucune connaissance sur la théorie des distributions, bien que ces notions aient intégré le programme commun, ni ne réclament de dextérité particulière d'analyse fonctionnelle.

– **Algèbre linéaire.**

L'état des connaissances sur les bases d'algèbre linéaire et le calcul matriciel est apparu calamiteux, comme cela a été souligné dans la paragraphe commun aux trois options. Le passage d'équations écrites sur les coordonnées à une forme matricielle arrête déjà bien trop de candidats. Un texte évoquant la résolution d'un système linéaire et de potentielles difficultés liées à une connaissance imparfaite des données doit amener à : 1) présenter une ou deux méthodes de résolution de tels systèmes (qui, rappelons-le, ne reviennent pas à inverser la matrice) avec une idée claire de leurs avantages et inconvénients, 2) rappeler et commenter dans le contexte proposé la notion de conditionnement d'une matrice. Il doit être clair qu'un texte relevant qu'une matrice est à diagonale strictement dominante pour en déduire aussitôt qu'elle est inversible est une invitation expresse à donner des éléments de démonstration d'une telle affirmation.

– **Optimisation.**

L'application de résultats de base sur la minimisation de fonctionnelles convexes ou du théorème des extrema liés reste un obstacle infranchissable pour trop de candidats.

6.7 Option C : Algèbre et Calcul formel

Exposé.

Commençons par mettre le doigt sur un travers en progression continue ces dernières années : celui de traiter le texte comme une suite d'exercices. Un tel parti-pris a pour conséquence un exposé totalement décousu et incompréhensible pour un auditoire qui, le candidat se le voit rappeler, n'est pas censé connaître le texte et le découvre ; ces exposés sont très frustrants pour le jury en ce qu'ils méconnaissent totalement l'esprit de l'épreuve. Une fois encore, il n'est pas attendu d'un candidat qu'il traite le texte dans son intégralité ; il est néanmoins attendu que la partie / les parties qu'il traite soient perçues et présentées comme un tout cohérent, partant d'une question et avançant dans la direction d'une réponse via des techniques mathématiques ; et que cette cohérence apparaisse au travers de l'exposé.

Aspects mathématiques.

Le jury regrette que l'algèbre linéaire, qui constitue le coeur du programme de l'agrégation, ne soit pas davantage maîtrisée, à la fois dans ses aspects théoriques (par exemple, théorème du rang, caractérisation du rang en terme de mineurs, condition suffisante d'existence de solution non triviale à un système linéaire homogène, etc.) et dans ses aspects calculatoires. Peu de candidats savent que la méthode du pivot de Gauss permet de résoudre l'essentiel des problèmes calculatoires de l'algèbre linéaire (rang, résolution de systèmes linéaires, inversion, déterminant). À l'inverse, beaucoup pensent que réduire (diagonaliser ou trigonaliser une matrice) permet de calculer le déterminant ; d'un point de vue théorique, c'est le cas, mais d'un point de vue calculatoire c'est en général très maladroit. En outre, sur le plan conceptuel, il s'agit de deux problèmes de nature fondamentalement différente. Les suites récurrentes linéaires sont toujours aussi mal connues, ainsi que la suite arithmético-géométrique $x_{n+1} = ax_n + b$, que presque aucun candidat ne sait traiter sans aide.

Le résultant reste le parent pauvre de l'option, même si des progrès sont à constater : la mention d'élimination par le jury provoque un réflexe résultant. La matrice de Sylvester est généralement connue, mais la mise en œuvre de l'objet (ou la simple question de savoir dans quel ensemble vit le résultant) reste problématique. Comme les années précédentes, rappelons que les candidats devraient connaître les deux difficultés classiques (points ou composantes "à l'infini", correspondant à l'annulation conjointe des termes de tête, et points ou composantes définies sur la clôture algébrique). L'interprétation géométrique du résultant dans un problème d'élimination comme permettant de calculer la projection d'une intersection est un support précieux à l'intuition, et permet d'illustrer les deux pathologies ci-dessus. Elle gagnerait à être mieux connue des candidats. Faute de mieux, le jury est déjà heureux de voir des candidats avoir une relative maîtrise opérationnelle du résultant comme outil permettant de calculer des (sur-ensembles d') intersections de courbes ou de surfaces, et de mener ce processus à bien. Les candidats montrant leur maîtrise du sujet ont pu obtenir de très bonnes notes.

Plus largement, les anneaux de polynômes en plusieurs variables et leurs propriétés arithmétiques posent de gros problèmes aux candidats, sur des questions élémentaires comme : peut-on factoriser un polynôme en n variables ? Le pgcd existe-t-il ? Peut-on faire une division euclidienne dans cet anneau ? Par ce polynôme, etc.

Les connaissances en arithmétique sont dans l'ensemble plus satisfaisantes, avec toujours le même point noir : la vision "naïve" de l'algorithme d'Euclide étendu comme "remonter les identités déduites de l'algorithme d'Euclide" trouve très vite ses limites, et nous renvoyons aux rapports 2010 et 2011 sur ce point. L'exponentiation rapide, longtemps bien maîtrisée, disparaît franchement de la culture de bien des candidats, au grand regret du jury. Enfin, beaucoup de candidats ne sont pas à l'aise avec la manipulation des congruences, et se réfugient dans des égalités qui, fréquemment, alourdissent considérablement les calculs et les arguments.

La complexité des opérations élémentaires ne fait pas non plus partie de la culture des candidats. Il s'agit pourtant d'un sujet où il est important d'avoir des repères pour comprendre la pertinence de certains choix faits dans les textes. Il devrait être à la portée des candidats de retenir que l'addition est linéaire en la taille de l'entrée, le reste de l'arithmétique (multiplication, division, pgcd, Euclide étendu) au plus quadratique dans le cas des nombres et des polynômes, et que les algorithmes standard (multiplication, pivot de Gauss, déterminant, inversion, résolution de système linéaire) sur les matrices ont un coût au plus cubique (cette fois en la dimension de la matrice). Sur ce point aussi, on ne peut que déplorer l'absence de réflexe en matière de comparaison série-intégrale, technique précieuse pour estimer des sommes $\sum_{n\leqslant N} n^{\alpha}$, fréquentes dans les analyses de complexité.

Informatique.

Outre les remarques générales, le jury incite vivement les candidats à se poser, avant l'oral, la question spécifique de la représentation et de la manipulation, souvent un peu délicate, des éléments des corps finis non premiers dans le logiciel de leur choix.

La proportion de candidats arrivant sans illustration informatique continue à augmenter, tandis que la qualité moyenne des illustrations tend à diminuer, ce qui est extrêmement regrettable. L'exercice d'illustration est souvent vécu par les candidats comme une corvée dont il faut se débarrasser. Les mêmes candidats se lancent en contrepartie dans des calculs lourds et interminables au tableau, calculs qu'ils pourraient avantageusement conduire dans leur système de calcul formel – ce qui leur fournirait, souvent, une (parfois très) bonne illustration de l'utilisation de l'outil informatique dans un contexte pédagogique...

6.8 Option D : Modélisation et Analyse de Systèmes Informatiques

Le jury a apprécié le travail accompli pour la préparation de cette épreuve par les meilleurs candidats. Il a interrogé les candidats dans le même esprit que dans les autres options et les critères d'évaluation étaient largement identiques sauf en ce qui concerne l'exercice de programmation. Le lecteur est invité à se reporter à la section du rapport consacrée à l'épreuve de modélisation pour les remarques générales sur la structure de cette épreuve. Nous ne détaillons ici que les aspects spécifiques à cette épreuve dans l'option Informatique.

Exposé des motivations. Beaucoup de candidats omettent la phase indispensable d'introduction et de motivation. C'est au candidat d'introduire le sujet du texte et de motiver la présentation qui va suivre. Cette motivation sera le plus souvent l'évocation de situations concrètes dans lesquelles on a besoin d'outils informatiques spécifiques. Ces situations peuvent être proposées par le texte lui-même, mais elles peuvent aussi être tirées de l'expérience personnelle du candidat. Toute contribution personnelle à ce niveau est toujours très appréciée !

Exercice de programmation informatique. Au cours de l'exposé, le candidat présente son *exercice de programmation*. Nous donnons quelques recommandations spécifiques à cette partie de l'épreuve à la fin de ce rapport.

Cette partie de l'épreuve a été globalement satisfaisante, les candidats ayant généralement bien compris l'importance qui y est attachée. Elle dure environ 10 minutes. Le candidat choisit librement dans le temps d'exposé le moment où présenter son exercice de programmation, de façon qu'il s'intègre au mieux à la présentation. Si l'exercice n'a pas été présenté au bout d'une trentaine de minutes, le jury lui rappellera de le faire.

Le plus souvent, les candidats le placent dès que les notions nécessaires ont été introduites dans l'exposé. Cette introduction doit être soignée et complète, afin d'éviter tant les allers-retours du terminal au tableau que les discours approximatif devant l'écran.

Cette présentation au jury doit être faite que le programme *fonctionne* — ce que l'on espère ! — ou pas. C'est seulement dans un deuxième temps que le candidat lance une exécution. Dans tous les cas, le jury évalue la qualité générale du code réalisé. Cette évaluation interactive permet à un candidat réactif de repérer une erreur, voire de la corriger, de recompiler et de relancer l'exécution.

6.8.1 Remarques spécifiques sur l'exercice de programmation.

Voici quelques recommandations plus précises concernant l'exercice de programmation. Elles sont motivées par les présentations des candidats de cette année. Nous espérons qu'elles seront utiles pour les candidats des années à venir.

Installation technique. Le candidat dispose d'un poste informatique analogue à celui utilisé pour la préparation. Les fichiers qu'il a préparés sont installés sur ce poste en début d'interrogation. Le jury dispose d'écrans de contrôle pour suivre la présentation, mais il ne dispose ni de clavier ni de souris : le candidat est donc le seul à contrôler ce qui est présenté, sans interférence possible.

Présentation du programme. D'une manière générale, le candidat doit proposer un code lisible et mettre en valeur ses connaissances en programmation et sa maîtrise du langage utilisé et de l'environnement de programmation utilisé. À titre de repère, la partie centrale du code devrait tenir sur un écran.

Les candidats sont invités à présenter le schéma algorithmique et les structures de données utilisés avant de lancer leur programme. Par contre, il est inutile de descendre dans les détails les plus triviaux du code, que le jury peut lire lui-même sur les écrans de contrôle. Le jury pourra demander au candidat d'évaluer la complexité de son implémentation ou de discuter de choix alternatifs de conception. La possibilité de modification au vol d'un paramètre ou des données est appréciée pour la vérification de la correction.

Choix des données d'exécution. Il est demandé aux candidats d'exécuter leurs programmes sur différents jeux de données, et il est souhaitable qu'ils aient anticipé ce point. La manière dont ces jeux de données sont choisis devra être justifiée par la démonstration de divers aspects du comportement du programme. Les candidats sont souvent interrogés sur leurs critères de choix.

Le candidat doit être capable de repérer des résultats erronés produits par son programme. Ne pas s'apercevoir que son programme renvoie des résultats absurdes est évidemment pénalisé ! Le jury invite donc les candidats à réfléchir aux ordres de grandeur des résultats attendus.

Choix du langage. Le candidat choisit son langage. Cette année, nous n'avons pratiquement pas vu de programmes en Java. Les candidats se partagent équitablement entre Caml et C (en fait, ils utilisent dans le langage C les extensions C++ admises par le compilateur `gcc`). Ce choix peut orienter les questions, car l'implémentation d'un problème peut être plus facile dans certains langages qui permettent de manipuler les structures de données directement, par exemple les listes pour Caml. Mais un candidat qui utilise ces facilités doit pouvoir les justifier. Par exemple, la différence ensembliste entre deux listes étant prédéfinie dans les bibliothèques de Caml, on attend du candidat qui l'utiliserait qu'il puisse expliquer l'implémentation de cette fonction et la complexité des opérations concernées.

L'exercice est soigneusement spécifié dans les textes proposés. Il doit être conduit dans l'un des langages proposés (C, Caml ou Java) : un candidat qui n'utilise pas les langages proposés reçoit la note 0 à l'exercice de programmation, même si ce langage est disponible sur le poste informatique (Maple, Matlab, etc.)

Style de programmation. La *lisibilité* et l'*élégance* de l'expression du programme dans le langage choisi sont particulièrement appréciées par le jury. Il est essentiellement attendu que le style de programmation des programmes soit *cohérent* : utilisation de structures d'itération (bornées `for` ou non-bornées `while`), initialisation des variables, découpage plus ou moins fin en fonctions auxiliaires, etc. **Les critères d'arrêt des boucles doivent être parfaitement maîtrisés.** Toutes les quantités présentes dans les programmes doivent être définies par des constantes symboliques facilement modifiables à la demande du jury.

Certains langages favorisent une programmation récursive ou itérative. Le candidat peut utiliser le mode de programmation qu'il préfère, pourvu que ce soit de manière cohérente avec les autres choix de conception. Il est bien sûr attendu du candidat qu'il sache passer d'une programmation récursive à une programmation itérative et réciproquement dans les cas simples, par exemple en présence de *récursivité terminale*.

Entrées-sorties. Certains candidats passent beaucoup de temps à programmer des entrées *intéractives* au clavier. Ce n'est pas nécessaire et souvent inutilement complexe, notamment en C (appel par référence dans la fonction `scanf`, etc.). Il est recommandé de coder le jeu de données dans une procédure d'initialisation qui pourra être facilement modifiée à la demande du jury.

Assertions de correction. Il est très souvent demandé aux candidats d'exécuter leurs programmes sur les cas limites de leurs spécifications, sauf si ces cas ont été explicitement exclus dans la présentation préalable : liste vide pour les algorithmes de tri, nombres négatifs pour des algorithmes de factorisation, etc. Il sera d'ailleurs bien apprécié que le candidat garde les parties délicates de son programme par des assertions, par exemple à l'aide de la fonction `assert` de la bibliothèque C ou de levée d'exception `failwith` de Caml. C'est particulièrement indiqué pour les accès aux tableaux passés en paramètre en C.

Cas de la programmation C. Dans le cas d'une programmation en C, il sera systématiquement demandé au candidat de recompiler son programme avec le niveau maximal d'avertissement :

```
gcc -Wall prog.c -o prog
```

Un programme qui produit des avertissements sera pénalisé et le candidat devra le corriger pendant l'interrogation. La même chose sera vérifiée en Caml ou Java. En particulier, les *pattern-matching* de Caml doivent être exhaustifs et les fonctions internes à une séquence doit retourner la valeur `()` du type `unit`.

Organisation de la préparation. Il est souvent demandé combien de temps un candidat devrait consacrer à la préparation de l'épreuve au sein des 4 heures de préparation. Ceci dépend bien sûr des capacités du candidat et de l'organisation de son exposé. Cependant, il faut noter que la présentation de cette partie ne dure que 10 minutes sur les 40 minutes d'exposé. Il est donc indiqué d'y passer au plus un quart du temps de préparation, soit entre une demi-heure et une heure, afin de ne pas empiéter sur la préparation du reste de l'épreuve.

Respect de la spécification. Le candidat doit respecter la spécification qui est donnée dans l'énoncé. C'est seulement dans un deuxième temps qu'il peut, s'il le souhaite, présenter un programme implémentant une autre spécification. Il devra alors expliquer pourquoi il le fait. Le fait que l'exercice proposé dans l'énoncé soit trivial ou inintéressant n'est évidemment pas une explication suffisante ! Ces extensions sont alors considérées et évaluées comme des développements au choix du candidat. Par exemple, des simulations simples ont pu servir à exposer un développement. Elles doivent mettre en valeur d'autres capacités du candidat que sa *virtuosité* en programmation pure qui n'est absolument pas l'objectif de l'épreuve. Ces présentations complémentaires peuvent utiliser l'ensemble des outils présents sur le poste informatique, Maple et Matlab par exemple.

Chapitre 7

Épreuve : Agir en fonctionnaire de l'état et de façon éthique et responsable

Conformément à l'arrêté du 28 décembre 2009 fixant les modalités d'organisation des concours de recrutement des enseignants, une interrogation portant sur la compétence «Agir en fonctionnaire de façon éthique et responsable » est insérée, depuis la session 2011, dans l'épreuve orale d'algèbre et géométrie pour les candidats des options A,B,C et dans l'épreuve orale de mathématiques pour l'informatique pour les candidats de l'option D.

Déroulement. Le candidat dispose d'un temps global de 3h30 qu'il a toute liberté de répartir entre la préparation des deux interrogations. Celle qui se rapporte à l'épreuve « Agir en fonctionnaire de l'État de manière éthique et responsable » comporte deux phases : un exposé du candidat d'une durée maximale de dix minutes, suivi d'un entretien avec le jury d'une durée maximale de dix minutes. L'exposé et l'entretien s'appuient sur le sujet remis au candidat à l'issue du tirage. Celui-ci comprend plusieurs extraits de textes officiels (de nature législative ou réglementaire) et deux ou trois pistes de réflexion conçues pour aider le candidat à structurer sa présentation et pouvant servir de support aux questions abordées lors de la phase de dialogue avec le jury. Il est à noter que le candidat n'est pas tenu de suivre ces pistes et a toute liberté pour analyser le texte comme il l'entend. Les sujets ont porté sur des thématiques regroupées autour des connaissances, capacités et attitudes portant définition des compétences à acquérir par les professeurs.

Parmi celles-ci, nous pouvons citer :
- Droits et obligations du fonctionnaire de l'État
- Missions de l'enseignant du second degré et du supérieur
- L'obligation de signalement
- L'obligation scolaire
- L'égalité des chances
- Responsabilités civile et pénale de l'enseignant
- Le projet d'établissement
- Le socle commun des connaissances et des compétences
- L'éducation prioritaire
- L'orientation active
- La scolarisation des élèves en situation de handicap
- L'utilisation des ressources numériques
- Le conseil de discipline.

Objectif. L'objectif de l'interrogation est de vérifier les connaissances du candidat sur l'une des compétences professionnelles du métier d'enseignant et ses capacités de compréhension, de réflexion et d'analyse, jugées indispensables pour un fonctionnaire de catégorie A. La conception de l'épreuve tend à minorer la place des connaissances du système éducatif au profit de capacités de réflexion, d'exploitation et d'analyse de documents et de communication orale.

Compétences attendues. Lors de l'exposé, le jury attend du candidat qu'il dégage les objectifs principaux visés par les extraits de textes figurant dans la documentation fournie par le sujet, qu'il cerne leurs articulations ou leurs apparentes contradictions, qu'il en fasse une analyse raisonnée et construise une argumentation.

Ceci suppose que le candidat soit capable de traiter scientifiquement une question en se méfiant tant de ses propres préjugés que de certains lieux communs ou idées reçues. Ce processus de distanciation vis à vis de ses propres représentations est particulièrement nécessaire sur certaines thématiques pouvant le toucher dans ses convictions ou son histoire personnelle.

Outre le contenu de l'exposé, la manière dont il est présenté en termes de structure et d'expression sont des éléments d'appréciation importants : en particulier, le registre de langue orale (tant au niveau syntaxique que lexical) doit être adapté aussi bien à la situation d'oral de concours qu'aux situations de communication auxquelles un enseignant est confronté dans sa pratique professionnelle.
L'échange avec le jury qui fait suite à l'exposé porte aussi bien sur certains points évoqués par le candidat que sur des éléments figurant dans le document. Le jury n'attend a priori aucune prétendue bonne réponse, mais est sensible aux qualités d'écoute, de dialogue et d'ouverture d'esprit manifestées par le candidat, dans le respect des règles de la déontologie et de l'éthique d'un fonctionnaire de l'État. Le candidat peut, s'il le souhaite, illustrer sa présentation par des éléments tirés d'une expérience professionnelle. En revanche toute exposition uniquement basée sur des opinions ou convictions personnelles et non étayée ne peut satisfaire le jury qui en tient compte dans sa notation.

Bilan des interrogations. Parmi les candidats, le jury a pu détecter trois catégories de populations : quelques rares étudiants qui se sont présentés sans préparation, des professeurs déjà en activité, des étudiants ayant préparé l'épreuve et ayant bien compris les règles de l'exercice.

– Les premiers se sont contenté de résumer les textes proposés, sans identifier les liens logiques qui les unissent. L'entretien avec ces candidats a souvent révélé que leurs connaissances sur l'éducation relevaient davantage d'idées reçues et de lieux communs que de savoirs scientifiquement fondés. Dans des cas extrêmes, quelques très rares candidats ont mal géré leur temps de préparation et se sont présentés devant le jury sans même avoir pris connaissance du sujet. La durée de leur exposé a été amputée du temps nécessaire à la lecture des textes qui s'est alors effectuée au début de l'interrogation ; dans ces conditions, leur prestation s'est souvent limitée à de la paraphrase, sans aucune émancipation des textes proposés.
– Les seconds ont montré de bonnes connaissances de la politique éducative et des institutions qui la définissent et la mettent en œuvre. Ils n'ont pas hésité, pour organiser leur exposé ou participer à l'entretien, à compléter les éléments figurant dans le sujet par des exemples tirés de leur expérience personnelle. Certains d'entre eux n'ont cependant pas réussi à mettre leurs sentiments ou leurs opinions à l'épreuve de savoirs externes, notamment ceux produits par les sciences sociales. Quelques expériences présentées sur un registre affectif, voire pathétique, n'ont pas réussi à s'élever du niveau personnel au niveau professionnel.
– Les troisièmes ont montré des connaissances livresques sur les institutions et le système éducatif et ont su les mobiliser pour aborder la problématique abordée dans le corpus documentaire fourni. Quelques uns

sont même parvenus à le contextualiser en prenant appui sur une culture personnelle relative à l'histoire, la sociologie ou la philosophie.

Par rapport à l'année dernière, le jury a constaté une nette amélioration de la qualité des prestations, la majorité des candidats ayant bien compris les règles de l'exercice, et s'y étant préparé. Nombre d'entre eux ont fait preuve de qualités de réflexion, d'analyse et d'esprit critique, se positionnant clairement dans le cadre des principes éthiques de la fonction publique de l'État.

Chapitre 8

Annexe 1 : Leçons d'oral (options A, B et C) proposées en 2012

Leçons d'algèbre et géométrie

101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

102 Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.

103 Exemples et applications des notions de sous-groupe distingué et de groupe quotient.

104 Groupes finis. Exemples et applications.

105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

107 Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbf{C}$-espace vectoriel.

108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

109 Représentations de groupes finis de petit cardinal.

120 Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

121 Nombres premiers. Applications.

122 Anneaux principaux. Applications.

---

123 Corps finis. Applications.

---

124 Anneau des séries formelles. Applications.

---

125 Extensions de corps. Exemples et applications.

---

140 Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.

---

141 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

---

142 Algèbre des polynômes à plusieurs indéterminées. Applications.

---

143 Résultant. Applications.

---

144 Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Localisation des racines dans les cas réel et complexe.

---

150 Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

---

151 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

---

152 Déterminant. Exemples et applications.

---

153 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

---

154 Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

---

155 Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

---

156 Exponentielle de matrices. Applications.

---

157 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

---

158 Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

---

159 Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.

160 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

161 Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Forme réduite. Applications en dimensions 2 et 3.

162 Systèmes d'équations linéaires ; opérations, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

170 Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

171 Formes quadratiques réelles. Exemples et applications.

180 Coniques. Applications.

181 Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

182 Applications des nombres complexes à la géométrie.

183 Utilisation des groupes en géométrie.

190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

Leçons d'analyse et probabilités

201 Espaces de fonctions : exemples et applications.

---

202 Exemples de parties denses et applications.

---

203 Utilisation de la notion de compacité.

---

204 Connexité. Exemples et applications.

---

205 Espaces complets. Exemples et applications.

---

206 Théorèmes de point fixe. Exemples et applications.

---

207 Prolongement de fonctions. Exemples et applications.

---

208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

---

213 Espaces de HILBERT. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

---

214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications.

---

215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

---

216 Étude métrique des courbes. Exemples.

---

217 Sous-variétés de $\mathbf{R}^n$. Exemples.

---

218 Applications des formules de TAYLOR.

---

219 Problèmes d'extremums.

---

220 Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'études qualitatives des solutions.

---

221 Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

---

223 Convergence des suites numériques. Exemples et applications.

---

224 Comportement asymptotique de suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.

---

226 Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples.

---

228 Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.

---

229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

---

230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

---

232 Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.

---

234 Espaces L^p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.

---

235 Suites et séries de fonctions intégrables. Exemples et applications.

---

236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.

---

239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

---

240 Produit de convolution, transformation de FOURIER. Applications.

---

241 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

---

243 Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

---

245 Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbf{C}$. Exemples et applications.

---

246 Séries de FOURIER. Exemples et applications.

---

247 Exemples de problèmes d'interversion de limites.

---

249 Suites de variables de BERNOULLI indépendantes.

---

250 Loi des grands nombres. Théorème central limite. Applications.

---

251 Indépendance d'événements et de variables aléatoires. Exemples.

---

252 Loi binomiale. Loi de POISSON. Applications.

---

253 Utilisation de la notion de convexité en analyse.

---

254 Espaces de SCHWARTZ $S(\mathbf{R}^d)$ et distributions tempérées. Transformation de FOURIER dans $S(\mathbf{R}^d)$ et $S^{'}(\mathbf{R}^d)$.

---

255 Espaces de Schwartz. Distributions. Dérivation au sens des distributions.

Chapitre 9

Annexe 2 : Leçons de mathématiques pour l'informatique et leçons d'informatique proposées en 2012

Leçons de mathématiques pour l'informatique

❁ ❁ ❁

104 Groupes finis. Exemples et applications.

---

105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

---

106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

---

108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

---

120 Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

---

121 Nombres premiers. Applications.

---

123 Corps finis. Applications.

---

141 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

---

150 Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

---

151 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

---

152 Déterminant. Exemples et applications.

---

153 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

---

157 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

---

159 Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.

---

162 Systèmes d'équations linéaires ; opérations, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

---

170 Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

---

181 Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

---

182 Applications des nombres complexes à la géométrie.

---

183 Utilisation des groupes en géométrie.

---

190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

---

203 Utilisation de la notion de compacité.

---

206 Théorèmes de point fixe. Exemples et applications.

---

208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

---

214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications.

---

215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

---

218 Applications des formules de TAYLOR.

---

219 Problèmes d'extremums.

---

220 Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'études qualitatives des solutions.

---

221 Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

---

223 Convergence des suites numériques. Exemples et applications.

---

224 Comportement asymptotique de suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.

---

226 Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples.

---

229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

---

230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

---

232 Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.

---

236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.

---

239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

---

240 Produit de convolution, transformation de FOURIER. Applications.

---

243 Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

---

246 Séries de FOURIER. Exemples et applications.

---

251 Indépendance d'événements et de variables aléatoires. Exemples.

---

252 Loi binomiale. Loi de POISSON. Applications.

Leçons d'informatique

Les leçons 928 n'a pas été posée en 2012. Elle remplacera la leçon 904 en 2013

901 Structures de données : exemples et applications.

---

902 Diviser pour régner : exemples et applications.

---

903 Exemples d'algorithmes de tri. Complexité.

---

904 Problèmes NP-complets : exemples.

---

906 Programmation dynamique : exemples et applications.

---

907 Algorithmique du texte : exemples et applications.

---

908 Automates finis. Exemples et applications.

---

909 Langages rationnels. Exemples et applications.

---

910 Langages algébriques. Exemples et applications.

---

911 Automates à† pile. Exemples et applications.

---

912 Fonctions récursives primitives et non primitives. Exemples.

---

913 Machines de Turing. Applications.

---

914 Décidabilité et indécidabilité. Exemples.

---

915 Classes de complexité : exemples.

---

916 Formules du calcul propositionnel : représentation, formes normales, satisfiabilité. Applications.

---

917 Logique du premier ordre : syntaxe et sémantique.

---

918 Systèmes formels de preuve en logique du premier ordre : exemples.

---

919 Unification : algorithmes et applications.

---

920 Réécriture et formes normales. Exemples.

---

921 Algorithmes de recherche et structures de données associées.

---

922 Ensembles récursifs, récursivement énumérables. Exemples.

---

923 Analyses lexicale et syntaxique : applications.

---

924 Théories et modèles en logique du premier ordre. Exemples.

---

925 Graphes : représentations et algorithmes.

---

926 Analyse des algorithmes : complexité. Exemples.

---

927 Exemples de preuve d'algorithme : correction, terminaison.

---

928 Problèmes NP-complets : exemples de réductions

Chapitre 10

Annexe 3 : Le programme 2012

Le programme des épreuves de l'agrégation n'est pas rédigé comme un plan de cours. Il décrit un ensemble de connaissances que le candidat doit maîtriser. Il comporte des répétitions lorsque des notions interviennent naturellement à plusieurs endroits.

D'une façon générale, les candidats doivent connaître des applications qui illustrent les notions générales. Le programme en propose ainsi un certain nombre. Il ne s'agit que de simples suggestions d'applications possibles, qui peuvent être complétées ou remplacées par d'autres.

Dans les paragraphes 1 à 5 qui suivent, tous les corps (notés **K** en général) sont supposés commutatifs.

10.1 Algèbre linéaire

10.1.1 Espaces vectoriels

Espaces vectoriels, applications linéaires. Produit d'espaces vectoriels. Sous-espaces, image et noyau d'une application linéaire. Espaces quotients. Somme de sous-espaces, somme directe, supplémentaires. Familles libres, génératrices ; bases. Algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel E, groupe linéaire $GL(E)$.

Sous-espaces stables d'un endomorphisme. Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres.

Représentations linéaires d'un groupe et d'une algèbre. Irréductibilité. En dimension finie : exemples de décomposition d'une représentation linéaire en somme directe de sous-représentations, lemme de Schur.

10.1.2 Espaces vectoriels de dimension finie

1. Espaces vectoriels de dimension finie. Existence de bases : isomorphisme avec $\mathbf{K}^n$. Existence de supplémentaires d'un sous-espace. Rang d'une application linéaire, rang d'un système de vecteurs. Espace dual. Rang d'un système d'équations linéaires. Transposée d'une application linéaire. Base duale. Bidualité. Orthogonalité.
2. Applications multilinéaires. Déterminant d'un système de vecteurs, d'un endomorphisme. Groupe spécial linéaire $SL(E)$. Orientation d'un **R**-espace vectoriel.
3. Matrices à coefficients dans un corps. Opérations matricielles. Rang d'une matrice. Représentations matricielles d'une application linéaire. Changement de base.

   Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice. Méthode du pivot de GAUSS. Notion de matrices échelonnées. Application à la résolution de systèmes d'équations linéaires, au calcul de déterminants, à l'inversion des matrices carrées, à la détermination du rang d'une matrice, à la détermination d'équations définissant un sous-espace vectoriel.

   Extension élémentaire de ces notions aux matrices à coefficients dans un anneau commutatif.

4. Sous-espaces stables d'un endomorphisme, lemme des noyaux. Polynôme caractéristique, polynômes annulateurs d'un endomorphisme, polynôme minimal. Théorème de CAYLEY-HAMILTON. Diagonalisation, trigonalisation, applications. Sous-espaces caractéristiques, décomposition de DUNFORD. Exponentielle des matrices réelles ou complexes.

10.2 Groupes et géométrie

Les différentes notions de théorie des groupes introduites dans les paragraphes suivants seront illustrées et appliquées dans des situations géométriques.

1. Groupes, morphismes de groupes. Produit direct de groupes. Sous-groupes. Sous-groupe engendré par une partie. Ordre d'un élément. Sous-groupes distingués (ou normaux), groupes quotients. Opération d'un groupe sur un ensemble. Stabilisateur d'un point, orbites, espace quotient. Formule des classes. Classes de conjugaison. Application à la détermination des groupes d'isométries d'un polyèdre régulier en dimension 3.
2. Groupes cycliques. Groupes abéliens de type fini. Groupe des racines complexes n-ièmes de l'unité, racines primitives.
3. Groupe des permutations d'un ensemble fini. Décomposition d'une permutation en produit de transpositions, en produit de cycles à supports disjoints. Signature. Groupe alterné. Application : déterminants.
4. Définition des groupes classiques d'automorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie : groupe général linéaire, groupe spécial linéaire ; groupe orthogonal, groupe spécial orthogonal ; groupe unitaire, groupe spécial unitaire.
5. Représentations d'un groupe fini sur un $\mathbf{C}$-espace vectoriel.
   Cas d'un groupe abélien. Orthogonalité des caractères irréductibles. Groupe dual. Transformée de Fourier. Convolution. Application : transformée de Fourier rapide.
   Cas général. Théorème de Maschke. Caractères d'une représentation de dimension finie. Fonctions centrales sur le groupe, base orthonormée des caractères irréductibles. Exemples de représentations de groupes de petit cardinal.

10.3 Anneaux, corps, polynômes et fractions rationnelles

1. Anneaux (unitaires), morphisme d'anneaux, sous-anneaux. L'anneau $\mathbf{Z}$ des entiers relatifs. Produit d'anneaux. Idéaux d'un anneau, anneaux quotients. Idéaux premiers, idéaux maximaux d'un anneau commutatif. Notion de module sur un anneau commutatif, d'algèbre (associative ou non) sur un anneau commutatif.
2. Algèbre des polynômes à une ou plusieurs indéterminées sur un anneau commutatif. Polynômes homogènes. Polynômes symétriques.

   Décomposition en polynômes homogènes. Tout polynôme symétrique s'exprime en fonction des polynômes symétriques élémentaires.
3. Séries formelles à une indéterminée à coefficients dans un corps. Addition, multiplication, composition, éléments inversibles.
4. Corps, sous-corps. Caractéristique. Extension de corps. Corps des fractions d'un anneau intègre. Le corps $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels. Le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels. Le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes. Théorème de D'ALEMBERT-GAUSS.
5. Divisibilité dans les anneaux commutatifs intègres. Éléments irréductibles, éléments inversibles, éléments premiers entre eux. Anneaux factoriels. Plus grand diviseur commun, plus petit multiple commun.

Factorialité de $A[X]$ quand A est un anneau factoriel. Anneaux principaux. Théorème de BÉZOUT. Anneaux euclidiens. Algorithme d'EUCLIDE. Cas de l'anneau $\mathbf{Z}$ et de l'algèbre $\mathbf{K}[X]$ des polynômes sur le corps $\mathbf{K}$. Polynômes irréductibles. Exemples : polynômes cyclotomiques dans $\mathbf{Q}[X]$, critère d'EISENSTEIN.

6. Congruences dans $\mathbf{Z}$. Nombres premiers. Étude de l'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et de ses éléments inversibles. Théorème chinois et applications : multiplication, pivot de GAUSS, systèmes linéaires...
7. Racines d'un polynôme, multiplicité. Polynôme dérivé. Éléments algébriques et transcendants. Extensions algébriques. Corps algébriquement clos. Corps de rupture et corps de décomposition. Corps finis.
8. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé. Sommes de NEWTON. Résultant. Discriminant. Application à l'intersection ensembliste de deux courbes algébriques planes.
9. Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps. Décomposition en éléments simples. Cas réel et complexe. Dérivée logarithmique d'un polynôme et applications.

10.4 Formes bilinéaires et quadratiques sur un espace vectoriel

1. Formes bilinéaires. Formes bilinéaires alternées. Formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques, forme polaire d'une forme quadratique (en caractéristique différente de 2). Éléments orthogonaux, interprétation géométrique. Formes non dégénérées. Adjoint d'un endomorphisme. Représentation matricielle, changement de base. Rang d'une forme bilinéaire.
2. Orthogonalité. Sous-espaces isotropes. Décomposition d'une forme quadratique en somme de carrés. Théorème d'inertie de SYLVESTER. Classification dans le cas de $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Procédés d'orthogonalisation.
3. Espaces vectoriels euclidiens, espaces vectoriels hermitiens. Isomorphisme d'un espace vectoriel euclidien avec son dual. Supplémentaire orthogonal. Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ. Norme. Bases orthonormales.
4. Groupe orthogonal, groupe spécial orthogonal. Exemple de générateurs du groupe orthogonal : décomposition d'un automorphisme orthogonal en produit de réflexions. Endomorphismes symétriques, endomorphismes normaux. Diagonalisation d'un endomorphisme symétrique. Réduction simultanée de deux formes quadratiques réelles, l'une étant définie positive. Décomposition polaire dans $GL(n,\mathbf{R})$. Espaces vectoriels euclidiens de dimension 2 ou 3 : groupe des rotations ; produit mixte ; produit vectoriel.
5. Angles en dimension 2 : angles de vecteurs, angles de droites. Théorème de l'angle inscrit. Cocyclicité.
6. Groupe unitaire, groupe spécial unitaire. Diagonalisation des endomorphismes normaux. Décomposition polaire dans $GL(n,\mathbf{C})$.

10.5 Géométries affine, projective et euclidienne

Tous les espaces considérés dans ce chapitre sont de dimension finie.

1. Espace affine et espace vectoriel associé. Application affine et application linéaire associée. Sous-espaces affines, barycentres. Repères affines, équations d'un sous-espace affine. Groupe affine, notion de propriété affine. Groupe des homothéties-translations, affinités. Parties convexes, enveloppe convexe d'une partie d'un espace affine réel, points extrémaux.

   Projection sur un convexe fermé.
2. Droite projective réelle ou complexe : groupe des homographies, birapport.

3. Groupe des isométries d'un espace affine euclidien. Déplacements et antidéplacements. Décomposition commutative en une translation et une isométrie à point fixe (forme dite réduite). Exemple de générateurs du groupe des isométries : décomposition en produit de réflexions.
4. Espace affine euclidien de dimension 2.
   Classification des isométries.
   Similitudes directes et indirectes.
   Groupe des isométries laissant stable une partie du plan. Polygones réguliers.
   Relations métriques dans le triangle.
   Utilisation des nombres complexes en géométrie plane.
5. Espace affine euclidien de dimension 3.
   Rotations. Vissages. Groupe des isométries laissant stable une partie de l'espace.
6. Coniques et quadriques. Application des formes quadratiques à l'étude des coniques propres du plan affine euclidien et des quadriques de l'espace affine euclidien de dimension 3.
   Classification des coniques.
   Intersection de quadriques et résultant.
   Propriétés géométriques (affines et métriques) des coniques. Définition par foyer et directrice, définition bifocale.

10.6 Analyse à une variable réelle

1. Nombres réels
   Le corps **R** des nombres réels. Topologie de **R**. Sous-groupes additifs de **R**. Droite numérique achevée. Suites de nombres réels : convergence, valeur d'adhérence. Limites inférieure et supérieure. Suites de Cauchy. Complétude de **R**. Théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS. Parties compactes de **R**. Parties connexes de **R**.
   Convergence des séries à termes réels. Séries géométriques, séries de RIEMANN. Séries à termes positifs. Sommation des relations de comparaison. Comparaison d'une série et d'une intégrale. Estimations des restes. Convergence absolue. Produits de séries. Séries alternées.
2. Fonctions définies sur une partie de **R** et à valeurs réelles
   (a) Continuité
   Limite, continuité à droite, à gauche, continuité.
   Opérations algébriques sur les fonctions continues. Théorème des valeurs intermédiaires, image d'un segment. Étude de la continuité des fonctions monotones. Continuité d'une fonction réciproque.
   (b) Dérivabilité
   Dérivée en un point, dérivée à droite, à gauche. Fonctions dérivables. Opérations algébriques sur les fonctions dérivables. Dérivée d'une fonction composée. Dérivabilité d'une fonction réciproque.
   Théorèmes de ROLLE et des accroissements finis. Application au sens de variation d'une fonction.
   Dérivées d'ordre supérieur. Applications de classe $\mathscr{C}^k$, de classe $\mathscr{C}^k$ par morceaux. Formule de LEIBNIZ. Formule de TAYLOR avec reste intégral, formule de TAYLOR-LAGRANGE, formule de TAYLOR-YOUNG.
   Calcul de développements limités et de développements asymptotiques.

3. Intégrale sur un segment des fonctions continues par morceaux et calcul de primitives

   Propriétés de l'intégrale : linéarité, relation de CHASLES, positivité. Sommes de RIEMANN. Primitives d'une fonction continue. Changement de variable. Intégration par parties. Méthodes usuelles de calcul d'intégrales.

4. Intégrales généralisées. Intégrales absolument convergentes. Intégration des relations de comparaison. Intégrales semi-convergentes.

5. Suites et séries de fonctions

   Convergence simple, convergence uniforme. Continuité et dérivabilité de la limite. Cas des séries de fonctions : convergence normale.

   Théorèmes d'approximation de WEIERSTRASS polynomial et de WEIERSTRASS trigonométrique.

6. Fonctions usuelles

   Fonctions polynômes, fonctions rationnelles. Logarithmes. Exponentielles. Fonctions puissances. Fonctions circulaires et hyperboliques. Fonctions circulaires et hyperboliques réciproques.

7. Convexité

   Fonctions convexes d'une variable réelle. Continuité et dérivabilité des fonctions convexes. Caractérisations de la convexité.

8. Suites définies par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$. Étude graphique. Points fixes attractifs. Points fixes répulsifs.

9. Polynôme d'interpolation de LAGRANGE.

10. Méthodes d'approximation

    Approximation quadratique : polynômes orthogonaux.

11. Méthodes de résolution approchée des équations $f(x) = 0$: dichotomie, méthode de PICARD, méthode de NEWTON. Estimation de l'erreur pour la méthode de NEWTON.

12. Intégration numérique : méthode des trapèzes, de SIMPSON ; estimation de l'erreur.

10.7 Analyse à une variable complexe

1. Séries entières

   Rayon de convergence. Propriétés de la somme d'une série entière sur son disque de convergence : continuité, dérivabilité par rapport à la variable complexe, primitives.

   Fonctions analytiques sur un ouvert. Principe des zéros isolés. Opérations algébriques sur les fonctions analytiques. Composition.

   Exponentielle complexe ; propriétés. Extension des fonctions circulaires au domaine complexe.

   Développement en série entière des fonctions usuelles.

2. Fonctions d'une variable complexe

   Fonctions holomorphes. Conditions de CAUCHY-RIEMANN. Intégrale d'une fonction continue le long d'un chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Primitives d'une fonction holomorphe sur un ouvert étoilé. Déterminations du logarithme.

   Indice d'un chemin fermé $\mathscr{C}^1$ par morceaux par rapport à un point.

   Formules de CAUCHY. Analyticité d'une fonction holomorphe. Principe du prolongement analytique. Principe du maximum.

   Singularités isolées. Séries de LAURENT. Fonctions méromorphes. Théorème des résidus.

   Suites et séries de fonctions holomorphes.

10.8 Calcul différentiel

1. Topologie de $\mathbf{R}^n$

   Parties ouvertes, fermées. Voisinages. Parties compactes. Théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS.

   Parties connexes. Normes usuelles. Limites. Applications continues. Complétude de $\mathbf{R}^n$.

2. Fonctions différentiables

   Applications différentiables sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Différentielle (application linéaire tangente). Dérivée selon un vecteur.

   Dérivées partielles. Opérations algébriques sur les applications différentiables. Composition d'applications différentiables. Théorème des accroissements finis. Applications de classe $\mathscr{C}^1$.

   Matrice jacobienne. Applications de classe $\mathscr{C}^k$. Dérivées partielles d'ordre k. Interversion de l'ordre des dérivations. Formule de TAYLOR avec reste intégral, formule de TAYLOR-YOUNG.

   Étude locale des applications à valeurs dans $\mathbf{R}$. Développements limités. Recherche des extremums locaux.

   Difféomorphismes. Théorème d'inversion locale. Théorème des fonctions implicites.

3. Équations différentielles

   Équations différentielles sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$, de la forme $X' = f(t, X)$. Théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ. Solutions maximales. Problème de l'existence globale. Dépendance par rapport aux conditions initiales.

   Portrait de phase, comportement qualitatif.

   Systèmes différentiels linéaires.

   Méthode de variation de la constante. Cas des coefficients constants. Équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à un.

10.9 Calcul intégral et probabilités

1. Définition des espaces mesurables, tribu produit, cas particulier des tribus boréliennes. Définition d'une mesure, cas particuliers de la mesure de comptage, de la mesure de LEBESGUE (construction admise) et des mesures de probabilité. Définition d'une fonction mesurable ; opérations élémentaires sur les fonctions mesurables.

2. Intégration

   Intégrale des fonctions mesurables positives, théorème de convergence monotone. Lemme de Fatou. Fonctions intégrables, théorème de convergence dominée. Continuité, dérivabilité, holomorphie d'une intégrale dépendant d'un paramètre. Espaces L^p, où $1 \leqslant p \leqslant \infty$: inégalités de MINKOWSKI, HÖLDER et JENSEN. Théorème de FUBINI.

   Changement de variables dans une intégrale multiple. Calculs d'aires de domaines plans et de volumes.

   Convolution. Régularisation et approximation par convolution.

3. Analyse de FOURIER

   Séries de FOURIER des fonctions localement intégrables périodiques d'une variable réelle. Lemme de RIEMANN-LEBESGUE. Produit de convolution de fonctions périodiques. Théorèmes de DIRICHLET et de FEJER. Théorie L^2 : convergence en moyenne quadratique, formule de PARSEVAL.

4. Probabilités.

   Définition d'un espace de probabilité. Variables aléatoires, lois de probabilité d'une variable aléatoire, fonction de répartition. Indépendance d'une famille d'événements, de tribus ou de variables aléatoires.

   Espérance et variance d'une variable aléatoire à valeurs réelles.

Exemples de lois : loi de BERNOULLI, loi binomiale, loi de POISSON, loi uniforme, loi normale, loi exponentielle.

Fonction caractéristique et transformée de LAPLACE, applications à la somme de variables aléatoires indépendantes, lien avec la convolution.

Probabilités conditionnelles : définition, théorème de BAYES.

Convergence de suites de variables aléatoires : en probabilité, dans L^p , presque partout, en loi.

Inégalité de MARKOV, inégalité de BIENAIMÉ-TCHEBYSCHEV. Loi faible des grands nombres. Théorème de la limite centrale.

10.10 Analyse fonctionnelle

1. Topologie et espaces métriques
   Topologie d'un espace métrique. Topologie induite.
   Suites. Valeurs d'adhérence. Limites. Applications continues. Homéomorphismes.
   Produit fini d'espaces métriques.
   Compacité. Connexité. Composantes connexes. Connexité par arcs.
   Propriétés métriques : applications lipschitziennes, applications uniformément continues.
   Espaces métriques complets. Théorème du point fixe pour les applications contractantes.
2. Espaces vectoriels normés sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.
   Topologie d'un espace vectoriel normé. Normes équivalentes. Cas des espaces de dimension finie. Espaces de BANACH. Séries absolument convergentes dans un espace de Banach.
   Applications linéaires continues, norme.
   Norme de la convergence uniforme. Espace des fonctions continues bornées sur un espace métrique, à valeurs dans un espace BANACH.
   Étude de la compacité de parties d'un espace vectoriel normé : théorème de RIESZ ; théorème d'ASCOLI.
   Complétude des espaces L^p, où $1 \leqslant p \leqslant \infty$.
3. Espaces de HILBERT
   Projection sur un convexe fermé. Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel fermé.
   Dual d'un espace de HILBERT.
   Cas des espaces L^2.
   Bases hilbertiennes (dans le cas séparable). Exemples de bases : fonctions trigonométriques, polynômes orthogonaux.
   Exemples d'applications linéaires continues entre espaces de HILBERT.
4. Espace de Schwartz $S(\mathbf{R}^d)$ des fonctions à décroissance rapides sur $\mathbf{R}^d$.
   Normes $N_p(f)$ (sup des normes uniformes des produits des dérivées partielles itérées d'ordre inférieur à p de f par les monômes de degré inférieur à p).
   Espace $S'(\mathbf{R}^d)$ des distributions tempérées.
   Dérivation des distributions tempérées ; formule des sauts en dimension 1 ; formule de Stokes pour un demi-espace en dimension d.
   Cas particulier des distributions à support compact dans $\mathbf{R}^d$.
   Convolution de distributions dans le cas où l'une d'entre elles est à support compact.
   Transformation de Fourier dans S et dans S'.
   Transformation de Fourier sur les espaces $L^1(\mathbf{R}^d)$ et $L^2(\mathbf{R}^d)$.

10.11 Géométrie différentielle

Sous-variétés de $\mathbf{R}^n$. Définitions équivalentes : graphe local, paramétrisation locale, équation locale. Espace tangent. Notions métriques : longueur d'un arc, paramétrisation normale, courbure d'un arc en dimensions 2 et 3. Gradient.

Tracé de courbes usuelles.

Surfaces dans $\mathbf{R}^3$: position par rapport au plan tangent.

Définition de la divergence d'un champ de vecteurs.

Extremums locaux d'une fonction définie sur une sous-variété (extremums liés), multplicateurs de Lagrange.

ÉPREUVES ÉCRITES

Les épreuves écrites comportent deux épreuves :

A. Composition de mathématiques générales

Le programme de cette épreuve est constitué par les titres 1 à 11 ci-dessus.

B. Composition d'analyse et probabilités

Le programme de cette épreuve est constitué par les titres 1 à 11 ci-dessus.

ÉPREUVES ORALES

Les candidats ont le choix entre quatre options :
Option A : probabilité et statistiques
Option B : calcul scientifique
Option C : algèbre et calcul formel
Option D : informatique

Épreuves orales des options A, B, C

1re Épreuve : Épreuve d'Algèbre et Géométrie

2e Épreuve : Épreuve d'Analyse et Probabilités

Le programme de ces deux épreuves, communes aux options A, B et C, est constitué des titres 1 à 11 ci-dessus.

3e Épreuve : Épreuve de Modélisation

L'épreuve porte sur un programme commun aux options A, B et C et sur un programme spécifique à l'option choisie.

L'épreuve consiste en un exposé de modélisation mathématique construit en partant d'un texte proposé par le jury. Le programme définit un cadre de théories mathématiques et de techniques d'application adaptées pour l'épreuve. Ce programme comporte une partie commune aux options A, B et C et, pour chacune de ces options, une partie spécifique.

Modélisation : programme de la partie commune aux options A, B, C

Le corpus des logiciels disponibles est constitué de Maple, Mathematica, MuPAD, Matlab, Scilab, Octave, R, Maxima, Axiome, Giac/Xcas, Pari/GP, Gap.

À l'aide d'un ou plusieurs de ces logiciels, les candidats devront montrer leur capacité à :

– mettre en œuvre avec précision et rigueur les concepts et outils mathématiques au programme,
– distinguer les représentations exactes ou approchées des objets mathématiques
– estimer le coût et les limitations d'algorithmes simples : complexité, précision
– analyser la pertinence des modèles.

Le programme de cette partie comprend les méthodes numériques, probabilistes, statistiques et symboliques citées dans les programmes des épreuves écrites et celles citées dans les paragraphes suivants.

1. Calcul numérique et symbolique
   Utilisation des logiciels au programme : simulation, intégration, différentiation, calcul de sommes et d'intégrales, résolution d'équations algébriques et différentielles.
2. Probabilités discrètes : tirages uniformes ; échantillons.
3. Validation et précision des résultats
   Méthodes numériques : notion de conditionnement des systèmes linéaires.
   Précision du schéma numérique d'EULER explicite à pas constant.
   Moyenne et variance empiriques.
   Méthode de Monte Carlo : vitesse de convergence ; applications au calcul d'intégrales multiples (exemple : calculs de volumes).
4. Moindres carrés linéaires (sans contrainte).

Programme spécifique de l'option A

1. Utilisation de lois usuelles (voir section 9. 4 , loi géométrique) pour modéliser certains phénomènes aléatoires. Exemples : temps d'attente ou durée de vie, erreurs de mesure, sondages ...
2. Convergence presque sûre. Lemme de BOREL-CANTELLI. Loi forte des grands nombres.
3. Chaînes de MARKOV homogènes à espace d'états fini. Classification des états. Convergence vers une loi stationnaire (théorème ergodique et théorème de la limite centrale admis).
   Chaînes de MARKOV homogènes à espace d'états dénombrable, transience, récurrence positive ou nulle, exemple de la marche aléatoire simple.
   Espérance conditionnelle, définition des martingales, temps d'arrêt. Exemples d'utilisation, des théorèmes de convergence presque sûre et L^2, des martingales à temps discret.
4. Vecteurs gaussiens : définition, simulation en dimension 2, théorème de COCHRAN. Théorème de la limite centrale dans $\mathbf{R}^n$, Utilisation du lemme de SLUTSKY. Définition et calcul d'intervalles de confiance.
   Lois Gamma. Définition de l'estimation du maximum de vraisemblance.
5. Tests sur un paramètre. Tests du χ^2. Fonction de répartition empirique et tests de KOLMOGOROV-SMIRNOV (population de taille finie et comportement asymptotique). Exemples d'utilisation.
   Modèle linéaire gaussien : calculs par moindres carrés, régression simple ou multiple, exemples d'utilisation.
   Simulation de variables aléatoires.
   Fonctions génératrices. Processus de vie et de mort.

Programme spécifique de l'option B.

1. Résolution de systèmes d'équations linéaires ; définition du conditionnement. Factorisation LU.
   Méthode du gradient pour les systèmes linéaires symétriques définis positifs.

Recherche des valeurs propres : méthode de la puissance.

Résolution de systèmes d'équations non linéaires. Méthode de NEWTON : définition, vitesse de convergence, estimation de l'erreur.

2. Intégration numérique : méthode des trapèzes, de SIMPSON ; estimation de l'erreur.
3. Équations différentielles ordinaires. Espaces de phase. Étude qualitative. Stabilité des points critiques.

   Aspects numériques du problème de CAUCHY. Méthodes d'EULER explicite et implicite : consistance, stabilité, convergence, ordre. Utilisation de la méthode de RUNGE-KUTTA 4.
4. Notions élémentaires sur les équations aux dérivées partielles classiques en dimension un.

   Équation de transport (advection) linéaire : méthode des caractéristiques.

   Équations des ondes et de la chaleur : résolution par transformée de FOURIER et séparation des variables. Aspects qualitatifs élémentaires.

   Équations elliptiques.

   Exemples de discrétisation de problèmes aux limites en dimension un par la méthode des différences finies : notions de consistance, stabilité, convergence, ordre.
5. Optimisation et approximation

   Interpolation de LAGRANGE.

   Extremums des fonctions réelles de n variables réelles : multiplicateurs de LAGRANGE. Mise en œuvre de l'algorithme de gradient à pas constant.

   Méthode des moindres carrés et applications.

Programme spécifique de l'option C.

1. Représentation et manipulation des entiers longs, flottants multiprécision, nombres complexes, polynômes, éléments de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et des corps finis. Addition, multiplication, division, extraction de racine carrée.
2. Algorithmes algébriques élémentaires.

   Exponentiation ($n \mapsto a^n$, pour $n \in \mathbf{N}$), algorithme d'EUCLIDE étendu.

   Test de primalité de FERMAT.
3. Matrices à coefficients dans un corps.

   Méthode du pivot de GAUSS, décomposition LU. Calcul du rang, du déterminant.

   Exemples de codes correcteurs linéaires : codes de répétition, codes de HAMMING binaires.
4. Matrices à coefficients entiers.

   Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes. Application aux systèmes linéaires sur $\mathbf{Z}$ et aux groupes abéliens de type fini.
5. Polynômes à une indéterminée.

   Évaluation (schéma de HORNER), interpolation (LAGRANGE, différences finies).

   Localisation des racines dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$: majoration en fonction des coefficients.
6. Polynômes à plusieurs indéterminées.

   Résultants, élimination ; intersection ensembliste de courbes et de surfaces algébriques usuelles.
7. Estimation de la complexité des algorithmes précités dans le pire des cas. Aucune formalisation d'un modèle de calcul n'est exigée.

Épreuves de l'option D : informatique

1re Épreuve : Mathématiques

Le programme de cette épreuve est constitué des titres 1 à 11 ci-dessus. Les candidats se verront proposer deux sujets, dans un corpus d'algèbre, de géométrie, d'analyse et de probabilités.

2e Épreuve : Informatique Fondamentale

Le programme de cette épreuve est constitué des titres 12 à 15 ci-après.

3e Épreuve : Analyse de système informatique

Le programme de cette épreuve est constitué des titres 12 à 15 ci-après.

Deux textes décrivant une classe de systèmes informatiques sont proposés au candidat qui doit choisir l'un des deux. La compréhension de ces textes et leur exploitation dans cette épreuve requièrent les connaissances en informatique correspondant aux matières enseignées en L1-L2 de Maths-Info ou dans l'option informatique des classes préparatoires auxquelles s'ajoutent celles du programme.

L'objectif de l'épreuve est d'évaluer la capacité des candidats à mettre en place un processus d'analyse d'un système informatique dans un contexte applicatif. Ce processus s'appuie sur les notions au programme.

Les langages informatiques C, Caml et Java seront disponibles pour cette épreuve et sa préparation. Le rapport du Jury précisera la nature de l'environnement logiciel.

Programme spécifique de l'option D.

L'ensemble du programme correspond à 250h de formation (cours et/ou TD et/ou TP) de niveau Licence et première année de Master, à partir des acquis des deux premières années de Licence ou de l'option informatique des classes préparatoires. L'objectif de cette option est de s'assurer que les candidats maîtrisent les fondements essentiels et structurants de la science informatique.

Le programme n'est pas rédigé comme un plan de cours, il décrit les notions que les candidats doivent maîtriser.

Le programme n'impose aucun langage de programmation particulier. Les candidats doivent maîtriser au moins un langage et son environnement de programmation parmi CAML, Java ou C.

10.12 Algorithmique fondamentale

Cette partie insiste sur les notions de preuve et de complexité des algorithmes. Elle est relativement indépendante de tout langage de programmation, mais le candidat doit être capable de mettre en oeuvre sur machine les structures de données et les algorithmes étudiés.

1. Structures de données. Types abstraits : définition des tableaux, listes, piles, files, arbres, graphes (orientés et non orientés), ensembles, dictionnaires, file de priorité. Interface abstraite et implantation (implémentation) concrète.
2. Schémas algorithmiques classiques : approche gloutonne, diviser pour régner, programmation dynamique. Exemples : algorithme de DIJKSTRA, tri-fusion, plus longue sous-séquence commune.
3. Complexité. Analyse des algorithmes : relations de comparaison O, Θ et Ω. Analyse dans le pire cas. Exemple d'analyse en moyenne : recherche d'un élément dans un tableau.
4. Preuve d'algorithmes : correction, terminaison. Méthodes de base : assertions, pré-post conditions, invariants et variants de boucles, logique de HOARE, induction structurelle.

5. Algorithmes de tri et de recherche. Méthodes de tri par comparaison (tri-fusion, tri-tas, tri rapide), arbre de décision et borne inférieure du tri par comparaisons. Méthodes de recherche séquentielle et dichotomique. Arbres binaires de recherche. Arbres équilibrés : définition, relation entre la taille et la hauteur, maintien de l'équilibre.
6. Algorithmes de graphes. Parcours de graphes : algorithmes de parcours en largeur, en profondeur, algorithme de DIJKSTRA. Arbres couvrants : algorithmes de PRIM et de KRUSKAL. Fermeture transitive.

10.13 Automates et langages

1. Automates finis. Langages reconnaissables. Lemme d'itération. Existence de langages non reconnaissables. Automates complets. Automates déterministes. Algorithme de déterminisation. Propriétés de clôture des langages reconnaissables.
2. Expressions rationnelles. Langages rationnels. Théorème de KLEENE.
3. Automate minimal. Résiduel d'un langage par un mot. Algorithme de minimisation.
4. Utilisation des automates finis : recherche de motifs, analyse lexicale.
5. Langages algébriques. Lemme d'OGDEN. Existence de langages non algébriques. Grammaires algébriques. Propriétés de clôture des langages algébriques.
6. Automates à pile. Langages reconnaissables par automates à pile.
7. Utilisation des automates à pile : analyse syntaxique. Grammaires LL(1).

10.14 Calculabilité, décidabilité et complexité

1. Définition des fonctions primitives récursives ; schémas primitifs (minimisation bornée). Définition des fonctions récursives ; fonction d'ACKERMAN.
2. Définitions des machines de TURING. Équivalence entre classes de machines (exemples : nombre de rubans, alphabet). Équivalence avec les fonctions récursives.
3. Universalité. décidabilité, Indécidabilité. Théorème de l'arrêt. Théorème de RICE. Réduction de TURING. Définitions et caractérisations des ensembles récursifs, récursivement énumérables.
4. Complexité en temps et en espace : classe P. Machines de TURING non déterministes : classe NP. Acceptation par certificat. Réduction polynomiale. NP-complétude. Théorème de COOK.

10.15 Logique et démonstration

1. Calcul propositionnel : syntaxe et sémantique. Tables de vérité, tautologies, formes normales, forme clausale. Théorème de complétude du calcul propositionnel.
2. Logique du premier ordre : aspects syntaxiques. Langages, termes, formules. Variables libres et variables liées, substitutions, capture de variables.
3. Réécriture : filtrage syntaxique du premier ordre, définition de l'unification syntaxique. Confluence, confluence locale, formes normales, paires critiques, lemme de NEWMAN, algorithme de complétion de KNUTH-BENDIX.
4. Logique du premier ordre : systèmes formels de preuve. Calcul des séquents, déduction naturelle. Algorithme d'unification des termes. Preuves par résolution.
5. Logique du premier ordre : aspects sémantiques. Interprétation d'une formule dans un modèle. Validité, satisfiabilité. Théories cohérentes, théories complètes. Théories décidables, indécidables. Exemples de théories : égalité, arithmétique de Peano. Théorème de complétude du calcul des prédicats du premier ordre.

Chapitre 11

Annexe 4 : La bibliothèque de l'agrégation

ABELSON H. **SUSSMAN G. J.** **SUSSMAN J.**	Structure and interpretation of computer programs	MIT PRESS
AEBISCHER B.	L2 Analyse fonctions de plusieurs variables et géométrie analytique	VUIBERT
AEBISCHER B.	L3 Géometrie	VUIBERT
AHUÉS M. **CHATELIN F.**	Exercices de valeurs propres de matrices	MASSON
ALBERT L. **Collectif**	Cours et exercices d'informatique	VUIBERT
ALDON G.	Mathématiques dynamiques	HACHETTE
ALESSANDRI M.	Thèmes de géométrie	DUNOD
ALLOUCHE J. P. **SHALLIT J.**	Automatic sequences theory, applications, generalizations	CAMBRIDGE
AMAR E. **MATHERON É.**	Analyse complexe	CASSINI

ANDLER M. **BLOCH J. D.** **MAILLARD B.**	Exercices corrigés de Mathématiques – Tome 1A - Topologie – Tome 1B - Fonctions numériques – Tome 2 - Suites et séries numériques – Tome 3 - Analyse fonctionnelle – Tome 5 - Algèbre générale, polynômes – Tome 6 - Algèbre linéaire, première partie – Tome 7 - Algèbre linéaire, deuxième partie	Ellipses
ANDREWS G.	Number Theory	Dover
APPLE A.W.	Modern compiler implementation – in C – in Java – in ML	Cambrigde
ARIBAUD F. **VAUTHIER J.**	Mathématiques. Première année de DEUG	ESKA
ARNAUDIES J-M. **BERTIN J.**	Groupes, Algèbres et Géométrie – Tome I – Tome II	Ellipses
ARNAUDIES J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus d'analyse	Dunod
ARNAUDIES J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus d'algèbre bilinéaire et géométrie du cours de Mathématiques tome 4	Dunod
ARNAUDIES J-M. **FRAYSSE H.**	Cours de Mathématiques – 1. Algèbre – 2. Analyse – 3. Compléments d'analyse – 4. Algèbre bilinéaire et géométrie	Dunod
ARNOLD V.	Chapitre supplémentaire de la théorie des équations différentielles ordinaires	MIR
ARNOLD V.	Équations différentielles ordinaires	MIR
ARNOLD V.	lectures on partial differential equations	Spinger
ARNOLD A. **GUESSARIAN I.**	Mathématiques pour l'informatique	EdiSciences

ARTIN E.	Algèbre géométrique	GAUTHIER-VILLARS
ARTIN E.	Algèbre géométrique	GABAY
ARTIN M.	Algebra	PRENTICE HALL
AUBIN J.P.	Analyse fonctionnelle appliquée – Tome 1 – Tome 2	PUF
AUTEBERT J. M.	Calculabilité et décidabilité	MASSON
AUTEBERT J. M.	Théorie des langages et des automates	MASSON
AUDIN M.	Géométrie de la licence à l'agrégation	BELIN
AVANISSIAN V.	Initiation à l'analyse fonctionnelle	PUF
AVEZ A.	Calcul différentiel	MASSON
BAASE S. **VAN GELDER A.**	Computer algorithms Introduction to design & analysis	ADDISON WESLEY
BADOUEL E. **BOUCHERON S.** **DICKY A., PETIT A.** **SANTHA M., WEIL P., ZEITOUN M.**	Problèmes d'informatique fondamentale	SPRINGER
BACAER N.	Histoires de mathématiques et de populations	CASSINI
BAJARD J.C.	Exercices d'Algorithmique	ITP
BAKHVALOV N.	Méthodes numériques	MIR
BARANGER J.	Analyse numérique	HERMANN

BARBE Ph. **LEDOUX M.**	Probabilité (De la licence à l'agrégation)	BELIN
BARRET M. **BENIDIR M.**	Stabilité des filtres et des systèmes linéaires	DUNOD
BASILI B. **PESKINE C.**	Algèbre	DIDEROT, ÉDITEUR ARTS ET SCIENCES
BASS J.	Cours de Mathématiques – Tome 1 – Tome 2	MASSON
BHATIA R.	Matrix Analysis	SPRINGER
BAUER F. L.	Decrypted secrets. Methods and maxims of cryptology	SPRINGER
BENDER C. **ORSZAG S.**	Advanced mathematical methods for scientists and engineers	MC GRAW HILL
BERGER M. **GOSTIAUX B.**	Géométrie différentielle	ARMAND COLIN
BERGER M. **BERRY J-P.** **PANSU P.** **SAINT RAYMOND X.**	Problèmes de géométrie commentés et rédigés	CÉDIC/NATHAN
BERGER M.	Géométrie – Index – 1. Action de groupes, espaces affines et projectifs – 2. Espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères – 3. Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes – 4. Formes quadratiques, quadriques et coniques – 5. La sphère pour elle-même, géométrie hyperbolique, l'espace des sphères	CÉDIC/NATHAN
BERGER M.	Géométrie tome 2	NATHAN
BERGER M.	Géométrie vivante 1	CASSINI

BERLINE N. **SABBAH C.**	Groupes finis, journées X-UPS 2000	EDITIONS DE L'X
BICKEL P.J. **DOKSUM K.A.**	Mathematical statistics	PRENTICE HALL
BIDEGARAY B. **MOISAN L.**	Petits problèmes de mathématiques appliquées et de modélisation	SPRINGER
BIGGS NORMAN L.	Discrete mathematics	OXFORD SCIENCE PUBLICATIONS
BLANCHARD A.	Les corps non commutatifs	PUF
BOAS R.	A primer of real functions	MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA
BOISSONAT J.D. **YVINEC M.**	Géométrie algébrique	EDISCIENCE
BON J.L.	Fiabilité des systèmes	MASSON
BONNANS J.F. **GILBERT J.C.** **LEMARECHAL C.** **SAGASTIZABAL C.** **PENNEQUIN D.**	Optimisation numérique	SPRINGER
BOUALEM H. **BROUZET J.C.** **ELSNER B.** **KACZMAREK L.**	Mathématique L1	PEARSON EDUCATION
BOURBAKI N.	Éléments de Mathématique – Topologie générale, chapitres V à X – Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à VII – Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à III – Fascicule XIII Intégration, chapitres I à IV	HERMANN
BOURGADE P.	Annales des Olympiades internationales de mathématiques 1976-2005	CASSINI
BOUVIER A. **RICHARD D.**	Groupes	HERMANN

BREMAUD P.	Introduction aux probabilités	SPRINGER
BREZIS H.	Analyse fonctionnelle, théorie et applications	MASSON
BRIANE M. **PAGES G.**	Théorie de l'intégration Cours et exercices, 3ème édition	VUIBERT
BROUSSE P.	Mécanique MP - PC.- Spéciales A. A'. B. B'.	ARMAND COLIN
BRUCE J.W. **GIBLIN P.J.** **RIPPON P.J.**	Microcomputers and Mathematics	CAMBRIDGE
CABANE R. **LEBOEUF C.**	Algèbre linéaire – 1. Espaces vectoriels , Polynômes – 2. Matrices et réduction	ELLIPSES
CABANNES H.	Cours de Mécanique générale	DUNOD
CALAIS J.	Éléments de théorie des anneaux	PUF
CALAIS J.	Éléments de théorie des groupes	PUF
CANDELPERGHER B.	Calcul intégral	CASSINI
CARREGA J.C.	Théorie des corps	HERMANN
CARTAN H.	Calcul différentiel (1971)	HERMANN
CARTAN H.	Cours de calcul différentiel (1977)	HERMANN
CARTAN H.	Formes différentielles	HERMANN
CARTAN H.	Théorie élémentaire des fonctions analytiques	HERMANN
CARTON O.	Langages formels, calculabilité et complexité	VUIBERT

CASTLEMAN K.R.	Digital image processing	PRENTICE HALL
CASTI J.L.	Realty Rules : Picturing the world in mathematics I	WILEY INTERSCIENCE
CASTI J.L.	Realty Rules : Picturing the world in mathematics II	WILEY INTERSCIENCE
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.** **MAILLOT V.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Analyse 1 (seconde édition revue et corrigée)	MASSON
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation – Analyse 2 – Analyse 3	MASSON
CHARPENTIER E. **NIKOLSKI N.**	Leçons de mathématiques d'aujourd'hui – Vol 1 – Vol 2 – Vol 3 – Vol 4	ELLIPSES
CHARLES J. **MBEKHTA M.** **QUEFFELEC H.**	Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs	ELLIPSES
CHATELIN F.	Valeurs propres de matrices	MASSON
CHILDS L.	A concrete introduction to Higher Algebra	SPRINGER VERLAG
CHOQUET G.	Cours d'analyse Tome II : Topologie	MASSON
CHOQUET G.	L'enseignement de la géométrie	HERMANN
CHOIMET D. **QUEFFELEC H.**	Analyse mathématique	CASSINI
CHRISTOL G. **PILIBOSSIAN P.** **YAMMINE S.**	– Algèbre 1 – Algèbre 2	ELLIPSES
CIARLET P.G.	Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation	MASSON

COGIS O. **ROBERT C.**	Au-delà des ponts de Königsberg. Théorie des graphes. Problèmes, théorie, algorithmes	VUIBERT
COHN P.M.	Algebra Volume 1	JOHN WILEY
COLLET H. **GIRARD B.** **PERRIER C.**	Mathématique BTS industriel	NATHAN
COLLET P.	Modeling binary data	CHAPMAN AND HALL
COLMEZ P.	Éléments d'algèbre et d'analyse	EDITIONS DE L'X
COMBROUZE A.	Probabilités et statistiques	PUF
CORI R. **LASCAR D.**	Logique mathématique – 1. Calcul propositionnel, algèbre de Boole, calcul des prédicats – 2. Fonctions récursives, théorème de Gödel, théorie des ensembles, théorie des modèles	DUNOD
CORMEN T. H. **LEISERSON C. E.** **RIVEST R. L.** **STEIN C.**	Introduction à l'algorithmique	DUNOD
COTRELL M. **GENON-CATALOT V.** **DUHAMEL C.** **MEYRE T.**	Exercices de probabilités	CASSINI
COURANT R. **HILBERT D.**	Methods of Mathematical Physics – Volume 1 – Volume 2	JOHN WILEY
COUSINEAU G. **MAUNY M.**	Approche fonctionnelle de la programmation	EDISCIENCE
COXETER H.S.M.	Introduction to Geometry	JOHN WILEY
COX D.A.	Galois Theory	WILEY INTERSCIENCE

CVITANOVIC P.	Universality in Chaos	INSTITUTE OF PHYSICS PUBLISHING
DACUNHA-CASTELLE D. **DUFLO M.**	– Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe – Exercices de Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe	MASSON
DACUNHA-CASTELLE D. **REVUZ D.** **SCHREIBER M.**	Recueil de problèmes de calcul des probabilités	MASSON
DAMPHOUSSE P.	Petite introduction à l'algorithmique	ELLIPSES
DANTZER J.F.	Mathématiques pour l'agrégation interne	VUIBERT
DARTE A. **VAUDENAY S.**	Algorithmique et optimisation	DUNOD
DAVID R. **NOUR K.** **RAFFALI C.**	Introduction à la logique Théorie de la démonstration	DUNOD
DE KONNINCK J.M. **MERCIER A.**	Introduction à la théorie des nombres	MODULO
DEHEUVELS P.	L'intégrale	PUF
DEHEUVELS P.	L'intégrale	QUE-SAIS-JE ? PUF
DEHEUVELS R.	Formes quadratiques et groupes classiques	PUF
DEHORNOY P.	Mathématiques de l'informatique	DUNOD
DEHORNOY P.	Complexité et décidabilité	SPRINGER
DELTHEIL R. **CAIRE D.**	Géométrie et compléments	JACQUES GABAY
DEMAILLY J.P.	Analyse numérique et équations différentielles	PU GRENOBLE

DEMAZURE M.	Catastrophes et bifurcations	ELLIPSES
DEMAZURE M.	Cours d'algèbre : primalité, divisibilité, codes	CASSINI
DEMAZURE M.	Cours d'algèbre	CASSINI
DEMBO A. **ZEITOUNI O.**	Large deviations techniques and applications	SPRINGER
DESCHAMPS **WARUSFEL** **MOULIN, RUAUD** **MIQUEL, SIFRE**	Mathématiques, cours et exercices corrigés – 1ère année MPSI, PCSI, PTSI – 2ème année MP, PC, PSI	DUNOD
DESCOMBES R.	Éléments de théorie des nombres	PUF
DEVANZ C. **ELHODAIBI M.**	Exercices corrigés de Mathématiques posés à l'oral des Ensi, Tome 2	ELLIPSES
DI MENZA L.	Analyse numérique des équations aux dérivées partielles	CASSINI
DIEUDONNÉ J.	Algèbre linéaire et géométrie élémentaire	HERMANN
DIEUDONNÉ J.	Calcul infinitésimal	HERMANN
DIEUDONNÉ J.	Sur les groupes classiques	HERMANN
DIEUDONNÉ J.	Éléments d'Analyse. – Fondements de l'analyse moderne – Éléments d'Analyse Tome 2.	GAUTHIER-VILLARS
DIXMIER J.	Cours de Mathématiques du premier cycle – Première année – Deuxième année	GAUTHIER-VILLARS
DRAPPER N. **SCHMITH H.**	Applied regression analysis	WILEY
DUBUC S.	Géométrie plane	PUF

DUGAC P.	Histoire de l'analyse. Autour de la notion de limite et de ses voisinages	VUIBERT
DUTERTRET G.	Initiation à la cryptographie	PUF
DYM H. **Mac KEAN H.P.**	Fouriers series and integrals	ACADEMICS PRESS
EBBINGHAUS, HERMES **HIRZEBRUCH** **KOECHER** **LAMOTKE, MAINZER** **NEUKIRSCH, PRESTEL, REMMERT**	Les Nombres	VUIBERT
EIDEN J.D.	Géométrie analytique classique	CALVAGE ET MOUNET
EL HAJ LAAMRI	Mesures, intégration et transformée de Fourier des fonctions	DUNOD
EL KACIMI ALAOUI A. **QUEFFÉLEC H.** **SACRÉ C.** **VASSALLO V.**	Quelques aspects des mathématiques actuelles	ELLIPSES
ENGEL A.	Solutions d'expert – Vol 1 – Vol 2	CASSINI
EPISTEMON L. **(OVAERT J.L.** **VERLEY J.L.)**	Exercices et problèmes – Analyse. Volume 1 – Algèbre.	CÉDIC/NATHAN
EXBRAYAT J.M. **MAZET P.**	Notions modernes de mathématiques – Algèbre 1 : Notions fondamentales de la théorie des ensembles – Analyse 1 : Construction des espaces fondamentaux de l'analyse – Analyse 2 : Éléments de topologie générale	HATIER
FADDEEV D. **SOMINSKI I.**	Recueil d'exercices d'Algèbre Supérieure	MIR
FAIRBANK X. **BEEF C.**	POX - Exercices posés au petit oral de l'X	ELLIPSES

FARAUT J.	Analyse sur les groupes de Lie	CALVAGE ET MOUNET
FARAUT J. **KHALILI E.**	Arithmétique Cours, Exercices et Travaux Pratiques sur Micro-Ordinateur	ELLIPSES
FELLER W.	An introduction to probability theory and its applications – Volume 1 – Volume 2	JOHN WILEY
FERRIER J.P.	Mathématiques pour la licence	MASSON
FLORY G.	Exercices de topologie et analyse avec solutions – Tome 1 - Topologie – Tome 2 - Fonctions d'une variable réelle – Tome 3 - Fonctions différentiables, intégrales multiples – Tome 4 - Séries, équations différentielles	VUIBERT
FONTANEZ F. **RANDÉ B.**	Les clefs pour les Mines	CALVAGE ET MOUNET
FRANCHINI J. **JACQUENS J-C.**	Mathématiques Spéciales – Algèbre – Analyse 1 – Analyse 2	ELLIPSES
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Algèbre 1	CASSINI
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Algèbre 2	CASSINI
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Algèbre 3	CASSINI
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Analyse 1	CASSINI
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Analyse 2	CASSINI

FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Analyse 3	CASSINI
FRANCINOU S. **GIANELLA H.**	Exercices de Mathématiques Algèbre 1	MASSON
FRENKEL J.	Géométrie pour l'élève-professeur	HERMANN
FRESNEL J.	Géométrie algébrique	UFR MATHS BORDEAUX
FRESNEL J.	Géométrie	IREM DE BORDEAUX
FRESNEL J.	Groupes	HERMANN
FRESNEL J. **MATIGNON M.**	Algèbre et géométrie	HERMANN
FRESNEL J.	Méthodes modernes en géométrie	HERMANN
FUHRMANN P.	A polynomial approach to linear algebra	SPRINGER
FULTON W.	Algebraic Topology A first course	SPRINGER
GABRIEL P.	Matrices, géométrie, algèbre linéaire	CASSINI
GANTMACHER F.R.	Théorie des matrices – Tome 1 – Tome 2	DUNOD
GAREY M. **JOHNSON D.**	Computers and intractability	FREEMAN
GARLING D.J.H.	Inequalities : a journey into linear analysis	CAMBRIDGE
GATHEN (von zur) J. **GERHARD .J**	Modern computer algebra	CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS

GENET J.	Mesure et intégration. Théorie élémentaire. Cours et exercices résolus	VUIBERT
GHIDAGLIA J.M.	Petits problèmes d'analyse	SPRINGER
GINDIKIN S.	Histoires de mathématiciens et de physiciens	CASSINI
GRANGON Y.	Informatique, algorithmes en Pascal et en langage C	DUNOD
GRENIER J.P.	Débuter en algorithmique avec Matlab et Scilab	ELLIPSES
GOBLOT R.	Algèbre commutative	MASSON
GOBLOT R.	Thèmes de géométrie	MASSON
GODEMENT R.	Analyse – Tome 1 – Tome 2 – Tome 3	SPRINGER
GODEMENT R.	Cours d'Algèbre	HERMANN
GOLUB G.H. **VAN LOAN C.F.**	Matrix computations	WILEY
GONNORD S. **TOSEL N.**	Thèmes d'Analyse pour l'agrégation – Topologie et Analyse fonctionnelle – Calcul différentiel	ELLIPSES
GOSTIAUX B.	Cours de mathématiques spéciales – Tome 1 - Algèbre – Tome 2 - Topologie et analyse réelle – Tome 3 - Analyse fonctionnelle et calcul différentiel – Tome 4 - Géométrie affine et métrique – Tome 5 - Géométrie : arcs et nappes	PUF
GOURDON X.	Les maths en tête, mathématiques pour M' – Algèbre – Analyse	ELLIPSES

GRAHAM R. **KNUTH D.** **PATASHNIK O.**	Concrete mathematics	ADISON-WESLEY
GRAMAIN A.	Géométrie élémentaire	HERMANN
GRAMAIN A.	Intégration	HERMANN
GRANJON Y.	Informatique, algorithmes en pascal et en C	DUNOD
GRENIER J.P.	Debutér en algorithmique avec Matlab et Scilab	ELLIPSES
GREUB W.	Linear Algebra	SPRINGER VERLAG
GRIMMET G. **WELSH D.**	Probability (an introduction)	OXFORD
GUJARATI D. N.	Basic Econometrics	WILEY
GUSFIELD D.	Algorithms on strings, trees and sequences	CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS
HABSIEGER L. **MARTEL V.**	Exercices corrigés posés à l'oral des ENSI Tome 1 Analyse	ELLIPSES
HALMOS P.	Problèmes de mathématiciens petits et grands	CASSINI
HAMMAD P.	Cours de probabilités	CUJAS
HAMMAD P. **TARANCO A.**	Exercices de probabilités	CUJAS
HAMMER R. **HOCKS M.** **KULISH U.** **RATZ D.**	C++ toolbox for verified computing	SPRINGER
HARDY G.H. **WRIGH E.M.**	An introduction to the theory of numbers	OXFORD

HAREL D.	Computer LTD. What they really can't do	OXFORD
HAREL D. **FELDMAN Y.**	Algorithmics. The spirit of computing	ADDISON WESLEY
HENNEQUIN P.L. **TORTRAT A.**	Théorie des probabilités et quelques applications	MASSON
HENRICI P.	Applied and Computational Complex Analysis – Volume 1 – Volume 2 – Volume 3	WILEY-INTERSCIENCE
HERVE M.	Les fonctions analytiques	PUF
HINDRY M.	Arithmétique	CALVAGE ET MOUNET
HIRSCH F. **LACOMBE G.**	Eléments d'analyse fonctionnelle	MASSON
HOCHART **SCIUTO**	Algèbre Analyse Géométrie (MPSI/PCSI)	VUIBERT
HOPCROFT J.E. **MOTWANI R.** **ULLMAN J. D.**	Introduction to automata theory, Languages and Computation	ADDISON WESLEY
HOUZEL C.	Analyse mathématique : cours et exercices	BELIN
INGRAO B.	Coniques projectives, affines et métriques	CALVAGE ET MOUNET
IRELAND K. **ROSEN M.**	A Classical Introduction to Modern Numbers Theory	SPRINGER VERLAG
ISAAC R.	Une initiation aux probabilités (Trad. R. Mansuy)	VUIBERT-SPRINGER
ITARD J.	Les nombres premiers	QUE SAIS-JE ? PUF
JACOBSON N.	Basic Algebra – Tome I – Tome II	FREEMAN AND CO

JACOD J. **PROTTER P.**	L'essentiel en théorie des probabilit és	CASSINI
KAHANE J.P. **GILLES P.**	Séries de Fourier et ondelettes	CASSINI
KATZNELSON Y.	An Introduction to Harmonic Analysis	DOVER
KERBRAT Y. **BRAEMER J-M.**	Géométrie des courbes et des surfaces	HERMANN
KERNIGHAN B. **RITCHIE D.**	Le langage C	DUNOD
KNUTH D.E.	The art of computer programming – Volume 1 : Fundamental algorithms – Volume 2 : Seminumerical algorithms – Volume 3 : Sorting and Searching	ADDISON-WESLEY
KOBLITZ N.	A course in number theory and cryptography quantite1	
KOLMOGOROV A. **FOMINE S.**	Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle	ELLIPSES
de KONNINCK J.M. **MERCIER A.**	Introduction à la théorie des nombres	MODULO
KÖRNER T.W.	Fourier analysis	CAMBRIDGE
KÖRNER T.W.	Exercises for Fourier analysis	CAMBRIDGE
KREE P.	Introduction aux Mathématiques et à leurs applications fondamentales M.P.2	DUNOD
KRIVINE H.	Exercices de Mathématiques pour physiciens	CASSSINI
KRIVINE J.L.	Théorie axiomatique des ensembles	PUF
KRIVINE J.L.	Théorie des ensembles	CASSINI

KUNG J.P.S. **ROTA G-C.** **YAN C.H.**	Combinatorics : the Rota way	CAMBRIDGE
LACOMME P. **PRINS C.** **SEVAUX M.**	Algorithmes de graphes	EYROLLES
LACROIX Y. **MAZLIAK L.**	Probbilités, variables aléatoires...Niveau M1	ELLIPSES
LADEGAILLERIE Y.	Géométrie affine, projective, euclidienne et analagmatique	PUF
LAFONTAINE J.	Introduction aux variétés différentielles	PUF
LALEMENT R.	Logique, réduction, résolution	MASSON
LANG S.	Algèbre linéaire – Tome 1 – Tome 2	INTEREDITIONS
LANG S.	Algebra	ADDISON-WESLEY
LANG S.	Linear Algebra	ADDISON-WESLEY
LAROCHE F.	Escapades arithmétiques	ELLIPSES
LASCAR D.	La théorie des modèles en peu de maux	CASSINI
LAVILLE G.	Courbes et surfaces	ELLIPSES
LAVILLE G.	Géométrie pour le CAPES et l'Agrégation	ELLIPSES
LAX P. D.	Funnctional analysis	WILEY
LAX P. D.	Linear Algebra	WILEY

LE BRIS G.	Maple Sugar : une initiation progressive à Maple	CASSINI
LEBOEUF C. **GUEGAND J.** **ROQUE J.L.** **LANDRY P.**	Exercices corrigés de probabilités	ELLIPSES
LEBORGNE D.	Calcul différentiel et géométrie	PUF
LEBOSSÉ C. **HÉMERY C.**	Géométrie. Classe de Mathématiques	JACQUES GABAY
LEHMANN D. **SACRÉ C.**	Géométrie et topologie des surfaces	PUF
LEHNING H. **JAKUBOWICZ D.**	Mathématiques supérieures et spéciales 2 : Dérivation	MASSON
LEHNING H.	Mathématiques supérieures et spéciales – Tome 1 : Topologie – Tome 3 : Intégration et sommation – Tome 4 : Analyse en dimension finie – Tome 5 : Analyse fonctionnelle	MASSON
LEICHTNAM E. **SCHAUER X.**	Exercices corrigés de mathématiques posés aux oraux X-ENS – Tome I - Algèbre 1 – Tome 2 - Algèbre et géométrie – Tome 3 - Analyse 1 – Tome 4 - Analyse 2	ELLIPSES
LELONG-FERRAND J. **ARNAUDIES J.M.**	Cours de Mathématiques – Tome 1 pour M-M' : Algèbre – Tome 1 pour A-A' : Algèbre – Tome 2 : Analyse – Tome 3 : Géométrie et cinématique – Tome 4 : Equations différentielles, intégrales multiples	DUNOD
LELONG-FERRAND J.	Géométrie différentielle	MASSON
LELONG-FERRAND J.	Les fondements de la géométrie	PUF

LESIEUR L. **MEYER Y.** **JOULAIN C.** **LEFEBVRE J.**	Algèbre linéaire, géométrie	ARMAND COLIN
LION G.	Algèbre pour la licence Cours et exercices (2ème édition)	VUIBERT
LION G.	Géométrie du plan Cours complet avec 600 exercices résolus	VUIBERT
LOTHAIRE M.	Algebraic combinatorics on words	CAMBRIDGE
MAC LANE S. **BIRKHOFF G.**	Algèbre – 1 : Structures fondamentales – 2 : Les grands théorèmes	GAUTHIER-VILLARS
MACKI J. **STRAUSS A.**	Introduction to optimal control theory	SPRINGER
MAKAROV B.M. **GOLUZINA M.G.** **LODKIN A.A.** **PODKORYTOV A.N.**	Problèmes d'analyse réelle	CASSINI
MALLIAVIN M. P. **WARUSFEL A.**	Algèbre linéaire et géométrie classique. Exercices	MASSON
MALLIAVIN M. P.	Les groupes finis et leurs représentations complexes	MASSON
MALLIAVIN P.	Géométrie différentielle intrinsèque	HERMANN
Manuels Matlab	– Using Matlab version 5 – Using Matlab version 6 – Statistics Toolbox – Using Matlab Graphics	
MANSUY R. **RANDÉ B.**	Les clefs pour l' X	CALVAGE ET MOUNET
MARCE S. **DEVAL-GUILLY E.**	Problèmes corrigés des ENSI	ELLIPSES

MASCART H. **STOKA M.**	Fonctions d'une variable réelle – Tome 2 : Exercices et corrigés – Tome 3 : Exercices et corrigés – Tome 4 : Exercices et corrigés	PUF
MAWHIN J.	Analyse : fondements, technique, évolutions	DE BOECK UNIVERSITÉ
MAZET P.	Algèbre et géométrie pour le CAPES et l'Agrégation	ELLIPSES
MENEZES A.J. **van OORSCHOT P.C.** **VANSTONA S.A.**	Handbook of applied cryptography	CRC PRESS
MERKIN D.	Introduction to the theory of stability	SPRINGER
MÉTIVIER M.	Notions fondamentales de la théorie des probabilités	DUNOD
MÉTIVIER M.	Probabilités : dix leçons d'introduction. École Polytechnique	ELLIPSES
MEUNIER P.	Agrégation interne de Mathématiques Exercices d'oral corrigés et commentés – Tome 2	PUF
MEUNIER P.	Algèbre avec applications à l'algorithmique et à la cryptographie	ELLIPSES
MIGNOTTE M.	Algèbre concrète, cours et exercices	ELLIPSES
MIGNOTTE M.	Mathématiques pour le calcul formel	PUF
MITCHELL J. C.	Concepts in programming languages	CAMBRIDGE
MNEIMNÉ R.	Eléments de géométrie : action de groupes	CASSINI
MNEIMNÉ R.	Réduction des endomorphismes	CALVAGE ET MOUNET

MNEIMNÉ R. **TESTARD F.**	Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques	HERMANN
MOISAN J. **VERNOTTE A.** **TOSEL N.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales Analyse : suites et séries de fonctions	ELLIPSES
MOISAN J. **VERNOTTE A.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales Analyse : topologie et séries	ELLIPSES
MONIER J.M.	Cours de mathématiques – Analyse 1 MPSI, PCSI, PTSI – Analyse 2 MPSI, PCSI, PTSI – Analyse 3 MP, PSI, PC, PT – Analyse 4 MP, PSI, PC, PT – Algèbre 1 MPSI, PCSI, PTSI – Algèbre 2 MP, PSI, PC, PT – Exercices d'analyse MPSI – Exercices d'analyse MP – Exercice d'algèbre et géométrie MP	DUNOD
MUTAFIAN C.	Le défi algébrique – Tome 1 – Tome 2	VUIBERT
NAGEL E. **NEWMAN J. R.** **GÖDEL K.** **GIRARD J. Y.**	Le théorème de Gödel	SEUIL
NAUDIN P. **QUITTE C.**	Algorithmique algébrique avec exercices corrigés	MASSON
NEVEU J.	Base mathématique du calcul des probabilités	MASSON
NIVEN I.	Irrational numbers	MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA
NORRIS J.R.	Markov chains	CAMBRIDGE
OŔOURKE J.	Computational géométrie in C (second édition)	CAMBRIDGE
OPREA J.	Differential geometry	PRENTICE HALL

OUVRARD J.Y.	– Probabilités 1 (capes, agrégation) – Probabilités 2 (maîtrise, agrégation)	CASSINI
PAPADIMITRIOU C.H.	Computational complexity	PEARSON EDUCATION
PAGES G. **BOUZITAT C.**	En passant par hasard . . . Les probabilités de tous les jours	VUIBERT
PAPINI O. **WOLFMANN J.**	Algèbre discrète et codes correcteurs	SPRINGER
PARDOUX E.	Processus de Markov et applications	DUNOD
PEDOE D.	Geometry- A comprehensive course	DOVER
PERKO L.	Differential equation and dynamical systems	SPRINGER
PERRIN D.	Cours d'Algèbre	ELLIPSES
PERRIN D.	Cours d'Algèbre	ENSJF
PERRIN D.	Mathématiques d'école	CASSINI
PERRIN-RIOU B.	Algèbre, arithmétique et MAPLE	CASSINI
PETAZZZONI B.	Seize problèmes d'informatique	SPRINGER
PETROVŠEK **WILF** **ZEILBERGER**	A=B	A.K. PETERS
PEVZNER P.	Computational molecular biology- an algorithmic approach	MIT PRESS
PÓLYA G. **SZEGÖ G.**	Problems and Theorems in Analysis – Volume I – Volume II	SPRINGER VERLAG

POMMELLET A.	Agrégation de Mathématiques. Cours d'Analyse	ELLIPSES
POUNDSTONE.	Le dilemme du prisonnier	CASSINI
PRASOLOV V.	Polynomials	SPRINGER
PRASOLOV V.	Problèmes et théorèmes d'algèbre linéaires	CASSINI
PREPARATA F.P. **SHAMOS M.I.**	Computational géométrie - an introduction	SPRINGER
PRESS W. **FLANNERY B.** **TEUKOLSKI S.** **VETTERLING W.**	Numerical recipes in Pascal	CAMBRIDGE
PUTZ J.F.	Maple animation	CHAPMAN AND HALL
QUEFFELEC H. **ZUILY C.**	Éléments d'analyse	DUNOD
RALSTON A. **RABINOWITCH P**	A first curse in numerical analysis	INTERNATINAL STUDENT EDITION
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Cours de Mathématiques spéciales – 1- Algèbre – 2- Algèbre et applications à la géométrie – 3- Topologie et éléments d'analyse – 4- Séries et équations différentielles – 5- Applications de l'analyse à la géométrie	MASSON
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Exercices avec solutions – Algèbre – Analyse 1 – Analyse 2	MASSON
RAMIS J.P. **WARUSFEL A.**	Mathématiques - Tout en un pour la licence	DUNOD
RAO C.R.	Linear statistical inference and its application	WILEY

RANDÉ B.	Les carnets indiens de Srinivasa Ramanujan	CASSINI
RANDÉ B. **TAIEB F.**	Les clefs pour l'X	CALVAGE MOUNET
RANDÉ B. **MANSUY R.**	Les clefs pour l'X (2)	CALVAGE MOUNET
REINHARDT F. **SOEDER H.**	Atlas des mathématiques	LIVRE DE POCHE
REMMERT R.	Classical topics in complex function theory	SPRINGER
RIDEAU F.	Exercices de calcul différentiel	HERMANN
RIESZ F. **NAGY SZ. B.**	Leçons d'analyse fonctionnelle	GAUTHIER- VILLARS
RIO E.	Théorie asymptotique des processus aléatoires faiblement dépendants	SPRINGER
ROBERT C.	Contes et décomptes de la statistique - Une initiation par l'exemple	VUIBERT
ROLLAND R.	Théorie des séries 2- Séries entières	CÉDIC/NATHAN
ROMBALDI J.E.	Thèmes pour l'agrégation de mathématiques	EDP SCIENCES
ROMBALDI J.E.	Analyse matricielle	EDP SCIENCES
ROMBALDI J.E.	Interpolation, approximation Analyse pour l'agrégation	VUIBERT
ROUSSEAU Y. **SAINT-AUBIN Y.**	Mathématiques et technologie	SPRINGER (SUMAT)
ROUVIÈRE F.	Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation	CASSINI
ROUX C.	Initiation à la théorie des graphes	ELLIPSES

RUAUD J.F. **WARUSFEL A.**	Exercices de Mathématiques Algèbre 3	MASSON
RUDIN W.	Analyse réelle et complexe	MASSON
RUDIN W.	Functional analysis	MC GRAW HILL
RUDIN W.	Real and complex analysis	MC GRAW HILL
SA EARP R. **TOUBIANA E.**	Introduction à la Géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann	CASSINI
SAINT RAYMOND J.	Topologie, calcul différentiel et variable complexe	CALVAGE ET MOUNET
SAKAROVITCH J.	Eléments de théorie des automates	VUIBERT
SAKS S. **ZYGMUND A.**	Fonctions analytiques	MASSON
SAMUEL P.	Géométrie projective	PUF
SAMUEL P.	Théorie algébrique des nombres	HERMANN
SARMANT M.C. **MERLIER T.** **PILIBOSSIAN Ph.** **YAMMINE S.**	Analyse 1	ELLIPSES
SAUVAGEOT F.	Petits problèmes de géométrie et d'algèbre	SPRINGER
SAUX PICARD P.	Cours de calcul formel - Algorithmes fondamentaux	ELLIPSES
SAVIOZ J.C.	Algèbre linéaire, cours et exercices	VUIBERT
SCHNEIER B.	Applied cryptography	WILEY

SCHWARTZ L.	Analyse – I Topologie générale et analyse fonctionnelle – II Calcul différentiel et équations différentielles	HERMANN
SCHWARTZ L.	Cours d'Analyse – Tome 1 – Tome 2	HERMANN
SCHWARTZ L.	Méthodes Mathématiques pour les sciences physiques	HERMANN
SEDGEWICK R.	Algorithms	ADDISON WESLEY
SEDGEWICK R.	Algorithmes en Java	PEARSON EDUCATION
SEDGEWICK R.	Algorithmes en langage C	DUNOD
SEGUINS PAZZIS (de) C.	Invitation aux formes quadratiques	CALVAGE ET MOUNET
SELBERHERR S. **STIPPEL H.** **STRASSER E.**	Simulation of semi-conductor devices and processes	SPRINGER
SERRE D.	Les matrices, théorie et pratique	DUNOD
SERRE J.P.	Cours d'arithmétique	PUF
SERVIEN Cl.	– Analyse 3 – Analyse 4	ELLIPSES
SHAPIRO H.N.	Introduction to the theory of numbers	DOVER
SIDLER J.C.	Géométrie Projective	DUNOD
SIPSER M.	Introduction to the theory of computation	THOMSON C. T.
SKANDALIS G.	Topologie et analyse	DUNOD

STANLEY R.P.	Enumerative combinatorics Volume I	WADDWORTH AND BROOKS
STEWART I.	Galois theory	CHAPMAN AND HALL
STROUSTRUP B	Le langage C++	PEARSON EDUCATION
SZPIRGLAS A.	Exercices d'algèbre	CASSINI
TAUVEL P.	Cours de Géométrie	DUNOD
TAUVEL P.	Cours d'algè bre	DUNOD
TAUVEL P.	Corps commutatifs et théorie de Galois	CALVAGE ET MOUNET
TAUVEL P.	Mathématiques générales pour l'agrégation	MASSON
TAUVEL P.	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Algèbre 2	MASSON
TENENBAUM G. **WU J.**	Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres T 2	S. M. F.
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres T 1	S. M. F.
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres	INSTITUT ELIE CARTAN
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres	BELIN
TENENBAUM G. **MENDÈS-FRANCE M.**	Les nombres premiers	QUE SAIS-JE ? PUF
TISSERON C.	Géométries affine, projective et euclidienne	HERMANN
TISSIER A.	Mathématiques générales : exercices avec solutions	BRÉAL

TITCHMARSH E.C.	The theory of functions	OXFORD
TORTRAT A.	Calcul des probabilités et introduction aux processus aléatoires	MASSON
TRIGNAN J.	Constructions géométriques et courbes remarquables	VUIBERT
TRUFFAULT B.	Exercices de géométrie élémentaires	IREM DES PAYS DE LOIRE
TURING A **GIRARD J. Y.**	La Machine de Turing	SEUIL
VALIRON G.	Cours d'analyse mathématique – I Théorie des fonctions – II Équations fonctionnelles - Applications	MASSON
VAUQUOIS B.	Outils Mathématiques. Probabilités	HERMANN
VAUTHIER J. **PRAT J-J.**	Cours d'Analyse Mathématique de l'Agrégation	MASSON
VAZIRANI V.V.	Algorithmes d'approximation	SPRINGER
VINBERG E. B.	A course in algebra	AMS
WAGSCHAL C.	Fonctions holomorphes - Équations différentielles	HERMANN
WAGSCHAL C.	Distributions, analyse microlocale, équations aux dérivées partielles	HERMANN
WARIN B.	L'algorithmique, votre passeport informatique pour la programmation	ELLIPSES
WARUSFEL A.	Structures algébriques finies	CLASSIQUES HACHETTE
WARUSFEL, ATTALI **COLLET, GAUTIER** **NICOLAS**	Mathématiques – Analyse – Arithmétique – Géométrie – Probabilités	VUIBERT

WATERMAN M.S.	Introduction to computational biology	CHAPMAN AND HALL / CRC
WEST D. B.	Introduction to graph theory	PRENTICE HELL
WHITTAKER E.T. **WATSON G.N.**	A course of modern analysis	CAMBRIDGE
WILF H.	Generatingfunctionology	ACADEMIC PRESS
WILF H.	Algorithms and complexity	A.K. PETERS
WILLEM M.	Analyse fonctionnelle élémentaire	CASSINI
WILLEM M.	Principes d'analyse fonctionnelle	CASSINI
WINSKEL G.	The formal semantics of programming languages	MIT PRESS
YALE P.B.	Geometry and Symmetry	DOVER
YOUNG D.M. **GREGORY R.T.**	A survey of numerical mathematics	DOVER
ZÉMOR G.	Cours de cryptographie	CASSINI
ZUILY Cl. **QUEFFELEC H.**	Éléments d'analyse pour l'agrégation	MASSON
ZUILY Cl. **QUEFFELEC H.**	Problèmes de distributions	CASSINI