MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

——

DIRECTION GÉNÉRALE DES RESSOURCES HUMAINES

RAPPORT DE JURY DE CONCOURS

AGRÉGATION DE MATHÉMATIQUES

————

CONCOURS EXTERNE

Session 2006

LES RAPPORTS DES JURYS DES CONCOURS SONT ÉTABLIS SOUS LA RESPONSABILITÉ DES PRÉSIDENTS DE JURY

Composition du jury

Directoire

Moisan Jacques, président	Inspecteur général de l'éducation nationale
Chevallier Jean-Marie, secrétaire général	Maître de conférences
Foulon Patrick, vice-président	Professeur des universités
Bougé Luc, vice-président	Professeur des universités
Marchal Jeannette, vice-présidente	Inspectrice générale de l'éducation nationale
van der Oord Eric, vice-président	Inspecteur général de l'éducation nationale
Boisson François	Professeur de chaire supérieure
Le Dret Hervé	Professeur des universités
Loubes Jean-Michel	Chargé de recherches
Mestre Jean-François	Professeur des universités
Petazzoni Bruno	Professeur de chaire supérieure
Torossian Charles	Chargé de recherches

Jury

Airault Hélène	Professeure des universités
Albert Luc	Professeur de chaire supérieure
Aymard Catherine	Professeure de chaire supérieure
Badulescu Ioan	Maître de conférences
Barbolosi Dominique	Maître de conférences
Bardet Jean-Marc	Professeur des universités
Barral Julien	Maître de conférences
Beaurpère Karine	Professeure agrégée
Becker Marc	Professeur de chaire supérieure
Belabas Karim	Professeur des universités
Bennequin Daniel	Professeur des universités
Bonnefont Claire	Professeure de chaire supérieure
Boucher Delphine	Maître de conférences
Boyer Franck	Chargé de recherches
Boyer Pascal	Maître de conférences
Burban Anne	Professeure de chaire supérieure
Cabane Robert	Professeur de chaire supérieure
Cadre Benoît	Professeur des universités
Chafaï Djalil	Maître de conférences
Chanet Françoise	Professeure de chaire supérieure
Chevallier Marie-Elisabeth	Professeure de chaire supérieure
Clozel Laurent	Professeur des universités

Cortella Anne	Maître de conférences
Czarnecki Marc-Olivier	Professeur des universités
d'Angelo Yves	Professeur des universités
de la Bretèche Régis	Maître de conférences
Delebecque François	Directeur de recherches
Devie Hervé	Professeur de chaire supérieure
Djadli Zindine	Maître de conférences
Domelevo Komla	Maître de conférences
Dumas Laurent	Maître de conférences
Durand-Lose Jérôme	Professeur des universités
Esman Romuald	Professeur agrégé
Fayolle Guy	Directeur de recherches
Fernandez Catherine	Professeure de chaire supérieure
Fleckinger Vincent	Professeur des universités
Fleurant Sandrine	Professeure agrégée
Fouquet Mireille	Maître de conférences
Frossard-Feaux de Lacroix Emmanuelle	Maître de conférences
Furter Jean-Philippe	Maître de conférences
Gaudry Pierrick	Chargé de recherches
Gaussier Hervé	Professeur des universités
Geoffre Rosemarie	Professeure de chaire supérieure
Gerbeau Jean-Frédéric	Chargé de recherches
Goldsztejn Emmanuel	Professeur de chaire supérieure
Goudon Thierry	Professeur des universités
Guelfi Pascal	Professeur de chaire supérieure
Guibert Gil	Professeur agrégé
Hanrot Guillaume	Chargé de recherches
Harinck Pascale	Chargée de recherches
Hijazi Oussama	Professeur des universités
Hirsinger Odile	Professeure agrégée
Isaïa Jérôme	Professeur agrégé
Kourkova Irina	Maître de conférences
Labbé Stéphane	Maître de conférences
Latrémoliére Evelyne	Professeure de chaire supérieure
Le Calvez Patrice	Professeur des universités
Le Goff Claire	Professeure agrégée
Le Nagard Eric	Professeur de chaire supérieure
Lévy Thierry	Chargé de recherches
Lévy-Véhel Jacques	Directeur de recherches
Lichnewsky Alain	Professeur des universités
Lods Véronique	Professeure agrégée
Loiseau Bernard	Professeur de chaire supérieure
Louboutin Roland	Professeur de chaire supérieure
Maggi Pascale	Professeure agrégée
Mahieux Annick	Professeure de chaire supérieure
Maillot Vincent	Chargé de recherches
Martineau Catherine	Professeure de chaire supérieure

Meier Isabelle	Professeure de chaire supérieure
Méril Alex	Professeur des universités
Merlevede Castano Florence	Maître de conférences
Mézard Ariane	Maître de conférences
Miclo Laurent	Directeur de recherches
Miquel Anne	Professeure agrégée
Mneimné Rached	Maître de conférences
Monier Marie	Professeure agrégée
Mons Pascal	Professeur de chaire supérieure
Moroianu Andrei	Chargé de recherches
Nizard Alain	IA-IPR
Paoluzzi Luisa	Maître de conférences
Paradan Paul-Emile	Maître de conférences
Patras Frédéric	Chargé de recherches
Prieur Clémentine	Maître de conférences
Queffélec Hervé	Professeur des universités
Quentin Thierry	Maître de conférences
Quercia Michel	Professeur de chaire supérieure
Régnier Mireille	Directrice de recherches
Rigny Agnès	Professeure de chaire supérieure
Saada Ellen	Chargée de recherches
Sabot Christophe	Chargé de recherches
Sauzin David	Chargé de recherches
Sidaner Sophie	Professeure de chaire supérieure
Sitz-Carmona Nathalie	Professeure de chaire supérieure
Suffrin Frédéric	Professeur de chaire supérieure
Szpirglas Aviva	Professeure des universités
Taieb Franck	Professeur agrégé
Tosel Nicolas	Professeur de chaire supérieure
Vaugelade Elisabeth	Maître de conférences
Vincent Christiane	Professeure de chaire supérieure
Wagschal Claude	Professeur des universités
Yebbou Johan	Professeur de chaire supérieure
Zayana Karim	Professeur agrégé
Zeitoun Marc	Professeur des universités

Déroulement du concours

Les épreuves écrites se sont déroulées selon le calendrier suivant :

- Épreuve de mathématiques générales : mercredi 29 mars 2006 ;
- Épreuve d'analyse et probabilités : jeudi 30 mars 2006.

La liste d'admissibilité a été publiée le mardi 6 juin 2006.

L'oral s'est déroulé du 23 juin au 12 juillet au lycée Marcelin-Berthelot de Saint-Maur-des-Fossés. La liste d'admission a été publiée le lundi 17 juillet 2006.

Le concours 2006 est le premier concours avec la nouvelle organisation en quatre options pour l'épreuve de modélisation parmi lesquelles l'option D (informatique) est caractérisée par la singularité des trois épreuves orales. Dans les trois premières options, les nombres d'inscrits sont similaires ; ils sont – et c'est bien compréhensible – nettement inférieurs dans l'option D. Dans les quatre options, les pourcentages d'admis sont similaires. Nous avons décidé, tant que ces options ne sont pas stabilisées, de ne pas donner de statistiques détaillées par option.

L'agrégation externe de mathématiques

Le nom officiel, « concours externe de recrutement de professeurs agrégés stagiaires », montre clairement que, par le concours d'agrégation, le ministère recrute des professeurs agrégés destinés, selon leur statut, à l'enseignement secondaire (lycées d'enseignement général et technologique et, exceptionnellement, collège) ou à l'enseignement supérieur (universités, instituts universitaires de technologie, grandes Écoles, classes préparatoires aux grandes Écoles, sections de techniciens supérieurs). À l'issue du concours, les candidats admis sont normalement placés comme stagiaires. Les différentes possibilités de stage (stage en formation à l'IUFM, stage en situation dans un établissement secondaire, stage en CPGE, stage comme ATER, etc.) sont détaillées dans la note de service n°2005-038 du 2 mars 2005. Des reports de stage peuvent être accordés par la DGRH[1] pour permettre aux lauréats d'effectuer des études doctorales ou des travaux de recherche dans un établissement ou organisme public français[2] ; les élèves des Écoles Normales Supérieures en bénéficient automatiquement pour terminer leur période de scolarité.

Le programme, la nature des épreuves écrites et orales, font l'objet de publications au Bulletin Officiel du ministère de l'éducation nationale (B.O.), et leur actualisation peut être consultée sous forme électronique sur le site de la DPE, à l'adresse

`http://www.education.gouv.fr/siac/siac2/default.htm`

ou sur le site de l'agrégation externe de mathématiques, à l'adresse

`http://www.agreg.org`,

où se trouvent aussi tous les renseignements pratiques concernant les sessions à venir.

[1] Direction générale des ressources humaines (personnels enseignants de second degré) du ministère de l'éducation nationale de l'enseignement supérieur et de la recherche.

[2] La DGRH demande une attestation de poursuite de recherches, ou à défaut une autorisation à s'inscrire dans une formation de troisième cycle universitaire. Les candidats doivent se munir d'une telle attestation et la fournir pendant l'oral.

Statistiques et commentaires généraux sur la session 2006

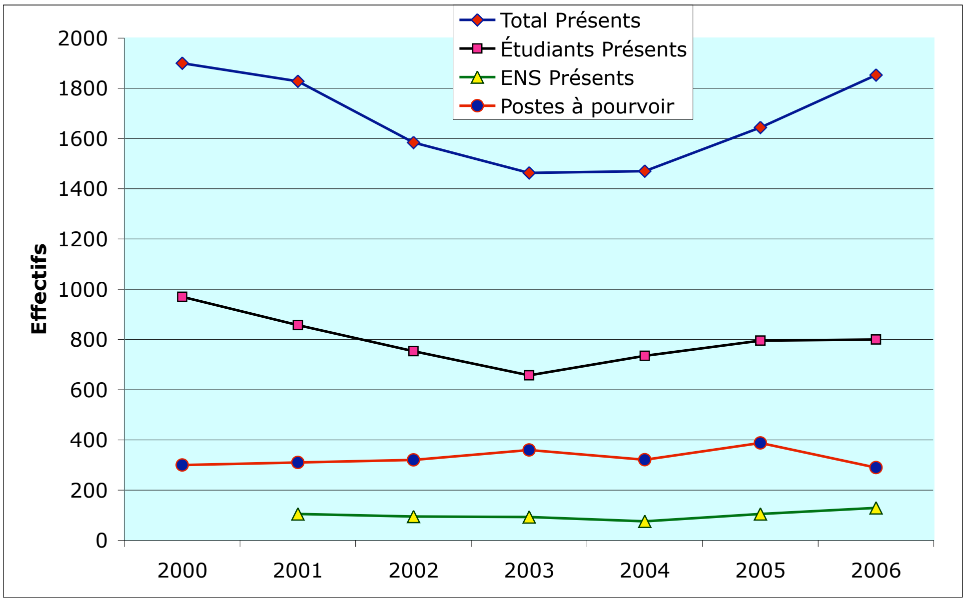
La session 2006 a vu une diminution sensible du nombre de postes au concours (de 388 postes en 2005 à 290 postes en 2006, soit une diminution de plus de 23 %).

Le nombre d'inscrits (et surtout le nombre de présents aux deux épreuves d'écrit) a poursuivi son augmentation amorcée au concours 2004. Une analyse plus fine montre que cette augmentation est due à une augmentation du nombre de candidats dans les trois catégories principales (normaliens, étudiants hors ENS[3] et enseignants).

Néanmoins, si le nombre de candidats étudiants non normaliens – qui constituent le vivier le plus important pour le recrutement de professeurs agrégés – est en augmentation pour la troisième année consécutive, cette augmentation est en stagnation : l'augmentation du nombre des présents aux épreuves écrites passe de 8 % à 0,6 %. Une enquête sommaire montre que cette stagnation résulte de la diminution importante du nombre de postes au concours.

Année	Total Inscrits	Total Présents	Étudiants Présents	ENS Présents	Postes à pourvoir	Présents par poste
2000	**2875**	**1900**	970		300	**6,3**
2001	**2663**	**1828**	857	105	310	**5,9**
2002	**2343**	**1584**	753	95	320	**5,0**
2003	**2217**	**1463**	657	93	360	**4,1**
2004	**2333**	**1470**	735	76	321	**4,6**
2005	**2560**	**1644**	795	105	388	**4,2**
2006	**2849**	**1853**	800	129	290	**6,4**

Évolution du nombre de présents aux deux épreuves d'écrit



[3] dans cette population, sont regroupées les catégories « étudiant » et « élève de 1re année d'IUFM ».

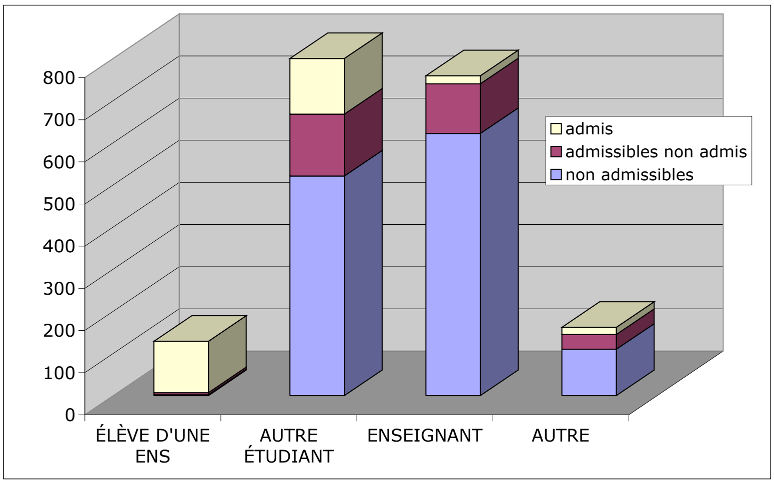
À l'issue de la délibération d'écrit, 595 candidats ont été déclarés admissibles ; le premier admissible avait une moyenne de 19,75/20 et le dernier une moyenne de 8,125/20. Finalement, à l'issue des épreuves orales, les 290 postes offerts au concours ont été pourvus ; le premier admis a une moyenne de 19,05/20, le dernier admis une moyenne de 9,25/20. On trouvera dans les pages qui suivent différents tableaux et graphiques constituant le bilan statistique du concours selon différents critères (géographie, genre, catégorie professionnelle, âge). Dans ces tableaux, tous les pourcentages sont calculés par rapport aux présents.

CATÉGORIES	INSCRITS	PRÉSENTS	ADMISSIBLES	ADMIS	% admissibles	% admis
ÉLÈVE IUFM 1re ANNÉE	237	172	15	3	8,7	1,7
ÉLÈVE D'UNE ENS	130	129	127	122	98,4	94,6
ÉTUDIANT	745	628	264	129	42,0	20,5
SALARIÉ SECTEUR PRIVÉ	145	46	17	7	37,0	15,2
SANS EMPLOI	204	86	27	7	31,4	8,1
ENSEIGNANT DU SUPÉRIEUR	50	29	15	6	51,7	20,7
AGRÉGÉ	7	3	1	0	33,3	0,0
CERTIFIÉ	774	463	87	9	18,8	1,9
PLP	32	15	2	0	13,3	0,0
AUTRE ENSEIGNANT 2nd DEGRÉ	446	246	32	4	13,0	1,6
ENSEIGNANT 1er DEGRÉ	7	3	0	0	0,0	0,0
AUTRE FONCTIONNAIRE	16	4	2	1	50,0	25,0
SURVEILLANT	20	13	3	0	23,1	0,0
AUTRE	36	13	3	2	23,1	15,4
TOTAL	**2849**	**1850**	**595**	**290**	**32,2**	**15,7**

Résultat du concours par catégories professionnelles[4]

CATÉGORIES SIMPLIFIÉES	INSCRITS	PRÉSENTS	ADMISSIBLES	ADMIS	% admissibles	% admis
ÉLÈVE D'UNE ENS	130	129	127	122	99,0	95,2
AUTRE ÉTUDIANT	982	800	279	132	53,2	30,1
ENSEIGNANT	1316	759	137	19	23,5	5,3
AUTRE	421	162	52	17	28,6	10,1
TOTAL	**2849**	**1850**	**595**	**290**	**43,3**	**23,6**

Résultat du concours par grandes catégories

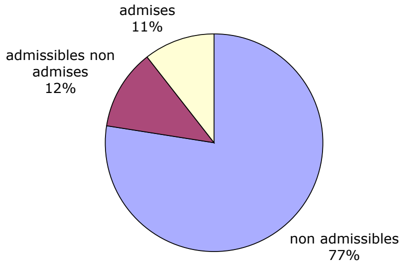


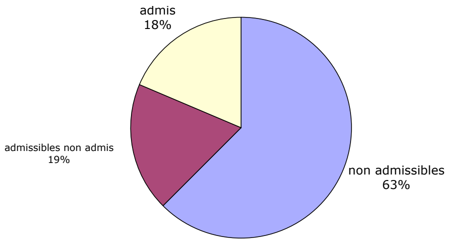
Ces résultats par grandes catégories confirment que le concours de l'agrégation externe de mathématiques est, comme c'est sa fonction, un concours de recrutement de nouveaux enseignants. La catégorie cumulée des étudiants (ENS et hors ENS) constitue en effet 88 % de l'effectif des admis (87 % en 2005).

[4] Les catégories professionnelles listées ci-dessus correspondent aux déclarations des candidats lors de l'inscription : elles ne font l'objet d'aucune vérification et doivent être considérées avec prudence.

GENRE	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis	% Admissibles	% Admis
FEMMES	978	655	147	69	22,44	10,53
HOMMES	1871	1195	448	221	37,49	18,49
TOTAL	2849	1850	595	290	32,16	15,68

Résultat du concours par genres



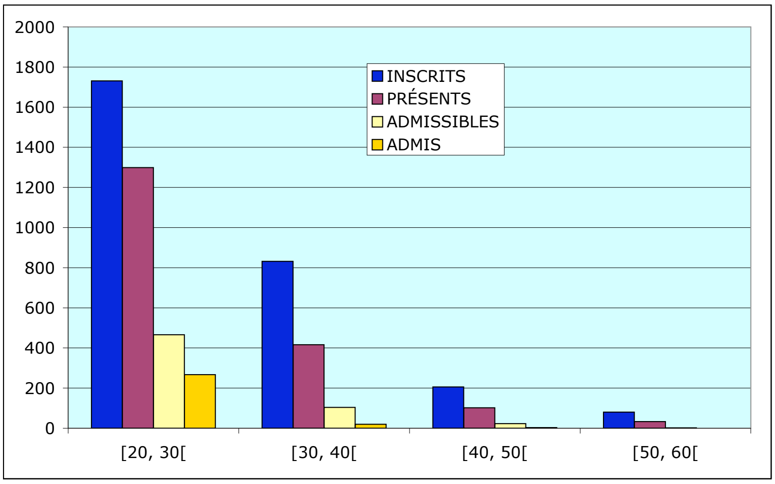


FEMMES HOMMES

Nous pouvons constater un net recul de la parité : alors que les taux de succès chez les femmes (23 %) et chez les hommes (24 %) étaient pratiquement identiques en 2005, la diminution du nombre de places au concours entraîne une diminution mécanique du pourcentage de reçues parmi les femmes, puisqu'elles ne représentent qu'un faible pourcentage parmi les candidats issus d'une ENS (15 %). Dans cette catégorie, on trouve en effet, en 2006, 42 % des reçus au concours (contre 26 % en 2005).

TRANCHE D'ÂGE	INSCRITS	PRÉSENTS	ADMISSIBLES	ADMIS
[20, 30[	1731	1299	466	267
[30, 40[	832	416	104	20
[40, 50[	206	102	23	3
[50, 60[	80	33	2	0

Répartition par tranches d'âge



Cette répartition par tranches d'âge confirme que l'agrégation externe permet de recruter des jeunes enseignants. Les jeunes constituent en effet l'essentiel des présents mais surtout des admis au concours, puisque 92 % des reçus ont moins de 30 ans.

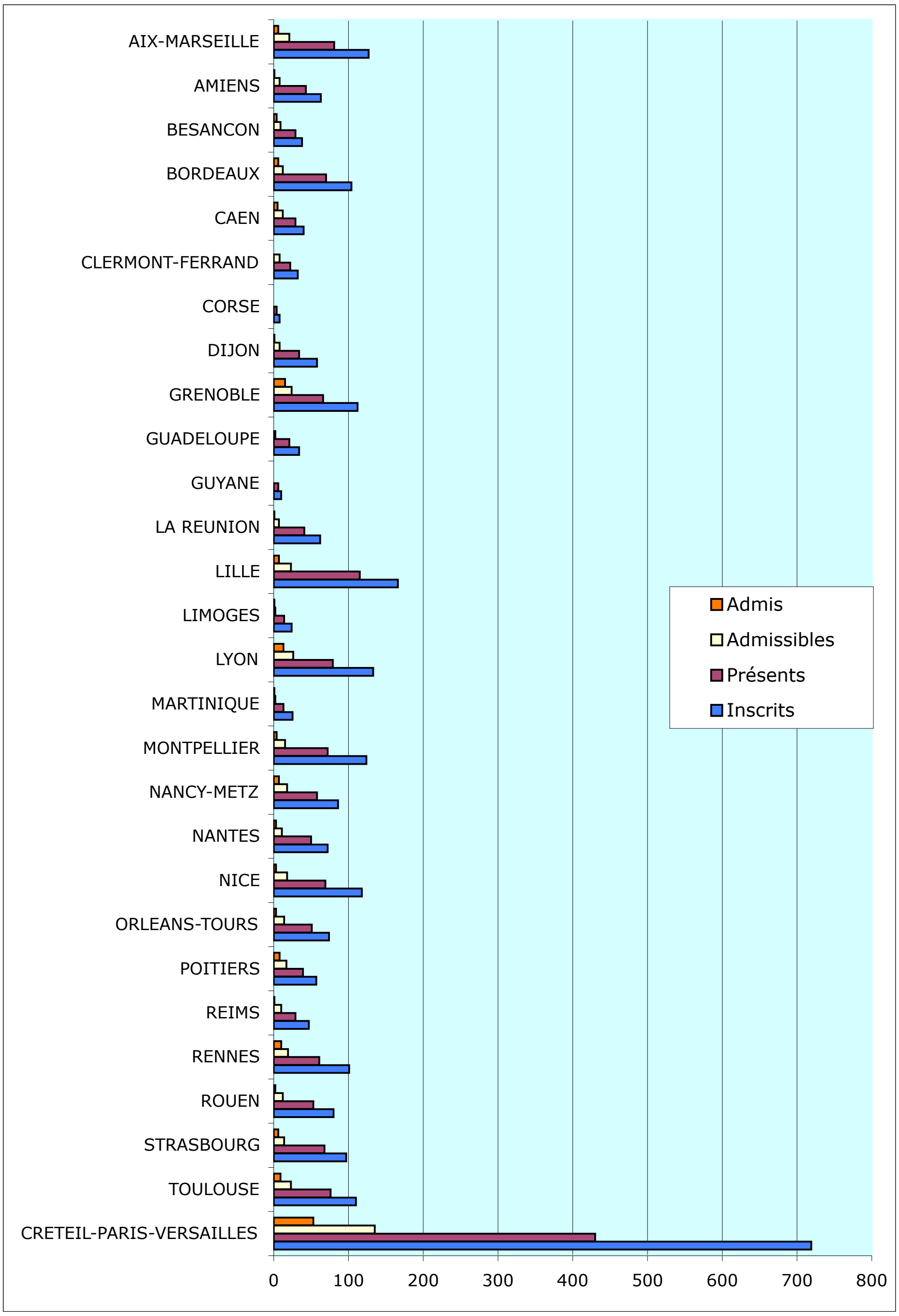
Académie	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
AIX-MARSEILLE	127	81	21	6
AMIENS	63	43	8	1
BESANCON	38	29	9	4
BORDEAUX	104	70	12	6
CAEN	40	29	12	5
CLERMONT-FERRAND	32	22	8	0
CORSE	8	4	0	0
DIJON	58	34	8	1
GRENOBLE	112	66	24	15
GUADELOUPE	34	21	2	0
GUYANE	10	6	0	0
LA RÉUNION	62	41	7	1
LILLE	166	115	23	7
LIMOGES	24	14	2	1
LYON	171	117	63	47
MARTINIQUE	25	13	2	1
MONTPELLIER	124	72	15	4
NANCY-METZ	86	58	18	7
NANTES	72	50	11	3
NICE	118	69	18	3
ORLÉANS-TOURS	74	51	14	3
POITIERS	57	39	17	8
REIMS	47	29	10	1
RENNES	124	84	42	33
ROUEN	80	53	12	2
STRASBOURG	97	68	14	6
TOULOUSE	110	76	23	9
CRÉTEIL-PARIS-VERSAILLES	786	496	200	116
TOTAL	2849	1850	595	290

Résultat du concours par académies

Hors ENS	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
CRÉTEIL-PARIS-VERSAILLES	719	430	135	53
RENNES	101	61	19	10
LYON	133	79	26	13

ENS seulement	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
CRETEIL-PARIS-VERSAILLES	67	66	65	63
RENNES	23	23	23	23
LYON	38	38	37	34

Représentation des résultats par académies (y compris ENS)



Épreuve écrite de mathématiques générales

Préambule et notations préliminaires

Ce problème introduit les opérateurs de Dunkl de paramètre k dont on admet la commutativité. On étudie d'abord le cas $k = 0$, puis le rang 1 et enfin certaines propriétés remarquables en dimension n. On utilise ces opérateurs pour démontrer une formule de MacDonald sur l'intégrale de Mehta.

Les deux premières parties sont indépendantes. La troisième partie n'utilise que le I.2.

• On désigne par $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels positifs ou nuls et par $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels.

• **Dans ce problème $\boldsymbol{n}$ est un entier supérieur ou égal à 2.** On note $e_1, \ldots, e_n$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$. On munit $\mathbf{R}^n$ de sa structure euclidienne usuelle dont le produit scalaire est noté $(\cdot\,,\cdot)$.

• On note $\mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$ l'algèbre des polynômes en n indéterminées à coefficients dans $\mathbf{R}$. Tout polynôme P de $\mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$ s'écrit de manière unique

$$P = \sum_{\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbf{N}^n} a_\alpha X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n}$$

où les a_α sont des réels nuls sauf pour un nombre fini d'entre eux.
Le polynôme P étant fixé, **on note $\mathrm{supp}(\boldsymbol{P})$ l'ensemble des $\boldsymbol{\alpha}$ tels que $\boldsymbol{a_\alpha \neq 0}$** ;

$$\text{ainsi on peut écrire } P = \sum_{\alpha\in\mathrm{supp}(P)} a_\alpha X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n}.$$

Si P est un polynôme de $\mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$, P désigne aussi, par abus de notation, la fonction polynomiale associée et on note $P(x)$ l'évaluation de P en $x \in \mathbf{R}^n$.

• Le monôme $X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$ est de degré $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. Un polynôme P non nul est dit homogène de degré d si P est combinaison linéaire non nulle de monômes de degré d. On note alors $\deg(P)$ ce degré.

On note Δ le polynôme $\displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (X_j - X_i)$; il est homogène de degré $\dfrac{n(n-1)}{2}\cdot$

• Si A et B sont deux opérateurs on note $A^2 = A \circ A$ et $[A, B]$ le commutateur $A \circ B - B \circ A$. On rappelle la formule $[A^2, B] = [A, B] \circ A + A \circ [A, B]$.

• On rappelle qu'il existe une action à gauche, notée dans ce problème ρ, du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $P = \sum_{\alpha \in \mathrm{supp}(P)} a_\alpha X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n}$, cette action est définie par :

$$\rho(\sigma)(P) = \sum_{\alpha \in \mathrm{supp}(P)} a_\alpha X_{\sigma(1)}^{\alpha_1} \ldots X_{\sigma(n)}^{\alpha_n}.$$

On note aussi pour simplifier ${}^\sigma P = \rho(\sigma)(P)$.

On dit que P est **symétrique** si on a ${}^\sigma P = P$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

I Le cas classique

1. Soit $P = X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n}$ avec $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$. On note pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$, $\theta_{i,j}$ la transposition (i, j). Calculer
$$\frac{P - {}^{\theta_{i,j}}P}{X_i - X_j}.$$
2. En déduire que, pour tout polynôme P de $\mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$ et pour toute transposition $\theta_{i,j}$ (avec $1 \leqslant i < j \leqslant n$), $P - {}^{\theta_{i,j}}P$ est divisible par $X_i - X_j$.

On dira qu'un polynôme P est **antisymétrique** si, pour toute transposition $\theta \in \mathfrak{S}_n$, on a ${}^\theta P = -P$.

3. Soit σ un élément de $\mathfrak{S}_n$. On note $\epsilon(\sigma)$ sa signature. Montrer que tout polynôme P antisymétrique vérifie ${}^\sigma P = \epsilon(\sigma) P$.

4. Montrer que le polynôme $\Delta = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (X_j - X_i)$ est antisymétrique.

5. Soit $P \in \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$ un polynôme antisymétrique. Montrer qu'il est divisible par Δ dans l'anneau $\mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$.

Pour P polynôme de $\mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$, on note $P(\partial)$ l'opérateur différentiel obtenu en substituant aux symboles X_i les opérateurs différentiels $\frac{\partial}{\partial X_i}\cdot$ Cette substitution est possible car, pour $1 \leqslant i \leqslant n$ les opérateurs $\frac{\partial}{\partial X_i}$ commutent deux à deux. Si P s'écrit $\sum_{\alpha \in \mathrm{supp}(P)} a_\alpha X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$, on a donc : $P(\partial) = \sum_{\alpha \in \mathrm{supp}(P)} a_\alpha \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial X_1^{\alpha_1} \ldots \partial X_n^{\alpha_n}}$, avec $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$.

Si P et Q sont deux polynômes, on note $P \cdot Q$ leur produit et on vérifie facilement (mais on ne demande pas de le faire) que l'on a l'égalité d'opérateurs

$$(P \cdot Q)(\partial) = P(\partial) \circ Q(\partial).$$

On définit une forme bilinéaire sur $\mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$ notée $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et donnée pour P et Q polynômes de $\mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$ par : $\langle P, Q \rangle = P(\partial)(Q)(0, \ldots, 0)$ (on évalue en 0 le polynôme $P(\partial)(Q)$).

6. Soient P et Q deux polynômes homogènes non nuls avec $\deg(P) \neq \deg(Q)$. Montrer que l'on a $\langle P, Q \rangle = 0$.

7. Pour P, Q, R polynômes de $\mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$, montrer que l'on a
$$\langle P \cdot Q, R \rangle = \langle Q, P(\partial)(R) \rangle.$$

8. Montrer que la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ détermine un produit scalaire défini positif sur $\mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$ (*on pourra travailler dans une base adaptée*).

9. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et P, Q polynômes de $\mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$, montrer que l'on a
$$\langle {}^{\sigma}P, {}^{\sigma}Q \rangle = \langle P, Q \rangle.$$

10. Montrer que l'on a $\langle \Delta, \Delta \rangle = \Delta(\partial)(\Delta) = 1!2! \ldots n!$
(*on pourra utiliser le développement du déterminant de Vandermonde*
$$\begin{vmatrix} 1 & X_1 & \ldots & X_1^{n-1} \\ 1 & X_2 & \ldots & X_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_n & \ldots & X_n^{n-1} \end{vmatrix},$$
dont on admettra par ailleurs l'expression factorisée).

II Opérateur de Dunkl en rang 1

Dans cette partie k désigne un **paramètre réel strictement positif**.

Pour $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$, on définit la fonction $T(f)$ pour $x \neq 0$ par :

$$T(f)(x) = f'(x) + k\frac{f(x) - f(-x)}{x}$$

(on a noté f' la dérivée de la fonction f).

1. En utilisant la formule $\dfrac{f(x) - f(-x)}{x} = \displaystyle\int_{-1}^{1} f'(xt)\,\mathrm{d}t$, montrer que $T(f)$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$. On la note encore $T(f)$.

2. Pour m entier positif ou nul, calculer $T(p_m)$ où p_m est la fonction polynomiale définie pour $x \in \mathbf{R}$ par $p_m(x) = x^m$.

Pour $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$, on définit la fonction $V_k(f)$ pour $x \in \mathbf{R}$ par :

$$V_k(f)(x) = b_k \int_{-1}^{1} f(xt)(1-t)^{k-1}(1+t)^k \,\mathrm{d}t$$

avec b_k un réel choisi de telle sorte que l'on ait $V_k(1) = 1$. La fonction $V_k(f)$ est clairement dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ (on ne demande pas de le vérifier et on ne cherchera pas à expliciter b_k).

3. Pour $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$, montrer que l'on a $T\big(V_k(f)\big) = V_k(f\,')$.

Pour $\lambda \in \mathbf{R}$, on note e_λ la fonction exponentielle $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}$. On pose $E_\lambda = V_k(e_\lambda)$ et J_λ la fonction définie pour $x \in \mathbf{R}$ par $J_\lambda(x) = \dfrac{E_\lambda(x) + E_\lambda(-x)}{2}\cdot$

4. Déduire de ce qui précède que l'on a $T(E_\lambda) = \lambda E_\lambda$.

5. On suppose $\lambda \neq 0$. Montrer que l'on a, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$E_\lambda(x) = J_\lambda(x) + \frac{1}{\lambda}\frac{\mathrm{d}J_\lambda}{\mathrm{d}x}(x)\cdot$$

6. Montrer que J_λ vérifie l'équation différentielle $xy''(x) + 2ky'(x) = \lambda^2 xy(x)$.

III Opérateur de Dunkl en dimension n

Cette partie utilise les notations préliminaires et la question I.2.

Dorénavant k désigne **un paramètre réel**. On note R^+ le sous-ensemble fini de $\mathbf{R}^n$ défini par $R^+ = \big\{e_i - e_j \;\big|\; 1 \leqslant i < j \leqslant n\big\}$. Pour $\beta = e_i - e_j \in R^+$ (avec $i < j$), on note abusivement $X_\beta = X_i - X_j$ et on écrit θ_β ou $\theta_{i,j}$ la transposition (i,j) du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. D'après la question I.2, on peut définir une application linéaire Δ_β de $\mathbf{R}[X_1,\dots,X_n]$ donnée pour $Q \in \mathbf{R}[X_1,\dots,X_n]$ par :

$$\Delta_\beta(Q) = \frac{Q - {}^{\theta_{i,j}}Q}{X_i - X_j} = \frac{Q - {}^{\theta_\beta}Q}{X_\beta}\cdot$$

Pour tout entier ℓ tel que $1 \leqslant \ell \leqslant n$, on introduit l'opérateur de Dunkl d'indice ℓ, noté $T_\ell(k)$ (on notera aussi T_ℓ s'il n'y a pas de confusion possible), défini pour tout polynôme $Q \in \mathbf{R}[X_1,\dots,X_n]$ par :

$$T_\ell(k)(Q) = \frac{\partial Q}{\partial X_\ell} + k \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (e_\ell, e_i - e_j)\frac{Q - {}^{\theta_{i,j}}Q}{X_i - X_j} = \frac{\partial Q}{\partial X_\ell} + k \sum_{\beta\in R^+} (e_\ell, \beta)\Delta_\beta(Q)$$

(on rappelle que $(\cdot\,,\cdot)$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbf{R}^n$).

1. Soit Q un polynôme homogène non nul. Montrer que pour tout entier ℓ tel que $1 \leqslant \ell \leqslant n$, le polynôme $T_\ell(k)(Q)$ est nul ou homogène de degré $\deg(Q) - 1$.

2. Montrer que l'on a, pour tout polynôme Q, tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et tout entier ℓ tel que $1 \leqslant \ell \leqslant n$,
$$^{\sigma}\Big(T_\ell(k)\big(Q\big)\Big) = T_{\sigma(\ell)}(k)\big(\,^{\sigma}Q\big).$$

Pour tout entier ℓ tel que $1 \leqslant \ell \leqslant n$, on note M_ℓ l'opérateur de multiplication par X_ℓ. Pour tout $Q \in \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$, on a donc
$$M_\ell(Q) = X_\ell \cdot Q.$$

On définit l'opérateur $D(k)$ par $D(k) = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} T_\ell(k)^2$.

3. Pour P, Q polynômes de $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$ et $\beta \in R^+$ montrer que l'on a
$$\Delta_\beta(P \cdot Q) = P \cdot \Delta_\beta(Q) + \Delta_\beta(P) \cdot \big(\,^{\theta_\beta}Q\,\big)$$
(on rappelle que l'on a noté $P \cdot Q$ le produit de P et Q).

4. En utilisant la question précédente, montrer que, pour tout couple (i, j) d'entiers tels que $1 \leqslant i, j \leqslant n$, l'on a, entre opérateurs de $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$, l'égalité
$$[T_j(k), M_i] = (e_i, e_j)Id + k \sum_{\beta \in R^+} (\beta, e_i)(\beta, e_j)\rho(\theta_\beta)$$
(on rappelle que le membre de gauche est le commutateur, $\rho(\theta_\beta)$ désigne l'action de la transposition θ_β dans $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$ et Id désigne l'application identique de $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$).

5. Pour tout entier ℓ tel que $1 \leqslant \ell \leqslant n$, déduire des questions précédentes que l'on a, entre opérateurs de $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$, l'égalité
$$[D(k), M_\ell] = 2\, T_\ell(k)$$
(*on pourra utiliser la formule du préambule sur le commutateur*).

IV Produit scalaire de Dunkl et Intégrale de Mehta

Cette partie utilise les notations et les résultats de la partie III.

On admet dans ce problème la propriété de commutativité suivante : pour tout couple (i, j) d'entiers tels que $1 \leqslant i, j \leqslant n$, on a $T_i(k) \circ T_j(k) = T_j(k) \circ T_i(k)$.

On note $P\big(T(k)\big)$ (ou simplement $P(T)$ s'il n'y a pas de confusion possible) l'opérateur obtenu en remplaçant dans P les symboles X_i par les opérateurs $T_i(k)$. Cette substitution est possible car, pour $1 \leqslant i \leqslant n$ les opérateurs $T_i(k)$ commutent deux à deux.

Si P s'écrit $\displaystyle\sum_{\alpha\in\operatorname{supp}(P)} a_\alpha X_1^{\alpha_1}\cdots X_n^{\alpha_n}$, on a donc $P(T) = \displaystyle\sum_{\alpha\in\operatorname{supp}(P)} a_\alpha T_1(k)^{\alpha_1}\circ\cdots\circ T_n(k)^{\alpha_n}$.

On définit sur $\mathbf{R}[X_1,\ldots,X_n]$ une forme bilinéaire (on ne demande pas de le vérifier) notée $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_k$ et donnée pour $P,Q\in\mathbf{R}[X_1,\ldots,X_n]$ par : $\langle\, P,Q\,\rangle_k = P(T)(Q)(0,\ldots,0)$ $\big($on évalue en 0 le polynôme $P(T)(Q)\big)$.

Dans les questions qui suivent, ℓ désigne un entier tel que $1\leqslant\ell\leqslant n$.

1. Soient P et Q deux polynômes homogènes non nuls avec $\deg(P)\neq\deg(Q)$.
   Montrer que l'on a $\langle\, P,Q\,\rangle_k = 0$.

2. Pour P,Q polynômes de $\mathbf{R}[X_1,\ldots,X_n]$, montrer que l'on a $\langle\, M_\ell(P),Q\,\rangle_k = \langle\, P,T_\ell(Q)\,\rangle_k$ (on rappelle que M_ℓ désigne l'opérateur de multiplication par X_ℓ).

3. Pour $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ et P,Q polynômes de $\mathbf{R}[X_1,\ldots,X_n]$, montrer que l'on a
$$\langle\, {}^\sigma\! P,\ {}^\sigma Q\,\rangle_k = \langle\, P,Q\,\rangle_k.$$

4. Montrer que $\mathrm{e}^{-\frac{D(k)}{2}}$, l'exponentielle de l'opérateur $-\dfrac{D(k)}{2}$ (avec $D(k)$ introduit dans la partie précédente), est bien définie comme opérateur de $\mathbf{R}[X_1,\ldots,X_n]$.

5. Montrer que l'on a, entre opérateurs de $\mathbf{R}[X_1,\ldots,X_n]$, l'égalité
$$[M_\ell,\mathrm{e}^{-\frac{D(k)}{2}}] = T_\ell\circ\mathrm{e}^{-\frac{D(k)}{2}}$$
   (*on pourra utiliser III.5*).

Dans la suite du problème, par abus de notation, on identifie fonctions polynomiales et polynômes.

6. Montrer que les formules données dans le préambule de la partie III permettent de prolonger les opérateurs $T_\ell(k)$ en des opérateurs de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$
   (*on pourra utiliser un argument semblable à celui développé à la question II.1*).

On note ψ la fonction de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ définie pour $x\in\mathbf{R}^n$ par $\psi(x)=\mathrm{e}^{-\frac{(x,x)}{2}}$. On note M_ψ l'opérateur de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ de multiplication par ψ. Alors M_ψ^{-1} est l'opérateur de multiplication par la fonction $x\mapsto\mathrm{e}^{\frac{(x,x)}{2}}$. On prolonge naturellement les opérateurs M_ℓ à l'espace $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ par la formule $M_\ell(f)(x)=x_\ell f(x)$ pour $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$.

7. Montrer que l'on a, entre opérateurs de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$, l'égalité
$$T_\ell\circ M_\psi = M_\psi\circ T_\ell - M_\psi\circ M_\ell.$$

8. En déduire que l'espace vectoriel des fonctions polynomiales est stable par l'opérateur $M_\psi^{-1}\circ T_\ell\circ M_\psi\circ\mathrm{e}^{-\frac{D(k)}{2}}$.

9. Conclure que l'on a, entre opérateurs de $\mathbf{R}[X_1,\dots,X_n]$, l'égalité

$$M_\psi^{-1}\circ T_\ell\circ M_\psi\circ \mathrm{e}^{-\frac{D(k)}{2}} = -\mathrm{e}^{-\frac{D(k)}{2}}\circ M_\ell.$$

10. Soit P un polynôme non nul et homogène. Déduire de la question précédente que l'on a pour tout $x\in\mathbf{R}^n$,

$$P(T)(\psi)(x) = (-1)^{\deg(P)}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x,x)}{2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{D(k)}{2}}(P)(x).$$

11. En déduire que l'on a pour tout $x\in\mathbf{R}^n$,

$$\Delta(T)(\psi)(x) = (-1)^{\deg(\Delta)}\mathrm{e}^{-\frac{(x,x)}{2}}\,\Delta(x).$$

$\Big($on rappelle que Δ est le polynôme $\displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(X_j-X_i)\Big)$.

Pour ***k* réel strictement positif** on définit la fonction continue w_k pour $x\in\mathbf{R}^n$ par :

$$w_k(x) = w_k(x_1,\dots,x_n) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}|x_j-x_i|^{2k}$$

et l'intégrale (clairement convergente) de Mehta-MacDonald par :

$$c_k = \int_{\mathbf{R}^n}\mathrm{e}^{-\frac{(x,x)}{2}}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}|x_j-x_i|^{2k}\,\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_n = \int_{\mathbf{R}^n}\mathrm{e}^{-\frac{(x,x)}{2}}\,w_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

On rappelle la **définition de l'espace vectoriel de Schwartz** noté habituellement $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$: on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbf{R}^n$ et on définit

$$\mathcal{S}(\mathbf{R}^n) = \Big\{f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)\ \Big|\ \forall p\in\mathbf{N},\forall\alpha\in\mathbf{N}^n,\exists\, C_{p,\alpha}>0,\forall x\in\mathbf{R}^n,$$
$$(1+\|x\|^2)^p\Big|\frac{\partial^{|\alpha|}f}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}(x)\Big|\leqslant C_{p,\alpha}\Big\}.$$

12. Soient f,g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont l'une est dans l'espace de Schwartz et l'autre est une fonction polynomiale. Montrer en utilisant une intégration par parties, que l'on a

$$\int_{\mathbf{R}^n}T_\ell(k)\big(g\big)(x)f(x)w_k(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{\mathbf{R}^n}g(x)T_\ell(k)\big(f\big)(x)w_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

Note : *on pourra admettre le résultat de cette question.*

13. Montrer que l'on a pour tout polynôme P de $\mathbf{R}[X_1,\dots,X_n]$,

$$\int_{\mathbf{R}^n}\mathrm{e}^{-\frac{D(k)}{2}}(P)(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{(x,x)}{2}}\,w_k(x)\,\mathrm{d}x = c_kP(0).$$

14. En déduire que l'on a pour $k>0$ et P,Q polynômes de $\mathbf{R}[X_1,\dots,X_n]$,

$$\langle\, P,Q\,\rangle_k = \frac{1}{c_k}\int_{\mathbf{R}^n}\mathrm{e}^{-\frac{D(k)}{2}}(P)(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{D(k)}{2}}(Q)(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{(x,x)}{2}}\,w_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

15. Conclure que pour tout $k \in \mathbf{R}$ (non nécessairement positif) le produit $\langle \cdot , \cdot \rangle_k$ est encore symétrique.

16. Montrer que l'on a pour tout $k > 0$, $c_{k+1} = c_k \cdot \langle \Delta, \Delta \rangle_k$.

Commentaire final : *On peut montrer que la fonction* $\langle \Delta, \Delta \rangle_k$ *est une fonction polynomiale en* k *de degré* $\dfrac{n(n-1)}{2}$ *vérifiant :*

$$\langle \Delta, \Delta \rangle_k = n! \prod_{i=2}^{n} \prod_{j=1}^{i-1} (ki + j).$$

En utilisant cette formule et le résultat de la dernière question on déduit l'égalité de fonctions méromorphes

$$c_k = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{n} \frac{\Gamma(k\,i + 1)}{\Gamma(k + 1)}$$

où Γ *désigne la fonction classique Gamma.*

Corrigé de l'épreuve de mathématiques générales

Le sujet se décompose en quatre parties. Les deux premières ont vocation à contrôler les connaissances et automatismes des candidats en matière d'algèbre et d'analyse élémentaire.

Les parties III et IV constituent le cœur du sujet. On introduit les opérateurs de Dunkl pour le groupe symétrique dans $\mathbb{R}^n$. La preuve de la commutativité est trop difficile au niveau de l'agrégation et nous l'avons donc admise. On utilise ces opérateurs pour trouver une équation fonctionnelle sur les intégrales de la forme

$$c_k = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\frac{(x,x)}{2}} \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} |x_j - x_i|^{2k} \,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n.$$

Un peu d'analyse complexe permettrait d'arriver à la formule générale

$$c_k = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{n} \frac{\Gamma(k\,i+1)}{\Gamma(k+1)},$$

où Γ désigne la fonction classique Gamma, mais il faudrait utiliser un théorème sur le comportement des zéros des fonctions holomorphes, qui n'est pas au programme.

I Le cas classique

1. Soit $P = X_1^{\alpha_1}\dots X_i^{\alpha_i}\dots X_j^{\alpha_j}\dots X_n^{\alpha_n}$ et $\theta_{i,j}$ la transposition (i,j) pour $1\leqslant i<j\leqslant n$. On a ${}^{\theta_{i,j}}P = X_1^{\alpha_1}\dots X_j^{\alpha_i}\dots X_i^{\alpha_j}\dots X_n^{\alpha_n}$ d'où l'on tire sans difficultés
   (a) Si $\alpha_i = \alpha_j$, on trouve 0.
   (b) Si $\alpha_i < \alpha_j$ on trouve
   $$-X_1^{\alpha_1}\dots X_i^{\alpha_i}\dots X_j^{\alpha_i}\dots X_n^{\alpha_n}\Big(\sum_{k=0}^{\alpha_j-\alpha_i-1} X_j^{\alpha_j-\alpha_i-1-k}X_i^k\Big).$$
   (c) Si $\alpha_i > \alpha_j$ on trouve
   $$X_1^{\alpha_1}\dots X_i^{\alpha_j}\dots X_j^{\alpha_j}\dots X_n^{\alpha_n}\Big(\sum_{k=0}^{\alpha_i-\alpha_j-1} X_j^{\alpha_i-\alpha_j-1-k}X_i^k\Big).$$
2. D'après la question précédente, $X_i - X_j$ divise $P - {}^{\theta_{i,j}}P$ pour tout monôme P. Par linéarité c'est encore vrai pour tout polynôme P.

3. La signature est l'unique morphisme du groupe symétrique dans $\{-1,1\}$ qui ne soit pas trivial. Il vaut -1 sur les transpositions. Décomposons toute permutation σ en un produit de transpositions $\theta_1\ldots\theta_N$. On a $\epsilon(\sigma) = (-1)^N$. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ agit sur $\mathbf{R}[X_1,\ldots,X_n]$, on a donc

$$^{\sigma}P = ^{\theta_1\ldots\theta_N}P = ^{\theta_1\ldots\theta_{N-1}}\left(^{\theta_N}P\right).$$

Si P est antisymétrique une récurrence immédiate donne $^{\sigma}P = (-1)^N P = \epsilon(\sigma)P$.

4. Plusieurs solutions sont possibles, notamment en analysant l'action d'une transposition sur Δ, on peut aussi utiliser le Vandermonde. Voici une démonstration qui utilise une formule connue.
Soit $\Delta = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(X_j - X_i)$. Pour $\sigma\in\mathfrak{S}_n$, on a donc

$$^{\sigma}\Delta = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(X_{\sigma(j)} - X_{\sigma(i)}).$$

On utilise la formule du cours

$$\epsilon(\sigma) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}.$$

Posons $\lambda = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)$. On a donc $\Delta = \lambda\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{X_j-X_i}{j-i}$ et

$$^{\sigma}\Delta = \lambda\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{X_{\sigma(j)}-X_{\sigma(i)}}{j-i} = \lambda\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{X_{\sigma(j)}-X_{\sigma(i)}}{\sigma(j)-\sigma(i)}.$$

On remarque alors que l'expression $\frac{X_j-X_i}{j-i}$ ne dépend que de la paire $\{i,j\}$ et non pas du couple (i,j). Ceci permet de faire le changement d'indice $i\mapsto\sigma^{-1}(i)$ dans le produit $\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{X_{\sigma(j)}-X_{\sigma(i)}}{\sigma(j)-\sigma(i)}$ ce qui donne $\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{X_j-X_i}{j-i}$. Ce qui permet de conclure que l'on a $^{\sigma}\Delta = \epsilon(\sigma)\Delta$.

5. L'anneau $\mathbf{R}[X_1,\ldots,X_n]$ est factoriel. Les monômes $X_i - X_j$ sont de degré 1 et unitaires donc irréductibles. D'après I-2, si P est antisymétrique il est divisible par $(X_i - X_j)$ pour $i<j$ car $P - ^{\theta_{i,j}}P = 2P$. Comme ces monômes sont deux à deux premiers entre eux, P est divisible par leur produit, c'est à dire Δ.

6. Si P est homogène non nul, l'opérateur $P(\partial)$ est homogène de degré $-\deg(P)$, c'est à dire que l'on a pour tout polynôme homogène Q non nul

$$\deg(P(\partial)Q) = \deg(Q) - \deg(P)$$

lorsque $P(\partial)Q$ est non nul. Si $\deg(P) > \deg(Q)$ alors $P(\partial)Q$ est nul. Si $\deg(Q) > \deg(P)$ et que $P(\partial)Q$ est non nul, c'est un polynôme homogène de degré strictement positif et son évaluation en $(0,\ldots,0)$ donne 0. Dans tous les cas on a $\langle\, P, Q\,\rangle = 0$.

7. On a

$$\langle PQ, R\rangle = \langle QP, R\rangle = \big((QP)(\partial)(R)\big)(0) = \big(Q(\partial)\,(P(\partial)R)\,\big)(0) = \langle Q, P(\partial)(R)\rangle$$

car on a d'après l'énoncé $(QP)(\partial) = Q(\partial) \circ P(\partial)$.

8. Il suffit de montrer que le produit bilinéaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est symétrique et défini positif. Pour cela il suffit de trouver une base orthogonale avec $\langle P, P\rangle > 0$ pour tout élément P de la base. Or la base canonique $(X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n})_{(\alpha_1,\dots,\alpha_N)\in\mathbb{N}^n}$ est clairement une base orthogonale. De plus on a

$$\langle X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}, X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}\rangle = \alpha_1! \dots \alpha_n!$$

avec pour convention que $0! = 1$.

9. On vérifie l'assertion sur la base ci-dessus, ce qui est immédiat. On a donc pour tous P, Q

$$\langle {}^\sigma\! P,\ {}^\sigma Q\rangle = \langle P, Q\rangle.$$

10. Le déterminant de Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & X_1 & \dots & X_1^{n-1} \\ 1 & X_2 & \dots & X_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_n & \dots & X_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

se développe par la formule du déterminant en

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) X_1^{\sigma(1)-1} \dots X_n^{\sigma(n)-1} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (X_j - X_i).$$

Donc dans la base orthogonale, Δ n'a que des composantes qui valent ± 1. On a donc

$$\begin{aligned} \langle \Delta, \Delta\rangle &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \langle X_1^{\sigma(1)-1} \dots X_n^{\sigma(n)-1}, X_1^{\sigma(1)-1} \dots X_n^{\sigma(n)-1}\rangle \\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} (\sigma(1)-1)! \dots (\sigma(n)-1)! = n!\Big(0!1! \dots (n-1)!\Big) = 1!2! \dots n! \end{aligned}$$

II Opérateur de Dunkl en rang 1

Dans cette partie $k > 0$ et $T(f)(x) = f'(x) + k\dfrac{f(x) - f(-x)}{x}$ pour $x \neq 0$.

1. On a d'après l'indication $\dfrac{f(x) - f(-x)}{x} = \displaystyle\int_{-1}^{1} f'(tx)\,\mathrm{d}t$ pour $x \neq 0$. Le second membre est une fonction $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ car $(t, x) \mapsto f'(tx)$ est $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^2)$ et que l'on intègre en t sur un intervalle compact.

2. On note $p_n(x) = x^n$. On trouve $T(p_0) = 0$, $T(p_{2n})(x) = 2n\,x^{2n-1}$ et $T(p_{2n+1})(x) = (2n+1+2k)x^{2n}$.

3. La question est délicate. On a
$$V_k(f)(x) = b_k \int_{-1}^{1} f(xt)(1-t)^{k-1}(1+t)^k \,\mathrm{d}t.$$
Comme $k-1 > -1$ l'intégrale est clairement convergente. On calcule $T(V_k(f))(x)$ en dérivant sous le signe somme. Il vient en remarquant que l'on ne manipule que des fonctions intégrables pour $x \neq 0$ (on conclut par continuité) :
$$T(V_k(f))(x) = b_k \int_{-1}^{1} \big(tf'(tx) + k\frac{f(tx)-f(-tx)}{x}\big)(1-t)^{k-1}(1+t)^k \,\mathrm{d}t$$
$$= b_k \int_{-1}^{1} \{tf'(tx)(1-t)^{k-1}(1+t)^k + k\frac{f(tx)}{x}\underbrace{\Big((1-t)^{k-1}(1+t)^k - (1+t)^{k-1}(1-t)^k\Big)}_{2t(1+t)^{k-1}(1-t)^{k-1}}\}\,\mathrm{d}t$$
$$= b_k \int_{-1}^{1} \{tf'(tx)(1-t)^{k-1}(1+t)^k + \underbrace{2kt(1-t^2)^{k-1}}_{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1-t^2)^k}\frac{f(tx)}{x}\}\,\mathrm{d}t.$$
On peut faire sans problème une intégration par parties (au sens généralisé). On obtient donc
$$b_k \int_{-1}^{1} \{tf'(tx)(1-t)^{k-1}(1+t)^k + (1-t^2)^k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{f(tx)}{x}\Big)\}dt + b_k\underbrace{[(1-t^2)^k\frac{f(xt)}{x}]_{-1}^{1}}_{0}$$
On a $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\dfrac{f(tx)}{x}\Big) = f'(tx)$. Il vient alors
$$b_k \int_{-1}^{1} \{tf'(tx)(1-t)^{k-1}(1+t)^k + (1-t^2)^k f'(tx)\}\,\mathrm{d}t =$$
$$b_k \int_{-1}^{1} f'(tx)(1-t)^{k-1}(1+t)^k(t+1-t)\,\mathrm{d}t = V_k(f')(x).$$

4. On a $E_\lambda = V_k(e_\lambda)$ avec $e_\lambda(t) = e^{\lambda t}$. Il vient
$$T(E_\lambda) = V_k({e_\lambda}') = V_k(\lambda e_\lambda) = \lambda E_\lambda.$$

5. On note que J_λ est la partie paire de E_λ. D'après II-4, on a
$${E_\lambda}'(x) + k\frac{E_\lambda(x) - E_\lambda(-x)}{x} = \lambda E_\lambda(x).$$
Écrivons $E_\lambda(x) = J_\lambda(x) + K_\lambda(x)$ avec K_λ la partie impaire. En identifiant les parties paires et impaires dans l'égalité ci-dessus il vient deux équations étendues par continuité pour tout $x \in \mathbf{R}$:
$${J_\lambda}'(x) = \lambda K_\lambda(x) \quad \text{et} \quad {K_\lambda}'(x) + 2k\frac{K_\lambda(x)}{x} = \lambda J_\lambda(x).$$

On a donc $K_\lambda = \dfrac{1}{\lambda} {J_\lambda}'$ et

$$E_\lambda(x) = J_\lambda(x) + K_\lambda(x) = J_\lambda(x) + \frac{1}{\lambda} {J_\lambda}'(x).$$

6. D'après la question précédente on a ${J_\lambda}'(x) = \lambda K_\lambda(x)$ et en remplaçant dans la deuxième équation on a trouve pour $x \neq 0$,

$$ {J_\lambda}''(x) + \frac{2k}{x} {J_\lambda}'(x) = \lambda^2 J_\lambda(x),$$

ce qui montre que J_λ vérifie l'équation $xy''(x) + 2ky'(x) = \lambda^2 xy(x)$. Cette équation est encore vérifiée pour $x = 0$ car $J'_\lambda(0) = 0$ (c'est une fonction impaire).

III Opérateur de Dunkl en dimension n

1. Si Q est constant alors clairement $T_l(k)(Q)$ est nul. L'opérateur de dérivation $\dfrac{\partial}{\partial X_l}$ et les opérateurs Δ_β diminue le degré de 1. Donc si $T_l(k)(Q)$ est non nul, il est de degré $\deg(Q) - 1$.

2. La question est délicate, car l'ensemble de sommation n'est pas invariant par l'action du groupe $\mathfrak{S}_n$. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ on a

$$ {}^{\sigma}\Big(T_l(k)(Q)\Big) = {}^{\sigma}\Big(\frac{\partial Q}{\partial X_l}\Big) + k \sum_{\beta \in R^+} (e_l, \beta)\, {}^{\sigma}\Big(\frac{Q - {}^{\theta_\beta}Q}{X_i - X_j}\Big). \tag{1}$$

Calculons le premier terme du second membre de (1). Pour $Q = X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$ on a

$$ {}^{\sigma}\Big(\frac{\partial Q}{\partial X_l}\Big) = {}^{\sigma}\Big(\alpha_l X_1^{\alpha_1} \dots X_l^{\alpha_l - 1} \dots X_n^{\alpha_n}\Big) = \alpha_l X_{\sigma(1)}^{\alpha_1} \dots X_{\sigma(l)}^{\alpha_l - 1} \dots X_{\sigma(n)}^{\alpha_n} = \frac{\partial ({}^{\sigma}Q)}{\partial X_{\sigma(l)}}. \tag{2}$$

Pour le second terme, on va changer l'ensemble de sommation, afin qu'il soit stable par l'action du groupe symétrique.
Introduisons $-R^+ = \{e_j - e_i,\ 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$. On remarque que $R^+ \cap -R^+ = \emptyset$ et que $R^+ \cup -R^+ = \{e_i - e_j,\ i \neq j\}$ est stable sous l'action naturelle de $\mathfrak{S}_n$ définie par $\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$.
La transposition que l'on associe à $e_i - e_j$ (avec $i > j$) est encore $\theta_{i,j}$. Par extension on note que l'on a $X_{-\beta} = -X_\beta$ pour $\beta \in R^+$. Le point est de remarquer que $(e_l, \beta)\dfrac{Q - {}^{\theta_\beta}Q}{X_\beta}$ n'est pas changé lorsque β est changé en son opposé.
Finalement on peut étendre l'ensemble de sommation à la réunion $R^+ \cup -R^+$. On a alors

$$ k \sum_{\beta \in R^+} (e_l, \beta) \frac{Q - {}^{\theta_\beta}Q}{X_\beta} = \frac{k}{2} \sum_{\beta \in R^+ \cup -R^+} (e_l, \beta) \frac{Q - {}^{\theta_\beta}Q}{X_\beta}.$$

Faisons agir σ sur cette expression ce qui donnera le second terme dans (1) en remarquant que l'on a $\rho(\sigma)(X_\beta) = X_{\sigma(\beta)}$.

$$\frac{k}{2}\sum_{\beta\in R^+\cup -R^+}(e_l,\beta)^{\sigma}\Big(\frac{Q-\ {}^{\theta_\beta}Q}{X_\beta}\Big) = \frac{k}{2}\sum_{\beta\in R^+\cup -R^+}(e_l,\beta)\frac{{}^{\sigma}Q-\ {}^{\sigma\theta_\beta}Q}{X_{\sigma(\beta)}} =$$
$$\frac{k}{2}\sum_{\beta\in R^+\cup -R^+}(e_l,\beta)\frac{{}^{\sigma}Q-\ {}^{\sigma\theta_\beta\sigma^{-1}}({}^{\sigma}Q)}{X_{\sigma(\beta)}} \quad (3)$$

Comme on a $\sigma\theta_\beta\sigma^{-1} = \theta_{\sigma(\beta)}$ on en déduit que l'expression ci-dessus vaut

$$\frac{k}{2}\sum_{\beta\in R^+\cup -R^+}(e_l,\beta)\frac{{}^{\sigma}Q-\ {}^{\theta_{\sigma(\beta)}}({}^{\sigma}Q)}{X_{\sigma(\beta)}} = (\text{changement de variable}\,\beta\mapsto\sigma^{-1}(\beta))$$
$$\frac{k}{2}\sum_{\beta\in R^+\cup -R^+}(e_l,\sigma^{-1}(\beta))\frac{{}^{\sigma}Q-\ {}^{\theta_\beta}({}^{\sigma}Q)}{X_\beta} = \frac{k}{2}\sum_{\beta\in R^+\cup -R^+}(e_{\sigma(l)},\beta)\frac{{}^{\sigma}Q-\ {}^{\theta_\beta}({}^{\sigma}Q)}{X_\beta}$$
$$= k\sum_{\beta\in R^+}(e_{\sigma(l)},\beta)\frac{{}^{\sigma}Q-\ {}^{\theta_\beta}({}^{\sigma}Q)}{X_\beta} \quad (4)$$

car on a $(e_l,\sigma^{-1}(\beta)) = (e_{\sigma(l)},\beta)$, l'action du groupe symétrique étant orthogonale. En regroupant les expressions calculées en (2) et (4) on trouve bien que l'on a

$${}^{\sigma}\Big(T_l(k)\big(Q\big)\Big) = T_{\sigma(l)}(k)\big({}^{\sigma}Q\big).$$

Autre méthode : On explicite $T_l(k)$, en évaluant les produits $(e_l, e_i - e_j)$. On obtient

$$T_l(k)(Q) = \frac{\partial Q}{\partial X_l} + k\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(e_l,e_i-e_j)\frac{Q-\ {}^{\theta_{i,j}}Q}{X_i-X_j} =$$
$$\frac{\partial Q}{\partial X_l} + k\sum_{l<j\leqslant n}\frac{Q-\ {}^{\theta_{l,j}}Q}{X_l-X_j} - k\sum_{1\leqslant i<l}\frac{Q-\ {}^{\theta_{i,l}}Q}{X_i-X_l} =$$
$$\frac{\partial Q}{\partial X_l} + k\sum_{i\neq l}\frac{Q-\ {}^{\theta_{i,l}}Q}{X_l-X_i}. \quad (5)$$

On fait agir $\sigma\in\Sigma_n$ sur cette expression et on utilise comme ci-dessus le changement de variable $i\mapsto\sigma^{-1}(i)$.

3. On a

$$\Delta_\beta(P\cdot Q) = \frac{P\cdot Q -^{\theta_\beta} P \cdot^{\theta_\beta} Q}{X_\beta} =$$
$$P\cdot\Big(\frac{Q-^{\theta_\beta}Q}{X_\beta}\Big) + \Big(\frac{P-^{\theta_\beta}P}{X_\beta}\Big)\cdot^{\theta_\beta}Q = P\cdot\Delta_\beta(Q) + \Delta_\beta(P)\cdot\big({}^{\theta_\beta}Q\big).$$

4. On applique le calcul de la question précédente avec $P = X_i$. Un calcul facile montre que l'on a

$$\Delta_\beta(X_i) = \frac{X_i -^{\theta_\beta} X_i}{X_\beta} = \frac{X_i - X_{\theta_\beta(i)}}{X_\beta} = (e_i, \beta).$$

On a d'après la question on a

$$\Delta_\beta M_i = M_i \Delta_\beta + (e_i, \beta)\rho(\theta_\beta).$$

Calculons maintenant le commutateur

$$[T_j(k), M_i] = [\frac{\partial}{\partial X_j} + k \sum_{\beta \in R^+} (e_j, \beta)\Delta_\beta, M_i] =$$

$$\underbrace{[\frac{\partial}{\partial X_j}, M_i]}_{\delta_{i,j} Id} + k \sum_{\beta \in R^+} (e_j, \beta)[\Delta_\beta, M_i] = (e_i, e_j)Id + k \sum_{\beta \in R^+} (e_j, \beta)(e_i, \beta)\rho(\theta_\beta).$$

5. On a $D(k) = \sum_{i=1}^{n} T_i(k)^2$ d'où d'après la formule du préambule sur le commutateur

$$[D(k), M_l] = [\sum_{i=1}^{n} T_i(k)^2, M_l] = \sum_{i=1}^{n} T_i(k)[T_i(k), M_l] + [T_i(k), M_l]T_i(k) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} T_i(k)\Big((e_i, e_l)Id + k \sum_{\beta \in R^+} (e_i, \beta)(e_l, \beta)\rho(\theta_\beta)\Big) + \sum_{i=1}^{n} \Big((e_i, e_l)Id + k \sum_{\beta \in R^+} (e_i, \beta)(e_l, \beta)\rho(\theta_\beta)\Big)T_i(k) =$$

$$2\, T_l(k) + k \sum_{i=1}^{n} \sum_{\beta \in R^+} (e_i, \beta)(e_l, \beta)\Big(T_i(k) \circ \rho(\theta_\beta) + \rho(\theta_\beta) \circ T_i(k)\Big)$$

Or on a d'après le III-2, $\rho(\theta_\beta) \circ T_i(k) = T_{\theta_\beta(i)} \circ \rho(\theta_\beta)$. Le second terme de la dernière égalité vaut donc

$$k \sum_{i=1}^{n} \sum_{\beta \in R^+} (e_i, \beta)(e_l, \beta)T_{\theta_\beta(i)} \circ \rho(\theta_\beta) + k \sum_{i=1}^{n} \sum_{\beta \in R^+} (e_i, \beta)(e_l, \beta)T_i(k) \circ \rho(\theta_\beta)$$

puis par changement de variable $i \mapsto \theta_\beta(i)$ dans la première somme

$$k \sum_{i=1}^{n} \sum_{\beta \in R^+} (e_{\theta_\beta(i)}, \beta)(e_l, \beta)T_i(k) \circ \rho(\theta_\beta) + k \sum_{i=1}^{n} \sum_{\beta \in R^+} (e_i, \beta)(e_l, \beta)T_i(k) \circ \rho(\theta_\beta)$$

qui est nul car $(e_{\theta_\beta(i)}, \beta) = -(e_i, \beta)$.

IV Produit scalaire de Dunkl et Intégrale de Mehta

1. Les opérateurs $T_i(k)$ sont de degré -1. Si $\deg(P) > \deg(Q)$ alors $P(T(k))(Q)$ est nul. Si $\deg(P) < \deg(Q)$, alors $P(T(k))(Q)$ est nul ou de degré $\deg(Q) - \deg(P)$. L'évaluation en $(0, \ldots, 0)$ donne alors 0.
2. On a par définition et en utilisant la commutativité admise

$$\langle M_l(P), Q \rangle_k = \langle X_l P, Q \rangle_k = \big(T_l(k) \circ P(T)\big)(Q)(0) = P(T)\big(T_l(k)Q\big)(0) = \langle P, T_l(Q) \rangle_k.$$

3. Par linéarité on vérifie l'assertion pour $P = X_{i_1} \ldots X_{i_N}$. D'après III-2 on a $\rho(\sigma) \circ T_l(k) \circ \rho(\sigma^{-1}) = T_{\sigma(l)}(k)$ pour toute permutation σ. On a donc par récurrence sur N

$$\rho(\sigma) \circ \Big(T_{i_1}(k) \circ \ldots \circ T_{i_N}(k)\Big)\rho(\sigma^{-1}) = T_{\sigma(i_1)}(k) \circ \ldots \circ T_{\sigma(i_N)}(k)$$

On a donc

$$\rho(\sigma) \circ P(T) = \big({}^{\sigma}P\big)(T) \circ \rho(\sigma)$$

En appliquant cette formule à Q on a $\rho(\sigma)\big(P(T(k))Q\big) = \big({}^{\sigma}P\big)(T(k))({}^{\sigma}Q)$ et l'évaluation en $(0, \ldots, 0)$ donne le résultat cherché $\langle {}^{\sigma}P, {}^{\sigma}Q \rangle_k = \langle P, Q \rangle_k$.

4. L'opérateur $D(k)$ est un opérateur homogène de degré -2 sur $\mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$, donc pour tout Q il existe N tel que $D(k)^N(Q) = 0$. Par conséquent la série

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-\frac{D(k)}{2})^p}{p!} Q$$

définissant l'exponentielle est une somme finie pour tout Q.

5. On a $[M_l, e^{-\frac{D(k)}{2}}] = M_l e^{-\frac{D(k)}{2}} - e^{-\frac{D(k)}{2}} M_l$. On peut remplacer l'exponentielle par sa série et calculer le commutateur termes à termes car la série est une somme finie quand on l'évalue sur un polynôme Q.

D'après III-5 on a $[M_l, -\dfrac{D(k)}{2}] = T_l(k)$. Comme les opérateurs $D(k)$ et $T_l(k)$ commutent on va montrer que l'on a la formule

$$[M_l, \big(-\frac{D(k)}{2}\big)^p] = p\, T_l(k)\big(-\frac{D(k)}{2}\big)^{p-1}.$$

On utilise la formule sur le commutateur $[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$ pour A, B, C trois opérateurs. On a donc par récurrence sur p

$$[M_l, \big(-\frac{D(k)}{2}\big)^{p+1}] = [M_l, \big(-\frac{D(k)}{2}\big)^p]\big(-\frac{D(k)}{2}\big) + \big(-\frac{D(k)}{2}\big)^p[M_l, -\frac{D(k)}{2}] =$$
$$p\, T_l(k)\big(-\frac{D(k)}{2}\big)^{p-1}\big(-\frac{D(k)}{2}\big) + \big(-\frac{D(k)}{2}\big)^p T_l(k) = (p+1)\, T_l(k)\big(-\frac{D(k)}{2}\big)^p.$$

On a donc

$$[M_l, e^{-\frac{D(k)}{2}}] = \sum_{p\geqslant 0} \frac{1}{p!}[M_l, \big(-\frac{D(k)}{2}\big)^p] =$$
$$\sum_{p\geqslant 1} \frac{1}{p!} p\, T_l(k)\big(-\frac{D(k)}{2}\big)^{p-1} = T_l(k) \sum_{p\geqslant 0} \frac{1}{p!}\big(-\frac{D(k)}{2}\big)^p = T_l(k) e^{-\frac{D(k)}{2}}.$$

6. Pour montrer que $T_l(k)$ se prolonge en un opérateur sur les fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ il suffit de le montrer pour les opérateurs Δ_β. Pour $\beta = e_i - e_j$ on a

$$\Delta_\beta(f)(x) = \frac{f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)}{x_i - x_j}.$$

On peut considérer la fonction

$$g(t) = f(x_1, \dots, x_i + t(x_j - x_i), \dots, x_j + t(x_i - x_j), \dots, x_n).$$

On a alors

$$\Delta_\beta(f)(x) = \frac{g(1) - g(0)}{x_i - x_j} = \frac{1}{x_i - x_j} \int_0^1 g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Posons $w(t) = (x_1, \dots, x_i + t(x_j - x_i), \dots, x_j + t(x_i - x_j), \dots, x_n)$.
Il vient $g'(t) = (x_i - x_j)\big(\frac{\partial f}{\partial x_j}(w(t)) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(w(t))\big)$ d'où l'on tire

$$\Delta_\beta(f)(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(w(t))\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(w(t))\,\mathrm{d}t$$

qui est bien une fonction $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$.

7. On a $M_\psi f(x) = e^{-\frac{(x,x)}{2}} f(x)$. Calculons alors

$$T_l(k)(M_\psi f) = T_l(k)(\psi f) = \frac{\partial(\psi f)}{\partial x_l} + k \sum_{\beta\in R^+} (e_l, \beta)\Delta_\beta(\psi f).$$

Or ψ est une fonction invariante sous l'action du groupe symétrique, donc la formule du III-3 donne $\Delta_\beta(\psi f) = \psi \Delta_\beta(f)$. Il vient donc

$$T_l(\psi f) = -x_l(\psi f) + \psi\frac{\partial f}{\partial x_l} + k \sum_{\beta\in R^+} (e_l, \beta)\psi\Delta_\beta(f) = -x_l(\psi f) + \psi\big(\frac{\partial f}{\partial x_l} + k \sum_{\beta\in R^+} (e_l, \beta)\Delta_\beta(f)\big).$$

On a donc $T_l \circ M_\psi = M_\psi \circ T_l - M_\psi \circ M_l$.

8. D'après IV-7 on a sur les fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$,

$$T_l \circ M_\psi = M_\psi \circ T_l - M_\psi \circ M_l = M_\psi \circ (T_l(k) - M_l),$$

c'est à dire $M_\psi^{-1} \circ T_l(k) \circ M_\psi = T_l(k) - M_l$ qui est bien un opérateur sur les fonctions polynomiales. Par composition et IV-4 l'opérateur $M_\psi^{-1} \circ T_l(k) \circ M_\psi \circ e^{-\frac{D(k)}{2}}$ est un opérateur de $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$.

9. On a d'après la question précédente

$$M_\psi^{-1} \circ T_l(k) \circ M_\psi \circ e^{-\frac{D(k)}{2}} = (T_l(k) - M_l) \circ e^{-\frac{D(k)}{2}}$$

Or d'après IV-5, on $[M_l, e^{-\frac{D(k)}{2}}] = T_l \circ e^{-\frac{D(k)}{2}}$, c'est à dire

$$T_l \circ e^{-\frac{D(k)}{2}} - M_l \circ e^{-\frac{D(k)}{2}} = -e^{-\frac{D(k)}{2}} \circ M_l.$$

On a donc comme opérateurs sur les fonctions polynomiales

$$M_\psi^{-1} \circ T_l \circ M_\psi \circ e^{-\frac{D(k)}{2}} = -e^{-\frac{D(k)}{2}} \circ M_l.$$

10. Il suffit de montrer la formule proposée pour tout polynôme homogène et même pour tout momôme. On raisonne par récurrence sur le degré de P
Si $P = X_l$ on a $\quad T_l(k)(\psi)(x) = -x_l\psi(x), \quad$ car ψ est un fonction invariante sous l'action du groupe symétrique. Or on a $e^{-\frac{D(k)}{2}}(X_l) = X_l$ car X_l est de degré 1 et $-\dfrac{D(k)}{2}$ est un opérateur de degré -2. On a donc

$$T_l(k)(\psi)(x) = -\psi(x)e^{-\frac{D(k)}{2}}(X_l)(x).$$

Supposons maintenant que l'on a $P = X_lQ$ avec Q vérifiant la formule de la question. On a

$$\begin{aligned} P(T)(\psi)(x) = T_l(k)\big(Q(T)\psi\big)(x) = \\ (-1)^{\deg(Q)}\, T_l(k)\big(\underbrace{M_\psi \circ e^{-\frac{D(k)}{2}}(Q)}_{Par\, récurrence\, sur\, Q}\big) = (-1)^{\deg(Q)}\big(T_l(k) \circ M_\psi \circ e^{-\frac{D(k)}{2}}\big)(Q) = \\ (-1)^{\deg(Q)}\big(\underbrace{-M_\psi \circ e^{-\frac{D(k)}{2}} \circ M_l}_{d'après\, IV-9}\big)(Q) = (-1)^{\deg(Q)+1}\psi(x)e^{-\frac{D(k)}{2}}(X_lQ)(x) = \\ (-1)^{\deg(P)}\psi(x)e^{-\frac{D(k)}{2}}(P)(x) \quad (6) \end{aligned}$$

11. On applique la formule précédente pour $P = \Delta$.
Il faut remarquer que l'on a $D(k)(\Delta) = 0$, car c'est un polynôme antisymétrique donc divisible par Δ d'après I-5, c'est absurde s'il est non nul pour une raison de degré.
Pour justifier le fait que le polynôme est antisymétrique il faut remarquer que par définition on a $(\sum_{i=1}^{n} X_i^2)(T) = D(k)$ et d'après la preuve de IV-3 on a $\rho(\sigma) \circ D(k) \circ \rho(\sigma^{-1}) = D(k)$, donc

$$\rho(\sigma)(D(k)(\Delta)) = D(k)(\rho(\sigma)\Delta) = \epsilon(\sigma)\Delta.$$

En conséquence on a $e^{-\frac{D(k)}{2}}(\Delta) = \Delta$ et $\Delta(T)(\psi)(x) = (-1)^{\deg\Delta}e^{-\frac{(x,x)}{2}}\ \Delta(x)$.

12. La question est délicate.
Pour $k > 0$ le poids w_k est une fonction continue sur $\mathbf{R}^n$. Supposons g dans l'espace de Schwartz et f une fonction polynomiale. En dehors des hyperplans $x_i = x_j$ la fonction w_k est dérivable et on a

$$\frac{\partial w_k}{\partial x_l} = w_k\frac{\partial \log w_k}{\partial x_l} = \sum_{\beta\in R^+} 2k(e_l,\beta)\frac{w_k}{(\beta,x)}$$

avec $(\beta, x) = x_i - x_j$ si $\beta = e_i - e_j$.
Toutes les intégrales que l'on manipule sont convergentes car systématiquement les intégrandes sont des fonctions à décroissante rapide.
On a

$$\int_{\mathbf{R}^n} \Big(T_l(g)(x)f(x) + g(x)T_l(f)(x)\Big) w_k(x)\,\mathrm{d}x = \\ \int_{\mathbf{R}^n} \Big(\frac{\partial(fg)}{\partial x_l} + k \sum_{\beta \in R^+} (e_l, \beta)\big(\Delta_\beta(g)f + g\Delta_\beta(f)\big)\Big) w_k(x)\,\mathrm{d}x \quad (7)$$

On a $\Delta_\beta(g)(x) = \dfrac{g(x) - ({}^{\theta_\beta}g)(x)}{(\beta, x)}$, par conséquent on a

$$\int_{\mathbf{R}^n} \big(\Delta_\beta(g)f + g\Delta_\beta(f)\big) w_k(x) = 2\int_{\mathbf{R}^n} \frac{g(x)f(x)}{(\beta, x)} w_k(x)\,\mathrm{d}x \\ - \int_{\mathbf{R}^n} \frac{({}^{\theta_\beta}g)(x)f(x)}{(\beta, x)} w_k(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbf{R}^n} \frac{g(x)({}^{\theta_\beta}f)(x)}{(\beta, x)} w_k(x)\,\mathrm{d}x$$

Les deux dernières intégrales se compensent par changement de variable $x \mapsto \theta_\beta(x)$. On remarque que la fonction $\dfrac{w_k(x)}{(\beta, x)}$ est L^1_{loc}, ça se voit en faisant un changement de repère pour se ramener à une fonction de la variable réelle $\dfrac{1}{t^{1-2k}}$. Bref en reprenant (7) on a d'après le calcul de $\dfrac{\partial w_k}{\partial x_l}$ fait plus haut

$$\int_{\mathbf{R}^n} \Big(\frac{\partial(fg)}{\partial x_l} + 2k \sum_{\beta \in R^+} (e_l, \beta) \frac{g(x)f(x)}{(\beta, x)}\Big) w_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\partial(fgw_k)}{\partial x_l}\,\mathrm{d}x = 0$$

car la fonction fgw_k est nulle à l'infini et décroît suffisamment vite. En effet on a

$$|fgw_k(x_1, \dots, A, \dots, x_n)| \leqslant C \frac{1}{1 + A^2} \prod_{i \neq l} \frac{1}{1 + x_i^2},$$

ce qui montre que l'on a

$$\int_{\mathbf{R}^n} \frac{\partial(fgw_k)}{\partial x_l}\,\mathrm{d}x = \lim_{A \mapsto \infty} \int_{\mathbf{R}^{n-1}} fgw_k(x_1, \dots, A, \dots, x_n)\,\mathrm{d}x_1 \cdots \widehat{\mathrm{d}x_l} \cdots \mathrm{d}x_n \\ - \lim_{A \mapsto -\infty} \int_{\mathbf{R}^{n-1}} fgw_k(x_1, \dots, A, \dots, x_n)\,\mathrm{d}x_1 \cdots \widehat{\mathrm{d}x_l} \cdots \mathrm{d}x_n = 0.$$

13. Pour P homogène de degré strictement positif on a d'après IV-10

$$\psi(x)e^{-\frac{D(k)}{2}}(P)(x) = (-1)^{\deg P} P(T)(\psi)(x)$$

donc

$$\int_{\mathbf{R}^n} \psi(x)e^{-\frac{D(k)}{2}}(P)(x)w_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}^n} (-1)^{\deg P} P(T)(\psi)(x)w_k(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

d'après la question précédente appliquée à $f = \psi$ et $g = 1$. En effet on aurait par récurrence immédiate sur IV-12

$$\int_{\mathbf{R}^n} (-1)^{\deg P} P(T)(\psi)(x) 1 w_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}^n} \psi(x) P(T)(1) w_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

En conséquence seule la partie de degré 0 intervient, id on a

$$\int_{\mathbf{R}^n} \psi(x) e^{-\frac{D(k)}{2}}(P)(x) w_k(x)\,\mathrm{d}x = P(0) \int_{\mathbf{R}^n} \psi(x) w_k(x)\,\mathrm{d}x = c_k P(0).$$

14. Pour $k > 0$ et P, Q homogènes (on étend ensuite le résultat par linéarité à tous P, Q) on a d'après IV-10

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}^n} \mathrm{e}^{-\frac{D(k)}{2}}(P)(x)\mathrm{e}^{-\frac{D(k)}{2}}(Q)(x)\psi(x) w_k(x)\,\mathrm{d}x = \\
&\int_{\mathbf{R}^n} (-1)^{\deg P} P(T)(\psi)(x) e^{-\frac{D(k)}{2}}(Q)(x) w_k(x)\,\mathrm{d}x = \text{d'après IV} - 12 \\
&\int_{\mathbf{R}^n} \psi(x) P(T)\big(e^{-\frac{D(k)}{2}}(Q)\big) w_k(x)\,\mathrm{d}x = \\
&\int_{\mathbf{R}^n} \underbrace{\mathrm{e}^{-\frac{D(k)}{2}}(P(T)Q)}_{\textit{commutativité des opérateurs}} \psi(x) w_k(x)\,\mathrm{d}x = (P(T)Q)(0) c_k = c_k \langle\, P, Q \,\rangle_k
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat car c_k est strictement positif.

15. Pour $k > 0$ la formule précédente montre que le produit est symétrique (et positif). Les opérateurs $T_l(k)$ sont polynomiaux en k, la dépendance du produit $\langle\, P, Q \,\rangle_k$ est polynomiale en k. La symétrie se prolonge à tout $k \in \mathbf{R}$. Remarquons que le produit n'est pas forcément défini positif pour $k < 0$, comme le montre la formule donnée dans l'énoncé pour $\langle \Delta, \Delta \rangle_k$.

16. Pour $k > 0$ on calcule

$$\begin{aligned}
c_k \cdot \langle \Delta, \Delta \rangle_k \underset{IV-14}{=} &\int_{\mathbf{R}^n} \underbrace{\mathrm{e}^{-\frac{D(k)}{2}}(\Delta)}_{=\Delta}(x) \mathrm{e}^{-\frac{D(k)}{2}}(\Delta)(x) w_k(x)\psi(x) = \\
&\int_{\mathbf{R}^n} \Delta(x)^2 \psi(x) w_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}^n} \psi(x) w_{k+1}(x)\,\mathrm{d}x = c_{k+1}
\end{aligned}$$

car on a $\Delta^2(x) w_k(x) = w_{k+1}(x)$.

Rapport des correcteurs

Le sujet se décompose en quatre parties et 37 questions. Les deux premières parties avaient vocation à contrôler les connaissances et automatismes des candidats en matière d'algèbre et d'analyse élémentaire ; seules les questions I-4, I-5, I-10 et II-3 étaient plus délicates.

Ces deux parties se sont révélées bien plus difficiles pour les candidats qu'une simple vérification. On ne peut que conseiller aux candidats des futurs concours de s'entraîner à bien rédiger les premières questions.

Les parties III et IV constituent le cœur du sujet. Elles sont construites sur un modèle similaire aux parties I et II. On introduit les opérateurs de Dunkl pour le groupe symétrique dans $\mathbf{R}^n$.

On utilise ces opérateurs pour trouver une équation fonctionnelle sur les intégrales de la forme

$$c_k = \int_{\mathbf{R}^n} e^{-\frac{(x,x)}{2}} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |x_j - x_i|^{2k} \,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n,$$

qui interviennent en probabilité et en arithmétique.

Les opérateurs de Dunkl sont apparus dans la littérature mathématique depuis une quinzaine d'années. Ils sont maintenant utilisés en théorie des groupes, en probabilités et en analyse.

Première Partie

- I-1 On demandait dans cette question de faire un calcul de simplification explicite. Il fallait évidemment traiter les trois cas : $\alpha_i = \alpha_j$, $\alpha_i < \alpha_j$ et $\alpha_i > \alpha_j$. Les candidats qui n'ont traité qu'un seul cas ont été pénalisés.
- I-3 On se devait de rappeler la définition de la signature et d'amorcer une récurrence.
- I-4 Plusieurs méthodes étaient possible.
  Les candidats ont dans leur ensemble préféré un calcul direct en faisant agir une transposition et en séparant les termes. Cette méthode présente un gros inconvénient : il faut être très soigneux quant à la rédaction !
  Malheureusement ce ne fut pas toujours le cas. Certains ont oublié des termes, d'autres se sont perdus dans les calculs. Peu de candidats ont proposé l'utilisation du Vandermonde (pourtant signalé en question I-10) ou l'utilisation d'une formule du cours sur la signature.
- I-5 La plupart des candidats ont écrit « les facteurs sont premiers deux à deux, donc leur produit divise P ». Très peu de candidats ont écrit que l'anneau était factoriel. Grave oubli.
- I-8 Beaucoup d'erreurs de calcul sur la norme de $X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$, ce qui pénalise évidemment le candidat.
- I-9 Cette question a été mal traitée dans l'ensemble. D'une part l'erreur de calcul du I-8 se répercute sur cette question et cache la difficulté (certes relative) à savoir que la norme doit être symétrique sous l'action de Σ_n.
- I-10 Malgré l'indication, peu de candidat ont abouti sur cette question.

Deuxième Partie

- II-1 La question était simple et ne demandait pas l'utilisation du théorème de convergence dominée ; en effet l'intégration se fait sur un compact. La rédaction a été dans l'ensemble très mauvaise sur cette question.
- II-3 La question était délicate, mais l'intégration par parties a été menée par la moitié des candidats.
- II-5 et II-6 En faisant apparaître la partie impaire de la fonction E_λ les calculs étaient élémentaires. Cette méthode, pourtant naturelle n'a pas été envisagée, faute d'indication sans doute. Beaucoup de candidat ont repris les calculs de II-2 et perdu du temps inutilement.

Troisième Partie

- III-2 La question était délicate. La meilleure méthode consistant à expliciter l'opérateur en calculant les produits scalaire (e_l, β) en fonction de β. Le résultat était alors clairement équivariant sous l'action de Σ_n.
- III-3 et III-4 Ces questions ont été relativement bien traitées.
- III-5 Le début du commutateur est bien traité dans l'ensemble. Il fallait ensuite utiliser la question III-2 pour montrer la nullité du terme résiduel, cette argumentation n'a malheureusement pas été comprise par les candidats.

Quatrième Partie

- IV-1 et IV-2 ont été traitées.
- IV-3 L'utilisation de la question III-2 est encore cruciale ici.
- IV-4 Pas mal de candidats ont compris que l'opérateur est localement nilpotent et donc l'exponentielle est définie quand on l'applique sur un polynôme.
- IV-5 Il fallait faire une récurrence ou utiliser une formule sur la dérivation. La rédaction fut lourde et souvent approximative.
- IV-6 Les candidats qui ont abordé cette question simple, ont compris dans leur ensemble l'argument. La rédaction laissait à désirer.
- IV-7, IV-8 et IV-9 étaient en fait une seule question découpée (et donc faiblement notées ! !). Sans difficulté sauf qu'il fallait bien voir que l'opérateur $e^{-D(k)}$ n'est pas un opérateur sur les fonctions $\mathcal{C}^\infty$, ce qui a rendu caduque pas mal de rédactions.
- IV-10 N'a concerné que peu de candidats.
- IV-11 Il fallait utiliser le fait que l'on avait $D(k)\Delta = 0$, grâce à l'antisymétrie de ce polynôme.
- IV-12 N'a été traité que par un seul candidat, qui a rendu la meilleure copie.
- IV-15 Il fallait remarquer que l'expression est polynomiale en k.

Épreuve écrite d'analyse et probabilités

Notations et définitions

Le problème traite de certaines propriétés concernant les racines de polynômes dont les coefficients sont aléatoires.

- Dans tout le problème, l'espace $\mathbf{R}^n$ sera muni du produit scalaire canonique usuel défini, si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$, par $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$. La norme euclidienne associée sera notée $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.
- La sphère unité de $\mathbf{R}^n$ sera notée S^{n-1}. C'est par définition $S^{n-1} = \{x \in \mathbf{R}^n, ||x|| = 1\}$. La boule unité fermée de $\mathbf{R}^n$ sera notée $B^n = \{x \in \mathbf{R}^n, ||x|| \leqslant 1\}$.
- La mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^n$ sera notée λ_n, voire λ s'il n'y a pas d'ambiguité sur la valeur de n.
- Les coefficients binomiaux seront notés $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$. On pourra aussi utiliser la notation C_n^k.
- Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont deux suites de nombres réels, on dit que (u_n) est dominée par (v_n), et on note $u_n \in O(v_n)$ ou bien $u_n = O(v_n)$, s'il existe une constante C telle que $|u_n| \leqslant C|v_n|$ à partir d'un certain rang.

Partie I
Asymptotique du nombre de zéros

On définit dans cette partie pour $t > 0$ et $n \in \mathbf{N}^*$ les trois fonctions

$$A_n(t) = \frac{n^2}{t^2 + 2nt}, \quad B_n(t) = \frac{(n+1)\left(1 + \dfrac{t}{n}\right)^n}{\left(1 + \dfrac{t}{n}\right)^{2n+2} - 1} \text{ et } \delta_n(t) = \sqrt{A_n^2(t) - B_n^2(t)}.$$

On admettra provisoirement que $A_n(t) \geqslant B_n(t)$ pour tout $t > 0$, ce qui garantit la définition de $\delta_n(t)$.

1. Calculer $\displaystyle\int_1^{+\infty} A_n(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Les inégalités des questions (a), (b) et (c) suivantes sont demandées pour tout $t > 0$.

   (a) Justifier que $|\delta_n(t) - A_n(t)| \leqslant \dfrac{B_n^2(t)}{A_n(t)}$.

   (b) On pose $\varphi_n(t) = \dfrac{1}{\left(1 + \dfrac{t}{n}\right)^{2n+2} - 1}$. Montrer que $\varphi_n(t) \leqslant \dfrac{1}{2t + 2t^2}$.

(c) Vérifier que $|\delta_n(t) - A_n(t)| \leqslant -(n+1)t\varphi_n'(t)$.

(d) En déduire que la suite $\displaystyle\int_1^{+\infty} |\delta_n(t) - A_n(t)|\,\mathrm{d}t \in O(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

(e) Déterminer un équivalent simple de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \delta_n(t)\,\mathrm{d}t$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. On pose

$$N_n(t) = \left(\left(1+\frac{t}{n}\right)^{2n+2} - 1\right)^2 - (n+1)^2\left(1+\frac{t}{n}\right)^{2n}\left(\frac{2t}{n}+\frac{t^2}{n^2}\right)^2$$

$$D_n(t) = \left(\frac{2t}{n}+\frac{t^2}{n^2}\right)^2\left(\left(1+\frac{t}{n}\right)^{2n+2} - 1\right)^2$$

de sorte que $\delta_n(t)^2 = \dfrac{N_n(t)}{D_n(t)}$ pour tout $t > 0$.

(a) À l'aide d'un développement limité, déterminer les valeurs de $N_n(0), N_n'(0), N_n''(0)$. En déduire l'intégrabilité de $\delta_n(t)$ en 0.

(b) Vérifier que $\left(1+\dfrac{t}{n}\right)^{2n} \leqslant \mathrm{e}^2$ pour tout $t \in [0,1]$.

On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des suites de fonctions $(g_n)_{n\geqslant 1}$ de classe $\mathcal{C}^3$ de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$, pour lesquelles il existe M tel que $|g_n(t)|, |g_n'(t)|, |g_n''(t)|$ et $|g_n'''(t)|$ soient tous inférieurs à M pour tout t dans $[0,1]$ et pour tout $n \geqslant 1$.

Montrer que $\mathcal{B}$ est une algèbre, puis que $(N_n)_{n\geqslant 1}$ est dans $\mathcal{B}$.

(c) Déduire des questions précédentes que $\displaystyle\int_0^1 \delta_n(t)\,\mathrm{d}t \in O(n)$.

4. (a) Vérifier que $\dfrac{1}{t^2-1} - \dfrac{(n+1)t^n}{t^{2n+2}-1} \geqslant 0$ pour tout $t > 1$.

On pourra utiliser sans démonstration l'inégalité $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$ valable pour tout $x > 0$.

(b) On démontrera ultérieurement que

$$E_n = \frac{4}{\pi}\int_1^{+\infty} \sqrt{\frac{1}{(t^2-1)^2} - \frac{(n+1)^2 t^{2n}}{(t^{2n+2}-1)^2}}\,\mathrm{d}t$$

est le nombre moyen de racines réelles d'un polynôme de degré n dont les coefficients sont aléatoires.

À l'aide du changement de variable $t = 1 + \dfrac{x}{n}$, déterminer un équivalent de E_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie II
Balayages orthogonaux sur la sphère

II.A - Une mesure invariante sur la sphère

Dans cette partie, n est un entier fixé ($n \geqslant 3$).

On construit une mesure sur la sphère S^{n-1}, héritée de la mesure de Lebesgue λ_n. Pour toute partie $A \subset S^{n-1}$, on définit le cône engendré par A comme l'ensemble

$$C = \big\{ t.x \;\big|\; t \in [0,1], x \in A \big\}.$$

Lorsque C est mesurable, on pose alors $\lambda_S(A) = \dfrac{\lambda_n(C)}{\lambda_n(B^n)}\cdot$ On a en particulier $\lambda_S(S^{n-1}) = 1$. On admet que les images réciproques de boréliens de $\mathbf{R}$ par des restrictions à S^{n-1} de fonctions mesurables sur $\mathbf{R}^n$ sont mesurables.

La présence de dessins clairs sera vivement appréciée.

1. Vérifier que pour tout $h > 0$ on a

$$\lambda_S\Big(S^{n-1} \cap ([-h,h] \times [-1,1]^{n-1})\Big) \leqslant \frac{2^n h}{\lambda_n(B^n)}\cdot$$

2. Montrer que λ_S est invariante par rotation, i.e. pour toute rotation vectorielle r de $\mathbf{R}^n$ et pour toute partie mesurable $A \subset S^{n-1}$ on a $\lambda_S(r(A)) = \lambda_S(A)$.
3. On définit, lorsque $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 2\pi$, le *quartier de disque* $\Omega_{\alpha,\beta}$ comme l'ensemble

$$\Omega_{\alpha,\beta} = \big\{ (r\cos\theta, r\sin\theta) \;\big|\; r \in [0,1], \theta \in [\alpha,\beta] \,\big\},$$

   puis le *quartier de sphère* $Q_{\alpha,\beta}$ comme l'ensemble des points $(x_1,\dots,x_n) \in S^{n-1}$ tels que $(x_1,x_2) \in \Omega_{\alpha,\beta}$.

   Vérifier que lorsque θ et θ' sont positifs et que $\theta + \theta' \leqslant 2\pi$, alors

$$\lambda_S(Q_{0,\theta+\theta'}) = \lambda_S(Q_{0,\theta}) + \lambda_S(Q_{0,\theta'}).$$

   En déduire que $\lambda_S(Q_{\alpha,\beta}) = \dfrac{\beta-\alpha}{2\pi}\cdot$

Dans toute la suite du problème, lorsque a et b sont deux points de S^{n-1}, on appelle longueur d'arc entre a et b la quantité $\mathrm{L}(ab) = \operatorname{Arc\,cos}(\,\langle a,b\rangle\,)$.

4. Soit a et b deux points de S^{n-1}. Montrer l'existence d'une constante K indépendante de a et b telle que

$$||b-a|| - K||b-a||^2 \leqslant \mathrm{L}(ab) \leqslant ||b-a|| + K||b-a||^2.$$

5. On considère $\theta \in [0,\pi]$ et les deux points de S^{n-1} définis par $a = (1,0,\ldots,0)$ et $b = (\cos\theta, \sin\theta, 0, \ldots, 0)$. Déterminer en fonction de θ la quantité

$$\lambda_S\Big(\big\{x \in S^{n-1} \mid \langle x,a\rangle\langle x,b\rangle \leqslant 0\big\}\Big).$$

De façon générale, a et b étant cette fois-ci quelconques dans S^{n-1}, vérifier que

$$\lambda_S\Big(\big\{x \in S^{n-1} \mid \langle x,a\rangle\langle x,b\rangle \leqslant 0\big\}\Big) = \frac{\mathrm{L}(ab)}{\pi}.$$

II.B - Balayages orthogonaux

Soit $t \mapsto \gamma(t)$ une fonction régulière définie sur un **segment** $I \subset \mathbf{R}$ et à valeurs dans S^{n-1}. Pour tout point $a \in S^{n-1}$, on définit le nombre de passages orthogonaux en a pendant l'intervalle $J \subset I$ par

$$N_J(a) = \mathrm{Card}\big\{t \in J \mid a \perp \gamma(t)\big\},$$

le cardinal étant à valeur dans $\mathbf{N} \cup \{+\infty\}$. L'aire orthogonale balayée par γ est alors

$$\mathcal{A}_I = \int_{a\in S^{n-1}} N_I(a)\,\mathrm{d}\lambda_S(a) = \sum_{k=0}^{+\infty} k.\lambda_S(N_I^{-1}(k)).$$

On admet la mesurabilité des fonctions N_J.

On se place ici dans le cas où γ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et qu'il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que pour presque tout $a \in S^{n-1}$, $N_I(a) \leqslant M$. Par ailleurs, on note $||\gamma'||_\infty = \sup_{t\in I} ||\gamma'(t)||$ et $||\gamma''||_\infty = \sup_{t\in I} ||\gamma''(t)||$.

1. Soit $a \in S^{n-1}$ et $h > 0$.
   (a) Montrer que si $\langle a,\gamma(t)\rangle\langle a,\gamma(t+h)\rangle \leqslant 0$, alors $N_{[t,t+h]}(a) \geqslant 1$.
   (b) Vérifier que si $N_{[t,t+h]}(a) \geqslant 2$, alors on peut trouver c dans $[t,t+h]$ tel que a soit orthogonal à $\gamma'(c)$. En déduire que
   $$|\langle a,\gamma(t)\rangle| \leqslant h^2\,||\gamma''||_\infty.$$
   (c) Montrer la même inégalité lorsque l'on a $\langle a,\gamma(t)\rangle\langle a,\gamma(t+h)\rangle > 0$ et $N_{[t,t+h]}(a) \geqslant 1$.
2. (a) Déduire des résultats précédents que les quantités suivantes peuvent être majorées par un terme proportionnel à h^2 et ne dépendant pas de t :

   i) $\left|\lambda_S\Big(N^{-1}_{[t,t+h]}(1)\Big) - \dfrac{\mathrm{L}(\gamma(t)\gamma(t+h))}{\pi}\right|$ *ii)* $\left|\mathcal{A}_{[t,t+h]} - \dfrac{||\gamma(t)-\gamma(t+h)||}{\pi}\right|$

   (b) Vérifier alors que $\mathcal{A}_I = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_I ||\gamma'(t)||\,\mathrm{d}t$.

Partie III
Le nombre moyen de zéros d'un polynôme

III.A - Coefficients de même loi gaussienne

On considère des variables aléatoires $a_1, \ldots, a_n$ gaussiennes, indépendantes, de moyenne nulle et de variance 1. Leur loi jointe est définie par

$$\mathbb{P}\Big((a_1, \ldots, a_n) \in A\Big) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_A \mathrm{e}^{-\frac{||x||^2}{2}} \mathrm{d}\lambda_n(x).$$

On se donne n fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$, formant un système libre dans l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ d'un intervalle I dans $\mathbf{R}$. On définit la fonction aléatoire $f = a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n$, et on s'intéresse au nombre moyen de zéros de la fonction f sur l'intervalle I.

On suppose que les (f_k) ne s'annulent pas simultanément ; on pose $v(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))$ et $\gamma(t) = \dfrac{v(t)}{||v(t)||}\cdot$ On suppose aussi qu'il existe un nombre M tel que, presque sûrement, f admet moins de M zéros sur I.

1. Soit $a = (a_1, \ldots, a_n)$. La variable $\dfrac{a}{||a||}$ est à valeurs dans S^{n-1}. Montrer que la loi de $\dfrac{a}{||a||}$ est invariante par rotation, i.e. $\mathbb{P}\left(\dfrac{a}{||a||} \in A\right) = \mathbb{P}\left(\dfrac{a}{||a||} \in r^{-1}(A)\right)$ pour toute rotation vectorielle r de $\mathbf{R}^n$ et tout borélien A.

   Dans la suite, on admettra que la loi de $\boldsymbol{\dfrac{a}{||a||}}$ est $\boldsymbol{\lambda_S}$.

2. Montrer que le nombre moyen de zéros de f sur l'intervalle I est
$$\frac{1}{\pi} \int_I ||\gamma'(t)||\, \mathrm{d}t$$
   On prendra garde au fait que I n'est pas forcément un segment.

3. Montrer que $||\gamma'(t)||^2 = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(t, t)$, où φ est définie sur un ouvert autour de la droite $y = x$ par
$$\varphi(x, y) = \ln\langle v(x), v(y)\rangle.$$

4. En déduire que le nombre moyen de zéros réels d'un polynôme $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$, aléatoire de degré n, dont tous les coefficients (a_k) sont indépendants et de même loi gaussienne de moyenne nulle et de variance 1, est donné par la valeur E_n définie à la dernière question de la première partie.

III.B - Une classe de polynômes circulaires

Dans toute cette partie, n est un entier fixé. À un polynôme $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ on associe le polynôme homogénéisé $\tilde{P}(X, Y) = a_0 Y^n + a_1 X Y^{n-1} + \cdots + a_{n-1} X^{n-1} Y + a_n X^n$, élément du sous-espace vectoriel E de $\mathbf{R}[X, Y]$ engendré par les monômes $X^k Y^{n-k}$ pour $k \in \{0, \ldots, n\}$.

Pour tout $\theta \in \mathbf{R}$ on définit l'opérateur L_θ qui à $P(X, Y) \in E$ associe le polynôme

$$L_\theta(P) = P(\cos\theta X + \sin\theta Y, -\sin\theta X + \cos\theta Y).$$

1. (a) Montrer que L_θ est un endomorphisme de E. Que vaut $L_\theta \circ L_{\theta'}$?
   (b) On associe chaque élément de E à ses coordonnées dans la base canonique $(X^kY^{n-k})_{0\leqslant k\leqslant n}$. L_θ est alors assimilé à un endomorphisme de $\mathbf{R}^{n+1}$.

   Montrer que $\dfrac{\partial(L_\theta(P))}{\partial\theta} = A.L_\theta(P)$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -n & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & -(n-1) & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   la matrice $A = \Big(a_{i,j}\Big)_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant j\leqslant n}}$ étant définie par les relations

$$\begin{cases} a_{i,j} = j & \text{si } j = i+1 \\ a_{i,j} = j-n & \text{si } j = i-1 \\ a_{i,j} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   (*on pourra d'abord vérifier la relation en* $\theta = 0$).
   (c) Prouver qu'il existe une unique matrice D diagonale à coefficients positifs, dont le premier coefficient diagonal est 1, et telle que $B = DAD^{-1}$ soit une matrice antisymétrique. Préciser les coefficients de D.
   (d) En déduire que pour tout θ il existe une matrice orthogonale $Q(\theta)$ telle que pour tout $P \in E$ on a $DL_\theta(P) = Q(\theta)DP$.
2. On considère une suite $(a_0, \ldots, a_n)$ de variables aléatoires, indépendantes, de lois gaussiennes de moyenne nulle et de variance $\mathrm{Var}(a_k) = \dbinom{n}{k}$, ce qui signifie que la loi jointe des variables $a_k \dbinom{n}{k}^{-1/2}$ est similaire (avec $n+1$ à la place de n) à celle qui est donnée dans le préambule de la partie **III.A**.
   (a) Soit $P \in E$ défini par $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k Y^{n-k}$. On fixe $\theta \in \mathbf{R}$. Montrer que la variable aléatoire $L_\theta(P)$ à valeurs dans E a la même loi que P.
   (b) Calculer le nombre moyen de zéros réels de P contenus dans l'intervalle $]a, b[$, où $a < b$ avec a, b éléments de $\mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Partie IV
Quelques résultats sur les séries aléatoires

IV.A - Majoration du nombre de racines d'un polynôme

On considère dans cette partie un polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ à coefficients complexes de degré n.

On définit la *mesure de P* par $M(P) = |a_n| \prod \max(1, |z|)$ où le produit est pris sur l'ensemble des racines complexes de P, répétées avec leur multiplicité.

On définit la norme de P par $||P|| = \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2\right)^{1/2}$.

1. (a) Montrer que pour tout polynôme Q à coefficients complexes, et pour tout $z \in \mathbf{C}$, on a l'égalité
$$||(X+z)Q(X)|| = ||(\overline{z}X+1)Q(X)||.$$
   (b) En déduire que $M(P) \leqslant ||P||$.
2. On considère $0 < \rho < 1$ et on suppose $a_0 \neq 0$. Montrer que le nombre de racines de module inférieur à ρ^2 est inférieur à
$$\frac{1}{\ln \frac{1}{\rho}} \cdot \ln \frac{\sqrt{\sum_{k=0}^{n} a_k^2 \rho^{2k}}}{|a_0|}.$$

IV.B - Cas de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{\sqrt{k!}} x^k$

On considère une suite $(a_k)_{k\geqslant 0}$ de variables aléatoires indépendantes, de loi gaussienne de moyenne nulle et de variance 1.

Pour toute fonction g, on définit $Z_{[a,b]}(g)$, élément de $\mathbf{N} \cup \{+\infty\}$, par
$$Z_{[a,b]}(g) = \mathrm{Card}\big\{t \in [a,b] \;\big|\; g(t) = 0\big\}.$$

On sera amené à utiliser dans cette partie la forme faible du théorème de Borel-Cantelli, que l'on rappelle ici : « *Si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements aléatoires, tels que la série $\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(A_n)$ converge, alors* $\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n\geqslant 0} \bigcup_{p\geqslant n} A_p\Big) = 0$ ».

1. Montrer que la série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{\sqrt{k!}} x^k$ est presque sûrement de rayon de convergence $+\infty$.
2. On pose $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{\sqrt{k!}} x^k$ et $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\sqrt{k!}} x^k$. Soit $[a,b]$ un segment.

   Montrer que, presque sûrement, $Z_{[a,b]}(f)$ est finie, f et f' n'ont pas de zéro commun et $Z_{[a,b]}(S_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} Z_{[a,b]}(f)$.
3. Prouver que l'espérance $\mathbb{E}(Z_{[a,b]}(S_n)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(Z_{[a,b]}(f))$ et calculer cette limite en fonction de a et de b.

IV.C - Cas de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$

Ici encore, on considère une suite (a_k) de variables aléatoires indépendantes, de loi gaussienne de moyenne nulle et de variance 1.

Montrer que la série entière $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ est presque sûrement de rayon de convergence 1, et calculer $\mathbb{E}(Z_{[a,b]}(f))$ lorsque $-1 < a < b < 1$.

Corrigé de l'épreuve d'analyse et probabilités

Partie I
Asymptotique du nombre de zéros

1. La fonction $A_n(t)$ est continue sur $[1,+\infty[$ et dominée par $\dfrac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$, donc intégrable sur $[1,+\infty[$. On a $A_n(t) = \dfrac{n^2}{t(t+2n)} = \dfrac{n}{2}\left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+2n}\right)$.
   Donc $\displaystyle\int_1^x A_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{n}{2}\left[\ln\frac{t}{t+2n}\right]_1^x$, qui tend vers $\dfrac{n\ln(2n+1)}{2}$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   Ainsi l'intégrale est bien convergente et $\displaystyle\int_1^{+\infty} A_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{n\ln(2n+1)}{2}\cdot$

2. (a) En multipliant par la quantité conjuguée, on a

$$|\delta_n(t) - A_n(t)| = |\sqrt{A_n^2(t) - B_n^2(t)} - A_n(t)| = \frac{B_n^2(t)}{\sqrt{A_n^2(t) - B_n^2(t)} + A_n(t)} \leqslant \frac{B_n^2(t)}{A_n(t)}\cdot$$

   (b) Par la formule du binôme,

$$\left(1+\frac{t}{n}\right)^{2n+2} - 1 = \sum_{k=1}^{2n+2}\binom{2n+2}{k}\left(\frac{t}{n}\right)^k \geqslant \sum_{k=1}^{2}\binom{2n+2}{k}\left(\frac{t}{n}\right)^k.$$

   Ainsi, $\left(1+\dfrac{t}{n}\right)^{2n+2} - 1 \geqslant \dfrac{2n+2}{n}t + \dfrac{(2n+1)(2n+2)}{n^2}t^2 \geqslant 2t + 2t^2$.
   On obtient ainsi en inversant $\varphi_n(t) \leqslant \dfrac{1}{2t+2t^2}\cdot$

   (c) On a $\varphi_n'(t) = -\dfrac{(2n+2)\left(1+\frac{t}{n}\right)^{2n+1}}{n\left(\left(1+\frac{t}{n}\right)^{2n+2} - 1\right)^2} < 0$. Puis

$$B_n^2(t) = -\varphi_n'(t)\frac{(n+1)^2 n}{(2n+2)\left(1+\frac{t}{n}\right)} = -\varphi_n'(t)\frac{n(n+1)}{2\left(1+\frac{t}{n}\right)}\cdot$$

   De plus, $\dfrac{1}{A_n(t)} = \dfrac{t^2+2nt}{n^2} = \dfrac{2t}{n}\left(1+\dfrac{t}{2n}\right)$ et ainsi

$$|\delta_n(t) - A_n(t)| \leqslant -\frac{2}{n}t\varphi_n'(t)\left(1+\frac{t}{2n}\right)\frac{n(n+1)}{2\left(1+\frac{t}{n}\right)} \leqslant -(n+1)t\varphi_n'(t),$$

   car $\dfrac{\left(1+\frac{t}{2n}\right)}{\left(1+\frac{t}{n}\right)} \leqslant 1$.

(d) À l'aide d'une intégration par parties, on a
$$\int_1^x |\delta_n(t)-A_n(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant -(n+1)\int_1^x t\varphi_n'(t)\,\mathrm{d}t \leqslant (n+1)\left(\int_1^x \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t + \varphi_n(1) - x\varphi_n(x)\right).$$
En utilisant la majoration de la question 2b) pour $\varphi_n(t)$ et $\varphi_n(1)$, on a alors, en laissant tendre x vers $+\infty$,
$$\int_1^{+\infty} |\delta_n(t) - A_n(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant (n+1)\left(\frac{1}{4} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{2t+2t^2}\,\mathrm{d}t\right) \in O(n).$$

(e) On a $\delta_n(t) = A_n(t) + (\delta_n(t) - A_n(t))$ donc $\delta_n(t)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, et
$$\int_1^{+\infty} \delta_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{n\ln(2n+1)}{2} + \int_1^{+\infty} (\delta_n(t) - A_n(t))\,\mathrm{d}t$$
Or $\left|\int_1^{+\infty} (\delta_n(t) - A_n(t))\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_1^{+\infty} \big|(\delta_n(t) - A_n(t))\big|\,\mathrm{d}t \in O(n)$, donc est négligeable devant $\dfrac{n\ln(2n+1)}{2}$. Ainsi,
$$\int_1^{+\infty} \delta_n(t)\,\mathrm{d}t \sim \frac{n\ln(2n+1)}{2} \sim \frac{n\ln n}{2}.$$

3. (a) On a $\left(\left(1+\dfrac{t}{n}\right)^{2n+2} - 1\right)^2 = \dfrac{(2n+2)^2}{n^2}t^2 + o(t^2)$ et $\left(\dfrac{2t}{n} + \dfrac{t^2}{n^2}\right)^2 = \dfrac{4}{n^2}t^2 + o(t^2)$, de sorte que le terme en t^2 dans l'expression de $N_n(t)$ est nul, ainsi $N_n(t) = o(t^2)$.
Par l'unicité du développement limité, la formule de Taylor-Young fournit $N_n(0) = N_n'(0) = N_n''(0) = 0$. La même formule de Taylor-Young donne alors $N_n(t) \in O(t^3)$ au voisinage de 0 (car N_n est $\mathcal{C}^3$).
Par ailleurs, $D_n(t) \sim \dfrac{16(n+1)^2}{n^4}t^4$ et ainsi $\delta_n^2(t) \in O\left(\dfrac{1}{t}\right)$. Comme $\delta_n(t) \in O\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ au voisinage de 0, cette fonction est intégrable en 0.

(b) L'inégalité $\left(1+\dfrac{t}{n}\right)^{2n} \leqslant e^2$ provient par exemple de $\ln(1+x) \leqslant x$.

L'ensemble $\mathcal{B}$ est une sous-algèbre de l'algèbre des suites de fonctions, en vertu des arguments suivants :

- La suite nulle $(g_n = 0)_n$ est dans $\mathcal{B}$ ($M = 0$ convient). Cet argument n'est d'ailleurs pas nécessaire.
- La suite constante $(g_n = 1)_n$ est dans $\mathcal{B}$ ($M = 1$ convient).
- Si $(g_n)_n$ et $(h_n)_n$ sont dans $\mathcal{B}$, associés respectivement aux constantes M_g et M_h, alors $(\lambda g_n)_n$ est dans $\mathcal{B}$ ($|\lambda| M_g$ convient), et $(g_n + h_n)_n$ est dans $\mathcal{B}$ ($M_g + M_h$ convient). Par ailleurs, si $f_n = g_n \times h_n$,
$$|f_n| \leqslant M_g M_h,\ |f_n'| = |g_n' h_n + g_n h_n'| \leqslant 2M_g M_h,\ |f_n''| = |g_n'' h_n + 2g_n' h_n' + g_n h_n''| \leqslant 4M_g M_h$$
$$|f_n'''| = |g_n''' h_n + 3g_n'' h_n' + 3g_n' h_n'' + g_n h_n'''| \leqslant 8M_g M_h.$$
Donc $(f_n)_n$ est dans $\mathcal{B}$.

On vérifie aisément que $\left(t \mapsto \left(1+\dfrac{t}{n}\right)^{2n}\right)_n$, $\left(t \mapsto \left(1+\dfrac{t}{n}\right)\right)_n$ et la suite de fonctions constantes $\left(t \mapsto \dfrac{4(n+1)^2}{n^2}\right)_n$ sont dans $\mathcal{B}$. La structure d'algèbre de $\mathcal{B}$ permet alors de conclure que $(N_n(t))_n$ est dans $\mathcal{B}$.

(c) Considérons M telle que $|N_n'''(t)| \leqslant M$ pour tout n et tout t. Par l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 en 0, on a pour tout $t \in [0, 1]$,

$$|N_n(t)| \leqslant \frac{Mt^3}{6}.$$

Par ailleurs, on peut minorer $D_n(t)$ par le premier terme de la formule du binôme pour obtenir

$$D_n(t) \geqslant \frac{16(n+1)^2}{n^4} t^4.$$

Donc $\delta_n^2(t) \leqslant \dfrac{Mn^4}{96(n+1)^2\, t}$ et $\displaystyle\int_0^1 \delta_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{\frac{M}{96}} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \times \frac{n^2}{n+1} \in O(n)$.

4. (a) Comme $t > 1$, l'inégalité demandée est équivalente à $\dfrac{t^{2n+2}-1}{t^2-1} \geqslant (n+1)t^n$. On a

$$\frac{t^{2n+2}-1}{t^2-1} = \sum_{k=0}^{n} t^{2k} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(t^{2k} + t^{2n-2k}).$$

On a $(t^{2k} + t^{2n-2k}) = t^n(t^{2k-n} + \dfrac{1}{t^{2k-n}}) \geqslant 2t^n$ d'après l'inégalité fournie par l'énoncé.

En sommant, $\displaystyle\frac{t^{2n+2}-1}{t^2-1} \geqslant \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} 2t^n = (n+1)t^n$.

(b) Le changement de variable $t = 1 + \dfrac{x}{n}$ envoie le domaine $]1, +\infty[$ dans le domaine $]0, +\infty[$. On retrouve l'expression de $\delta_n(x)$ et $E_n = \displaystyle\frac{4}{n\pi}\int_0^{+\infty} \delta_n(x)\,\mathrm{d}x$. Comme $\displaystyle\int_0^1 \delta_n(x)\,\mathrm{d}x \in O(n)$, ce terme est négligeable devant $\displaystyle\int_1^{+\infty} \delta_n(x)\,\mathrm{d}x$, et ainsi

$$E_n \sim \frac{2}{\pi}\ln n.$$

Partie II
Balayages orthogonaux sur la sphère

II.A - Une mesure invariante sur la sphère

1. Lorsque K est un convexe contenant 0, alors le cône engendré par $S^{n-1} \cap K$ est inclus dans K, et donc de mesure de Lebesgue plus petite que celle de K. Ainsi,

$$\lambda_S\big(S^{n-1} \cap ([-h, h] \times [-1, 1]^{n-1})\big) \leqslant \frac{\lambda_n([-h, h] \times [-1, 1]^{n-1})}{\lambda_n(B^n)} \leqslant \frac{2^n h}{\lambda_n(B^n)}.$$

2. Si C est le cône engendré par A et C' est le cône engendré par $r(A)$, alors on a clairement $C' = r(C)$ par la linéarité de r. Donc $\lambda_n(C') = \lambda_n(r(C)) = \lambda_n(C)$ car r est une isométrie.

3. La rotation de matrice

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & & & \\ -\sin\theta & \cos\theta & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

envoie $Q_{\theta,\theta+\theta'}$ dans $Q_{0,\theta'}$.
Comme λ_S est invariante par rotation, on a $\lambda_S(Q_{\theta,\theta+\theta'}) = \lambda_S(Q_{0,\theta'})$. Or

$$\lambda_S(Q_{0,\theta+\theta'}) = \lambda_S(Q_{0,\theta}) + \lambda_S(Q_{\theta,\theta+\theta'}) - \lambda_S(Q_{\theta,\theta}).$$

Mais $Q_{\theta,\theta}$ est inclus dans un hyperplan, donc il en est de même de son cône engendré, et donc $\lambda_S(Q_{\theta,\theta}) = 0$. Ce qui conduit à la formule souhaitée.

La fonction $f(\theta) : [0, 2\pi] \mapsto [0,1]$ définie par $f(\theta) = \lambda_S(Q_{0,\theta})$ est donc croissante, vérifie $f(0) = 0$ et $f(2\pi) = 1$, et $f(\theta+\theta') = f(\theta) + f(\theta')$ lorsque $\theta + \theta' \leqslant 2\pi$. On en déduit successivement que
• $f\left(\dfrac{2\pi}{q}\right) = \dfrac{1}{q}$ pour tout entier $q \geqslant 1$,
• $f(2\pi r) = r$ pour tout rationnel $r \in [0,1]$.
Comme f est croissante, pour tout $x \in [0,1]$ et $q \in \mathbf{N}^*$ on a

$$\frac{\lfloor qx \rfloor}{q} \leqslant f(2\pi x) \leqslant \frac{\lfloor qx \rfloor + 1}{q}$$

et on obtient $f(2\pi x) = x$ en laissant tendre q vers $+\infty$. Il vient alors

$$\lambda_S(Q_{\alpha,\beta}) = \lambda_S(Q_{0,\beta-\alpha}) = \frac{\beta-\alpha}{2\pi}.$$

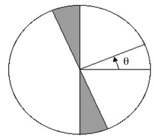
4. Remarquons tout d'abord que $L(ab) \in [0,\pi]$, et que $L(ab) \neq 0$ si $a \neq b$. On a

$$||b-a||^2 = ||b||^2 + ||a||^2 - 2\langle a, b\rangle = 2 - 2\cos L(ab) = 4\sin^2\frac{L(ab)}{2}.$$

On a donc $||b-a|| = u(L(ab))$ avec $u(x) = 2\sin\dfrac{x}{2}$ (le signe est positif car $L(ab) \in [0,\pi]$).
Ainsi, lorsque x tend vers 0^+, $u(x) \sim x$ et $u(x) - x \sim -\dfrac{x^3}{24}$.
On en déduit que $\dfrac{u(x)-x}{u(x)^2} \to 0$. Par ailleurs, comme $u(x)$ ne s'annule pas sur $]0,\pi]$, la fonction $x \mapsto \dfrac{u(x)-x}{u(x)^2}$ est continue et prolongeable par continuité en 0. Elle est donc bornée par une constante K. On a alors $|u(x) - x| \leqslant K u^2(x)$, d'où

$$||b-a|| - K||b-a||^2 \leqslant L(ab) \leqslant ||b-a|| + K||b-a||^2.$$

5. Soit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S^{n-1}$. On a $\langle x, a\rangle\langle x, b\rangle = x_1(x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta)$. Ainsi, ce produit est négatif lorsque x est dans le domaine grisé :



soit lorsque $x \in Q_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}+\theta} \cup Q_{-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}+\theta}$. Comme l'intersection de ces deux quartiers de sphère est incluse dans l'hyperplan $x_1 = 0$, elle est de mesure nulle et

$$\lambda_S\left(Q_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}+\theta} \cup Q_{-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}+\theta}\right) = \frac{\theta}{2\pi} + \frac{\theta}{2\pi} = \frac{\theta}{\pi} = \frac{L(ab)}{\pi}.$$

Dans le cas général, on considère une rotation r qui envoie sur la base canonique une base orthonormée dont les deux premiers vecteurs sont (a, b'), où b' est tel que b est dans l'espace vectoriel engendré par (a, b'). Il existe une telle rotation car $n \geqslant 3$. On a alors

$$\{x \in S^{n-1}, \langle x, a\rangle\langle x, b\rangle \leqslant 0\} = \{x \in S^{n-1}, \langle r(x), r(a)\rangle\langle r(x), r(b)\rangle \leqslant 0\}.$$

Par invariance par rotation,

$$\begin{aligned}
\lambda_S(\{x \in S^{n-1}, \langle x, a\rangle\langle x, b\rangle \leqslant 0\}) &= \lambda_S\big(\{x \in S^{n-1}, \langle x, r(a)\rangle\langle x, r(b)\rangle \leqslant 0\}\big) \\
&= \frac{L\big(r(a)r(b)\big)}{\pi} \\
&= \frac{L(ab)}{\pi}.
\end{aligned}$$

II.B - Balayages orthogonaux

1. (a) Si $\langle a, \gamma(t)\rangle = 0$ ou $\langle a, \gamma(t+h)\rangle = 0$, alors on a bien $N_{[t,t+h]} \geqslant 1$. Sinon, $\langle a, \gamma(t)\rangle$ et $\langle a, \gamma(t+h)\rangle$ sont de signes contraires. Le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction $x \mapsto \langle a, \gamma(x)\rangle$ entre t et $t+h$ assure l'existence de $c \in [t, t+h]$ tel que $\langle a, \gamma(c)\rangle = 0$. On a alors bien $N_{[t,t+h]} \geqslant 1$.

   (b) Soit $\varphi(x) = \langle a, \gamma(x)\rangle$. La fonction φ est dérivable et $\varphi'(x) = \langle a, \gamma'(x)\rangle$.
   Si $N_{[t,t+h]}(a) \geqslant 2$, alors il existe $x_1 < x_2 \in [t, t+h]$ tels que $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$. Le théorème de Rolle assure alors qu'il existe $c \in]x_1, x_2[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Ainsi $a \perp \gamma'(c)$.
   L'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit $|\varphi'(x)| \leqslant ||\gamma'(x)||$ et $|\varphi''(x)| \leqslant ||\gamma''(x)||$, et le théorème des accroissements finis permet d'écrire successivement

$$\forall x \in [t, t+h], |\varphi'(x)| \leqslant ||\gamma''||.|x - c| \leqslant ||\gamma''||h$$

$$|\langle a, \gamma(t)\rangle| = |\varphi(t)| = |\varphi(t) - \varphi(x_1)| \leqslant ||\gamma''||.h.|t - x_1| \leqslant ||\gamma''||h^2.$$

   (c) En reprenant les notations précédentes, supposons sans perte de généralité que $\varphi(t) > 0$. La fonction $\varphi(t)$ s'annule en un point x_1 et atteint donc son minimum en un point c différent des extrémités du segment. En ce point on a donc $\varphi'(c) = 0$ et on conclut de la même façon qu'à la question précédente.

2. (a) Soient l'ensemble $F = \{a \in S^{n-1} \ / \ |\langle a, \gamma(t)\rangle| \leqslant ||\gamma''||_\infty h^2\}$, et l'ensemble $G = \{a \in S^{n-1} \ / \ \langle a, \gamma(t)\rangle\langle a, \gamma(t+h)\rangle \leqslant 0\}$.

On sait par II.A.5 que $\lambda_S(G) = \dfrac{L(\gamma(t)\gamma(t+h))}{\pi}\cdot$ Vérifions que la différence symétrique entre les ensembles G et $N^{-1}_{[t,t+h]}(1)$ est incluse dans F.

Si $a \in N^{-1}_{[t,t+h]}(1)\backslash G$, alors par 1c), $a \in F$. Donc $\lambda_S(N^{-1}_{[t,t+h]}(1)) \leqslant \lambda_S(G) + \lambda_S(F)$.
Si $a \in G\backslash N^{-1}_{[t,t+h]}(1)$, alors par 1a), $N_{[t,t+h]} \geqslant 2$ et par 1b), $a \in F$. Ainsi

$$\lambda_S(G) \leqslant \lambda_S(N^{-1}_{[t,t+h]}(1)) + \lambda_S(F)$$

et donc $|\lambda_S(G) - \lambda_S(N^{-1}_{[t,t+h]}(1))| \leqslant \lambda_S(F)$. Par ailleurs, la question II.A.1 fournit, à rotation près, l'inégalité $\lambda_S(F) \leqslant \dfrac{2^n h^2 ||\gamma''||_\infty}{\lambda_n(B_n)} = Ch^2$.
Pour l'écart ii), on sait par hypothèse que si $k > M$, alors $\lambda_S(N^{-1}(k)) = 0$. Par 1b), si $2 \leqslant k \leqslant M$, $\lambda_S(N^{-1}(k)) \leqslant \lambda_S(F) \leqslant Ch^2$.
Donc $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} k\lambda_S(N^{-1}(k)) \leqslant (M-1)MCh^2 \leqslant M^2Ch^2$ et

$$\left|\mathcal{A}_{[t,t+h]} - \lambda_S(N^{-1}(1))\right| \leqslant M^2Ch^2.$$

De plus, d'après II.A.4, $\left|\dfrac{L(\gamma(t)\gamma(t+h))}{\pi} - \dfrac{||\gamma(t)-\gamma(t+h)||}{\pi}\right| \leqslant Kh^2$. Il vient donc

$$\left|\mathcal{A}_{[t,t+h]} - \frac{||\gamma(t)-\gamma(t+h)||}{\pi}\right| \leqslant (M^2C + C + K)h^2.$$

(b) Si J est un intervalle point, $J = [t,t]$, alors $N_J^{-1}(k) = \emptyset$ si $k \geqslant 2$ et

$$N_J^{-1}(1) = \{a / a \perp \gamma(t)\}.$$

Ce dernier ensemble, ainsi que son cône engendré, est inclus dans un hyperplan de mesure nulle, donc $\mathcal{A}_J = 0$.
On en déduit ainsi que si $t < t' < t''$, alors $\mathcal{A}_{[t,t'']} = \mathcal{A}_{[t,t']} + \mathcal{A}_{[t',t'']}$.
Considérons alors $u(x) = \mathcal{A}_{[t_0,x]}$, où t_0 est la borne inférieure de I. D'après la question précédente, on a

$$\frac{1}{h}\left|u(x+h) - u(x) - \frac{||\gamma(x)-\gamma(x+h)||}{\pi}\right| \leqslant (M^2C + C + K)h$$

Donc, en passant à la limite lorsque h tend vers 0^+, u est dérivable à droite en x et sa dérivée à droite vaut $\dfrac{||\gamma'(t)||}{\pi}$. On obtient de même que u est dérivable à gauche. Il ne reste plus qu'à intégrer pour obtenir $\mathcal{A}_I$.

Partie III
Le nombre moyen de zéros d'un polynôme.

III.A - Coefficients de même loi gaussienne.

1. On a $\mathbb{P}\left(\frac{a}{||a||} \in A\right) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} \mathrm{e}^{-\frac{||x||^2}{2}} \mathbf{1}_{\frac{x}{||x||} \in A} \mathrm{d}\lambda_n(x)$. Effectuons dans cette intégrale le changement de variable bijectif $x = r(u)$. On a alors :
$$\mathbb{P}\left(\frac{a}{||a||} \in A\right) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} \mathrm{e}^{-\frac{||r(u)||^2}{2}} \mathbf{1}_{\frac{r(u)}{||r(u)||} \in A} |\det r| \mathrm{d}\lambda_n(u)$$
Mais, comme r est une isométrie, on a
$$\mathbb{P}\left(\frac{a}{||a||} \in A\right) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-\frac{||u||^2}{2}} \mathbf{1}_{\frac{u}{||u||} \in r^{-1}(A)} \mathrm{d}\lambda_n(u) = \mathbb{P}\left(\frac{a}{||a||} \in r^{-1}(A)\right).$$

2. Supposons tout d'abord que I est un segment. Fixons $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, non nul (ce qui est presque sûrement le cas). Le nombre de zéros de la fonction f associée est le cardinal de
$$\{t \in I \,/\, a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + \cdots + a_n f_n(t) = 0\} = \{t \in I \,/\, \frac{a}{||a||} \perp \gamma(t)\}$$
Il s'agit donc bien de $N_I\left(\frac{a}{||a||}\right)$. Ainsi le nombre moyen de zéros dans l'intervalle I est l'espérance de $N_I\left(\frac{a}{||a||}\right)$. Comme la loi de $\frac{a}{||a||}$ est λ_S, on retrouve l'expression de $\mathcal{A}_I$. On a alors
$$\mathcal{A}_I = \frac{1}{\pi} \int_I ||\gamma'(t)|| \,\mathrm{d}t$$
puisque $\gamma(t)$ est, comme $v(t)$, de classe $\mathcal{C}^2$.

Pour conclure au cas où I n'est plus un segment, on écrit I comme la limite croissante d'une suite de segments I_p. Ainsi $N_I\left(\frac{a}{||a||}\right)$ est la limite croissante de $N_{I_p}\left(\frac{a}{||a||}\right)$, et le résultat $\mathcal{A}_{I_p} \to \mathcal{A}_I$ s'obtient par le théorème de convergence monotone.

3. Écrivons $v(t) = u(t)\gamma(t)$, où $u(t) = ||v(t)||$, et $\gamma(t) \in S^{n-1}$.
La fonction $u : t \mapsto \sqrt{\langle v(t), v(t) \rangle}$ est $\mathcal{C}^2$. On a alors
$$\begin{aligned} \varphi(x,y) &= \ln u(x) + \ln u(y) + \ln\langle \gamma(x), \gamma(y) \rangle \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) &= \frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{\langle \gamma'(x), \gamma(y) \rangle}{\langle \gamma(x), \gamma(y) \rangle} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{\langle \gamma'(x), \gamma'(y) \rangle}{\langle \gamma(x), \gamma(y) \rangle} - \frac{\langle \gamma'(x), \gamma(y) \rangle \langle \gamma(x), \gamma'(y) \rangle}{\langle \gamma(x), \gamma(y) \rangle^2} \end{aligned}$$
Enfin, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(t,t) = \frac{||\gamma'(t)||^2}{||\gamma(t)||^2} - \frac{\langle \gamma'(t), \gamma(t) \rangle^2}{||\gamma(t)||^4}$. Mais comme $\gamma(t) \perp \gamma'(t)$ et que $||\gamma(t)|| = 1$, il reste
$$||\gamma'(t)||^2 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(t,t) \cdot$$

4. Les fonctions $(1, t, \ldots, t^n)$ forment bien un système libre de fonctions $\mathcal{C}^2$ qui ne s'annulent pas simultanément. La majoration de N_I par n est effective par le fait qu'un polynôme non nul (c'est presque sûrement le cas) admet au plus n zéros. Donc le nombre moyen de zéros réels du polynôme P dans un intervalle quelconque I est

$$\frac{1}{\pi}\int_I ||\gamma'(t)||\,\mathrm{d}t.$$

Dans le cas présent, $\varphi(x,y) = \ln(1 + xy + x^2y^2 + \cdots + x^ny^n) = \ln\left(\frac{1-(xy)^{n+1}}{1-xy}\right)$, en supposant que $xy \neq 1$. On a alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) &= \frac{-(n+1)y^{n+1}x^n}{1-(xy)^{n+1}} + \frac{y}{1-xy} \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}(x,y) &= \frac{(n+1)^2x^ny^n((xy)^{n+1}-1) - (n+1)y^{n+1}x^n(n+1)x^{n+1}y^n}{(1-(xy)^{n+1})^2} + \frac{1}{(1-xy)^2}. \end{aligned}$$

On obtient alors, lorsque $t^2 \neq 1$, $||\gamma'(t)||^2 = \frac{1}{(t^2-1)^2} - \frac{(n+1)^2t^{2n}}{(t^{2n+2}-1)^2}$. Si l'intervalle I ne contient pas ± 1, le nombre moyen de zéros de P sur I est

$$\frac{1}{\pi}\int_I \sqrt{\frac{1}{(t^2-1)^2} - \frac{(n+1)^2t^{2n}}{(t^{2n+2}-1)^2}}\,\mathrm{d}t.$$

La parité de $||\gamma'(t)||$ et le changement de variable $t \mapsto \frac{1}{t}$ prouvent que les intégrales sur les domaines $]-\infty,-1[$, $]-1,0[$, $]0,1[$, $]1,+\infty[$ sont égales, et donc que

$$\int_{\mathbf{R}} ||\gamma'(t)||\,\mathrm{d}t = 4\int_1^{+\infty} ||\gamma'(t)||\,\mathrm{d}t = E_n.$$

III.B - Une classe de polynômes circulaires

1. (a) La linéarité de L_θ est évidente de E dans $\mathbf{R}[X,Y]$. Le fait que Im $L_\theta \subset E$ se vérifie sur la base canonique (X^kY^{n-k}) :

$$L_\theta(X^kY^{n-k}) = (\cos\theta X + \sin\theta Y)^k(-\sin\theta X + \cos\theta Y)^{n-k}$$

qui est bien homogène de degré n en X et Y.
Il est clair que $L_\theta \circ L_{\theta'} = L_{\theta+\theta'}$. Notamment, les deux applications commutent.

(b) Fixons θ et P. On a pour $h \neq 0$, $\frac{L_{\theta+h}(P) - L_\theta(P)}{h} = \frac{(L_h - L_0)(L_\theta(P))}{h}$.
Pour tout polynôme X^kY^{n-k}, considérons

$$f(h) = L_h(X^kY^{n-k}) = (\cos(h)X + \sin(h)Y)^k(-\sin(h)X + \cos(h)Y)^{n-k}.$$

La dérivée de f en 0 est

$$f'(0) = kX^{k-1}Y^{n+1-k} - (n-k)X^{k+1}Y^{n-(k+1)} = A.X^kY^{n-k},$$

la formule étant valable aussi pour $k = 0$ et $k = n$. Par linéarité, pour tout polynôme P, on a

$$\frac{(L_h - L_0)(P)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} A.P.$$

En particulier,

$$\frac{\partial(L_\theta(P))}{\partial\theta} = \lim_{h\to 0}\frac{L_{\theta+h}(P) - L_\theta(P)}{h} = A.L_\theta(P).$$

(c) Considérons des réels $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ positifs et $D = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$. On a alors

$$DAD^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1.\frac{\lambda_0}{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ -n.\frac{\lambda_1}{\lambda_0} & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & -(n-1).\frac{\lambda_2}{\lambda_1} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n.\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \\ 0 & \cdots & 0 & -1.\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, DAD^{-1} est antisymétrique si et seulement si

$$\text{pour tout } k \leqslant n-1, (n-k)\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} = (k+1)\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}, \text{ soit encore } \lambda_{k+1}^2 = \lambda_k^2\frac{k+1}{n-k}.$$

Avec la condition $\lambda_k > 0$ et $\lambda_0 = 1$, on obtient

$$\lambda_k^2 = \lambda_0^2\frac{1\times 2\times\cdots\times k}{n\times(n-1)\times\cdots\times(n-(k-1))} = \binom{n}{k}^{-1}.$$

La matrice D qui convient est alors $D = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\binom{n}{0}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/\sqrt{\binom{n}{n}} \end{pmatrix}$

(d) Fixons P, et considérons $f(\theta) = L_\theta(P)$. On a $f(0) = P$ et $f'(\theta) = A.f(\theta)$. On en déduit que $f(\theta) = \exp(\theta A).P$, soit encore $L_\theta(P) = \exp(\theta A)P$. Ainsi

$$DL_\theta(P) = D\exp(\theta A)D^{-1}DP = \exp(\theta DAD^{-1})DP = Q(\theta)DP$$

où $Q(\theta) = \exp(\theta DAD^{-1})$ est bien orthogonale puisque DAD^{-1} est antisymétrique (c'est même une rotation puisque l'exponentielle des matrices réelles est à valeurs dans $GL_n^+(\mathbf{R})$).

2. (a) Soit B un borélien de E. $\mathbb{P}(L_\theta(P) \in B) = \mathbb{P}(DL_\theta(P) \in DB) = \mathbb{P}(DP \in Q(\theta)^{-1}DB)$. Or la variable $DP = \left(a_0\binom{n}{0}^{-1/2}, \dots, a_n\binom{n}{n}^{-1/2}\right)$ suit une loi gaussienne centrée invariante par rotation, et donc

$$\mathbb{P}(L_\theta(P) \in B) = \mathbb{P}(DP \in Q(\theta)^{-1}DB) = \mathbb{P}(DP \in DB) = \mathbb{P}(P \in B).$$

Donc les variables $L_\theta(P)$ et P ont même loi.

(b) On pose $\alpha_k = a_k \binom{n}{k}^{-1/2}$. Les α_k suivent une loi gaussienne centrée de variance 1, et le nombre de zéros de $P = \sum_k a_k X^k$ est le même que le nombre de zéros de la fonction $t \mapsto \sum_k \alpha_k \binom{n}{k}^{1/2} t^k$. On utilise alors la formule III.A.2 avec

$$v(t) = \left(\binom{n}{0}^{1/2} t^0, \dots, \binom{n}{k}^{1/2} t^k, \dots, \binom{n}{n}^{1/2} t^n\right).$$

On a, avec les notations de III.A.3,

$$\varphi(x, y) = \ln \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^k = \ln(1 + xy)^n = n \ln(1 + xy).$$

On obtient alors $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = \dfrac{ny}{1 + xy}$ et $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x, y) = \dfrac{n(1 + xy) - nxy}{(1 + xy)^2}$, ce qui conduit à

$$||\gamma'(t)|| = \frac{\sqrt{n}}{1 + t^2}.$$

Ainsi, le nombre de zéros de P dans l'intervalle $]a, b[$ est

$$\frac{\sqrt{n}}{\pi} \int_a^b \frac{1}{1 + t^2} \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{n}}{\pi} (\operatorname{Arc} \tan b - \operatorname{Arc} \tan a).$$

En particulier, si $]a, b[= \mathbf{R}$, le nombre moyen de zéros sur $\mathbf{R}$ est $\sqrt{n}$, ce qui est sensiblement différent des $\dfrac{2}{\pi} \ln n$ du cas précédent.

Partie IV
Quelques résultats sur les séries aléatoires

IV.A - Majoration du nombre de racines d'un polynôme.

1. (a) On peut raisonner sur les coefficients de Q, mais aussi remarquer qu'on a la formule de Parseval :

$$||Q||^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(\mathrm{e}^{i\theta}) \overline{Q(\mathrm{e}^{i\theta})} \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |Q(\mathrm{e}^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta.$$

Or, $|\mathrm{e}^{i\theta} + z| = |1 + \mathrm{e}^{-i\theta} z| = |1 + \mathrm{e}^{i\theta} \overline{z}|$, donc

$$\left|\big((X + z)Q(X)\big)(\mathrm{e}^{i\theta})\right| = \left|\big((1 + X\overline{z})Q(X)\big)(\mathrm{e}^{i\theta})\right|.$$

En s'intégrant, cette égalité donne bien $||(X + z)Q(X)|| = ||(\overline{z}X + 1)Q(X)||$.

(b) Si $|z| > 1$, alors $-z$ est racine de $(X + z)Q(X)$ et $-\dfrac{1}{z}$ est racine de $(\overline{z}X + 1)Q(X)$. Donc on a

$$M((X + z)Q(X)) = M((\overline{z}X + 1)Q(X))$$

puisque la perte de la racine $(-z)$ est compensée par le produit du coefficient dominant par $\overline{z}$. On peut alors montrer l'inégalité demandée par récurrence sur le nombre de racines de module supérieur à 1. L'initialisation dans le cas où toutes les racines sont de module $\leqslant 1$ est triviale, puisqu'on a alors $M^2(P) = |a_n|^2 \leqslant ||P||^2$.

2. Considérons le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et soit $\rho > 1$. Soit Z le nombre de racines de module supérieur à ρ. On a

$$|a_n|\rho^Z \leqslant M(P) \leqslant ||P|| \text{ et donc } Z \leqslant \frac{\ln \frac{||P||}{|a_n|}}{\ln \rho}.$$

Maintenant, prenons $\rho \in]0,1[$. Les racines de P de module $\leqslant \rho$ sont exactement les inverses des racines de

$$X^n P\left(\frac{1}{X}\right) = a_n + a_{n-1}X + \cdots + a_0 X^n$$

de module $\geqslant \frac{1}{\rho}\cdot$ Il y en a donc moins de $\frac{1}{\ln \frac{1}{\rho}} \cdot \ln \frac{\sqrt{\sum_{k=0}^{n} a_k^2}}{|a_0|}\cdot$

Enfin, si on pose $Q(X) = P(\rho X)$, il y a autant de racines de Q de module inférieur à ρ que de racines de P de module inférieur à ρ^2, soit moins de $\frac{1}{\ln \frac{1}{\rho}} \cdot \ln \frac{\sqrt{\sum_{k=0}^{n} a_k^2 \rho^{2k}}}{|a_0|}\cdot$

IV.B - Cas de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{\sqrt{k!}} x^k$

1. Considérons l'événement $|a_k| \geqslant k$. Pour $k \geqslant 2$, on a

$$\mathbb{P}(|a_k| \geqslant k) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_k^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_k^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{e}^{-k}$$

en utilisant le fait que $\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \leqslant 1$. Par le lemme de Borel-Cantelli, on a presque sûrement $|a_k| \leqslant k$ pour tout k assez grand. Comme la série $\sum \frac{k}{\sqrt{k!}} x^k$ converge pour tout x réel (par la règle de D'Alembert par exemple), il en est de même de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{\sqrt{k!}} x^k$.

2. D'après le théorème des zéros isolés, $Z_{[a,b]}(f)$ est finie dès que les a_k sont non tous nuls, ce qui est vrai presque sûrement.

   Fixons $(a_1, a_2, \dots)$. On a alors défini f' qui admet un nombre fini de zéros $z_1, z_2, \dots, z_p$ sur $[a,b]$. Posons $g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{\sqrt{k!}} x^k$. Alors $f(z_j) = 0$ si et seulement si $a_0 = -g(z_k)$, ce qui arrive avec une probabilité nulle. Ainsi, $(a_1, a_2, \dots)$ étant fixés, la probabilité que f et f' aient un zéro commun est nulle. Le théorème de Fubini permet alors de conclure que la probabilité que f et f' aient un zéro commun est nulle.

Maintenant, fixons $(a_k)_{k\geqslant 0}$ tels que f et f' n'aient pas de zéro commun, que $f(a)$ et $f(b)$ soient non nuls, et que la série entière définissant f soit de rayon $+\infty$. Ces conditions sont presque sûrement réalisées. La théorie des séries entières assure alors que S_n converge uniformément vers f et que S'_n converge uniformément vers f'.

Soient $a < z_1 < z_2 < \cdots < z_p < b$ les zéros de f dans $[a, b]$. Soit ε tel que les intervalles $[z_k - \varepsilon, z_k + \varepsilon]$ ne contiennent pas de zéros de f'. On pose

- $\alpha = \inf |f(t)|$ pour $t \in [a, b]$ privé des intervalles $]z_k - \varepsilon, z_k + \varepsilon[$.
- $\beta = \inf |f'(t)|$ pour t parcourant les segments $[z_k - \varepsilon, z_k + \varepsilon]$.

Par un argument simple de compacité, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

Pour n assez grand, $||S_n - f|| \leqslant \dfrac{\alpha}{2}$ et donc S_n n'admet pas de zéros en dehors des intervalles $[z_k - \varepsilon, z_k + \varepsilon]$. Pour n assez grand, $||S'_n - f'|| \leqslant \dfrac{\beta}{2}$, donc S'_n n'admet pas de zéros dans ces intervalles. Ainsi, S_n est strictement monotone sur ces segments et admet au plus un zéro dans ces intervalles.

Or, si $||S_n - f|| \leqslant \dfrac{\alpha}{2}$, le signe de S_n et de f est le même en $z_k - \varepsilon$ et en $z_k + \varepsilon$. Comme f' ne s'annule pas sur $[z_k - \varepsilon, z_k + \varepsilon]$, f y est strictement monotone et donc change de signe. Il en est donc de même pour S_n, qui admet au moins un zéro sur $[z_k - \varepsilon, z_k + \varepsilon]$

En conclusion, pour n assez grand, $Z_{[a,b]}(S_n) = Z_{[a,b]}(f)$ (presque sûrement).

3. Pour passer de la convergence simple à l'espérance, on se place dans les hypothèses du théorème de convergence dominée. On considère $M > 0$ tel que $[a, b] \subset [-M, M]$ et on va construire une majoration de $Z_{[-M,M]}(S_n)$ par une variable aléatoire intégrable ne dépendant pas de n.

   Le nombre de racines de $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\sqrt{k!}} X^k$ réelles et de module inférieur à M est plus petit que le nombre de racines complexes de $S_n(2MX)$ de module inférieur à $\dfrac{1}{2}$. D'après la question IV.A.2, ce nombre est inférieur à

$$\frac{1}{\ln\sqrt{2}} \cdot \ln \frac{\sqrt{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k^2}{k!} \frac{(2M)^{2k}}{2^k}}}{|a_0|}.$$

   Ainsi, sous réserve de définition, $Z_{[-M,M]}(S_n)$ est majoré par

$$Y = \frac{1}{\ln\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} \ln \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k^2}{k!} (2M^2)^k \right) - \ln|a_0| \right).$$

   Comme presque sûrement $a_0 \neq 0$ et $|a_k| \leqslant k$ pour k assez grand, la variable Y est définie. Reste à prouver qu'elle est intégrable :

   - La variable $-\ln|a_0|$ est intégrable, puisque l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} -\ln|t| \mathrm{e}^{-t^2/2}\, \mathrm{d}t$ converge.
   - Posons $W = \ln\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k^2}{k!}(2M^2)^k\right)$. Si $W < 0$, alors $W \geqslant \ln|a_0|$, donc $W^- = -\min(W, 0)$ est intégrable.

Par ailleurs, si $W \geqslant 0$, alors par l'inégalité $\ln(x) \leqslant x$ on a $W^+ \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k^2}{k!}(2M^2)^k$. Or, comme l'espérance de a_k^2 est égale à 1, la série $\sum \mathbb{E}\left(\frac{a_k^2}{k!}(2M^2)^k\right)$ converge. Comme L^1 est complet, la variable aléatoire $\sum \frac{a_k^2}{k!}(2M^2)^k$ est intégrable.
Il en est donc de même de W^+.
Au final, la variable aléatoire Y est intégrable. Le théorème de convergence dominée permet alors d'affirmer que $\mathbb{E}(Z_{[a,b]}(S_n)) \to \mathbb{E}(Z_{[a,b]}(f))$.

D'après la question III.A, $\mathbb{E}(Z_{[a,b]}(S_n)) = \frac{1}{\pi}\int_a^b ||\gamma_n'(t)||\,\mathrm{d}t$, où $\gamma_n(t)$ est la projection sur S^n de $v_n(t) = \left(1, \frac{t}{\sqrt{1\,!}}, \dots, \frac{t^n}{\sqrt{n\,!}}\right)$. On a, avec les notations de III.A,

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y) &= \ln \sum_{k=0}^{n} \frac{(xy)^k}{k\,!} \\
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(xy)^k}{k\,!} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(xy)^k}{k\,!} + xy \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(xy)^k}{k\,!} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(xy)^k}{k\,!} - xy \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(xy)^k}{k\,!} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(xy)^k}{k\,!}}{\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(xy)^k}{k\,!} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(xy)^k}{k\,!}\right)^2} \\
||\gamma_n'(t)||^2 &= \frac{f_{n-1}(t) f_n(t) + t^2 f_{n-2}(t) f_n(t) - t^2 f_{n-1}^2(t)}{f_n^2(t)}
\end{aligned}$$

où $f_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^{2k}}{k\,!}$. Comme $f_n(t)$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers e^{t^2}, $||\gamma_n'(t)||^2$ converge uniformément vers 1. D'où

$$\mathbb{E}(Z_{[a,b]}(f)) = \frac{b-a}{\pi}.$$

IV.C - Cas de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$.

De même qu'en IV.B.1, on vérifie que presque sûrement, $\frac{1}{k^2} \leqslant |a_k| \leqslant k^2$ pour k assez grand, et ainsi le rayon de la série est presque sûrement 1.

Le fait que f et f' ont presque sûrement un nombre fini de zéros et aucun zéro commun se prouve de la même façon qu'en IV.B, ainsi que la convergence presque sûre de $Z_{[a,b]}(S_n)$ vers $Z_{[a,b]}(f)$.

Si $[a,b] \subset [-\rho^2, \rho^2]$, la majoration $Z_{[a,b]}(S_n) \leqslant \frac{1}{\ln \frac{1}{\rho}} \cdot \ln \frac{\sqrt{\sum_{k=0}^{n} a_k^2 \rho^{2k}}}{|a_0|}$ permet d'utiliser la convergence dominée.

La convergence dans L^1 de $\sum_k a_k^2 \rho^{2k}$ provient des mêmes arguments que tout à l'heure. On a alors

$$\mathbb{E}\big(Z_{[a,b]}(S_n)\big) = \frac{4}{\pi} \int_a^b \sqrt{\frac{1}{(1-t^2)^2} - \frac{(n+1)^2 t^{2n}}{(1-t^{2n+2})^2}}\, \mathrm{d}t$$

qui tend par convergence dominée – l'intégrande étant majoré par $\sqrt{\dfrac{1}{(1-t^2)^2}}$ – vers

$$\mathbb{E}\big(Z_{[a,b]}(f)\big) = \frac{4}{\pi} \int_a^b \frac{1}{1-t^2}\, \mathrm{d}t = \frac{4}{\pi}(\operatorname{argth} b - \operatorname{argth} a).$$

Références

[1] Edelman A, Kostlan E. *How many zeros of a random polynomial are real ?*, Bull. Am. Math. Soc. 32 (1995), pp 1-37.

[2] Kac M, *On the average number of real roots of a random algebraic equation*, Bull. Am. Math. Soc. 49 (1943), pp 314-320.

[3] Kac M, *On the average number of real roots of a random algebraic equation (II)*, Bull. Am. Math. Soc. 50 (1949), pp 390-408.

[4] Mignotte M., *Mathématiques pour le calcul formel*, PUF, 1989

Rapport des correcteurs

Le problème portait sur une réponse apportée dans les années 40 au problème suivant : déterminer l'espérance du nombre de racines réelles d'un polynôme aléatoire dont les coefficients suivent des lois gaussiennes indépendantes. La partie III déterminait cette espérance comme l'aire d'une portion de la sphère S^n parcourue par un "équateur" mobile. La partie II reliait cette dernière quantité à la longueur d'une courbe tracée sur la sphère, et la partie I était dévolue à l'obtention d'un équivalent du nombre de zéros réels d'un polynôme aléatoire de degré n.

Le sujet avait l'ambition de proposer une vaste couverture du programme d'analyse. Il était certes long, mais a été presque terminé par quatre candidats remarquables.

La première partie du problème ne posait pas de problème de compréhension, mais nécessitait une certaine solidité technique sur les outils de calcul du premier cycle. La plupart des admissibles ont pu y exprimer leurs qualités mathématiques. Citons quelques points que les correcteurs ont noté :

- Dans la question 2, l'utilisation de la quantité conjuguée pour contrôler l'écart entre deux racines carrées n'apparait que dans un faible nombre de copies.
- Il y avait plusieurs inégalités globales (sur un intervalle) à démontrer, pour lesquelles de nombreux candidats utilisent des développements limités, alors que ces derniers ne peuvent apporter qu'une information locale.
- Lors de calculs d'équivalents, les constantes sont régulièrement supprimées, ce qui ne manque pas de surprendre les correcteurs.

La deuxième partie ne proposait pas de grandes difficultés, hormis la question B2, qui pouvait sans difficulté être admise pour la suite. Les candidats ont dans l'ensemble réalisé des dessins de bonne qualité pour soutenir leur propos de façon pertinente. Le principal écueil résidait dans les questions de théorie de la mesure. Rares sont les candidats qui ont compris l'intérêt du cône engendré pour définir une mesure uniforme sur la sphère S^{n-1}. Nombreux sont ceux qui considèrent régulièrement des mesures de Lebesgue de parties de la sphère, or celle-ci est malheureusement de mesure de Lebesgue nulle.

La troisième partie ne comportait somme toute que 4 questions relatives au calcul des probabilités, questions assez simples qui ont cependant été rarement bien traitées. Dans la première question, la majorité des candidats a confondu $\mathbb{P}\left(\frac{a}{||a||} \in A\right)$ avec $\mathbb{P}(a \in A)$, et ont été conduits à calculer une intégrale sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle. Rappelons que pour une variable X de densité f sur un ensemble E,

$$\mathbb{P}(g(X) \in B) = \int_E \mathbf{1}_{g(x)\in B} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

résultat qui ne semble pas maîtrisé par les candidats.

La partie III.B, souvent traitée, a donné lieu à de très nombreuses erreurs, liées à la gestion de la composition des fonctions polynomiales. Ainsi, par exemple, dans la question 1b, les candidats pensent obtenir $A.L_\theta(P)$, alors qu'ils tombent sur $L_\theta(A.P)$, beaucoup moins pratique pour résoudre l'équation différentielle.

Enfin, la partie IV proposait des questions nettement plus difficiles, avec des extensions des résultats précédents aux séries entières aléatoires et à l'étude de leurs zéros. Cette partie a servi à départager les meilleurs candidats.

Épreuves orales d'algèbre et d'analyse

Les recommandations du rapport 2005 sont encore d'actualité. Nous ne proposons que peu de changements.

Organisation des épreuves

Les modalités, mises en place au concours 2001, ont cette année encore donné entière satisfaction et sont reconduites pour la session 2007. Elles sont décrites ci-après de manière détaillée, prenant en compte l'expérience acquise.

À l'issue de la période de préparation, le jury fait procéder à la photocopie des plans préparés par les candidats. Ces derniers sont manuscrits, comportent 3 pages A4 *au maximum* et possèdent une marge de 1 cm sur tous les côtés afin d'éviter tout problème lors de la photocopie. Les plans peuvent être complétés par des planches de figures.

Le candidat *peut utiliser sa copie du plan pendant l'épreuve* et pourra utiliser les notes manuscrites produites durant la préparation, pendant la première phase de l'interrogation dite « argumentation et présentation du plan ».

L'épreuve s'organise en trois temps, prévus pour une durée totale d'un maximum de 50 minutes : une présentation du plan éventuellement suivie d'une brève discussion, un développement de 15 minutes et enfin une partie consacrée au dialogue et aux questions.

Première partie : le plan

Le candidat est convié à utiliser son temps de parole, 8 minutes maximum, pour présenter, argumenter et mettre en valeur son plan.

Le plan écrit n'est ni une énumération de paragraphes, ni un exposé complet avec développement des démonstrations. Il définit avec précision les notions introduites, donne les *énoncés complets* des résultats fondamentaux, cite des exemples et des applications. *Le plan doit être maîtrisé*, c'est à dire que les résultats exposés doivent être compris ainsi que l'organisation d'ensemble. Il est souhaitable que le candidat connaisse dans leurs grandes lignes les démonstrations des résultats figurant au programme du concours : le jury pourra appliquer ce critère pour évaluer la maîtrise du plan. C'est au candidat de circonscrire son plan, notamment en ce qui concerne les énoncés débordant largement le cadre du programme.

Il s'agit d'une épreuve orale, il est donc inutile de recopier le plan au tableau, dans la mesure où le jury possède une copie du texte. Il est souhaitable que le candidat utilise son temps de parole pour expliquer de façon systématique les articulations principales de son plan. Les détails techniques, s'ils sont clairement écrits dans le plan, pourront ne pas être repris oralement. Le candidat peut faire un bref exposé introductif et commenter utilement ensuite ses résultats principaux, les outils développés, l'organisation d'ensemble et mettre en perspective les méthodes utilisées. Il peut être utile de consacrer du temps à un exemple pertinent qui éclaire la problématique de la leçon, à faire usage du tableau pour illustrer ses propos. La présentation et la justification orale du plan sont des points importants d'appréciation.

À la fin de cette présentation, le jury peut questionner brièvement le candidat. Ce temps de dialogue permet au candidat de préciser certains aspects du plan, de développer l'argumentation et de justifier certains choix. On peut aborder quelques points techniques sans entrer dans des détails qui retarderaient le début du développement. Le jury ne cherche pas à déstabiliser le candidat.

Deuxième partie : le développement

Le candidat soumet au jury une liste de plusieurs points (deux au minimum, mais trois sont appréciés) qu'il propose de développer. Ceux-ci peuvent être soit la démonstration d'un théorème, soit la présentation d'un exemple significatif, soit le développement détaillé d'une partie délimitée du plan.

La pertinence de tous les développements proposés, *leur adéquation au sujet* et leur niveau de difficulté sont des éléments essentiels de la notation. Les candidats veilleront à proposer des développements qui permettent de mettre en valeur leur maîtrise technique, sans excéder leur capacité, à en faire un exposé clair et complet dans le temps imparti. Les développements manifestement hors sujet ou en dessous du niveau exigible de l'agrégation sont pénalisés par le jury.

Le jury choisit, parmi les propositions du candidat, le thème d'un exposé. Le jury refusera d'avantager par son choix de développement le candidat qui a concentré sa préparation sur un seul développement substantiel et intéressant, par rapport à ceux qui ont réellement préparé les deux ou trois développements demandés.

Le candidat dispose d'au plus 15 minutes pour ce développement détaillé, qui doit comprendre toutes les explications nécessaires à la compréhension du jury. Le candidat peut adopter un rythme plus ou moins rapide, mais ne doit pas perdre sciemment son temps. On s'attend à ce que le candidat expose sans le support de ses notes (sauf exception éventuelle sur un énoncé très technique, pour lequel le candidat sera convié par le jury à consulter ses notes si le besoin s'en fait sentir). La clarté de cet exposé, l'aisance et la sûreté avec lesquelles il est présenté constituent un facteur important d'appréciation

L'exposé doit être complet, sans suppression d'étapes intermédiaires, ni report d'argumentation techniques dans des résultats *ad hoc* admis. En particulier la technique qui consiste à admettre un « lemme préliminaire » qui contient toute la difficulté de la preuve, est sanctionnée. Le jury peut intervenir durant le développement pour une précision, une correction ou une justification. L'intervention éventuelle du jury ne donne pas lieu à une extension de la durée totale de l'exposé.

Au terme du développement le jury peut poser des questions sur l'exposé pour s'assurer de la maîtrise et de la compréhension du sujet abordé.

Troisième partie : questions et dialogue

L'exposé est suivi d'une discussion au cours de laquelle le jury s'assure de la solidité des connaissances du candidat sur les questions précédemment abordées (plan, exposé) ou sur tout autre point en rapport avec le sujet et figurant au programme de l'oral. Un ou plusieurs exercices peuvent être proposés par le jury. Le jury peut à son gré poser des questions dans des champs connexes aux thèmes de la leçon, voire plus éloignés.

Durant cette partie, les exercices et questions posés permettent d'évaluer les réactions et les capacités techniques des candidats dans un champ vierge. Le candidat doit donc s'attendre à ce qu'un dialogue s'établisse, lui permettant de profiter de suggestions si le besoin apparaît au jury. Il peut adopter un style moins formalisé que dans le développement, s'appuyer sur le plan : la priorité est ici à l'élaboration des idées, à la méthode d'appréhension des problèmes mathématiques. Le jury peut parfois poser des questions difficiles pour lesquelles il n'attend pas de réponses immédiates ; cela lui permet d'évaluer les capacités de réflexion du candidat et de tester son esprit de méthode.

Pendant cette discussion le jury veille à laisser un temps raisonnable au candidat pour réfléchir, sans le submerger de questions.

Remarques détaillées sur les épreuves orales d'algèbre et d'analyse

1 Oral d'Algèbre

1. **Groupes finis**
   Il semble important de connaître les classes d'isomorphismes des groupes de petit cardinal (inférieur à 6). Une nouvelle leçon portant sur les groupes de petit cardinal est proposée. La notion de petit cardinal est laissée à l'appréciation du candidat. On peut évidemment réfléchir sur groupes de cardinal inférieur à 100, expliciter les groupes de cardinal 12, 15, 35, 51, 21, 39, 63 etc. On peut aussi expliciter la structure du groupe Σ_4 ou le groupe diédral. Le cours d'algèbre de Daniel Perrin (exercices du chapitre 1) est une bonne référence.

2. **Nombres premiers, anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.**
   Certaines identifications rendent les exposés confus, voire faux : $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ identifié au sous-ensemble $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\} \subset \mathbf{Z}$.
   Dans ces leçons, la loi de réciprocité quadratique est souvent proposée, mais les candidats ne proposent aucune application et ne savent pas calculer le symbole $\left(\dfrac{2}{p}\right)\cdot$ Par ailleurs il faut faire très attention à l'extension dans laquelle on travaille. En bref, on assiste souvent à une suite de calculs incompréhensibles.
   Il faudrait connaître les idéaux de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Il serait bon de ne pas donner des résultats tels que la caractérisation des nombres de Carmichaël si l'on ne peut :
   - en exhiber un,
   - savoir (au moins) qu'il en existe une infinité

   À l'énoncé d'un résultat, il est toujours utile de se poser la question de la réciproque. Ainsi, certains candidats ont retrouvé (découvert ?) avec l'aide du jury le plus souvent que $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \sim \mathbf{Z}/nm\mathbf{Z} \Rightarrow m \wedge n = 1$.

   Par ailleurs, sur ces leçons, le jury attend que les candidats apportent des éléments du niveau de l'agrégation.

3. **Anneaux principaux - polynômes à plusieurs variables.**
   Il faudrait savoir pourquoi $A[X]$ est principal si et seulement si A est un corps. Il faut savoir aussi que $\mathbf{R}[X,Y]$ est factoriel et non principal en exhibant un idéal non principal. Connaître les théorèmes de transfert peut être utile.

   La structure des polynômes symétriques doit être connue et l'algorithme qui va avec doit être pratiqué. Le jury est resté sans voix sur l'incapacité des candidats à appliquer ce théorème sur des exemples pourtant simples.
   Il est important de connaître quelques applications et savoir si les propriétés sont stables par passage aux quotients par exemple.

4. **Méthodes combinatoires**
   Il est essentiel que des méthodes soient dégagées et illustrées : principe de récurrence, principe d'inclusion-exclusion, principe des bergers, le tout est la somme des parties, utilisation de séries entières (génératrices), etc..
   La partie élémentaire de cette leçon ne doit pas être oubliée. Notamment le jury s'attend à ce que les candidats sachent calculer des cardinaux classiques.

5. **Corps finis. Racine d'un polynôme**
   Il faut savoir construire un corps de petit cardinal : $\mathbf{F}_4$, $\mathbf{F}_8$, $\mathbf{F}_9$ ..., et mener des calculs dans ce corps.
   Il est important de pouvoir localiser des racines d'un polynôme et de savoir (sans calculer les racines) si un polynôme admet des racines multiples.

6. **Polynôme d'endomorphisme, polynômes annulateurs**
   Le jury signale que les polynômes d'endomorphismes ne sont pas tous nuls.
   Cette leçon ne porte pas uniquement sur la réduction des endomorphismes. Par exemple, le calcul des puissances ou de l'exponentielle d'une matrice peuvent illustrer cette leçon (sans passer par la décomposition de Dunford) : voir le rapport 2005.

   On attend aussi pour les meilleurs quelques résultats concernant l'algèbre formée par les polynômes d'une matrice (dimension, commutant etc.).

7. **Sous-espaces stables**
   Comme signalé dans les rapports 2004 et 2005, c'est une leçon difficile, qui résiste mal à l'improvisation. Elle ne peut se réduire à la réduction !

8. **Déterminant**
   Cette leçon classique a été très mal traitée. Les candidats ont recopié de mauvais plans en oubliant les propriétés importantes du déterminant ; volume, orientation, discussion du rang grâce aux bordantes. Le jury ne peut se contenter dans un plan du calcul d'un Vandermonde ou d'un déterminant circulant !
   Signalons que les candidats qui ont proposé comme développement des thèmes trop éloignés de la leçon ont tous été sanctionnés. Par exemple le calcul de la distance à un sous-espace vectoriel ne peut pas constituer un développement substantiel. Dans cette

leçon, on ne peut pas présenter le théorème de Müntz sans calculer le déterminant de Cauchy préalablement : en fait il est inutile de faire tout le calcul, seul importe le quotient entre deux déterminants de Cauchy et celui-ci est très rapide à exposer. D'une manière générale on attend pendant le développement l'illustration d'un calcul ou la manipulation de déterminants et pas uniquement l'extraction d'un résultat du plan.

9. **Formes quadratiques. Groupe orthogonal**
   L'intitulé de la leçon a évolué, on attend que les candidats réfléchissent plus attentivement sur la notion d'orthogonalité et sur les groupes orthogonaux (générateurs etc.). On peut réfléchir au groupe $SO(4)$, ou aux groupes $SO(p, q)$.
   Il existe des formes quadratiques sur $\mathbf{C}$, contrairement à ce que beaucoup de candidats affirment et il y a une différence entre formes quadratiques sur $\mathbf{C}$ et formes hermitiennes !
   Il peut être utile de faire le lien, même de manière élémentaire, avec la géométrie (coniques, calcul de tangentes, polaires, étude locale des fonctions etc..).
   L'algorithme de Gauss doit être énoncé et pouvoir être appliqué sur une forme de $\mathbf{R}^3$. Le lien avec la signature doit être clairement énoncé.
   Il est important d'illustrer cette leçon d'exemples.

10. **Leçons de géométrie**
    Elles n'ont eu que peu de succès comme souvent : c'est un tort. Il semble impossible d'obtenir un dessin de la part des candidats. C'est encore une fois un non sens mathématique, pédagogique et historique de ne pas vouloir illustrer la géométrie ou les mathématiques par le dessin.
    Il faut savoir construire un cercle tangent à deux autres cercles ou caractériser les points de Fermat.
    Pour certains candidats, il serait plus profitable de travailler des leçons de géométrie, même à un niveau élémentaire, plutôt que de choisir des sujets d'algèbre générale qu'ils ne maîtrisent pas.
    Dans la leçon « Coniques », il faut savoir trouver le centre d'une ellipse, situer le paramètre, les asymptotes d'une hyperbole et quelques formules célèbres et élémentaires.

11. **Nombres complexes**
    Le minimum est exigible sur l'exponentielle complexe et le calcul d'un argument. Le jury est souvent resté perplexe quand le candidat ne pouvait donner une CNS pour que la somme de trois vecteurs unitaires soit nulle en utilisant les nombres complexes. Il semble opportun de soigner la logique de présentation (par exemple on peut définir l'exponentielle complexe, puis les fonctions sinus).
    Ces leçons ont été pauvres dans l'ensemble, montrant un manque flagrant de préparation alors que ces thématiques sont enseignées au niveau des lycées et des classes préparatoires.

2 Oral d'Analyse

1. **Développement asymptotique** Cette leçon doit être considérée comme difficile, car elle est assez aride et est souvent mal traitée : il faudrait que les candidats mettent des exemples de méthodes d'obtention de développement asymptotique (méthode de Laplace, de la phase stationnaire, comparaison série-intégrale ...) et des exemples d'applications

(études de branches infinies pour des courbes, estimation de la vitesse de convergence d'une suite, d'une série ...).

Les échelles de comparaison, le développement asymptotique de x défini par $xe^x = t$ ou le développement asymptotique de la suite de terme général u_n définie par $u_{n+1} = \sin u_n$ sont des exemples trop traités pour espérer sortir des sentiers battus.

La théorie analytique des nombres et les fonctions sommatoires des fonctions arithmétiques (fonction indicatrice des nombres premiers, fonction nombre de diviseurs, fonction φ d'Euler, etc.) fournissent des exemples à la fois naturels et pas trop difficiles à exposer.

2. **Étude locale des surfaces**
   Cette leçon est rarement prise par les candidats mais ceux qui la prennent peuvent faire une très bonne leçon en considérant en plus de la traduction géométrique du lemme de Morse les notions de deuxième forme fondamentale voire de géodésiques.

3. **Courbes**
   Cette leçon ne doit pas se réduire aux courbes paramétrées planes $t \mapsto (x(t), y(t))$. On peut étudier courbes en polaires, étude métrique, courbes gauches, implicites, enveloppes de droites ...

4. **Continuité-Dérivabilité**
   Certains développements intéressants mais techniques, comme la construction d'une fonction continue partout non dérivable, ou le théorème de Balagner-Colominas, sont à *déconseiller fortement* aux candidats moyens, et peuvent aboutir à des oraux globalement catastrophiques.

   Les candidats font beaucoup trop confiance à leur mémoire et pas assez à leur compréhension, ce qui leur vaut de rester embourbés au milieu d'un développement ambitieux, par exemple « théorème de Montel » ou bien « différentielle isométrique en tout point implique isométrique pour l'application elle-même ».

5. **Approximation des solutions d'équations**
   Les candidats présentent souvent des résultats tels que la méthode de Newton avec un jeu d'hypothèses correct mais qui ne correspond pas à l'exemple choisi.

6. **Variables gaussiennes**
   La leçon a été présentée avec un certain succès, par de bons candidats.

7. **Intégration des fonctions**
   En intégration, la leçon « Intégration des fonctions sur un intervalle ; suite de fonctions intégrables » est souvent présentée dans le cadre de l'intégrale de Riemann, alors que tous les théorèmes utilisés relèvent du cadre de l'intégrale de Lebesgue.

8. **Fonctions définies par une intégrale**

La dérivation de fonctions du type $x \mapsto \int_0^x f(x,t)dt$ a souvent posé bien des problèmes aux candidats.

9. **Fonctions holomorphes**
   Des candidats ont montré une perception limitée des rapports entre holomorphie, conformité et différentiabilité. Ils ont eu alors des difficultés pour trouver que toute fonction holomorphe est ouverte dès que sa dérivée ne s'annule pas sur le domaine de définition.

10. **Divers**
    On conseille la lecture des rapports 2004 et 2005 sur les épreuves d'oral d'algèbre, d'analyse et de probabilité, les conseils qui y sont prodigués restent d'actualité.

Épreuve orale de modélisation

Organisation de l'épreuve de modélisation

Jusqu'à la session 2005 incluse, les candidats à l'épreuve de modélisation avaient le choix entre une leçon et l'étude d'un texte. À partir de 2006, deux textes au choix étant proposés, la leçon est abandonnée. À l'occasion de ce changement de format, le jury souhaite rappeler ce qu'il attend des candidats dans cette épreuve. Les remarques concernant l'organisation de l'épreuve de modélisation s'appliquent à toutes les options, en particulier à l'épreuve d'« analyse des systèmes informatiques » qui en est la version pour l'option D (informatique). Des remarques supplémentaires, spécifiques à cette épreuve, seront données plus loin, dans le cadre de la partie du rapport consacrée à l'option informatique.

Les textes sont surmontés du bandeau suivant :

> *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes laissé(e) libre d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur. Le jury aura le texte sous les yeux, mais vous devez considérer qu'il ne l'a pas lu.*

Plus précisément, le jury s'attend à ce que le candidat dégage une problématique, en s'inspirant du texte, pour mettre en valeur sa maturité mathématique et ses connaissances. L'interrogation dure une heure, pendant laquelle le candidat gère comme il le désire le tableau et les illustrations informatiques qu'il entend présenter (le jury dispose d'écrans de contrôle reproduisant celui du candidat). Le candidat doit préparer un exposé d'environ 3/4 d'heure, le quart d'heure restant étant occupé par les questions du jury.

Le texte est court, environ 5 pages, motivé par un problème concret. Il peut présenter des arguments rapides, voire heuristiques (signalés comme tels). Il ne contient pas d'assertion délibérément trompeuse et se conclut par une liste de suggestions.

Il appartient au candidat de discuter la mathématisation du problème, en particulier d'expliquer les hypothèses faites lors de la modélisation ou du traitement du modèle, de critiquer ou d'améliorer le modèle, du point de vue de l'adéquation à la réalité, de la généralité, de la rigueur, de la simplicité du traitement mathématique subséquent...

Le jury n'ayant *a priori* pas lu le texte, le candidat commencera par présenter celui-ci. Un plan en début d'exposé est apprécié, annonçant en particulier les propriétés du modèle que le candidat va dégager. Il est important d'expliquer le problème et le modèle, de l'illustrer, ainsi que d'y revenir en fin d'exposé. Le modèle mathématique a-t-il les propriétés attendues ? Des propriétés parasites surprenantes ? A-t-on résolu le problème posé ?

Le candidat dispose pendant sa préparation et l'interrogation d'un ordinateur dont la configuration est décrite à l'adresse `http://www.agreg.org`.

Il est vivement souhaité que des illustrations informatiques (simulation, résolution numérique ou formelle, cas particuliers éclairants...) soient présentées, mais *il ne s'agit pas d'une épreuve de programmation.* Un programme qui ne fonctionne pas n'est en rien rédhibitoire et le jury appréciera un regard critique du candidat sur une tentative non aboutie. Une utilisation raisonnée des fonctions des logiciels disponibles est plus appréciée qu'une reprogrammation d'algorithmes standards. Bien intégré dans l'exposé, un tel travail peut en revanche devenir pertinent pour illustrer les insuffisances d'une méthode naïve.

Les suggestions sont facultatives et ne sont là que pour guider la réflexion du candidat sur des points significatifs du texte, ou des exemples utilisables. Certaines d'entre elles sont conçues pour permettre au candidat de comprendre le problème, de «rentrer» dans le modèle.

S'il est exclu de plaquer une démonstration d'un théorème du programme dans l'exposé, les démonstrations mathématiques de certaines assertions du textes sont très appréciées. Le candidat peut, tout comme le texte, utiliser des arguments heuristiques s'il les signale comme tels.

Un travers à éviter à tout prix : la paraphrase linéaire du texte sans aucun apport personnel du candidat, ni mise en perspective, agrémentée de la recopie de toutes les formules rencontrées.

Commentaires du jury

Rappelons d'abord que le jury attache un intérêt particulier à l'effort de modélisation (c'est-à-dire de passage du «concret» aux mathématiques), à la mise en perspective des applications présentées, ainsi qu'aux illustrations permises par les moyens informatiques mis à disposition des candidats.

Les textes

Le jury se félicite du passage de l'épreuve au format « tout texte » pour la session 2006. Des précision pratiques importantes sont données plus loin.

Le principal travers observé chez les candidats est la répétition linéaire du texte, y compris des passages non compris en espérant que le jury ne demandera pas de détails. Rappelons qu'utiliser des notions que l'on ne comprend pas, dans cette épreuve comme dans les autres, est une faute lourdement sanctionnée. Enfin, rappelons qu'*aucun développement n'est attendu.* Le candidat est libre de proposer des démonstrations de résultats utilisés, mais le jury peut les refuser, ou demander au candidat d'en donner seulement les grandes lignes.

Quelques qualités appréciées : prise de distance et d'initiative par rapport au texte, étude d'un exemple ou d'un cas simple pour comprendre le texte et le faire comprendre au jury, simplification ou, à l'inverse, généralisation du problème proposé, étude qualitative ou heuristique, critique du modèle.

Lacunes fréquentes

Les théorèmes de Cauchy-Lipschitz ou d'échappement font encore des ravages. Peu de candidats sont capables de montrer l'existence locale de solutions d'une équation différentielle ordinaire concrète : certains veulent l'appliquer à un problème d'ordre deux, d'autres à des espaces fonctionnels (en voyant, dans une équation $y' = f(y,t)$, la fonction f comme une distribution sur $C^1(\mathbf{R}) \times \mathbf{R}$ (?)), d'autres enfin introduisent des notions fines (cylindres de sécurité, fonctions localement lipschitziennes) sans être capables de les exploiter ni de les définir. Le jeu d'écriture permettant de réduire une équation d'ordre supérieur à un système d'ordre un est souvent mal compris. Très peu de candidats réalisent qu'une solution locale n'est pas nécessairement globale.

Si les candidats savent généralement donner une description abstraite des corps finis non premiers, il est rare d'en obtenir une réalisation concrète comme $\mathbb{F}_4 \simeq \mathbb{F}_2[X]/(X^2 + X + 1)$. Au mieux parviendra-t-on au corps de décomposition de $X^{2^2} - X$ sur $\mathbb{F}_2$, dans une clôture algébrique fixée mais bien mystérieuse.

La complexité des opérations arithmétiques sur les grands entiers (ou les polynômes) n'est pas connue, et les candidats ont du mal à la retrouver. Il n'y a pas grand sens à estimer le nombre d'itérations de l'algorithme d'Euclide si on n'estime pas le coût de chaque étape, même grossièrement. Ni à décrire RSA pour affirmer finalement que le coût de chiffrement (resp. déchiffrement) est de e (resp. d) multiplications.

Quand on introduit l'algorithme de Berlekamp pour construire des codes correcteurs, il est bon de savoir exhiber quelques codes simples (code de répétition, code de parité...), et de pouvoir expliquer comment on réalise l'étape de codage sur un exemple.

Épreuves orales de l'option informatique

Remarques générales

Cette option a été ouverte cette année pour la première fois. Des préparations se sont organisées à l'ENS Cachan (rassemblant les candidats de l'ENS Cachan, de l'ENS Ulm, de l'Université Paris 7 et de l'Université Paris 11), à l'ENS Lyon, à l'Antenne de Bretagne de l'ENS Cachan (Rennes/Ker Lann) et à l'Université Joseph Fourier de Grenoble. Au total, ces préparations regroupaient une quinzaine d'étudiants, donc une toute petite partie des candidats.

Environ 250 candidats s'étaient inscrits à l'option informatique pour le concours 2006, soit environ 10% du total des inscrits. Une grande partie de ces candidats ont sans doute été attirés par le libellé de l'épreuve, car en fait seulement moins de la moitié d'entre eux se sont présentés aux épreuves écrites, soit environ 120 candidats. La proportion de désistement entre l'inscription et l'écrit est significativement plus importante que dans les autres options (où elle se situe autour de 40 %). Elle peut s'expliquer par une confusion sur le terme même d'option informatique, certains candidats potentiels s'apercevant après coup – à la lecture du programme, par exemple – que cette option nécessite des connaissances approfondies dans le domaine de la science informatique, ce qui n'a pas grand chose à voir avec l'utilisation d'outils logiciels en mathématiques !

Remarques sur les résultats des candidats

Sur les 595 admissibles, 34 étaient inscrits dans l'option informatique ; parmi eux, 29 se sont présentés aux épreuves orales, et 18 ont été reçus. Les candidats de l'option se répartissent à peu près uniformément dans le classement global.

> *Il est important de rappeler que seul le classement global est officiel et qu'il n'y a pas de quota prédéfini : tous les candidats reçus sont agrégés de mathématiques, quelle que soit l'option choisie pour le concours et tous sont gérés ensuite selon des procédures identiques.*

La moyenne des candidats admissibles de l'option informatique est légèrement inférieure à celle de l'ensemble des candidats admissibles ($-0{,}5/20$). En revanche, leurs notes sont un peu plus homogènes : l'écart-type étant de 2 (au lieu de 2,5).

En ce qui concerne les épreuves orales, spécifiques à l'option informatique, on note une amélioration significative du rang des candidats reçus entre l'admissibilité et l'admission, bien plus importante que pour les autres options. Ainsi, si l'on calcule l'écart entre le rang d'admission et le rang d'admissibilité pour les 540 candidats admissibles présents à l'oral, on trouve un gain de 25 places en moyenne (résultant de l'absence à l'oral de 55 candidats admissibles). Pour les 29 candidats de l'option D, ce gain est en moyenne de 60 places.

Ces données peuvent s'interpréter, en première analyse, de la manière suivante :

- On demande aux candidats de l'option informatique, une double compétence au niveau d'un master 1 en mathématiques et en informatique : cette double compétence les pénalise à l'écrit face à des candidats ayant mené l'ensemble de leur cursus en mathématiques ;

- En revanche, pour ceux d'entre eux qui ont passé avec succès la barrière de l'écrit, cette double compétence correspond à une spécialisation effective de qualité, valorisée dans les épreuves orales.
- Ceci donne donc à penser que cette option a été choisie par des candidats qui y ont vu une opportunité stratégique pour valoriser leur formation complémentaire et ainsi améliorer leur classement final.

Il semble donc que cette nouvelle option a atteint un de ses objectifs : permettre aux candidats ayant une solide formation complémentaire en informatique d'émerger.

On peut de plus remarquer que cette formation complémentaire a été acquise pour environ la moitié des candidats reçus en dehors des préparations spécifiques, ce qui montre le caractère ouvert de cette option, enrichissant ainsi la diversité des agrégés de mathématiques. En fait, une grande partie de ces candidats reçus n'ayant pas préparé le concours au sein d'une préparation officielle sont en cours de thèse en mathématiques ou informatique, voire même déjà titulaire d'un doctorat. Cette année, 4 candidats seulement sur les 18 reçus sont en stage de validation du concours.

Épreuves de leçon de mathématique et d'informatique

La moyenne des deux épreuves de leçon pour les 540 candidats admissibles présents aux épreuves orales est de 9,62, avec un écart-type de 4,56. Si l'on se restreint aux seuls 29 candidats de l'option D, la moyenne des deux leçons est de 9,71, avec un écart-type de 5,57. On peut donc légitiment conclure que le niveau général des candidats admissibles de l'option D est comparable à celui de l'ensemble des candidats admissibles. Cependant, comme attendu, on note une moyenne meilleure pour la leçon d'informatique que pour la leçon de mathématiques.

Épreuve de modélisation, ou analyse des systèmes informatiques.

En ce qui concerne l'épreuve de modélisation (appelée analyse de systèmes informatiques dans le cas spécifique de l'option D), la moyenne des 540 candidats présents aux épreuves orales est de 9,68, avec un écart-type de 4,61. Par contre, si l'on se restreint aux 29 candidats admissibles présents de l'option D, alors cette moyenne est de 11,50, avec un écart-type de 4,59.

Cette différence est statistiquement significative et montre que les candidats de l'option informatique ont su mettre en valeur leur formation complémentaire et leur sens de la modélisation acquis dans la pratique de l'informatique pour compenser leur niveau légèrement inférieur en mathématiques générales.

Remarques sur l'épreuve de leçon d'informatique fondamentale

L'épreuve de leçon d'informatique a été organisée sur le modèle de celles de mathématiques. L'épreuve dure 45 minutes. Un ensemble de 25 titres de leçons ayant été diffusé à l'avance, le candidat tire un couplage entre deux titres parmi ces 25 et choisit l'un des deux. Après 3 heures de préparation, il expose son plan de leçon au jury pendant une petite dizaine de minutes, ainsi que deux propositions de développement. Le jury choisit l'une des propositions, le candidat expose ce développement pendant une quinzaine de minutes, puis une discussion libre s'engage avec le jury pendant le reste du temps.

De manière générale, le jury a plutôt été heureusement surpris par la qualité de certaines leçons présentées, qui confirme le bon travail des préparations en amont du concours. Ceci a conduit à une moyenne des notes supérieure de un point sur 20 par rapport à l'épreuve d'algèbre des autres options, mais aussi à un écart-type lui aussi plus grand d'un point.

En effet, il apparaît que certains candidats ne maîtrisent pas la différence entre l'*interface* d'une structure de données (piles, files, etc.) et son *implémentation* (par un tableau, par exemple). Ceci conduit à des raisonnements très confus et à l'opposé de toute pédagogie. De plus, l'évaluation de la complexité des algorithmes perd tout sens : l'accès à un élément d'une liste n'a pas le même coût que l'accès à un élément d'un tableau, même si la liste est implémentée par un tableau !

D'autre part, beaucoup de candidats, ne semblant pas connaître la notion d'invariant, sont incapable d'argumenter de manière convaincante sur la correction d'un algorithme simple (sans même parler de preuve formelle). Le jury a constaté une certaine difficulté des candidats à sortir d'une *ambiance mathématique* pour faire appel au *bon sens informatique*, si l'on peut s'exprimer ainsi. Par exemple, pour le calcul de la complexité du tri fusion, on arrive à une formule du type $f(2^{k+1}) = 2 \times f(2^k) + c$. De manière surprenante, plusieurs candidats ont eu les plus grandes difficultés à résoudre cette récurrence par des arguments élémentaires. De même, les présentations des arbres binaires de recherche et des tas a donné lieu à des contradictions étonnantes.

Une tentation bien compréhensible est de mathématiser les sujets de leçons en oubliant l'aspect informatique. Ainsi, sur le sujet sur les *langages typés : objectifs, mise en oeuvre, applications*, il était tentant de faire une leçon complètement centrée sur la théorie abstraite des types (lambda-calcul typé, système F, etc.), en oubliant complètement les aspects concrets et élémentaires de typage statique et dynamique en Caml, C, C++ ou Java.

Le jury tient donc a rappeler qu'il s'agit bien d'une épreuve d'*informatique fondamentale*, et non pas d'outils mathématiques pour l'informatique. Il appartient au candidat de montrer la pertinence des outils mathématiques qu'il développe vis-à-vis des objectifs du thème informatique développé dans la leçon, que ce thème soit d'intérêt scientifique ou technologique.

La présentation d'outils mathématiques pour eux-mêmes, en particulier lorsqu'il s'agit d'outils sophistiqués comme ceux de la théorie des types, s'apparente donc à un "hors-sujet". Les deux questions-clés de cette épreuve sont toujours « *À quoi cet outil mathématiques sert-il dans le cadre informatique considéré ?* » et « *La complexité ou le coût de son utilisation est-elle bien compensée par la qualité supplémentaire d'information qu'il permet d'obtenir ?* »

Remarques spécifiques sur quelques leçons d'informatique

901 : Exemples de structures de données et de leurs applications

Le principal problème constaté par le jury est que les candidats confondent la notion de *structure de données* avec celle d'*implémentation*. Cette confusion est d'ailleurs largement encouragée par des langages comme Maple ou Perl...

Il nous semble que la bonne approche de cette leçon est de mettre en avant la notion de *type de données abstrait*. Par exemple, une liste est soit la liste vide, soit un élément suivi d'une liste, et idem pour un arbre. De cette manière, on fait une nette différence entre les fonctions de manipulation des structures de données (dans un langage orienté-objet, on dirait la *déclaration* des méthodes) et leur *implémentation*.

Une liste peut évidemment être implémentée par un tableau, mais aussi par des cellules chaînées et de sûrement beaucoup d'autres manières. Mais une liste n'est pas un tableau. D'ailleurs, l'accès au n-ième élément de la liste se fait par la combinaison de n actions élémentaires, et non pas une seule comme dans un tableau. Il s'agit ici de raisonner *abstraitement* à partir des garanties algorithmiques minimales spécifiées par une type de données abstrait et non à partir d'une implémentation spécifique, peut-être particulièrement efficace dans le cas considéré. De même, considérer la tête (*head*) ou la queue (*tail*) de la liste vide est une erreur, alors qu'il est tout à fait possible de manipuler un tableau non initialisé.

La contrepartie de cette garantie minimale est qu'une liste est une structure de données abstraite *dynamique*, sans limitation de taille *a priori*, contrairement aux tableaux qui doivent être introduits avec une taille fixée.

Pour une bonne introduction à cette approche, la référence classique (mais déjà un peu ancienne) est le livre de Christine Froidevaux, Marie-Claude Gaudel et Michèle Soria, *Types de Données et Algorithmes*, Mac Graw Hill France, février 1990, 570 pages.

Une fois que le candidat a mis en place les méthodes de manipulation de listes : *cons*, *head*, *tail*, *empty*, *is_empty*, alors il y a toutes les fonctions usuelles sur les listes : *append*, *reverse*, etc. On attend des candidats qu'ils aient intégré que *append* n'est pas une méthode de base de coût élémentaire, mais une méthode dérivée, de coût potentiellement proportionnel à la taille de la liste de gauche. Encore une fois, il n'est pas exclu que cette méthode puisse être exécutée en un temps plus petit à cause des particularités de telle ou telle implémentation spécifique. Mais les contraintes algorithmiques minimales exigées par le *type de données abstrait* ne permettent pas de le garantir en général.

Le cas des arbres binaires est semblable, et il a donné lieu au même genre de confusion. Le cas des piles et des files semble mieux intégré, peut-être à cause de l'aspect « familier » de ces structures dans la vie courante. Cependant, certains candidats confondent *empiler* et *enfiler*, au motif que les deux peuvent être vues comme une simple manipulation d'index sur un tableau.

Nous voudrions enfin souligner qu'il est frappant de remarquer combien peu de candidats s'aident d'un dessin pour illustrer les manipulation de structures de données ! Le jury encourage chaleureusement les candidats à présenter leurs idées d'abord *intuitivement* par un petit schéma, et seulement dans un deuxième temps de les *formaliser* dans un énoncé algorithmique si c'est demandé explicitement par le jury.

Pour tous les exemples d'algorithmes, la référence de base est le livre de Thomas Cormen, Charles Leiserson, Ronald Rivest et Clifford Stein disponible en français sous le titre « *Introduction à l'algorithmique, Cours et exercices corrigés* » chez Dunod.

902 : Diviser pour régner : exemples et applications

L'exemple le plus souvent traité est le tri (souvent avec une confusion entre liste et tableau, voir la leçon 901 !)

La résolution de l'équation de récurrence de base, $t(n) = a \times t(n/b) + c(n)$ est souvent traitée de manière approximative, alors qu'il est possible dans le cas simple du tri fusion d'obtenir une valeur exacte pour $t = 2^k$. La plupart des candidats oublient d'ailleurs de vérifier que la fonction $t(n)$ est bien croissante en n, ce qui autorise à interpoler pour les valeurs de n qui ne sont pas des puissances de 2. Il existe en effet des exemples où la fonction n'est justement pas croissante ! Un joli cas est l'exponentiation rapide, le nombre minimal de multiplications à faire pour calculer a^n. Le résultat est lié au nombre de 1 dans la représentation binaire de n, ce qui n'est certainement pas croissant !

Les candidats les plus solides soulignent que la complexité du tri par fusion (on coupe le tableau au milieu) et celle du tri rapide (on coupe au niveau de l'élément médian) sont les mêmes dans le pire cas, mais que ces deux tris ont des comportements très différents “en pratique”, par exemple si les éléments du tableau sont en fait déjà rangés en ordre croissant ou décroissant.

Les candidats ne semblent pas connaître le concept d'*hybridation* d'algorithmes : par exemple pour le tri fusion, il est possible avant chaque division de commencer par parcourir le tableau (en temps linéaire) pour vérifier s'il ne serait pas déjà trié, et rendre directement le résultat s'il l'est. de manière plus générale en algorithmique numérique, par exemple la résolution de systèmes linéaires, la technique algorithmique choisie sera étroitement dépendante des propriétés du système à résoudre.

Ici encore, pour tous les exemples d'algorithmes, la référence de base est le livre de Thomas Cormen, Charles Leiserson, Ronald Rivest et Clifford Stein disponible en français sous la titre « *Introduction à l'algorithmique, Cours et exercices corrigés* » chez Dunod. Une référence plus encyclopédique est bien sûr la somme de Donald Knuth, mais la présentation ne prend pas en compte l'approche moderne des types de données abstraits.

904 : Arbres binaires de recherche. Applications

Une leçon très populaire, souvent choisie... mais rarement bien traitée !

Le premier point est de présenter la *structure de donnée abstraite* des arbres binaires, et de définir correctement ce qu'est un arbre de recherche (ABR). Il faut ensuite montrer que les principales opérations d'insertion, de recherche et d'extraction d'un élément se font en temps $O(h)$, où h est la hauteur de l'arbre, d'où l'intérêt de garder cette hauteur petite.

Très peu de candidats montrent que cette hauteur ne peut être inférieure à $\log(n)$, et qu'il faut donc viser des arbres approximativement équilibrés, en faisant un compromis entre le coût/précision des rééquilibrages et le coût des opérations d'insertion et de recherche. Chaque méthode d'équilibrage doit être discutée spécifiquement.

Nous avons entendu parler des méthodes suivantes : arbres AVL, arbres rouge-noir, arbres 2-3-4, etc. Cependant, très peu de candidats ont su comparer les méthodes par rapport au compromis ci-dessus. En particulier, il y a une grande confusion entre un ABR aléatoire et un ABR engendré par l'insertion des éléments successifs d'une permutation aléatoire. Il faudrait donc préciser clairement quel est le modèle de distribution de données retenu. Mais ce point est très délicat... et il vaudrait mieux éviter d'en parler !

905 : Parcours de graphes : exemples et applications

Certainement l'une des leçons les plus populaires de la session 2006, et probablement l'une des plus délicates !

Les candidats les plus solides ont traité le parcours en profondeur et en largeur, l'algorithme de Bellman-Ford et celui de Dijkstra.

Beaucoup de candidats sont troublés par le problème de l'orientation des graphes et n'arrivent pas à se décider. Il semble plus logique de considérer des graphes *orientés*. Attention cependant à bien souligner que seuls les sommets atteignables sont parcourus !

En ce qui concerne les parcours en profondeur (*Depth-First Search*, DFS) et en largeur (*Breadth-First Search*, BFS), les candidats sont en général capables de les présenter sur le cas particulier des arbres, mais le plus souvent oublient le cas des graphes généraux contenant des cycles.

Aucun candidat n'a fait clairement la liaison entre DFS/BFS et pile/file. En fait, il semble que les candidats soient déroutés par le fait que le DFS est souvent programmé en récursif, avec une pile *implicite*, alors que le BFS l'est en itératif, avec une file *explicite*.

Il faudrait que les candidats montrent que les deux algorithmes dérivent en fait du même algorithme itératif générique de parcours qui utilise une structure de données plus générale qui inclut les piles et les files comme cas particuliers. Suivant la spécialisation de cette structure en pile ou en file, on obtient respectivement les parcours DFS ou BFS. L'écriture de DFS en récursif n'est alors qu'une optimisation secondaire. Ceci impose cependant de bien définir *abstraitement* les propriétés d'un parcours de graphe : par exemple, les sommets parcourus sont exactement les sommets atteignables de l'origine du parcours.

Les propriétés caractéristiques de BFS et DFS devraient être énoncées. Pour le parcours BFS, aucun sommet à distance $d+1$ de l'origine du parcours n'est visité avant que tous les sommets à distance d ne l'aient été. Pour le parcours DFS, aucun sommet n'est quitté (dépilé) avant que tous ses descendants accessibles par un chemin ne contenant pas de sommet encore empilé ne soient quittés. Il faut noter cependant que la preuve *rigoureuse* de ces deux propriétés est délicate.

Pour le traitement de Bellman-Ford et Dijkstra, il est important de bien mettre en place la notion de *poids des arêtes*, pour pouvoir distinguer le *poids* d'un chemin de sa *longueur*. Une notion fondamentale est celle de *chemin/circuit élémentaire* et de *cycle absorbant*. Une fois ces notions posées, les preuves sont beaucoup plus simples.

On remarque une grande difficulté chez la plupart des candidats à distinguer les propriétés de type *sûreté* (*safety*, invariant) et de type *vivacité* (*liveness*, variant sur un ordre bien fondé). Du coup, ils ont beaucoup de peine à organiser leurs preuves.

Les applications de ces algorithmes sont nombreuses : recherche d'itinéraire sur mappy (Dijkstra), stratégie de jeu au casino pour maximiser le gain (Bellman-Ford), etc. Dans ce dernier cas, l'absence de cycle absorbant exprime qu'il n'existe pas de moyen de gagner indéfiniment... ce qui est assez raisonnable !

A noter que certains candidats ont proposé de présenter l'algorithme de Tarjan de recherche des composantes fortement connexes (atteignables). Aucun n'a fait de présentation satisfaisante, même sur un exemple non-trivial, sans parler de preuve, d'ailleurs particulièrement délicate. Les candidats doivent savoir qu'ils devront être rigoureux sur ce point.

906 : Programmation dynamique : exemples et applications

Cette leçon a été choisie par de nombreux candidats, avec des exposés parfois très bons.

Un point délicat est de bien faire la relation entre le paradigme de la *programmation dynamique* et celui de *diviser pour régner*. Les deux approches sont étroitement liées, mais diffèrent par la manière dont les résultats intermédiaires sont traités.

Quelques (bons) exemples traités par les candidats ont été :

1. la recherche de l'ordonnancement optimal sur deux lignes de montage parallèles ;
2. la multiplication optimale d'une chaîne de matrices ;
3. la recherche de la plus longue sous-séquence commune de deux mots, avec plus ou moins d'approximations dans la comparaison.

Dans tous les cas, après avoir écrit les équations de récurrence, il est éclairant de ramener le problème au parcours d'un polyèdre en respectant les contraintes de dépendance, et de voir ainsi qu'il existe un (très) grand nombre de possibilités pour parcourir cet espace. On peut alors demander au candidat d'en esquisser quelques-unes, ou de discuter de l'efficacité de l'implémentation de ces variantes, etc.

Voici quelques autre exemples possibles : Knuth-Morris-Pratt, table des préfixes-suffixes d'un mot, conjugué minimal d'un mot, recherche d'un génome dans un ruban d'ADN, algorithme de Dijkstra (plus courts chemins dans un graphe orienté), etc.

Pour les candidats les plus solides, on peut aussi discuter de l'implémentation parallèle de ces algorithmes, en montrant que certains parcours sont plus favorables que d'autres. Cela touche au domaine de la *parallélisation automatique*. Un candidat particulièrement solide a discuté la notion d'algorithme glouton dans cette leçon, en mentionnant la théorie des matroïdes, avec comme application le sac à dos fractionnable.

Un point délicat souvent oublié est la remontée : une fois que la valeur optimale est trouvée, exhiber un objet correspondant à cette valeur. Ceci suppose de laisser de l'information lors du parcours du polyèdre : pas très difficile, mais encore faut-il y avoir réfléchi un peu ! La question de la remontée, ou plus précisément de l'exhibition d'une solution explicite au problème posé, et beaucoup plus importante que celle des raffinements algorithmiques qui n'ont parfois pas de pertinence pratique démontrée.

Remarques générales sur l'épreuve de modélisation/analyse de systèmes informatiques

Cette épreuve a plusieurs spécificités.
- Le jury n'est pas censé connaître en profondeur le problème à modéliser.
- Un exercice d'informatique doit être présenté.
- L'organisation est souple, du fait de la variété des textes et de la très grande liberté du candidat dans le choix de ses développements.
- La juste place du formalisme *au service* de la modélisation.

Les candidats semblent avoir choisi le sujet adapté à leur profil.

Ils ont eu tendance à préférer les textes de modélisation sur les jeux. Ils ont alors spontanément présenté les solutions non triviales sur des exemples, ce qui a été apprécié du jury.

Ils ont bien géré leur temps de préparation et relativement peu se sont trouvés à court de matière. Certains ont fait un exposé trop long, qui ne leur a pas permis de faire une présentation détaillée du ou des points originaux choisis par eux.

Organisation et déroulement de l'épreuve

Un schéma type

Le candidat dispose de 45 minutes pour présenter le texte et son exercice d'informatique. Le candidat doit d'abord montrer qu'il a compris le problème et sa modélisation. Il peut s'appuyer sur un exemple, celui du texte, ou une construction personnelle. Ceci dure environ 10 mn. L'exercice s'insère naturellement lorsque la propriété à implémenter a été exposée. Durant les 25 autres minutes, le candidat doit développer la modélisation, et aborder les développements qu'il a choisis.

Les variantes

Le temps passé sur l'exercice d'informatique est variable. Certains textes proposent des modélisations complètement indépendantes, d'autres approfondissent progressivement une modélisation ou solution.

Les suggestions

Le jury souligne que les mots-clefs, qui permettent de guider le choix initial du candidat, indiquent aussi les notions du programme qui se rapportent à la modélisation. Par exemple, il est souhaitable que le candidat exhibe un automate, voire un langage régulier, si le mot-clef automate est donné.

En développant un modèle, le candidat est amené à présenter des solutions non élémentaires. Faire tourner l'algorithme eût été profitable à de nombreux candidats pour bien comprendre la solution... ou plus simplement pour bien l'exposer.

Les écueils à éviter

La présentation n'est pas une leçon. Un exposé trop détaillé peut montrer une compréhension étendue de l'ensemble du texte, mais prive le candidat de temps pour développer des points précis.

Enfin, le candidat mène l'interrogation, et peut toujours refuser une voie proposée par le jury si elle dépasse le programme.

Pédagogie

La qualité de l'exposition du problème à un jury, qui n'est pas familier du problème traité, est un facteur important d'évaluation des qualités pédagogiques. La présentation d'un algorithme non trivial est un facteur d'appréciation.

Formalisme

La démonstration de théorèmes généraux n'est pas un but de cette épreuve.

Il s'agit plutôt de mettre en évidence leurs liens avec le problème étudié. Les théorèmes classiques sont considérés comme admis, leurs preuves relevant de l'épreuve de leçon. Cependant, le traitement d'un cas spécifique et original sera apprécié. Par exemple, la démonstration du théorème de Ford-Fulkerson n'est pas un développement attendu, mais par contre il est intéressant de montrer un exemple de situation non-triviale de l'application de l'algorithme.

L'exercice d'informatique

Le candidat dispose de 10 minutes pour présenter cet exercice. Le jury évalue la qualité du code et sa lisibilité. La clarté des explications et la justification des choix effectués, par exemple les structures de données ou la complexité du traitement en temps et en espace, sont des éléments d'appréciation. Une modification des données pourra être faite en cours de présentation. On attend un programme qui s'exécute correctement, mais un code inachevé doit aussi être présenté.

Il n'est pas utile de faire plus que l'exercice demandé. Cependant, le candidat peut choisir d'illustrer un développement par une présentation informatique plus large.

Ouvrages autorisés

Les candidats peuvent utiliser librement les ouvrages de la bibliothèque de l'agrégation dont la composition, pour la session 2006, est rappelée en annexe 3. Ils peuvent aussi emprunter les ouvrages mis à la disposition de tous les candidats par les centres de préparation à l'agrégation. Ces ouvrages sont rangés dans une des deux salles de la bibliothèque. Le nombre d'exemplaires de chaque titre étant limité, un ouvrage emprunté par un ou plusieurs candidats peut être indisponible.

Un candidat peut aussi utiliser tout ouvrage qu'il a apporté à la condition :

• qu'il soit en vente dans le commerce, ce qui se manifeste par la présence d'un numéro d'identification ISBN ;

• qu'il soit rédigé en langue française ou en langue anglaise ;

• qu'il soit vierge de toute annotation ;

• qu'il ne comporte pas des plans ou des développements tous faits, spécifiquement rédigés pour la préparation de l'agrégation : à cet égard une liste d'ouvrages interdits est affichée sur la porte de la bibliothèque.

Le président du jury, ou l'un des membres du jury, a toute autorité pour refuser l'utilisation d'un ouvrage ne remplissant pas l'ensemble de ces conditions.

À titre indicatif, on trouvera ci-après la liste des ouvrages non autorisés pour le concours 2006 :

AVEZ A. Analyse pour l'agrégation [Masson]
AVEZ A. La leçon d'analyse à l'Oral de l'agrégation [Masson]
AVEZ A. La leçon de géométrie à l'Oral de l'agrégation [Masson]
CHAMBERT-LOIR A. Exercices de mathématiques pour l'agrégation, tome I, 1re édition [Masson]
CORTIER J.P. Exercices corrigés d'algèbre et géométrie [CRDP de Champagne Ardenne]
DUMAS L. Modélisation à l'oral de l'agégation. Calcul Scientifique [Ellipses]
GUÉNARD F. Vademecum de l'oral d'analyse, agrégation de mathématiques [Eska]
MADÈRE K. Préparation à l'oral de l'agrégation. Leçon d'algèbre [Ellipses]
MADÈRE K. Préparation à l'oral de l'agrégation. Leçon d'analyse [Ellipses]
MADÈRE K. Développement pour leçon d'analyse, agrégation de mathématiques [Ellipses]
MADÈRE K. Développement pour leçon d'algèbre, agrégation de mathématiques [Ellipses]
MEUNIER P. Exercices pour l'agrégation interne de mathématiques [PUF]
MEUNIER P. Préparation à l'agrégation interne, IREM de Montpellier [PUF]
TOULOUSE P.S. Thèmes de probabilités et statistiques, agrégation de mathématiques [Dunod]

ANNEXE 1 : Leçons d'oral 2006 (options A, B et C)

Algèbre et géométrie

101 - Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
102 - Sous-groupes discrets de $\mathbf{R}^n$. Réseaux. Exemples.
103 - Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.
104 - Groupes finis. Exemples et applications.
105 - Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.
106 - Groupes finis de petit cardinal.
107 - Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.
108 - Sous-groupes finis de $\mathrm{O}(2, \mathbf{R})$, de $\mathrm{O}(3, \mathbf{R})$. Applications.
109 - Exemples de parties génératrices d'un groupe.
110 - Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.
111 - Nombres premiers. Applications.
112 - Exemples d'applications des idéaux d'un anneau commutatif unitaire.
113 - Anneaux principaux.
114 - Corps finis. Applications.
115 - Groupe des nombres complexes de module 1. Applications.
116 - Équations diophantiennes du premier degré $ax+by = c$. Autres exemples d'équations diophantiennes.
117 - Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.
118 - Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.
119 - Algèbre des polynômes à n indéterminées ($n \geqslant 2$). Polynômes symétriques. Applications.
120 - Racines des polynômes à une indéterminée. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme. Exemples et applications.
121 - Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.
122 - Matrices équivalentes. Matrices semblables. Applications.
123 - Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice. Résolution d'un système d'équations linéaires. Exemples et applications.
124 - Déterminant. Exemples et applications.

125 - Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

126 - Sous-espaces stables d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

127 - Endomorphismes diagonalisables.

128 - Exponentielle de matrices. Applications.

129 - Endomorphismes nilpotents.

130 - Polynômes d'endomorphismes. Polynômes annulateurs. Applications.

131 - Exemples de décompositions remarquables dans le groupe linéaire. Applications.

132 - Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

133 - Groupe orthogonal d'une forme quadratique. Générateurs. Exemples.

134 - Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.

135 - Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien de dimension finie.

136 - Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel hermitien de dimension finie.

137 - Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Formes réduites. Applications en dimensions 2 et 3.

138 - Coniques. Applications

139 - Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie ; convexité. Applications.

140 - Homographies de la droite complexe. Applications.

141 - Applications des nombres complexes à la géométrie.

142 - Angles : définitions et utilisation en géométrie.

143 - Utilisation des groupes en géométrie.

144 - Exemples de propriétés projectives et d'utilisation d'éléments à l'infini.

145 - Constructions à la règle et au compas.

146 - Applications affines. Groupe affine.

147 - Problèmes d'angles et de distances en dimension 2 ou 3.

148 - Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

Analyse et probabilités

201 - Espaces de fonctions. Exemples et applications.

202 - Exemples de parties denses et applications.

203 - Utilisation de la notion de compacité.

204 - Connexité. Exemples et applications.

205 - Espaces complets. Exemples et applications.

206 - Utilisation de théorèmes de point fixe.

207 - Prolongement de fonctions. Applications.

208 - Utilisation de la continuité uniforme en analyse.

209 - Utilisation de la dénombrabilité en analyse et en probabilités.

210 - Applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés. Exemples et applications.

211 - Utilisation de la dimension finie en analyse.

212 - Méthodes hilbertiennes.

213 - Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

214 - Applications du théorème d'inversion locale et du théorème des fonctions implicites.

215 - Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

216 - Étude de courbes. Exemples.

217 - Étude locale de surfaces. Exemples.

218 - Applications des formules de Taylor.

219 - Problèmes d'extremums.

220 - Équations différentielles $X' = f(t, X)$; exemples d'études qualitatives des solutions.

221 - Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

222 - Exemples d'équations différentielles. Solutions exactes ou approchées.

223 - Convergence des suites numériques. Exemples et applications.

224 - Comportement asymptotique des suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.

225 - Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples.

226 - Développement asymptotique d'une fonction d'une variable réelle.

227 - Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.

228 - Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

229 - Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

230 - Illustrer par des exemples et des contre-exemples la théorie des séries numériques.

231 - Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.

232 - Intégration des fonctions d'une variable réelle. Suites de fonctions intégrables.

233 - Espaces L^p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.

234 - Interversion d'une limite et d'une intégrale. Exemples et applications.

235 - Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.

236 - Problèmes de convergence et de divergence d'une intégrale sur un intervalle de $\mathbf{R}$.

237 - Méthodes de calcul approché d'intégrales.

238 - Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

239 - Transformation de Fourier, produit de convolution. Applications.

240 - Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
241 - Exemples d'utilisation de fonctions définies par des séries.
242 - Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.
243 - Fonctions d'une variable complexe, holomorphie. Exemples et applications.
244 - Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbf{C}$.
245 - Développement d'une fonction périodique en série de Fourier. Exemples et applications.
246 - Exemples de problèmes d'interversion de limites.
247 - Approximation des fonctions numériques par des fonctions polynomiales ou polynomiales par morceaux. Exemples.
248 - Le jeu de pile ou face (suites de variables de Bernoulli indépendantes).
249 - Loi binomiale, loi de Poisson. Applications.
250 - Indépendance d'événements et de variables aléatoires. Exemples.
251 - Parties convexes, fonctions convexes (d'une ou plusieurs variables). Applications.
252 - Variables gaussiennes. Applications.

ANNEXE 2 : Leçons 2006 pour l'option informatique

Leçons de mathématiques

Algèbre et géométrie

104 - Groupes finis. Exemples et applications.

105 - Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

107 - Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

110 - Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

111 - Nombres premiers. Applications.

114 - Corps finis. Applications.

118 - Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

120 - Racines des polynômes à une indéterminée. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme. Exemples et applications.

121 - Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

122 - Matrices équivalentes. Matrices semblables. Applications.

123 - Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice. Résolution d'un système d'équations linéaires. Exemples et applications.

124 - Déterminant. Exemples et applications.

125 - Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

129 - Endomorphismes nilpotents.

130 - Polynômes d'endomorphismes. Polynômes annulateurs. Applications.

132 - Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

134 - Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.

135 - Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien de dimension finie.

137 - Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Formes réduites. Applications en dimensions 2 et 3.

138 - Coniques. Applications

139 - Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie ; convexité. Applications.

141 - Applications des nombres complexes à la géométrie.

143 - Utilisation des groupes en géométrie.

147 - Problèmes d'angles et de distances en dimension 2 ou 3.

148 - Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

Analyse et probabilités

203 - Utilisation de la notion de compacité.

206 - Utilisation de théorèmes de point fixe.

210 - Applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés. Exemples et applications.

214 - Applications du théorème d'inversion locale et du théorème des fonctions implicites.

215 - Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

216 - Étude de courbes. Exemples.

218 - Applications des formules de Taylor.

221 - Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

222 - Exemples d'équations différentielles. Solutions exactes ou approchées.

224 - Comportement asymptotique des suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.

225 - Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples.

226 - Développement asymptotique d'une fonction d'une variable réelle.

228 - Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

230 - Illustrer par des exemples et des contre-exemples la théorie des séries numériques.

231 - Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.

232 - Intégration des fonctions d'une variable réelle. Suites de fonctions intégrables.

235 - Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.

238 - Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

239 - Transformation de Fourier, produit de convolution. Applications.

242 - Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

243 - Fonctions d'une variable complexe, holomorphie. Exemples et applications.

245 - Développement d'une fonction périodique en série de Fourier. Exemples et applications.

247 - Approximation des fonctions numériques par des fonctions polynomiales ou polynomiales par morceaux. Exemples.

249 - Loi binomiale, loi de Poisson. Applications.

252 - Variables gaussiennes. Applications.

Leçons d'informatique fondamentale

901 - Exemples de structures de données et de leurs applications.
902 - Diviser pour régner : exemples et applications.
903 - Exemples d'algorithmes de tri : complexité.
904 - Arbres binaires de recherche. Applications.
905 - Parcours de graphes : exemples et applications.
906 - Programmation dynamique : exemples et applications.
907 - Algorithmique du texte : exemples et applications.
908 - Automates finis. Exemples et applications.
909 - Langages rationnels. Exemples et applications.
910 - Langages algébriques. Exemples et applications.
911 - Automates à pile ; puissance et limites.
912 - Fonctions récursives primitives et non primitives.
913 - Machines de Turing.
914 - Décidabilité et indécidabilité.
915 - Classes P et NP, NP-complétude. Exemples.
916 - Formules booléennes. Représentation et satisfiabilité.
917 - Logique du premier ordre : syntaxe et sémantique.
918 - Méthode de résolution, programmation logique.
919 - Unification : algorithmes et applications.
920 - Réécriture et formes normales.
921 - Langages typés : objectifs, mise en œuvre, applications.
922 - Descriptions sémantiques des langages de programmation.
923 - Analyses lexicale et syntaxique : principes, mise en œuvre, applications.
924 - Typage statique : objectifs, mise en œuvre, applications.
925 - Génération de code pour une machine à pile : principes, mise en œuvre, applications.

ANNEXE 3 : La bibliothèque de l'agrégation

AABELSON H. **SUSSMAN G. J.** **SUSSMAN J.**	Structure and interpretation of computer programs	MIT PRESS
AHUÉS M. **CHATELIN F.**	Exercices de valeurs propres de matrices	MASSON
ALBERT L. **Collectif**	Cours et exercices d'informatique	VUIBERT
ALESSANDRI M.	Thèmes de géométrie	DUNOD
ALLOUCHE J. P. **SHALLIT J.**	Automatic sequences theory, applications, generalizations	CAMBRIDGE
AMAR E. **MATHERON É.**	Analyse complexe	CASSINI
ANDLER M. **BLOCH J. D.** **MAILLARD B.**	Exercices corrigés de Mathématiques • Tome 1A - Topologie • Tome 1B - Fonctions numériques • Tome 2 - Suites et séries numériques • Tome 3 - Analyse fonctionnelle • Tome 5 - Algèbre générale, polynômes • Tome 6 - Algèbre linéaire, première partie • Tome 7 - Algèbre linéaire, deuxième partie	ELLIPSES
ANDREWS G.	Number Theory	DOVER
APPLE A.W.	Modern compiler implementation • in C • in Java • in ML	CAMBRIGDE
ARIBAUD F. **VAUTHIER J.**	Mathématiques. Première année de DEUG	ESKA
ARNAUDIES J-M. **BERTIN J.**	Groupes, Algèbres et Géométrie • Tome I • Tome II	ELLIPSES

ARNAUDIES J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus d'analyse	Dunod
ARNAUDIES J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus d'algèbre bilinéaire et géométrie du cours de Mathématiques tome 4	Dunod
ARNAUDIES J-M. **FRAYSSE H.**	Cours de Mathématiques • 1. Algèbre • 2. Analyse • 3. Compléments d'analyse • 4. Algèbre bilinéaire et géométrie	Dunod
ARNOLD V.	Chapitre supplémentaire de la théorie des équations différentielles ordinaires	MIR
ARNOLD V.	Équations différentielles ordinaires	MIR
ARTIN E.	Algèbre géométrique	Gauthier-Villars
ARTIN E.	Algèbre géométrique	Gabay
ARTIN M.	Algebra	Prentice Hall
AUBIN J.P.	Analyse fonctionnelle appliquée • Tome 1 • Tome 2	PUF
AUTEBERT J. M.	Calculabilité et décidabilité	Masson
AUTEBERT J. M.	Théorie des langages et des automates	Masson
AUDIN M.	Géométrie de la licence à l'agrégation	Belin
AVANISSIAN V.	Initiation à l'analyse fonctionnelle	PUF
AVEZ A.	Calcul différentiel	Masson

BAASE S. **VAN GELDER A.**	Computer algorithms Introduction to design & analysis	Addison Wesley
BADOUEL E. **BOUCHERON S.** **DICKY A., PETIT A.** **SANTHA M., WEIL P., ZEITOUN M.**	Problèmes d'informatique fondamentale	Springer
BAKHVALOV N.	Méthodes numériques	MIR
BARANGER J.	Analyse numérique	Hermann
BARBE Ph. **LEDOUX M.**	Probabilité (De la licence à l'agrégation)	Belin
BARRET M. **BENIDIR M.**	Stabilité des filtres et des systèmes linéaires	Dunod
BASILI B. **PESKINE C.**	Algèbre	Diderot, éditeur Arts et Sciences
BASS J.	Cours de Mathématiques • Tome 1 • Tome 2	Masson
BAUER F. L.	Decrypted secrets. Methods and maxims of cryptology	Springer
BENDER C. **ORSZAG S.**	Advanced mathematical methods for scientists and engineers	Mc Graw Hill
BERGER M. **GOSTIAUX B.**	Géométrie différentielle	Armand Colin
BERGER M. **BERRY J-P.** **PANSU P.** **SAINT RAYMOND X.**	Problèmes de géométrie commentés et rédigés	Cédic/Nathan

BERGER M.	Géométrie • Index • 1. Action de groupes, espaces affines et projectifs • 2. Espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères • 3. Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes • 4. Formes quadratiques, quadriques et coniques • 5. La sphère pour elle-même, géométrie hyperbolique, l'espace des sphères	CÉDIC/NATHAN
BERGER M.	Géométrie tome 2	NATHAN
BICKEL P.J. **DOKSUM K.A.**	Mathematical statistics	PRENTICE HALL
BIDEGARAY B. **MOISAN L.**	Petits problèmes de mathématiques appliquées et de modélisation	SPRINGER
BIGGS NORMAN L.	Discrete mathematics	OXFORD SCIENCE PUBLICATIONS
BLANCHARD A.	Les corps non commutatifs	PUF
BOAS R.	A primer of real functions	MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA
BON J.L.	Fiabilité des systèmes	MASSON
BONNANS J.F. **GILBERT J.C.** **LEMARECHAL C.** **SAGASTIZABAL C.**	Optimisation numérique	SPRINGER

BOURBAKI N.	Éléments de Mathématique • Topologie générale, chapitres V à X • Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à VII • Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à III • Fascicule XIII Intégration, chapitres I à IV	Hermann
BOUVIER A. **RICHARD D.**	Groupes	Hermann
BREMAUD P.	Introduction aux probabilités	Springer
BREZIS H.	Analyse fonctionnelle, théorie et applications	Masson
BRIANE M. **PAGES G.**	Théorie de l'intégration Cours et exercices, 3ème édition	Vuibert
BROUSSE P.	Mécanique MP - PC.- Spéciales A. A'. B. B'.	Armand Colin
BRUCE J.W. **GIBLIN P.J.** **RIPPON P.J.**	Microcomputers and Mathematics	Cambridge
CABANE R. **LEBOEUF C.**	Algèbre linéaire • 1. Espaces vectoriels , Polynômes • 2. Matrices et réduction	Ellipses
CABANNES H.	Cours de Mécanique générale	Dunod
CALAIS J.	Éléments de théorie des anneaux	PUF
CALAIS J.	Éléments de théorie des groupes	PUF
CARREGA J.C.	Théorie des corps	Hermann
CARTAN H.	Calcul différentiel (1971)	Hermann

CARTAN H.	Cours de calcul différentiel (1977)	Hermann
CARTAN H.	Formes différentielles	Hermann
CARTAN H.	Théorie élémentaire des fonctions analytiques	Hermann
CARTIER P. **KAHANE J.P.** **ARNOLD V. et al.**	Leçons de mathématiques d'aujourd'hui	Cassini
CASTLEMAN K.R.	Digital image processing	Prentice Hall
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.** **MAILLOT V.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Analyse 1 (seconde édition revue et corrigée)	Masson
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation • Analyse 2 • Analyse 3	Masson
CHATELIN F.	Valeurs propres de matrices	Masson
CHILDS L.	A concrete introduction to Higher Algebra	Springer Verlag
CHOQUET G.	Cours d'analyse Tome II : Topologie	Masson
CHOQUET G.	L'enseignement de la géométrie	Hermann
CHRISTOL G. **PILIBOSSIAN P.** **YAMMINE S.**	• Algèbre 1 • Algèbre 2	Ellipses
CIARLET P.G.	Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation	Masson
COGIS O. **ROBERT C.**	Au-delà des ponts de Könisberg. Théorie des graphes. Problèmes, théorie, algorithmes	Vuibert

COHN P.M.	Algebra Volume 1	John Wiley
COLLET P.	Modeling binary data	Chapman and Hall
COMBROUZE A.	Probabilités et statistiques	PUF
CORI R. **LASCAR D.**	Logique mathématique • 1. Calcul propositionnel, algèbre de Boole, calcul des prédicats • 2. Fonctions récursives, théorème de Gödel, théorie des ensembles, théorie des modèles	Dunod
CORMEN T. H. **LEISERSON C. E.** **RIVEST R. L.** **STEIN C.**	Introduction à l'algorithmique	Dunod
COTRELL M. **GENON-CATALOT V.** **DUHAMEL C.** **MEYRE T.**	Exercices de probabilités	Cassini
COURANT R. **HILBERT D.**	Methods of Mathematical Physics • Volume 1 • Volume 2	John Wiley
COUSINEAU G. **MAUNY M.**	Approche fonctionnelle de la programmation	Ediscience
COXETER H.S.M.	Introduction to Geometry	John Wiley
CVITANOVIC P.	Universality in Chaos	Institute of Physics Publishing
DACUNHA-CASTELLE D. **DUFLO M.**	• Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe • Exercices de Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe	Masson
DACUNHA-CASTELLE D. **REVUZ D.** **SCHREIBER M.**	Recueil de problèmes de calcul des probabilités	Masson

DARTE A. **VAUDENAY S.**	Algorithmique et optimisation	DUNOD
DAVID R. **NOUR K.** **RAFFALI C.**	Introduction à la logique Théorie de la démonstration	DUNOD
DEHEUVELS P.	L'intégrale	PUF
DEHEUVELS P.	L'intégrale	QUE-SAIS-JE ? PUF
DEHEUVELS R.	Formes quadratiques et groupes classiques	PUF
DEHORNOY P.	Mathématiques de l'informatique	DUNOD
DEHORNOY P.	Complexité et décidabilité	SPRINGER
DELTHEIL R. **CAIRE D.**	Géométrie et compléments	JACQUES GABAY
DEMAILLY J.P.	Analyse numérique et équations différentielles	PU GRENOBLE
DEMAZURE M.	Catastrophes et bifurcations	ELLIPSES
DEMAZURE M.	Cours d'algèbre : primalité, divisibilité, codes	CASSINI
DEMBO A. **ZEITOUNI O.**	Large deviations techniques and applications	SPRINGER
DESCOMBES R.	Éléments de théorie des nombres	PUF
DESCHAMPS **WARUSFEL** **MOULIN, RUAUD** **MIQUEL, SIFRE**	Mathématiques, cours et exercices corrigés • 1ère année MPSI, PCSI, PTSI • 2ème année MP, PC, PSI	DUNOD
DEVANZ C. **ELHODAIBI M.**	Exercices corrigés de Mathématiques posés à l'oral des Ensi, Tome 2	ELLIPSES

DIEUDONNÉ J.	Algèbre linéaire et géométrie élémentaire	HERMANN
DIEUDONNÉ J.	Calcul infinitésimal	HERMANN
DIEUDONNÉ J.	Sur les groupes classiques	HERMANN
DIEUDONNÉ J.	Éléments d'Analyse. • Fondements de l'analyse moderne • Éléments d'Analyse Tome 2.	GAUTHIER-VILLARS
DIXMIER J.	Cours de Mathématiques du premier cycle • Première année • Deuxième année	GAUTHIER-VILLARS
DUBUC S.	Géométrie plane	PUF
DUCROCQ A. **WARUSFEL A.**	Les Mathématiques, plaisir et nécessité Un parcours guidé dans l'univers des mathématiques	VUIBERT
DUGAC P.	Histoire de l'analyse. Autour de la notion de limite et de ses voisinages	VUIBERT
DYM H. **Mac KEAN H.P.**	Fouriers series and integrals	ACADEMICS PRESS
EBBINGHAUS, HERMES **HIRZEBRUCH** **KOECHER** **LAMOTKE, MAINZER** **NEUKIRSCH, PRESTEL,** **REMMERT**	Les Nombres	VUIBERT
EL HAJ LAAMRI	Mesures, intégration et transformée de Fourier des fonctions	DUNOD
EL KACIMI ALAOUI A. **QUEFFÉLEC H.** **SACRÉ C.** **VASSALLO V.**	Quelques aspects des mathématiques actuelles	ELLIPSES

EPISTEMON L. (OVAERT J.L. VERLEY J.L.)	Exercices et problèmes • Analyse. Volume 1 • Algèbre.	Cédic/Nathan
EXBRAYAT J.M. MAZET P.	Notions modernes de mathématiques • Algèbre 1 : Notions fondamentales de la théorie des ensembles • Analyse 1 : Construction des espaces fondamentaux de l'analyse • Analyse 2 : Éléments de topologie générale	Hatier
FADDEEV D. SOMINSKI I.	Recueil d'exercices d'Algèbre Supérieure	MIR
FAIRBANK X. BEEF C.	POX - Exercices posés au petit oral de l'X	Ellipses
FARAUT J.	Analyse sur les groupes de Lie	Calvage et Mounet
FARAUT J. KHALILI E.	Arithmétique Cours, Exercices et Travaux Pratiques sur Micro-Ordinateur	Ellipses
FELLER W.	An introduction to probability theory and its applications • Volume 1 • Volume 2	John Wiley
FERRIER J.P.	Mathématiques pour la licence	Masson
FLORY G.	Exercices de topologie et analyse avec solutions • Tome 1 - Topologie • Tome 2 - Fonctions d'une variable réelle • Tome 3 - Fonctions différentiables, intégrales multiples • Tome 4 - Séries, équations différentielles	Vuibert
FRANCHINI J. JACQUENS J-C.	Mathématiques Spéciales • Algèbre • Analyse 1 • Analyse 2	Ellipses
FRANCINOU S. GIANELLA H. NICOLAS S.	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Algèbre 1	Cassini

FRANCINOU S. **GIANELLA H.**	Exercices de Mathématiques Algèbre 1	MASSON
FRENKEL J.	Géométrie pour l'élève-professeur	HERMANN
FRESNEL J.	Géométrie algébrique	UFR MATHS BORDEAUX
FRESNEL J.	Géométrie	IREM DE BORDEAUX
FRESNEL J.	Anneaux	HERMANN
FRESNEL J.	Groupes	HERMANN
FRESNEL J.	Méthodes modernes en géométrie	HERMANN
FUHRMANN P.	A polynomial approach to linear algebra	SPRINGER
GABRIEL P.	Matrices, géométrie, algèbre linéaire	CASSINI
GANTMACHER F.R.	Théorie des matrices • Tome 1 • Tome 2	DUNOD
GENET J.	Mesure et intégration. Théorie élémentaire. Cours et exercices résolus	VUIBERT
GHIDAGLIA J.M.	Petits problèmes d'analyse	SPRINGER
GOBLOT R.	Algèbre commutative	MASSON
GOBLOT R.	Thèmes de géométrie	MASSON
GODEMENT R.	Analyse • Tome 1 • Tome 2 • Tome 3	SPRINGER

GODEMENT R.	Cours d'Algèbre	HERMANN
GOLUB G.H. **VAN LOAN C.F.**	Matrix computations	WILEY
GONNORD S. **TOSEL N.**	Thèmes d'Analyse pour l'agrégation • Topologie et Analyse fonctionnelle • Calcul différentiel	ELLIPSES
GOSTIAUX B.	Cours de mathématiques spéciales • Tome 1 - Algèbre • Tome 2 - Topologie et analyse réelle • Tome 3 - Analyse fonctionnelle et calcul différentiel • Tome 4 - Géométrie affine et métrique • Tome 5 - Géométrie : arcs et nappes	PUF
GOURDON X.	Les maths en tête, mathématiques pour M' • Algèbre • Analyse	ELLIPSES
GRAMAIN A.	Géométrie élémentaire	HERMANN
GRAMAIN A.	Intégration	HERMANN
GRIMMET G. **WELSH D.**	Probability (an introduction)	OXFORD
GUJARATI D. N.	Basic Econometrics	WILEY
HABSIEGER L. **MARTEL V.**	Exercices corrigés posés à l'oral des ENSI Tome 1 Analyse	ELLIPSES
HALMOS P.	Problèmes de mathématiciens petits et grands	CASSINI
HAMMAD P.	Cours de probabilités	CUJAS
HAMMAD P. **TARANCO A.**	Exercices de probabilités	CUJAS

HAMMER R. **HOCKS M.** **KULISH U.** **RATZ D.**	C++ toolbox for verified computing	Springer
HARDY G.H. **WRIGH E.M.**	An introduction to the theory of numbers	Oxford
HAREL D.	Computer LTD. What they really can't do	Oxford
HAREL D. **FELDMAN Y.**	Algorithmics. The spirit of computing	Addison Wesley
HENNEQUIN P.L. **TORTRAT A.**	Théorie des probabilités et quelques applications	Masson
HENRICI P.	Applied and Computational Complex Analysis • Volume 1 • Volume 2 • Volume 3	Wiley-Interscience
HERVE M.	Les fonctions analytiques	PUF
HIRSCH F. **LACOMBE G.**	Eléments d'analyse fonctionnelle	Masson
HOPCROFT J.E. **MOTWANI R.** **ULLMAN J. D.**	Introduction to automata theory, Languages and Computation	Addison Wesley
HOUZEL C.	Analyse mathématique : cours et exercices	Belin
IRELAND K. **ROSEN M.**	A Classical Introduction to Modern Numbers Theory	Springer Verlag
ISAAC R.	Une initiation aux probabilités (Trad. R. Mansuy)	Vuibert-Springer
ITARD J.	Les nombres premiers	Que sais-je ? PUF
JACOBSON N.	Basic Algebra • Tome I • Tome II	Freeman and Co

KAHANE J.P. **GILLES P.**	Séries de Fourier et ondelettes	CASSINI
KATZNELSON Y.	An Introduction to Harmonic Analysis	DOVER
KERBRAT Y. **BRAEMER J-M.**	Géométrie des courbes et des surfaces	HERMANN
KNUTH D.E.	The art of computer programming • Volume 1 : Fundamental algorithms • Volume 2 : Seminumerical algorithms • Volume 3 : Sorting and Searching	ADDISON-WESLEY
KOLMOGOROV A. **FOMINE S.**	Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle	ELLIPSES
de KONNINCK J.M. **MERCIER A.**	Introduction à la théorie des nombres	MODULO
KÖRNER T.W.	Fourier analysis	CAMBRIDGE
KÖRNER T.W.	Exercises for Fourier analysis	CAMBRIDGE
KREE P.	Introduction aux Mathématiques et à leurs applications fondamentales M.P.2	DUNOD
KRIVINE H.	Exercices de Mathématiques pour physiciens	CASSSINI
KRIVINE J.L.	Théorie axiomatique des ensembles	PUF
LAFONTAINE J.	Introduction aux variétés différentielles	PUF
LALEMENT R.	Logique, réduction, résolution	MASSON
LANG S.	Algèbre linéaire • Tome 1 • Tome 2	INTEREDITIONS

LANG S.	Algebra	Addison-Wesley
LANG S.	Linear Algebra	Addison-Wesley
LAVILLE G.	Courbes et surfaces	Ellipses
LAVILLE G.	Géométrie pour le CAPES et l'Agrégation	Ellipses
LAX P. D.	Linear Algebra	Wiley
LEBORGNE D.	Calcul différentiel et géométrie	PUF
LEBOSSÉ C. **HÉMERY C.**	Géométrie. Classe de Mathématiques	Jacques Gabay
LEHNING H. **JAKUBOWICZ D.**	Mathématiques supérieures et spéciales 2 : Dérivation	Masson
LEHNING H.	Mathématiques supérieures et spéciales • Tome 1 : Topologie • Tome 3 : Intégration et sommation • Tome 4 : Analyse en dimension finie • Tome 5 : Analyse fonctionnelle	Masson
LEICHTNAM E. **SCHAUER X.**	Exercices corrigés de mathématiques posés aux oraux X-ENS • Tome I - Algèbre 1 • Tome 2 - Algèbre et géométrie • Tome 3 - Analyse 1 • Tome 4 - Analyse 2	Ellipses
LELONG-FERRAND J. **ARNAUDIES J.M.**	Cours de Mathématiques • Tome 1 pour M-M' : Algèbre • Tome 1 pour A-A' : Algèbre • Tome 2 : Analyse • Tome 3 : Géométrie et cinématique • Tome 4 : Equations différentielles, intégrales multiples	Dunod
LELONG-FERRAND J.	Géométrie différentielle	Masson

LELONG-FERRAND J.	Les fondements de la géométrie	PUF
LESIEUR L. **MEYER Y.** **JOULAIN C.** **LEFEBVRE J.**	Algèbre linéaire, géométrie	Armand Colin
LION G.	Algèbre pour la licence Cours et exercices (2ème édition)	Vuibert
LION G.	Géométrie du plan Cours complet avec 600 exercices résolus	Vuibert
LOTHAIRE M.	Algebraic combinatorics on words	Cambridge
MAC LANE S. **BIRKHOFF G.**	Algèbre • 1 : Structures fondamentales • 2 : Les grands théorèmes	Gauthier-Villars
MACKI J. **STRAUSS A.**	Introduction to optimal control theory	Springer
MALLIAVIN M. P. **WARUSFEL A.**	Algèbre linéaire et géométrie classique. Exercices	Masson
MALLIAVIN M. P.	Les groupes finis et leurs représentations complexes	Masson
MALLIAVIN P.	Géométrie différentielle intrinsèque	Hermann
Manuels Matlab	• Using Matlab version 5 • Using Matlab version 6 • Statistics Toolbox	
MARCE S. **DEVAL-GUILLY E.**	Problèmes corrigés des ENSI	Ellipses
MASCART H. **STOKA M.**	Fonctions d'une variable réelle • Tome 2 : Exercices et corrigés • Tome 3 : Exercices et corrigés • Tome 4 : Exercices et corrigés	PUF
MAWHIN J.	Analyse : fondements, technique, évolutions	De Boeck Université

MAZET P.	Algèbre et géométrie pour le CAPES et l'Agrégation	ELLIPSES
MERKIN D.	Introduction to the theory of stability	SPRINGER
MÉTIVIER M.	Notions fondamentales de la théorie des probabilités	DUNOD
MÉTIVIER M.	Probabilités : dix leçons d'introduction. École Polytechnique	ELLIPSES
MEUNIER	Agrégation interne de Mathématiques Exercices d'oral corrigés et commentés • Tome 2	PUF
MIGNOTTE M.	Algèbre concrète, cours et exercices	ELLIPSES
MIGNOTTE M.	Mathématiques pour le calcul formel	PUF
MITCHELL J. C.	Concepts in programming languages	CAMBRIDGE
MNEIMNÉ R.	Eléments de géométrie : action de groupes	CASSINI
MNEIMNÉ R.	Réduction des endomorphismes	CALVAGE ET MOUNET
MNEIMNÉ R. **TESTARD F.**	Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques	HERMANN
MOISAN J. **VERNOTTE A.** **TOSEL N.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales Analyse : suites et séries de fonctions	ELLIPSES
MOISAN J. **VERNOTTE A.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales Analyse : topologie et séries	ELLIPSES

MONIER J.M.	Cours de mathématiques • Analyse 1 MPSI, PCSI, PTSI • Analyse 2 MPSI, PCSI, PTSI • Analyse 3 MP, PSI, PC, PT • Analyse 4 MP, PSI, PC, PT • Algèbre 1 MPSI, PCSI, PTSI • Algèbre 2 MP, PSI, PC, PT • Exercices d'analyse MPSI • Exercices d'analyse MP • Exercice d'algèbre et géométrie MP	DUNOD
MUTAFIAN C.	Le défi algébrique • Tome 1 • Tome 2	VUIBERT
NAGEL E. **NEWMAN J. R.** **GÖDEL K.** **GIRARD J. Y.**	Le théorème de Gödel	SEUIL
NAUDIN P. **QUITTE C.**	Algorithmique algébrique avec exercices corrigés	MASSON
NEVEU J.	Base mathématique du calcul des probabilités	MASSON
NIVEN I.	Irrational numbers	MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA
NORRIS J.R.	Markov chains	CAMBRIDGE
OPREA J.	Differential geometry	PRENTICE HALL
OUVRARD J.Y.	• Probabilités 1 (capes, agrégation) • Probabilités 2 (maîtrise, agrégation)	CASSINI
PAGES G. **BOUZITAT C.**	En passant par hasard ... Les probabilités de tous les jours	VUIBERT
PAPINI O. **WOLFMANN J.**	Algèbre discrète et codes correcteurs	SPRINGER

PEDOE D.	Geometry- A comprehensive course	DOVER
PERKO L.	Differential equation and dynamical systems	SPRINGER
PERRIN D.	Cours d'Algèbre	ELLIPSES
PERRIN D.	Cours d'Algèbre	ENSJF
PERRIN-RIOU B.	Algèbre, arithmétique et MAPLE	CASSINI
PETAZZZONI B.	Seize problèmes d'informatique	SPRINGER
PÓLYA G. **SZEGÖ G.**	Problems and Theorems in Analysis • Volume I • Volume II	SPRINGER VERLAG
POMMELLET A.	Agrégation de Mathématiques. Cours d'Analyse	ELLIPSES
QUEFFELEC H. **ZUILY C.**	Éléments d'analyse	DUNOD
RALSTON A. **RABINOWITCH P**	A first curse in numerical analysis	INTERNATINAL STUDENT EDITION
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Cours de Mathématiques spéciales • 1- Algèbre • 2- Algèbre et applications à la géométrie • 3- Topologie et éléments d'analyse • 4- Séries et équations différentielles • 5- Applications de l'analyse à la géométrie	MASSON
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Exercices avec solutions • Algèbre • Analyse 1 • Analyse 2	MASSON
RAO C.R.	Linear statistical inference and its application	WILEY

REINHARDT F. **SOEDER H.**	Atlas des mathématiques	LIVRE DE POCHE
RIDEAU F.	Exercices de calcul différentiel	HERMANN
RIO E.	Théorie asymptotique des processus aléatoires faiblement dépendants	SPRINGER
ROBERT C.	Contes et décomptes de la statistique - Une initiation par l'exemple	VUIBERT
ROLLAND R.	Théorie des séries 2- Séries entières	CÉDIC/NATHAN
ROMBALDI J.E.	Thèmes pour l'agrégation de mathématiques	EDP SCIENCES
ROMBALDI J.E.	Analyse matricielle	EDP SCIENCES
ROMBALDI J.E.	Interpolation, approximation Analyse pour l'agrégation	VUIBERT
RUAUD J.F. **WARUSFEL A.**	Exercices de Mathématiques Algèbre 3	MASSON
RUDIN W.	Analyse réelle et complexe	MASSON
RUDIN W.	Functional analysis	MC GRAW HILL
RUDIN W.	Real and complex analysis	MC GRAW HILL
SAKS S. **ZYGMUND A.**	Fonctions analytiques	MASSON
SAMUEL P.	Géométrie projective	PUF
SAMUEL P.	Théorie algébrique des nombres	HERMANN

SARMANT M.C. **MERLIER T.** **PILIBOSSIAN Ph.** **YAMMINE S.**	Analyse 1	Ellipses
SAUVAGEOT F.	Petits problèmes de géométrie et d'algèbre	Springer
SAUX PICARD P.	Cours de calcul formel - Algorithmes fondamentaux	Ellipses
SAVIOZ J.C.	Algèbre linéaire, cours et exercices	Vuibert
SCHWARTZ L.	Analyse • I Topologie générale et analyse fonctionnelle • II Calcul différentiel et équations différentielles	Hermann
SCHWARTZ L.	Cours d'Analyse	Hermann
SEDGEWICK R.	Algorithms	Addison Wesley
SEDGEWICK R.	Algorithmes en Java	Pearson Education
SEDGEWICK R.	Algorithmes en langage C	Dunod
SELBERHERR S. **STIPPEL H.** **STRASSER E.**	Simulation of semi-conductor devices and processes	Springer
SERRE J.P.	Cours d'arithmétique	PUF
SERVIEN Cl.	• Analyse 3 • Analyse 4	Ellipses
SIDLER J.C.	Géométrie Projective	Dunod
SIPSER M.	Introduction to the theory of computation	Thomson C. T.

SKANDALIS G.	Topologie et analyse	DUNOD
STANLEY R.P.	Enumerative combinatorics Volume I	WADDWORTH AND BROOKS
SZPIRGLAS A.	Exercices d'algèbre	CASSINI
TAUVEL P.	Cours de Géométrie	DUNOD
TAUVEL P.	Mathématiques générales pour l'agrégation	MASSON
TAUVEL P.	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Algèbre 2	MASSON
TENENBAUM G. **WU J.**	Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres T 2	S. M. F.
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres T 1	S. M. F.
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres	INSTITUT ELIE CARTAN
TENENBAUM G. **MENDÈS-FRANCE M.**	Les nombres premiers	QUE SAIS-JE ? PUF
TISSERON C.	Géométries affine, projective et euclidienne	HERMANN
TISSIER A.	Mathématiques générales : exercices avec solutions	BRÉAL
TITCHMARSH E.C.	The theory of functions	OXFORD
TORTRAT A.	Calcul des probabilités et introduction aux processus aléatoires	MASSON
TRIGNAN J.	Constructions géométriques et courbes remarquables	VUIBERT

TRUFFAULT B.	Exercices de géométrie élémentaires	IREM des Pays de Loire
TURING A **GIRARD J. Y.**	La Machine de Turing	Seuil
VALIRON G.	Cours d'analyse mathématique • I Théorie des fonctions • II Équations fonctionnelles - Applications	Masson
VAUQUOIS B.	Outils Mathématiques. Probabilités	Hermann
VAUTHIER J. **PRAT J-J.**	Cours d'Analyse Mathématique de l'Agrégation	Masson
WAGSCHAL C.	Fonctions holomorphes Équations différentielles	Hermann
WARUSFEL A.	Structures algébriques finies	Classiques Hachette
WARUSFEL, ATTALI **COLLET, GAUTIER** **NICOLAS**	Mathématiques • Analyse • Arithmétique • Géométrie • Probabilités	Vuibert
WEST D. B.	Introduction to graph theory	Prentice Hell
WHITTAKER E.T. **WATSON G.N.**	A course of modern analysis	Cambridge
WILF H.	Generatingfunctionology	Academic Press
WILLEM M.	Analyse fonctionnelle élémentaire	Cassini
WINSKEL G.	The formal semantics of programming languages	MIT Press
YALE P.B.	Geometry and Symmetry	Dover

YOUNG D.M. **GREGORY R.T.**	A survey of numerical mathematics	Dover
ZÉMOR G.	Cours de cryptographie	Cassini
ZUILY Cl. **QUEFFELEC H.**	Éléments d'analyse pour l'agrégation	Masson