MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

DIRECTION DES PERSONNELS ENSEIGNANTS

RAPPORT DE JURY DE CONCOURS

AGRÉGATION DE MATHÉMATIQUES

CONCOURS EXTERNE

Session 2005

LES RAPPORTS DES JURYS DES CONCOURS SONT ÉTABLIS SOUS LA RESPONSABILITÉ DES PRÉSIDENTS DE JURY

Composition du jury

Directoire

Moisan Jacques, président	Inspecteur général de l'éducation nationale
Chevallier Jean-Marie, secrétaire général	Maître de conférences
Foulon Patrick, vice-président	Professeur des universités
Lichnewsky Alain, vice-président	Professeur des universités
Marchal Jeannette, vice-présidente	Inspectrice générale de l'éducation nationale
van der Oord Eric, vice-président	Inspecteur général de l'éducation nationale
Boisson François	Professeur de chaire supérieure
Le Dret Hervé	Professeur des universités
Loubes Jean-Michel	Chargé de recherches
Mestre Jean-François	Professeur des universités
Petazzoni Bruno	Professeur de chaire supérieure
Torossian Charles	Chargé de recherches

Jury

Airault Hélène	Professeure des universités
Albert Luc	Professeur de chaire supérieure
Apparicio Carine	Professeure agrégée
Asselah Amine	Maître de conférences
Aymard Catherine	Professeure de chaire supérieure
Badulescu Ioan	Maître de conférences
Barbolosi Dominique	Maître de conférences
Bardet Jean-Marc	Professeur des universités
Barral Julien	Maître de conférences
Beaurpère Karine	Professeure agrégée
Becker Marc	Professeur de chaire supérieure
Belabas Karim	Maître de conférences
Bennequin Daniel	Professeur des universités
Bonnefont Claire	Professeure de chaire supérieure
Borel Agnès	Professeure de chaire supérieure
Boucher Delphine	Maître de conférences
Bougé Luc	Professeur des universités
Boyer Pascal	Maître de conférences
Burban Anne	Professeure de chaire supérieure
Cabane Robert	Professeur de chaire supérieure
Cadre Benoît	Professeur des universités
Chanet Françoise	Professeure de chaire supérieure
Chevallier Marie-Elisabeth	Professeure de chaire supérieure
Clozel Laurent	Professeur des universités
Comte Myriam	Maître de conférences

Cortella Anne	Maître de conférences
Czarnecki Marc-Olivier	Professeur des universités
Delebecque François	Directeur de recherches
Delezoide Pierre	Professeur de chaire supérieure
Devie Hervé	Professeur de chaire supérieure
Djadli Zindine	Maître de conférences
Fayolle Guy	Directeur de recherches
Fernandez Catherine	Professeure de chaire supérieure
Frossard - Feaux de Lacroix Emmanuelle	Maître de conférences
Furter Jean-Philippe	Maître de conférences
Gaussier Hervé	Professeur des universités
Geoffre Rosemarie	Professeure de chaire supérieure
Gerbeau Jean Frédéric	Chargé de recherches
Goldsztejn Emmanuel	Professeur de chaire supérieure
Hanrot Guillaume	Maître de conférences
Harinck Pascale	Chargée de recherches
Hijazi Oussama	Professeur des universités
Hirsinger Odile	Professeure de chaire supérieure
Hoffmann Marc	Professeur des universités
Isaïa Jérôme	Professeur agrégé
Koseleff Pierre-Vincent	Maître de conférences
Kourkova Irina	Maître de conférences
Labbé Stéphane	Maître de conférences
Lachand-Robert Thomas	Professeur des universités
Latrémoliére Evelyne	Professeure de chaire supérieure
Le Calvez Patrice	Professeur des universités
Le Goff Claire	Professeure agrégée
Le Nagard Eric	Professeur de chaire supérieure
Lévy Thierry	Chargé de recherches
Lods Véronique	Professeure agrégée
Louboutin Roland	Professeur de chaire supérieure
Mahieux Annick	Professeure de chaire supérieure
Maillot Vincent	Chargé de recherches
Martineau Catherine	Professeure de chaire supérieure
Meier Isabelle	Professeure de chaire supérieure
Merlevede Castano Florence	Maître de conférences
Méril Alex	Professeur des universités
Mézard Ariane	Maître de conférences
Miclo Laurent	Directeur de recherches
Mons Pascal	Professeur de chaire supérieure
Miquel Anne	Professeure agrégée
Mons Pascal	Professeur agrégé
Moroianu Andrei	Chargé de recherches
Nivoche Stéphanie	Maître de conférences
Nizard Alain	Professeur de chaire supérieure
Paradan Paul-Emile	Maître de conférences
Patras Frédéric	Chargé de recherches

Pietrus Alain	Professeur des universités
Prieur Clémentine	Maître de conférences
Queffélec Hervé	Professeur des universités
Quentin Thierry	Maître de conférences
Quercia Michel	Professeur de chaire supérieure
Rigny Agnès	Professeure de chaire supérieure
Saada Ellen	Chargée de recherches
Sabot Christophe	Chargé de recherches
Sauzin David	Chargé de recherches
Sidaner Sophie	Professeure de chaire supérieure
Sitz-Carmona Nathalie	Professeure de chaire supérieure
Skandalis Georges	Professeur des universités
Szpirglas Aviva	Professeure des universités
Tchou Nicoletta	Maître de conférences
Tosel Nicolas	Professeur de chaire supérieure
Vaugelade Elisabeth	Maître de conférences
Vincent Christiane	Professeure de chaire supérieure
Wagschal Claude	Professeur des universités
Watbled Frédérique	Maître de conférences
Yebbou Johan	Professeur de chaire supérieure

Déroulement du concours

Déroulement de la session 2005

Les épreuves écrites se sont déroulées selon le calendrier suivant :

- Épreuve de mathématiques générales : mercredi 30 mars 2005
- Épreuve d'analyse et probabilités : jeudi 31 mars 2005

La liste d'admissibilité a été publiée le lundi 6 juin 2005.

L'oral s'est déroulé du 24 juin au 16 juillet au lycée Marcelin-Berthelot de Saint-Maur-des-Fossés. La liste d'admission a été publiée le mardi 19 juillet 2005.

L'agrégation externe de mathématiques

Le nom officiel, « concours externe de recrutement de professeurs agrégés stagiaires », montre clairement qu'il s'agit d'un concours de recrutement de professeurs agrégés destinés, selon leur statut, à l'enseignement secondaire (lycées d'enseignement général et technologique et, exceptionnellement, collège) ou à l'enseignement supérieur (universités, instituts universitaires de technologie, grandes Écoles, classes préparatoires aux grandes Écoles, sections de techniciens supérieurs). À l'issue du concours, les candidats admis sont normalement placés comme stagiaires. Les différentes possibilités de stage (stage en formation à l'IUFM, stage en situation dans un établissement secondaire, stage en CPGE, stage comme ATER, etc.) sont détaillées dans la note de service n°2004-078 du 7 mai 2004.

Des reports de stage peuvent être accordés par la DPE[1] pour permettre aux lauréats d'effectuer des études doctorales ou des travaux de recherche dans un établissement ou organisme public français[2] ; les élèves des Écoles Normales Supérieures en bénéficient automatiquement pour terminer leur période de scolarité.

Le programme, la nature des épreuves écrites et orales, font l'objet de publications au Bulletin Officiel du ministère de l'éducation nationale (B.O.), et leur actualisation peut être consultée sous forme électronique sur le site de la DPE, à l'adresse

`http://www.education.gouv.fr/siac/siac2/default.htm`

ou sur le site de l'agrégation externe de mathématiques, à l'adresse

`http://www.agreg.org`,

où se trouvent aussi tous les renseignements pratiques concernant les sessions à venir.

---

[1] Direction des personnels enseignants (enseignements de second degré) du ministère de l'éducation nationale de l'enseignement supérieur et de la recherche.

[2] La DPE demande une attestation de poursuite de recherches, ou à défaut une autorisation à s'inscrire dans une formation de troisième cycle universitaire. Les candidats doivent se munir d'une telle attestation et la fournir pendant l'oral.

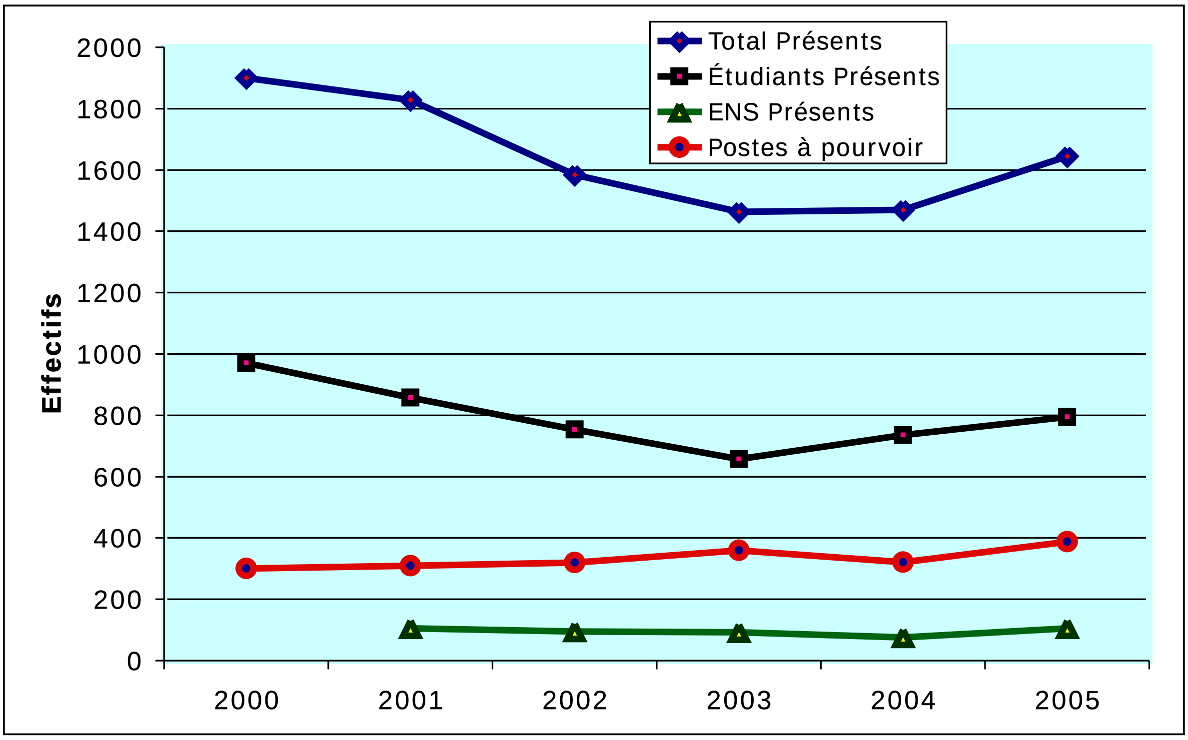
Commentaires généraux sur la session 2005

La session 2005 a vu une augmentation sensible du nombre de postes au concours (de 321 postes en 2004 à 388 postes en 2005, soit une augmentation de près de 21 %). Le nombre d'inscrits (et surtout le nombre de présents aux deux épreuves d'écrit) a poursuivi son augmentation amorcée au concours 2004. Une analyse plus fine montre que cette augmentation est due à une augmentation du nombre de candidats dans les trois catégories principales (normaliens, étudiants hors ENS[3] et enseignants).

Ainsi le nombre de candidats étudiants non normaliens, qui constituent le vivier le plus important pour le recrutement de professeurs agrégés est en augmentation pour la deuxième année consécutive. Dans le même temps, dans cette catégorie, le pourcentage de reçus augmente (passant de 27 % à 30 %). Cela constitue à la fois une reconnaissance de la qualité des préparations universitaires et un encouragement à poursuivre dans la voie du développement de ces préparations. En fin de compte dans cette catégorie on trouve 61, 6 % des reçus au concours 2005 (à comparer avec les 62, 6 % du concours 2004).

Année	**Total Inscrits**	**Total Présents**	Étudiants Présents	ENS Présents	Postes à pourvoir	**Présents par poste**
2000	**2875**	**1900**	970		300	**6,3**
2001	**2663**	**1828**	857	105	310	**5,9**
2002	**2343**	**1584**	753	95	320	**5,0**
2003	**2217**	**1463**	657	93	360	**4,1**
2004	**2333**	**1470**	735	76	321	**4,6**
2005	**2560**	**1644**	795	105	388	**4,2**

Évolution du nombre de présents aux deux épreuves d'écrit
par grandes catégories

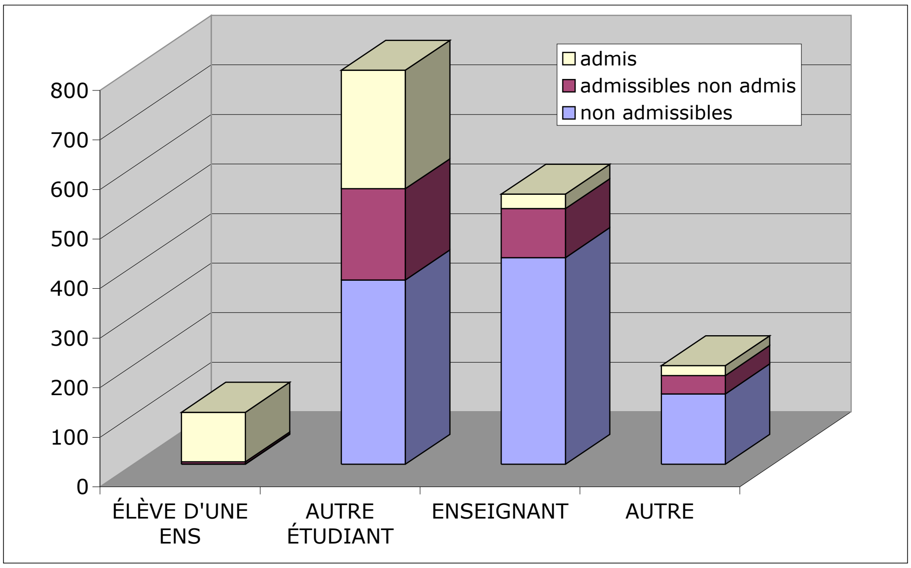


[3] dans cette population, sont regroupées les catégories « étudiant » et « élève de 1re année d'IUFM ».

À l'issue de la délibération d'écrit, 712 candidats ont été déclarés admissibles ; le premier admissible avait une moyenne de 19,875/20 et le dernier une moyenne de 6,375/20. Finalement, à l'issue des épreuves orales, les 388 postes offerts au concours ont été pourvus ; le premier admis a une moyenne de 18,5/20, le dernier admis une moyenne de 8,45/20. On trouvera dans les pages qui suivent différents tableaux et graphiques constituant le bilan statistique du concours selon différents critères (géographie, genre, catégorie professionnelle). Dans ces tableaux, tous les pourcentages sont calculés par rapport aux présents.

CATÉGORIES SIMPLIFIÉES	INSCRITS	PRÉSENTS	ADMISSIBLES	ADMIS	% admissibles	% admis
ÉLÈVE D'UNE ENS	110	105	104	100	99,0	95,2
AUTRE ÉTUDIANT	944	795	423	239	53,2	30,1
ENSEIGNANT	1014	545	128	29	23,5	5,3
AUTRE	492	199	57	20	28,6	10,1
TOTAL	**2560**	**1644**	**712**	**388**	**43,3**	**23,6**

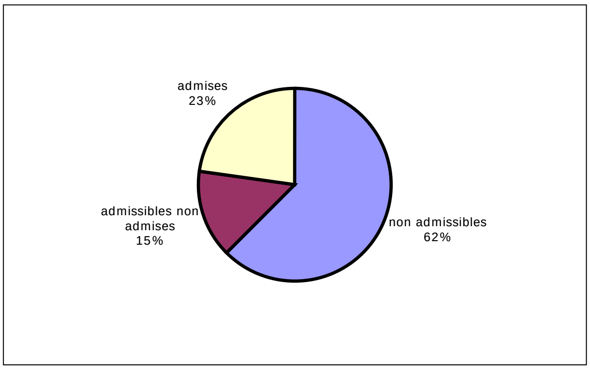
Résultat du concours par grandes catégories



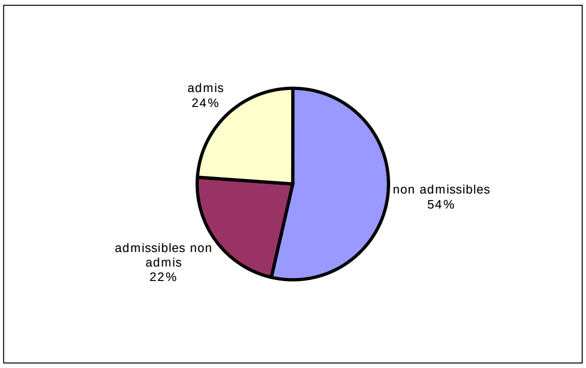
Les résultats par catégories simplifiées confirment que le concours de l'agrégation externe de mathématiques est, comme c'est sa fonction, une concours de recrutement de nouveaux enseignants. La catégorie cumulée des étudiants (ENS et hors ENS) constitue en effet 87 % de l'effectif des admis (85 % en 2004).

GENRE	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis	% Admissibles	% Admis
FEMMES	858	590	222	135	37,63	22,88
HOMMES	1702	1054	490	253	46,49	24,00
TOTAL	2560	1644	712	388	43,31	23,60

Résultat du concours par genres



Femmes



Hommes

CATÉGORIES	INSCRITS	PRÉSENTS	ADMISSIBLES	ADMIS	% admissibles	% admis
ÉLÈVE IUFM 1re ANNÉE	211	163	31	2	19,0	1,2
ÉLÈVE D'UNE ENS	110	105	104	100	99,0	95,2
ÉTUDIANT	733	632	392	237	62,0	37,5
SALARIÉ SECTEUR PRIVÉ	78	30	7	1	23,3	3,3
SANS EMPLOI	259	108	32	14	29,6	13,0
ENSEIGNANT DU SUPÉRIEUR	28	12	5	2	41,7	16,7
AGRÉGÉ	4	0	0	0		
CERTIFIÉ	559	313	72	13	23,0	4,2
PLP	29	15	1	0	6,7	0,0
AUTRE ENSEIGNANT 2nd DEGRÉ	387	203	50	14	24,6	6,9
ENSEIGNANT 1er DEGRÉ	7	2	0	0	0,0	0,0
MILITAIRE	1	1	1	0	100,0	0,0
AUTRE FONCTIONNAIRE	16	3	2	0	66,7	0,0
MI-SE	18	11	1	0	9,1	0,0
AUTRE	120	46	14	5	30,4	10,9
TOTAL	**2560**	**1644**	**712**	**388**	**43,3**	**23,6**

Résultat du concours par catégories professionnelles[4]

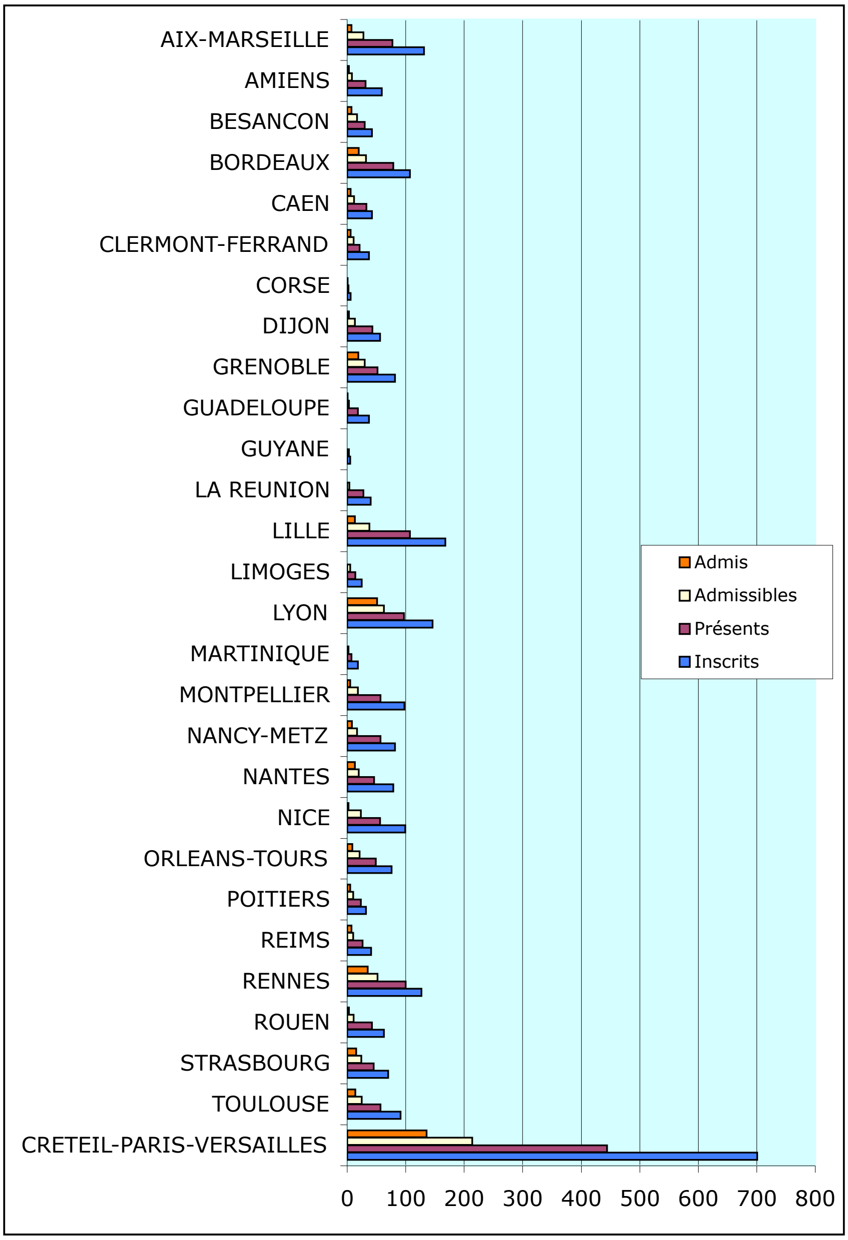
[4] Les catégories professionnelles listées ci-dessus correspondent aux déclarations des candidats lors de l'inscription : elles ne font l'objet d'aucune vérification et doivent être considérées avec prudence.

Académie	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
AIX-MARSEILLE	131	77	28	7
AMIENS	59	31	8	3
BESANCON	42	30	17	7
BORDEAUX	107	79	32	20
CAEN	42	33	12	6
CLERMONT-FERRAND	37	21	11	6
CORSE	6	2	1	0
DIJON	56	43	13	3
GRENOBLE	82	52	30	19
GUADELOUPE	37	18	3	1
GUYANE	5	3	0	0
LA RÉUNION	40	28	4	0
LILLE	168	107	38	13
LIMOGES	25	14	5	0
LYON	146	97	63	51
MARTINIQUE	18	7	2	0
MONTPELLIER	98	57	18	5
NANCY-METZ	82	57	17	8
NANTES	79	46	20	13
NICE	99	56	23	2
ORLÉANS-TOURS	76	49	21	9
POITIERS	32	23	10	5
REIMS	41	26	10	7
RENNES	127	100	52	35
ROUEN	63	42	11	3
STRASBOURG	70	45	24	15
TOULOUSE	91	57	25	14
CRÉTEIL-PARIS-VERSAILLES	701	444	214	136
TOTAL	2560	1644	712	388

Résultat du concours par académies

Hors ENS	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
CRÉTEIL-PARIS-VERSAILLES	640	387	159	82
RENNES	108	81	33	17
LYON	117	68	34	24

Représentation des résultats par académies (y compris ENS)



Épreuve écrite de mathématiques générales

Les corps considérés dans le problème sont supposés commutatifs. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $M_n(\mathbb{C})$ l'anneau des matrices carrées à n lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{C}$, $M_n(\mathbb{Z})$ le sous-anneau de $M_n(\mathbb{C})$ formé des matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}$, et $C_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des vecteurs colonnes à n lignes à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Pour tout ensemble Z, on note $S(Z)$ le groupe des bijections de Z sur lui-même. Si X et Y sont deux ensembles, on note Y^X l'ensemble des applications de X dans Y.

I.

1) Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{C})$.

1-a) Montrer que $A \in M_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si, pour tout X dans $C_n(\mathbb{Z})$, on a $AX \in C_n(\mathbb{Z})$.

1-b) Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{Z})$ dont le déterminant, noté $\det A$, est non nul et soit A^{-1} son inverse dans $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que $A^{-1} \in M_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $|\det A| = 1$.

2) On munit $\mathbb{R}^n$ d'un produit scalaire noté $<,>$. Pour toute partie Y de $\mathbb{R}^n$, on note

$$Y^* = \left\{x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \forall y \in Y,\; < x, y > \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Si $B = (v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}^n$, on note

$$L_B = \left\{\sum_{i=1}^{n} m_i v_i \;\middle|\; (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n\right\}$$

le sous-groupe additif de $(\mathbb{R}^n, +)$ engendré par B ; de plus, on note G_B la matrice de $<,>$ dans la base B, c'est-à-dire la matrice symétrique définie positive dont le (i,j)-ième coefficient vaut $< v_i, v_j >$.

2-a) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $x \in L_B^*$ si et seulement s'il existe $X \in C_n(\mathbb{Z})$ tel que $G_B^{-1}X$ est le vecteur colonne formé des composantes de x dans la base B.

2-b) On suppose que $L_B \subset L_B^*$. Montrer que $G_B \in M_n(\mathbb{Z})$, et que $\det G_B = 1$ si et seulement si $L_B^* = L_B$.

3) On note $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $(e_i^*)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sa base duale. Soit L un sous-groupe du groupe additif $(\mathbb{R}^n, +)$, tel que $2\mathbb{Z}^n \subset L \subset \mathbb{Z}^n$. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on pose $L_i = L \cap F_i$, où F_i est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par $\{e_i, \dots, e_n\}$.

3-a) Montrer que, pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n$, il existe $a_i \in \{1, 2\}$, tel que $e_i^*(L_i) = a_i\mathbb{Z}$.

3-b) Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, soit $u_i \in L_i$ tel que $e_i^*(u_i) = a_i$. Montrer que $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ engendre L et est une base de $\mathbb{R}^n$.

4) Soit C un $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-sous-espace vectoriel de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$, et $L = \rho^{-1}(C)$, où ρ est l'application de $\mathbb{Z}^n$ sur $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ définie par $\rho(m_1, \dots, m_n) = (\tilde{m}_1, \dots, \tilde{m}_n)$, $\tilde{m}$ étant la classe de m modulo 2.

Dans cette question, le produit scalaire $<,>$ est défini par $< x, y > = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, pour tout couple de vecteurs $x = (x_1 \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$. De plus, on munit $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ de la forme bilinéaire non dégénérée, définie, pour tout couple de vecteurs $x = (x_1 \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$, par $x.y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

4-a) Montrer qu'il existe une base B de $\mathbb{R}^n$ engendrant L, et que $L^* = \rho^{-1}(C^\perp)$, où $C^\perp$ est l'orthogonal de C relativement à la forme bilinéaire définie ci-dessus.

4-b) On suppose que $C \subset C^\perp$. Montrer que G_B est à coefficients entiers, et que $\det G_B = 1$ si et seulement si $C = C^\perp$.

II.

1) Soit K un corps, A un K-espace affine de dimension finie $r \geqslant 3$, et F le sous-espace vectoriel de K^A formé des fonctions affines $f:\ A \to K$.

1-a) Montrer que F est de dimension $r+1$.

1-b) Soit $G_{aff}(A)$ le groupe affine de A, c'est-à-dire le groupe des applications affines bijectives de A dans lui-même. Montrer que $G_{aff}(A) = \big\{\sigma \in S(A)\ \big|\ \forall f \in F,\ f \circ \sigma \in F\big\}$.

2) On suppose ici que K est un corps fini et on note q son nombre d'éléments. Soit $\cdot$ la forme bilinéaire non dégénérée sur K^A définie, pour $f, g \in K^A$, par $f \cdot g = \sum_{x \in A} f(x)g(x)$. On note $F^\perp$ l'orthogonal de F relativement à cette forme bilinéaire.

2-a) Soit $f \in F$, non constante. Montrer que, pour tout $a \in K$, l'ensemble $f^{-1}(\{a\})$ a q^{r-1} éléments.

2-b) Montrer que $F \subset F^\perp$, et que $F = F^\perp$ si et seulement si $q = 2$ et $r = 3$.

3) Dans cette question, on suppose que $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et que A est l'espace affine K^3, dont on numérote les points par $P_0 = (0,0,0)$, $P_1 = (1,0,0)$, $P_2 = (1,1,0)$, $P_3 = (0,1,1)$, $P_4 = (1,0,1)$, $P_5 = (0,1,0)$, $P_6 = (0,0,1)$ et $P_7 = (1,1,1)$.

Soit $\varphi:\ K^A \to K^8$ l'application linéaire bijective définie par $f \mapsto (f(P_0), f(P_1), \dots, f(P_7))$ et H le sous-espace vectoriel de K^8 égal à $\varphi(F)$.

3-a) Combien H possède-t-il d'éléments ayant exactement 4 composantes non nulles ?

3-b) Montrer qu'une base de H est

$$\big\{(1,1,1,1,1,1,1,1), (0,1,1,0,1,0,0,1), (0,0,1,1,0,1,0,1), (0,0,0,1,1,0,1,1)\big\}.$$

4) On utilise dans cette question les notations de la question I-4. On suppose que $n = 8$ et $C = H$.

4-a) Montrer que : $\inf\big\{< x, x > \big|\ x \in L - \{0\}\big\} = 2$.

4-b) Combien L possède-t-il d'éléments x tels que $< x, x >= 2$?

4-c) Déduire de ce qui précède

i) L'existence d'une matrice symétrique définie positive dans $M_8(\mathbb{Z})$, de déterminant 1 et dont les termes diagonaux sont pairs.

ii) L'existence d'une base B de l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^8$, possédant la propriété suivante : soit S l'ensemble des boules fermées de rayon 1 (pour la norme euclidienne) centrées en les points de L_B. Les éléments de S sont deux à deux d'intérieurs disjoints, et chaque élément de S est tangent[5] à 240 autres.

[5]deux boules fermées sont dites tangentes si la distance de leurs centres est égale à la somme de leurs rayons.

> Dans la suite du problème, k désigne un corps de caractéristique différente de 2, $Q = \{x \in k \mid \exists y \in k - \{0\}, x = y^2\}$ l'ensemble de ses carrés non nuls, et $X = \mathbb{P}^1(k) = k \cup \{\infty\}$ la droite projective sur k. On rappelle que l'application $\alpha : \mathrm{GL}_2(k) \to S(X)$ qui à $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ associe l'homographie $\alpha(M) : x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ est un morphisme de groupes. On note $\mathrm{Ker}\,(\alpha)$ son noyau, c'est-à-dire $\alpha^{-1}\big(\{\mathrm{id_X}\}\big)$.
> On rappelle également que, si $c = 0$, on a $\alpha(M)(\infty) = \infty$, et que, si $c \neq 0$, $\alpha(M)(\infty) = \dfrac{a}{c}$ et $\alpha(M)\left(-\dfrac{d}{c}\right) = \infty$.
> On note $\mathrm{SL}_2(k)$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(k)$ formé des matrices de déterminant 1 et $N = \mathrm{PSL}_2(k)$ l'image de $\mathrm{SL}_2(k)$ par α.

III. 1-a) Montrer que $\mathrm{SL}_2(k) \cap \mathrm{Ker}\,(\alpha) = \{-I_2, I_2\}$, où $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1-b) Soit $M \in \mathrm{GL}_2(k)$; montrer que $\alpha(M) \in N$ si et seulement si $\det(M) \in Q$.

2) Si k est un corps fini à q éléments, calculer le nombre d'éléments de N en fonction de q.

3) Montrer que les homographies $x \mapsto h_i(x) = ix$ (pour $i \in Q$), $x \mapsto t_j(x) = x + j$ (pour $j \in k$) et $x \mapsto w(x) = -\dfrac{1}{x}$ appartiennent à N et l'engendrent.

4) Soit f un élément d'ordre 2 de N.

4-a) Montrer que f est conjugué dans N à une homographie de la forme $x \mapsto w_i(x) = -\dfrac{i}{x}$, avec $i \in Q$.

4-b) Montrer que si k a au moins cinq éléments, il existe un conjugué g de f dans N ne commutant pas avec f (on pourra calculer $t_a \circ w_i \circ t_a^{-1}$).

5) Soit A un $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espace affine de direction $\overrightarrow{A}$ et $G_{aff}(A)$ son groupe affine.

5-a) Montrer que, si P est un sous-groupe de $G_{aff}(A)$ ne contenant pas de translation différente de l'application identique, alors P est isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{GL}\big(\overrightarrow{A}\big)$.

5-b) On suppose que k a au moins cinq éléments. Montrer que, si N est isomorphe à un sous-groupe de $G_{aff}(A)$, il est isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{GL}\big(\overrightarrow{A}\big)$.

IV. On note $\mathbf{1} : X \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ la fonction constante égale à 1, $\mathbf{0} : X \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ la fonction nulle, on note $-Q = \{-x \mid x \in Q\}$ et on suppose que k vérifie la propriété $(*)$ suivante :

$(*)$ *$k - \{0\}$ est l'union disjointe de Q et $-Q$.*

1) Montrer que, si k a q éléments, l'hypothèse $(*)$ est équivalente à $q \equiv -1 \mod 4$.

On note $u : X \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ l'application qui vaut 1 si $x \in Q \cup \{\infty\}$ et 0 sinon. Pour tout élément $r \in k$, on pose $u_r = u \circ t_r$.

2-a) Montrer que, pour tout $i \in Q$ et $r \in k$, on a $u_r \circ h_i = u_{r/i}$.

2-b) Montrer que $u + u \circ w = \mathbf{1}$, puis que $u + u_{w(r)} + u_r \circ w = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{si } r \in Q \\ \mathbf{0} & \text{si } r \in -Q \end{cases}$.

2-c) On suppose que k est un corps fini. Montrer que $\displaystyle\sum_{r\in k} u_r = \mathbf{1}$.

Soit R le sous-espace vectoriel de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^X$ engendré par les fonctions u_r, $r \in k$. Montrer que

$$\mathrm{PSL}_2(k) \subset \big\{\sigma \in S(X) \ \big|\ \forall f \in R,\ f \circ \sigma \in R\big\}.$$

3) On suppose ici que $k = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Soit $\psi : \ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^X \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^8$ l'application linéaire bijective définie par

$$f \mapsto \Big(f(\overline{0}), f(\overline{1}), f(\overline{2}), f(\overline{3}), f(\overline{4}), f(\overline{5}), f(\overline{6}), f(\infty)\Big),$$

où, pour tout entier $x \in \mathbb{Z}$, $\overline{x}$ est la classe de x modulo 7.

3-a) Montrer que $\psi(R) = H$, où H est le sous-espace vectoriel de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^8$ défini en II.3.

3-b) En déduire que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$ est isomorphe à $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Corrigé

I.

1-a) Soit $\{E_1, \ldots, E_n\}$ la base canonique de $C_n(\mathbb{C})$. Les éléments de $C_n(\mathbb{Z})$ sont les combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{Z}$ des E_i. Par suite, dire que, pour tout $X \in C_n(\mathbb{Z})$, $AX \in C_n(\mathbb{Z})$ équivaut à dire que, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $AE_i \in C_n(\mathbb{Z})$. Comme les AE_i sont les vecteurs colonnes de A, ceci équivaut à $A \in M_n(\mathbb{Z})$.

1-b) Si $A \in M_n(\mathbb{Z})$, il en est de même de sa transposée. Donc, si $|\det A| = 1$, $A^{-1} \in M_n(\mathbb{Z})$. Réciproquement, si A et A^{-1} sont dans $M_n(\mathbb{Z})$, alors $\det A$ et $\det(A^{-1})$ sont dans $\mathbb{Z}$, et de produit 1, ce qui implique $|\det A| = 1$.

2-a) $x = \sum x_i v_i \in L_B^*$ si et seulement si, pour tout $v_j \in B$, on a $< x, v_j > \in \mathbb{Z}$, soit $\sum_i x_i < v_i, v_j > \in \mathbb{Z}$; si X est le vecteur colonne dont la j-ième composante est $\sum_i x_i < v_i, v_j >$, et si U est le vecteur colonne dont les composantes sont les x_i, ceci équivaut à dire que $X = G_B U$ est dans $C_n(\mathbb{Z})$, qui est la propriété demandée.

2-b) Soit $L_B \subset L_B^*$; pour tous (i,j), on a $< v_i, v_j > \in \mathbb{Z}$, i.e. $G_B \in M_n(\mathbb{Z})$. Comme G_B est la matrice d'une forme définie positive, son déterminant est positif. Donc, d'après successivement $1-b), 1-a)$ et $2-a)$, on a $\det G_B = 1 \Leftrightarrow G_B^{-1} \in M_n(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \forall X \in M_n(\mathbb{Z})$, $G_B^{-1}X \in \mathbb{C}_n(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow L_B^* \subset L_B \Leftrightarrow L_B = L_B^*$.

3-a) Comme $L \subset \mathbb{Z}^n$, on a $e_i^*(L_i) \subset \mathbb{Z}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Comme e_i^* est un morphisme de groupe additif, $e_i^*(L_i)$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, et il existe $a_i \in \mathbb{N}$ tel que $e_i^*(L_i) = a_i\mathbb{Z}$. Or $2e_i$ est un élément de L_i, donc $2 = e_i^*(2e_i)$ est un multiple de a_i, qui vaut donc 1 ou 2.

3-b) Soit $v \in L = L_1$. Soit $x_1 \in \mathbb{Z}$ tel que $e_1^*(x) = x_1 a_1$, et posons $v_2 = v - x_1 u_1$. Comme $e_1^*(v_2) = 0$, v_2 est un élément de L_2. On définit ainsi une suite $(v_k)_{k=1,\ldots,n}$, où $v_k \in L_k$, $v_1 = v$, et où $v_{k+1} = v_k - x_k u_k$, avec $x_k = (e_k^*(v_k)/a_k)$. Comme $v_n = x_n u_n$, on a alors $v = \sum_{i=1}^n x_i u_i$.

L'espace vectoriel engendré par les (u_i) contient les vecteurs $2e_i$, et est donc égal à $\mathbb{R}^n$. 4-a) Comme $\rho^{-1}(\{0\}) = 2\mathbb{Z}^n$ et que $\rho^{-1}((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n) = \mathbb{Z}^n$, on a $2\mathbb{Z}^n \subset L \subset \mathbb{Z}^n$, et d'après $3-b)$ il existe une base de $\mathbb{R}^n$ engendrant L. Soit $y = (y_i) \in L^*$; comme, pour tout i, $2e_i \in L$, on a $y_i \in \mathbb{Z}$, et donc $L^* \subset \mathbb{Z}^n$. De plus, $y \in L^*$ si et seulement si, pour tout $x \in L$, $< x, y > \in \mathbb{Z}$, soit $\sum x_i y_i \in 2\mathbb{Z}$, soit $\rho(x).\rho(y) = 0$, soit $\rho(y) \in C^\perp$.

4-b) $C \subset C^\perp \Rightarrow L = \rho^{-1}(C) \subset \rho^{-1}(C^\perp) = L^*$. D'après $2-b)$, $\det G_B = 1$ si et seulement si $L = L^*$, i.e. $\rho^{-1}(C) = \rho^{-1}(C^\perp)$, soit, ρ étant surjective, $C = C^\perp$.

II.

Pour traiter les questions 1 et 2 de cette partie, on choisit un repère affine de A, et on note $(x_1, \dots, x_r)$ les applications coordonnées d'un point $P \in A$ dans ce repère.

1-a) Toute fonction affine sur A s'écrit de façon unique $P \mapsto \sum a_i x_i(P) + c$, où les a_i et c sont des éléments de K. Une base de F est donc formée des $r+1$ fonctions $\{1, x_1, \dots, x_r\}$, et F est de dimension $r+1$.

1-b) Si σ est affine, sa composée avec toute fonction affine est affine ; réciproquement, soit $\sigma \in K^A$, telle que, pour toute $f \in F$, $f \circ \sigma \in F$. Si l'on prend pour f les fonctions coordonnées x_i, ceci implique les fonctions coordonnées $x_i \circ \sigma$ sont des fonctions affines, ce qui équivaut au fait que σ est une application affine.

2-a) Soit $f : A \to K$ non constante ; elle est alors surjective, et la direction de $\operatorname{Ker} f$ est un hyperplan vectoriel H, qui a donc q^{r-1} éléments. Soit $a \in K$, et $P \in A$ tel que $f(P) = a$; comme $f^{-1}(\{a\}) = P + H$, on en déduit le résultat.

2-b) Soient $l, m \in F$. Comme $\dim A \geqslant 3$, il existe $\vec{v} \neq 0$ dans $\operatorname{Ker} \vec{l} \cap \operatorname{Ker} \vec{m}$. Soit $n \in F$ tel que $\vec{n}(\vec{v}) = 1$. Alors $\sum_{P \in A} (lmn)(P) = \sum_P (lmn)(P + \vec{v}) = \sum_P (lmn)(P) + \sum_P (lm)(P)$, d'où $\sum_P (lm)(P) = 0$, et $F \subset F^\perp$.

Puisque $F \subset F^\perp$, la condition $F = F^\perp$ équivaut à $2 \dim F = \dim K^A$, soit $q^r = 2(r+1)$. Comme $q \geqslant 2$ et $r \geqslant 3$, on a $2(r+1) \geqslant 2^r = (1+1)^r > 1 + r + r(r-1)/2$, soit $r(r-3) < 2$, et donc $r = 3$. Donc $q^3 = 8$, et $q = 2$.

3-a) Si $f = 0$ (resp. $f = 1$), $\varphi(f)$ est le vecteur nul (resp. le vecteur (11111111)). Sinon, f est non constante. D'après $2-a)$, $\operatorname{Card} f^{-1}(\{1\}) = 4$, et $\varphi(f)$ a donc exactement 4 composantes non nulles. Comme $\operatorname{Card} F = q^{r+1} = 16$, H a donc 14 vecteurs ayant exactement 4 composantes $\neq 0$.

3-b) Le système de vecteurs cité est l'image par φ de la base $\{1, x_1, x_2, x_3\}$ de F, et est donc une base de H.

4-a) et 4-b) Soit $x \in L$, non nul. Si $\rho(x) = (11111111)$, on a $< x, x > \geqslant 8/2 = 4$. Si $\rho(x) = 0$, l'un des x_i est pair et non nul, donc $< x, x > \geqslant 2^2/2 = 2$, et $< x, x > = 2$ si et seulement si il a une composante de valeur absolue 2 et les autres nulles, soit $2 \times 8 = 16$ vecteurs. Si $\rho(x)$ est l'un des 14 vecteurs de C ayant 4 composantes non nulles, on a $< x, x > \geqslant (4 \times 1^2)/2 = 2$, et $< x, x > = 2$ si et seulement si x_i pair implique $x_i = 0$, et $x_i \equiv 1 \mod 2$ implique $|x_i| = 1$, d'où $2^4 \times 14 = 224$ vecteurs. D'où au total $224 + 16 = 240$ vecteurs de L tels que $< x, x > = 2$.

4-c-i) D'après $II - 2 - b)$, $C = C^\perp$, donc d'après $I - 4 - b)$ il existe une base B de $\mathbb{R}^8$ engendrant L telle que la matrice G_B est définie positive, à coefficients entiers, de déterminant 1. Enfin, si $x = (x_1, \dots, x_8) \in L$, le nombre de x_i impairs est $0, 4$ ou 8, donc $\sum x_i^2 \equiv 0 \mod 4$, et $< x, x >$ est pair pour tout $x \in L$.

4-c-ii) d'après ce qui précède, si $P \in L_B$, pour tout $Q \in L_B$ distinct de P, on a $d(P, Q) = ||P - Q|| \geqslant 2$, et il existe exactement 240 tels points Q tels que $d(P, Q) = 2$, ce qui équivaut à l'assertion de l'énoncé sur les sphères.

III.

1-a) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(k)$ telle que $M \in \operatorname{Ker}\alpha$, i.e. telle que $f = \alpha(M) = \mathrm{Id}_X$. Les égalités $f(\infty) = \infty, f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ impliquent $c = 0, b = 0$ et $a+b = c+d$, soit $M = aI_2$, $a \in k^*$. Comme réciproquement toute matrice de cette forme appartient à $\operatorname{Ker}\alpha$, on en déduit que $\operatorname{Ker}\alpha = k^* I_2$. De plus, une matrice aI_2 est dans $\mathrm{SL}_2(k)$ si son déterminant vaut 1, i.e. $a^2 = 1$, d'où le résultat.

1-b) Soit $(M, M') \in \mathrm{GL}_2(k) \times \mathrm{SL}_2(k)$ vérifiant $\alpha(M) = \alpha(M')$. D'après ce qui précède, ceci équivaut à l'existence d'un $\lambda \in k^*$ tel que $M = \lambda M'$; s'il existe un tel λ, on a $\det M = \lambda^2$, et $\det M \in Q$. Réciproquement, si $\det M \in Q$, il existe $\lambda \in k^*$ tel que $\det M = \lambda^2$, et $M' = \dfrac{1}{\lambda} M$ est un élément de $\mathrm{SL}_2(k)$, cqfd.

2) Le cardinal n de $\mathrm{SL}_2(k)$ est égal à celui des quadruplets $\{a, b, c, d\} \in k^4$ tels que $ad - bc = 1$; le cas $a = 0$ donne $(q-1)q$ quadruplets ; si $a \neq 0$, chacun des q^2 couples $(b, c) \in k^2$ donne un quadruplet, d'où finalement $n = q(q-1) + (q-1)q^2 = q(q^2-1)$. D'après $1-a)$, N a donc $q(q^2-1)/2$ éléments.

3) On vérifie immédiatement que les h_i, t_i et w sont des éléments de N. Soit $f : x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d} \in N$. Si $c = 0$, d est $\neq 0$, et $f = h_{a/d} \circ t_{b/a}$; comme $ad - bc = ad$ est un carré, il en est de même de $a/d = ad/d^2$, et f est dans le groupe engendré par les h_i, $i \in Q$, et les t_i. Si $c \neq 0$, on peut écrire $f(x) = \dfrac{a}{c} - \dfrac{ad-bc}{c(cx+d)}$. Donc $f = t_{a/c} \circ h_{(ad-bc)/c^2} \circ t_{d/c}$. Comme $ad - bc$ est un carré, il en est de même de $(ad-bc)/c^2$, d'où le résultat.

4-a) Comme $f \neq \mathrm{Id}_X$, il existe $a \neq b \in X$ tels que $f(a) = b$ (et donc $f(b) = a$). On peut supposer $a \in k$. Soit $h \in N$ définie par $h = t_{-a}$ si $b = \infty$ et par $h(x) = \dfrac{1}{a-b}\dfrac{x-a}{x-b}$ sinon. On a $h(a) = 0$ et $h(b) = \infty$, donc $g = h \circ f \circ h^{-1}$ est une involution conjuguée de f par un élément de N ; elle vérifie $g(\infty) = 0$, $g(0) = \infty$, et est donc de la forme $x \mapsto r/x$; comme $h \in N$, $-r \in Q$, cqfd.

4-b) f étant conjugué à un w_i, il suffit de montrer qu'il existe un conjugué de w_i dans N ne commutant pas avec w_i ; soit $a \in k$, $i \in Q$, et $s = t_a \circ w_i \circ t_a^{-1}$. On a $s \circ w_i(0) = a$ et $w_i \circ s(0) = \dfrac{-ia}{i+a^2}$, donc si s et w_i commutent, $a(a^2 + 2i) = 0$; comme k a au moins 4 éléments, il existe $a \in k$ tel que $t_a \circ w_i \circ t_a^{-1}$ ne commute pas avec w_i.

5-a) Si $\mu : G_{aff}(A) \to \mathrm{GL}(\vec{A})$ est l'homomorphisme de groupe qui associe à tout élément de $G_{aff}(A)$ son application linéaire associée, $\operatorname{Ker}\mu$ est le sous-groupe T des translations de A ; par suite, si $P \cap T = \{\mathrm{Id}_A\}$, la restriction de μ à P est injective, et P est isomorphe au sous-groupe $\mu(P)$ de $\mathrm{GL}(\vec{A})$.

5-b) Soit M un sous-groupe de $G_{aff}(A)$ isomorphe à N. Supposons qu'il existe $t \in M \cap T$, $t \neq \mathrm{Id}_A$. Cette translation est d'ordre 2 ; d'après $4-b)$, il existe $g \in M$ tel que gtg^{-1} ne commute pas avec t ; T étant commutatif et distingué dans $G_{aff}(A)$, gtg^{-1} est une translation, et commute avec t, d'où une contradiction. Par suite, d'après $5-a)$, M, et donc N, est isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{GL}(\vec{A})$.

IV.

1) Il est clair que $Q = -Q$ équivaut à $-1 \in Q$, i.e. à l'existence d'un élément d'ordre 4 dans k^*. Si k est fini d'ordre q, comme k^* est cyclique, ceci équivaut à $q-1 = \operatorname{Card} k^* \equiv 0 \mod 4$, et donc $(*) \Leftrightarrow q \equiv 3 \mod 4$.

2-a) Notons $\overline{Q} = Q \cup \{+\infty\}$. Si $i \in Q$, on a $h_i(\overline{Q}) = \overline{Q}$. Donc $u = u \circ h_i$; comme $t_r \circ h_i = h_i \circ t_{r/i}$ pour tout $r \in k$, on a donc $u_r \circ h_i = u_{r/i}$.

2-b) On a $w(Q) = -Q = k^* - Q$, et $w(\infty) = 0$, donc $w(\overline{Q}) = X - \overline{Q}$, d'où $u + u \circ w = \mathbf{1}$.

Posons $v_r = u + u_{w(r)} + u_r \circ w$. On vérifie immédiatement que $v_r(0) = v_r(\infty) = u(r)$. Soit $x \in k^*$; posons $t = rx - 1$; alors $v_r(x) = u(x) + u(\frac{t}{r}) + u(\frac{t}{x})$. Si $rx \in Q$, $u(\frac{t}{r}) = u(\frac{t}{x})$, et $v_r(x) = u(x) = u(r)$. Si $rx \neq Q$, alors $t \neq 0$, et on a $u(\frac{t}{r}) \neq u(\frac{t}{x})$, d'où $v_r(x) = 1 + u(x) = u(r)$, d'où le résultat.

2-c) Soit $q = \operatorname{Card} k$, et $x \in X$; d'abord, on a $\sum u_r(\infty) = q = 1.$; ensuite, comme $r \mapsto x + r$ est une bijection de k sur lui-même, on a $\sum_{r \in k} u_r(x) = \sum_{r \in k} u(x+r) = \sum_{r \in k} u(r) = \operatorname{Card} Q \times 1$.

D'après 1), $\operatorname{Card} Q = (q-1)/2 \equiv 1 \mod 2$, et $\sum u_r = \mathbf{1}$.

Ceci prouve que $\mathbf{1} \in R$; donc, d'après $2-b$, pour tout $r \in k = \{0\} \cup Q \cup -Q$, $u_r \circ w \in R$.

Comme, pour tout $i \in Q$, $u_r \circ h_i = u_{r/i} \in R$, et que, pour tout $i \in k$, $u_r \circ t_i = u_{r+i} \in R$, on en déduit que pour tout $g \in N$, $u_r \circ g \in R$, et donc que pour tout $f \in R$, $f \circ g \in R$.

3-a) Soit $V = \{v_1, \ldots, v_7\}$ l'image par ψ du système générateur de R égal à $\{\mathbf{1}, u, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$. On a $V = \{(11111111), (01101001), (00110101), (00011011), (10001101), (01000111), (10100011)\}$. Comme $v_5 = v_1 + v_2 + v_4, v_6 = v_2 + v_3 + v_4, v_7 = v_1 + v_2 + v_3$, on a bien $\psi(R) = H$.

3-b) Soit A comme dans $II-3$, $\tau : A \to X$ la bijection définie par $\tau(P_7) = \infty$ et $\tau(P_i) = \bar{i}$ pour $0 \leqslant i \leqslant 6$, et $\lambda : S(X) \to S(A)$ l'isomorphisme de groupes défini par $g \mapsto \tau^{-1} g \tau$.

Si $N = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$, et si $\tilde{N} = \lambda(N)$, d'après $2-c$) et $II-1-b$), $\tilde{N}$ est un sous-groupe de $G_{aff}(A)$, et donc, d'après $III-5-b$), est isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

D'après $III-2$, $\operatorname{Card} N = 168$; il suffit donc pour terminer de montrer qu'il en est de même de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, i.e. de l'ensemble des bases (x_1, x_2, x_3) de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$. Or x_1 est l'un quelconque des 7 vecteurs non nuls de $E = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$, x_2 est l'un des $8-2=6$ vecteurs de E non colinéaire à x_1, et x_3 est l'un des $8-4=4$ vecteurs de E n'appartenant pas au plan $\{x_1, x_2\}$; le nombre de bases de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ est donc $7 \times 6 \times 4 = 168$.

Rapport des correcteurs

Le problème donnait deux applications de la théorie des codes correcteurs :

1) L'existence du réseau E_8 et de la matrice entière unimodulaire associée, (parties I et II), à partir du code de Hamming étendu de longueur 8,

2) L'isomorphisme entre les groupes simples $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_7)$ et $\mathrm{GL}_3(\mathbf{F}_2)$ (parties III et IV), déduit de l'isomorphisme entre le code de Hamming binaire de longueur 7 et le code binaire des résidus quadratiques modulo 7.

Le problème a été terminé (à une ou deux questions près) par quatre candidats.

Il n'y a eu que deux copies blanches. La plupart des candidats ont correctement traité les premières questions de la partie I, et une partie non négligeable des candidats admissibles a traité avec succès plusieurs questions des parties III et IV.

Néanmoins, la partie II a révélé de sérieuses lacunes en gómétrie affine : même la première question de la partie II a posé de sérieux problèmes. Dans la seconde question, de nombreux candidats ont affirmé que les éléments de F sont des bijections, et très peu ont correctement résolu la question.

Parmi les omissions les plus fréquentes, remarquons celles qui consistaient, dans la question $I-4-a$, à ne pas vérifier que $L^{\perp} \subset \mathbf{Z}^n$, ou encore, dans la question suivante, à ne pas évoquer la surjectivité de ρ.

La plupart des candidats n'a pas correctement traité la question $I-3-a$, n'ayant pas remarqué que $e_i^*(L_i)$ est un sous-groupe de $\mathbf{Z}$.

La question $II-3-b$ a en général été mal traitée, les candidats vérifiant l'indépendance des quatre vecteurs, mais oubliant de montrer leur appartenance à H.

Dans la question $III-1-a$, de nombreux candidats ont implicitement identifié un polynôme à la fonction polynomiale associée.

Les deux questions du problème ayant posé les plus de difficultés aux candidats ont été la question $II-2-b$ et surtout, et de loin, la question $III-4-a$.

Enfin, plusieurs candidats, ne tenant pas compte de la ponctuation, ont lu

“Montrer que $G_B \in M_n(\mathbf{Z})$ et que $\det G_B = 1$ si et seulement si $L_B^* = L_B$”. En fait, pour la plupart, ils ont donné les bons arguments pour résoudre la question, et n'ont pas été pénalisés. Mais mieux vaut lire attentivement les questions !

Épreuve écrite d'analyse et probabilités

NOTATIONS

- Soit (E, N) un espace vectoriel (complexe) normé. On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel normé des applications linéaires continues de E dans lui-même. Rappelons que la norme d'un élément $T \in \mathcal{L}(E)$ est le nombre réel positif $|||T||| = \sup\left\{N(T(x)) \,\middle|\, x \in E,\ N(x) \leqslant 1\right\}$.
- Soient E un espace de Hilbert (complexe) et $T \in \mathcal{L}(E)$. Notons T^* l'adjoint de T. On dit que T est *unitaire* si T est bijectif et $T^{-1} = T^*$.
- Soient I un ensemble non vide et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels *positifs*. On appelle *somme* de cette famille et l'on note $\sum_{i\in I} a_i$ la borne supérieure dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ des sommes $\sum_{i\in J} a_i$ lorsque J décrit les parties finies de I.
- On pose $(+\infty)^{1/2} = +\infty$.
- Notons $\mathbb{A}$ l'espace vectoriel complexe des familles $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ de nombres complexes.
- Le *support* d'un élément $\mathbf{a} = (a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \in \mathbb{A}$ est le sous-ensemble $\left\{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \,\middle|\, a_{m,n} \neq 0\right\}$ de $\mathbb{Z}^2$.
- On note $\mathcal{A}$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{A}$ formé des familles de support fini.
- Pour $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$, on note $W_{m,n} \in \mathcal{A}$ la famille $(a_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2}$ telle que $a_{m,n} = 1$ et $a_{p,q} = 0$ si $(p,q) \neq (m,n)$.
- Pour $\mathbf{a} = (a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \in \mathbb{A}$, on pose

$$\|\mathbf{a}\|_1 = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} |a_{m,n}| \qquad \text{et} \qquad \|\mathbf{a}\|_2 = \left(\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} |a_{m,n}|^2\right)^{1/2}.$$

- On pose $A_1 = \left\{\mathbf{a} \,\middle|\, \|\mathbf{a}\|_1 \neq +\infty\right\}$ et $A_2 = \left\{\mathbf{a} \,\middle|\, \|\mathbf{a}\|_2 \neq +\infty\right\}$.
- Dans tout le problème on fixe un nombre complexe λ de module 1.

Les parties I.B, II et III sont indépendantes

I. Algèbres de convolution « tordue »

A. La convolution tordue

1. (a) Montrer que l'on a $\sum_{(m,n)\in J} |a_{m,n}|^2 \leqslant \left(\sum_{(m,n)\in J} |a_{m,n}|\right)^2$ pour tout $\mathbf{a} \in \mathbb{A}$ et toute partie finie J de $\mathbb{Z}^2$.

   (b) Montrer que, pour tout $\mathbf{a} \in \mathbb{A}$, on a $\|\mathbf{a}\|_2 \leqslant \|\mathbf{a}\|_1$. En déduire que $A_1 \subset A_2$.

   > Les ensembles A_1 et A_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{A}$. On munit dorénavant A_1 de la norme $\| \ \|_1$ et A_2 de la norme $\| \ \|_2$. Alors A_1 est un espace de Banach et A_2 est un espace de Hilbert. De plus, $\mathcal{A}$ est dense dans l'espace de Banach A_1 et dans l'espace de Hilbert A_2. *On ne demande pas de justifier ces faits.*

2. Montrer qu'il existe une unique forme linéaire continue $\sigma : A_1 \to \mathbb{C}$ telle que $\sigma(W_{m,n}) = 1$ pour tout $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$.
   Si $\mathbf{a} = (a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ est un élément de A_1, on note $\displaystyle\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} a_{m,n}$ le nombre $\sigma(\mathbf{a})$.
3. Soient $\mathbf{a} = (a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ et $\mathbf{b} = (b_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ des éléments de A_2.
   (a) Soient $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$. Montrer que la famille $\left(\lambda^{q(m-p)} a_{p,q} b_{m-p,n-q}\right)_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2}$ est un élément de A_1.
   (b) On pose $c_{m,n} = \displaystyle\sum_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2} \lambda^{q(m-p)} a_{p,q} b_{m-p,n-q}$.
   Montrer que $|c_{m,n}| \leqslant \|\mathbf{a}\|_2 \|\mathbf{b}\|_2$ et que, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $A \in \mathbb{N}$, tel que, $\forall (m,n) \in \mathbb{Z}^2$, on ait $|m| + |n| \geqslant A \Rightarrow |c_{m,n}| \leqslant \varepsilon$ (étudier d'abord le cas où $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$ et $\mathbf{b} \in \mathcal{A}$).

   > On pose $\mathbf{a} \star \mathbf{b} = (c_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$.
   > Si m, m', n, n' sont des entiers relatifs, on a $W_{m,n} \star W_{m',n'} = \lambda^{nm'} W_{m+m',n+n'}$; pour tout $\mathbf{a} \in A_2$, on a $W_{0,0} \star \mathbf{a} = \mathbf{a} \star W_{0,0} = \mathbf{a}$. *On ne demande pas de justifier ces faits.*

   (c) Montrer que, pour $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A_1$ on a $\|\mathbf{a} \star \mathbf{b}\|_1 \leqslant \|\mathbf{a}\|_1 \|\mathbf{b}\|_1$.
   (d) Montrer que le « produit » $\star$ est associatif sur A_1.

> Dans la suite du problème, on pose $\mathbf{1} = W_{0,0}$, $U = W_{1,0}$ et $V = W_{0,1}$. Pour $\mathbf{a} \in A_1$, on définit $\mathbf{a}^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, en posant $\mathbf{a}^0 = \mathbf{1}$, et $\mathbf{a}^{n+1} = \mathbf{a}^n \star \mathbf{a}$. S'il existe un élément $\mathbf{b} \in A_1$ (nécessairement unique) tel que $\mathbf{a} \star \mathbf{b} = \mathbf{b} \star \mathbf{a} = \mathbf{1}$, on dira que $\mathbf{a}$ est *inversible* et on posera $\mathbf{b} = \mathbf{a}^{-1}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose alors $\mathbf{a}^{-n} = (\mathbf{a}^{-1})^n = (\mathbf{a}^n)^{-1}$.
> On remarque que $V \star U = \lambda(U \star V)$ et que, pour tout $m, n \in \mathbb{Z}$, on a $W_{m,n} = U^m \star V^n$.

B. Fonctions périodiques de classe C^1.

On note B l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^1 périodiques de période 1, muni de la norme $N : f \mapsto \sup\left\{|f(t)| + |f'(t)| \;\middle|\; t \in \mathbb{R}\right\}$. On note $z \in B$ l'application $t \mapsto e^{2i\pi t}$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on note $z^n \in B$ l'application $t \mapsto e^{2i\pi nt}$.

1. (a) Montrer que pour tout $f, g \in B$, on a $N(fg) \leqslant N(f)N(g)$, où l'on a noté fg la fonction $t \mapsto f(t)g(t)$.
   (b) Montrer que le sous-espace de B engendré par la famille $(z^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est dense dans B.
2. (a) Montrer que, pour tout $f \in B$, la famille $\psi(f)$ définie par
   $$\psi(f)_{m,n} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 0 \\ \displaystyle\int_0^1 f(t) e^{-2i\pi mt}\, \mathrm{d}\, t & \text{si } n = 0 \end{cases}$$
   est un élément de A_1. Montrer que l'application $\psi : B \to A_1$ ainsi définie est continue et vérifie $\psi(fg) = \psi(f) \star \psi(g)$ pour tout $f, g \in B$.

   Remarquons que l'on a $\psi(z) = U$.

   (b) Soit θ un nombre réel tel que $e^{2i\pi\theta} = \lambda$. Montrer que pour tout $f \in B$ on a l'égalité $V \star \psi(f) = \psi(g) \star V$ où g est la fonction $t \mapsto f(t + \theta)$.

II. Un calcul d'image et de noyau

A. Approximation des réels par des rationnels

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\delta(x) = \inf\{|x-n| \mid n \in \mathbb{Z}\}$ sa distance à $\mathbb{Z}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Soient $s_0, \ldots, s_{n+1} \in [0,1]$. Montrer qu'il existe des nombres entiers i et j satisfaisant $0 \leqslant i < j \leqslant n+1$ et $|s_i - s_j| \leqslant \dfrac{1}{n+1}\cdot$
   (b) Soient $t_0, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe des entiers i et j satisfaisant $0 \leqslant i < j \leqslant n$ et $\delta(t_i - t_j) \leqslant \dfrac{1}{n+1}\cdot$
   (c) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe $k \in \mathbb{N}$ satisfaisant $1 \leqslant k \leqslant n$ et $\delta(kt) \leqslant \dfrac{1}{n+1}\cdot$
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Pour $q \in \mathbb{N}^*$, posons $U_\alpha(q) = \{t \in \mathbb{R} \mid \delta(qt) < q^{-\alpha}\}$ et notons $Y_\alpha = \limsup_{q\to\infty} U_\alpha(q)$ l'ensemble des t qui appartiennent à une infinité de $U_\alpha(q)$.
   (a) Montrer que $Y_1 = \mathbb{R}$.
   (b) Calculer la mesure de Lebesgue de $U_\alpha(q) \cap [0,1]$.
   (c) Montrer que pour $\alpha > 1$, l'ensemble Y_α est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. En déduire que $Y = \bigcup_{\alpha>1} Y_\alpha$ est de mesure nulle (pour la mesure de Lebesgue).
3. (a) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$, l'ensemble Y_α est une intersection dénombrable d'ouverts de $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble $X = \bigcap_{\alpha\in\mathbb{R}_+^*} Y_\alpha$ est dense dans $\mathbb{R}$ et que c'est une intersection dénombrable d'ouverts de $\mathbb{R}$.
   (b) Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que $t \notin X$ si et seulement s'il existe un polynôme P à coefficients réels tel que $P(n)\delta(nt) \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

B. Un calcul d'image et de noyau

Pour $\mathbf{a} = (a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^2}$, on pose $\tau(\mathbf{a}) = a_{0,0}$.

Pour tout $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A_2$, on a $\tau(\mathbf{a} \star \mathbf{b}) = \tau(\mathbf{b} \star \mathbf{a})$. *On ne demande pas la vérification de cette formule.*

Considérons les applications $S : x \mapsto U \star x \star U^{-1} - x$ et $T : x \mapsto V \star x \star V^{-1} - x$ de A_1 dans lui même. Notons $L : A_1 \to A_1 \times A_1$ et $M : A_1 \times A_1 \to A_1$ les applications linéaires définies par $L(x) = (S(x), T(x))$ et $M(x,y) = S(y) - T(x)$ (pour $x, y \in A_1$).

1. Montrer que $\mathrm{Im}L \subset \mathrm{Ker}M$.
   On suppose jusqu'à la fin du II que λ n'est pas une racine de 1. On écrira $\lambda = e^{2i\pi\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
2. Quel est le noyau de L ?
3. Montrer que l'adhérence de $\mathrm{Im}M$ est $\mathrm{Ker}\tau$. On munit l'espace vectoriel $A_1 \times A_1$ de la norme $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto \|\mathbf{a}\|_1 + \|\mathbf{b}\|_1$. Quelle est l'adhérence de $\mathrm{Im}L$?

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que
$$\inf\left\{\|T(U^k)\|_1 \,\middle|\, 1 \leqslant k \leqslant n\right\} \leqslant 2\sin\frac{\pi}{n+1}\cdot$$
En déduire que l'image de L n'est pas fermée.

5. On note $\mathcal{E} \subset A_1$ le sous-espace vectoriel formé des $\mathbf{a} = (a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \in A_1$ tels que $a_{0,0} = 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, la famille $(m,n) \mapsto (1+m^2+n^2)^k a_{m,n}$ appartienne à A_1. Les applications L et M induisent des applications linéaires $L' : \mathcal{E} \to \mathcal{E}\times\mathcal{E}$ et $M' : \mathcal{E}\times\mathcal{E} \to \mathcal{E}$. A quelle condition sur θ a-t-on $\mathrm{Im}L' = \mathrm{Ker}M'$ et $\mathrm{Im}M' = \mathcal{E}$?

III. Calcul de normes - stabilité par l'inverse

A. La représentation régulière.

1. Montrer que pour tout $\mathbf{a} \in A_1$ et tout $\mathbf{b} \in A_2$, on a $\|\mathbf{a}\star\mathbf{b}\|_2 \leqslant \|\mathbf{a}\|_1\|\mathbf{b}\|_2$.

> A l'aide de (a), on définit une application linéaire continue $\pi : A_1 \to \mathcal{L}(A_2)$ satisfaisant $\pi(\mathbf{a})(x) = \mathbf{a}\star x$ et $|||\pi(\mathbf{a})||| \leqslant \|\mathbf{a}\|_1$ pour $\mathbf{a} \in A_1$ et $x \in A_2$.

2. Montrer que $\|\mathbf{a}\|_2 \leqslant |||\pi(\mathbf{a})|||$ pour tout $\mathbf{a} \in A_1$.
3. Montrer que $\pi(\mathbf{a}\star\mathbf{b}) = \pi(\mathbf{a})\circ\pi(\mathbf{b})$. Montrer que $\pi(U)$ et $\pi(V)$ sont unitaires.

> Pour $\mathbf{a} \in \mathbb{A}$, on note $\mathbf{a}^* \in \mathbb{A}$ la famille $(b_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ définie par :
> $$b_{m,n} = \lambda^{mn}\,\overline{a_{-m,-n}}\,.$$
> Pour tout $\mathbf{a} \in A_1$ l'adjoint $\pi(\mathbf{a})^*$ de $\pi(\mathbf{a})$ est $\pi(\mathbf{a}^*)$.
> *On ne demande pas de justifier cette formule.*

B. Un calcul de norme

1. Soient H un espace hilbertien complexe et $T \in \mathcal{L}(H)$. Rappelons que la suite $n \mapsto |||T^n|||^{1/n}$ est convergente. *On ne demande pas de justifier ce fait.*
Montrer que $|||T^*\circ T||| = |||T|||^2$. En déduire que $|||T||| = \lim\limits_{n\to\infty} |||\big(T^*\circ T)^n\big)|||^{1/2n}$.
2. Soit $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note k_n le nombre d'éléments du support de $\mathbf{a}^n$.
   (a) Montrer que $\|\mathbf{a}^n\|_1 \leqslant \|\mathbf{a}^n\|_2\sqrt{k_n}$.
   (b) Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $k_n \leqslant r^2n^2$.
   (c) Montrer que l'on a $\lim\limits_{n\to\infty}\|\mathbf{a}^n\|_2^{1/n} = \lim\limits_{n\to\infty}|||\pi(\mathbf{a}^n)|||^{1/n} = \lim\limits_{n\to\infty}\|\mathbf{a}^n\|_1^{1/n}$.
   (d) Montrer que $|||\pi(\mathbf{a})||| = \lim\limits_{n\to\infty}\left\|\big(\mathbf{a}^*\star\mathbf{a}\big)^n\right\|_1^{1/2n} = \lim\limits_{n\to\infty}\Big(\tau\big((\mathbf{a}^*\star\mathbf{a})^{2n}\big)\Big)^{1/4n}$.

C. Deux applications

1. Soient H un espace hilbertien complexe et $u, v \in \mathcal{L}(H)$ des endomorphismes unitaires tels que $vu = \lambda uv$.

   (a) Montrer qu'il existe un unique homomorphisme continu $\sigma_{u,v} : A_1 \to \mathcal{L}(H)$ d'algèbres (*i.e.* une application continue qui soit à la fois linéaire et un homomorphisme d'anneaux) satisfaisant $\sigma_{u,v}(U) = u$, $\sigma_{u,v}(V) = v$. Montrer que, pour tout $\mathbf{a} \in A_1$, on a $|||\sigma_{u,v}(\mathbf{a})||| \leqslant \|\mathbf{a}\|_1$.

   (b) Montrer que, pour tout $\mathbf{a} \in A_1$, on a $|||\sigma_{u,v}(\mathbf{a})||| \leqslant |||\pi(\mathbf{a})|||$.

2. On note A l'adhérence de $\pi(A_1)$ dans $\mathcal{L}(A_2)$. Soit $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$. On suppose que $\pi(\mathbf{a})$ est inversible dans A.

   (a) Montrer qu'il existe $\mathbf{b} \in \mathcal{A}$ tel que $|||\pi(\mathbf{1} - \mathbf{a} \star \mathbf{b})||| < 1$ et $|||\pi(\mathbf{1} - \mathbf{b} \star \mathbf{a})||| < 1$.

   (b) Montrer que $\mathbf{a}$ est inversible dans A_1.

D. Idéaux bilatères et représentations

On suppose que λ n'est pas une racine de 1.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbf{a} \in A_1$ on pose $\tau_n(\mathbf{a}) = n^{-2} \displaystyle\sum_{0 \leqslant j,k < n} U^j \star V^k \star \mathbf{a} \star V^{-k} \star U^{-j}$.

   (a) Montrer que pour tout $\mathbf{a} \in A_1$, la suite $\tau_n(\mathbf{a})$ converge dans A_1 vers $\tau(\mathbf{a})\mathbf{1}$ (on pourra commencer par traiter le cas où $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$).

   (b) Soit $\mathbf{a} \in A_1$ non nul. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\tau_n(\mathbf{a}^* \star \mathbf{a})$ soit inversible dans A_1.

2. Montrer que tout idéal bilatère non nul de A_1 est égal à A_1.

3. Soient H un espace hilbertien complexe non nul et $u, v \in \mathcal{L}(H)$ des endomorphismes unitaires tels que $vu = \lambda uv$. On note $\sigma_{u,v} : A_1 \to \mathcal{L}(H)$ l'homomorphisme continu d'algèbres satisfaisant $\sigma_{u,v}(U) = u$ et $\sigma_{u,v}(V) = v$.

   (a) Montrer que pour tout $\mathbf{a} \in A_1$ on a $|\tau(a)| \leqslant |||\sigma_{u,v}(\mathbf{a})|||$.

   (b) Montrer que, pour tout $\mathbf{a} \in A_1$, on a $|||\sigma_{u,v}(\mathbf{a})||| = |||\pi(\mathbf{a})|||$.

IV. Une égalité de norme

On considère les espaces hilbertiens suivants :

- $H_{\mathbb{R}}$ désigne l'espace $L^2(\mathbb{R})$ des classes de fonctions $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mesurables et de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}$ (modulo les fonctions négligeables), muni de la norme $\xi \mapsto \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |\xi(t)|^2 \,\mathrm{d}\,t \right)^{1/2}$.
- $H_{\mathbb{U}}$ désigne l'espace des classes de fonctions $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mesurables périodiques de période 1 telles que $\displaystyle\int_0^1 |\xi(t)|^2 \,\mathrm{d}\,t < +\infty$ (modulo les fonctions négligeables), muni de la norme $\xi \mapsto \left(\displaystyle\int_0^1 |\xi(t)|^2 \,\mathrm{d}\,t \right)^{1/2}$.

- $H_{\mathbb{Z}}$ désigne l'espace $\ell^2(\mathbb{Z})$ des fonctions $\xi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ telles que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\xi(n)|^2 < +\infty$, muni de la norme $\xi \mapsto \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\xi(n)|^2\right)^{1/2}$.

On ne demande pas de vérifier que ce sont des espaces hilbertiens.

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Soit $N \in \mathbb{N}$. On se donne des fonctions $(f_k)_{-N\leqslant k\leqslant N}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, périodiques de période 1.

On considère les opérateurs $T_{\mathbb{R}} \in \mathcal{L}(H_{\mathbb{R}})$ et $T_{\mathbb{U}} \in \mathcal{L}(H_{\mathbb{U}})$ définis de la manière suivante : si $\tilde{\xi} \in H_{\mathbb{R}}$ (*resp.* $\tilde{\xi} \in H_{\mathbb{U}}$) est la classe d'une fonction mesurable $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, on note $T_{\mathbb{R}}\tilde{\xi}$ (*resp.* $T_{\mathbb{U}}\tilde{\xi}$) la classe dans $H_{\mathbb{R}}$ (*resp.* dans $H_{\mathbb{U}}$) de la fonction $t \mapsto \sum_{k=-N}^{N} f_k(t)\xi(t-k\theta)$.

Si $\xi \in H_{\mathbb{Z}}$, on pose $T_{\mathbb{Z}}\xi(n) = \sum_{k=-N}^{N} f_k\left(\frac{t}{\theta}\right)\xi(n-k)$.

Montrer que $|||T_{\mathbb{R}}||| = |||T_{\mathbb{U}}||| = |||T_{\mathbb{Z}}|||$.

Corrigé

I. Algèbres de convolution « tordue »

A. La convolution tordue

1. (a) Soient $\mathbf{a} \in \mathbb{A}$ et J une partie finie de $\mathbb{Z}^2$. Posons $\Delta = \{(i,i),\ i \in J\}$. Puisque $\Delta \subset J^2$ et que $|a_i||a_j| \geqslant 0$ (pour $(i,j) \in J^2$), on a

$$\sum_{i\in J} |a_i|^2 = \sum_{(i,j)\in\Delta} |a_i||a_j| \leqslant \sum_{(i,j)\in J^2} |a_i||a_j| = \Big(\sum_{i\in J} |a_i|\Big)^2.$$

(b) De (a) on déduit que, pour tout $\mathbf{a} \in \mathbb{A}$ et toute partie finie J de $\mathbb{Z}^2$, on a l'encadrement : $\sum_{i\in J} |a_i|^2 \leqslant \Big(\sum_{i\in J} |a_i|\Big)^2 \leqslant \|\mathbf{a}\|_1^2$. Prenant le sup de ces quantités, on trouve donc $\|\mathbf{a}\|_2^2 \leqslant \|\mathbf{a}\|_1^2$, d'où l'inégalité $\|\mathbf{a}\|_2 \leqslant \|\mathbf{a}\|_1$.
Si $\mathbf{a} \in A_1$, alors $\|\mathbf{a}\|_2 \leqslant \|\mathbf{a}\|_1 < +\infty$, donc $\mathbf{a} \in A_2$.

2. Pour $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$, posons $\sigma(\mathbf{a}) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} a_{m,n} = \sum_{(m,n)\in\operatorname{Supp}\mathbf{a}} a_{m,n}$, où l'on a noté $\operatorname{Supp}\mathbf{a}$ le support de $\mathbf{a}$. Il est clair que σ est linéaire et que $\sigma(W_{m,n}) = 1$.
On a $\Big|\sum_{(m,n)\in\operatorname{Supp}\mathbf{a}} a_{m,n}\Big| \leqslant \sum_{(m,n)\in\operatorname{Supp}\mathbf{a}} |a_{m,n}|$, donc $|\sigma(\mathbf{a})| \leqslant \|\mathbf{a}\|_1$.
En particulier, σ est une forme linéaire continue sur l'espace normé $(\mathcal{A}, \|\ \|_1)$ (et $|||\sigma||| = 1$).
Par densité, elle admet un unique prolongement linéaire et continu $\sigma : A_1 \to \mathbb{C}$.
Soit $\sigma' : A_1 \to \mathbb{C}$ une autre forme linéaire continue vérifiant $\sigma'(W_{m,n}) = 1$. Soit $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$.
On a $\mathbf{a} = \sum_{(m,n)\in\operatorname{Supp}\mathbf{a}} a_{m,n} W_{m,n}$, donc $\sigma'(\mathbf{a}) = \sum_{(m,n)\in\operatorname{Supp}\mathbf{a}} a_{m,n}\sigma'(W_{m,n}) = \sigma(\mathbf{a})$. Ainsi, les formes linéaires continues σ et σ' coïncident sur $\mathcal{A}$; par densité elles sont égales.

3. (a) Pour $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$, posons $d_{p,q} = \lambda^{q(m-p)} a_{p,q} b_{m-p,n-q}$; posons $\mathbf{d} = (d_{p,q})$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\|\mathbf{d}\|_1 = \sum_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2} |d_{p,q}| \leqslant \Big(\sum_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2} \big|\lambda^{q(m-p)} a_{p,q}\big|^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2} \big|b_{m-p,n-q}\big|^2\Big)^{1/2} = \|\mathbf{a}\|_2\|\mathbf{b}\|_2,$$

donc $\mathbf{d} \in A_1$.

(b) On a, par définition, $c_{m,n} = \sigma(\mathbf{d})$. Il vient, $|c_{m,n}| \leqslant |||\sigma||| \|\mathbf{d}\|_1 \leqslant \|\mathbf{a}\|_2\|\mathbf{b}\|_2$.
Supposons que $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{A}$; posons

$$M = \sup\{|p+p'| + |q+q'|;\ (p,q) \in \operatorname{Supp}\mathbf{a}; (p',q') \in \operatorname{Supp}\mathbf{b}\}.$$

Comme $\operatorname{Supp}\mathbf{a} \times \operatorname{Supp}\mathbf{b}$ est fini, ce « sup » est atteint, donc $M \neq +\infty$.
Soit $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $|m|+|n| > M$. Pour tout $(p,q) \in \operatorname{Supp}\mathbf{a}$ et $(p',q') \in \operatorname{Supp}\mathbf{b}$, on a $(p+p', q+q') \neq (m,n)$. Donc, pour tout $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$, on a $a_{p,q} = 0$, ou $b_{m-p,n-q} = 0$. La famille $\Big(\lambda^{q(m-p)} a_{p,q} b_{m-p,n-q}\Big)_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2}$ est donc nulle, donc $c_{m,n} = 0$.

Passons au cas général. Soit $\varepsilon > 0$, il existe (par densité de $\mathcal{A}$ dans A_2) des éléments $\mathbf{a}', \mathbf{b}' \in \mathcal{A}$ tels que $\|\mathbf{a}\|_2\|\mathbf{b} - \mathbf{b}'\|_2 + \|\mathbf{a} - \mathbf{a}'\|_2\|\mathbf{b}'\|_2 \leqslant \varepsilon$. Posons

$$M = \sup\{|p + p'| + |q + q'|;\ (p, q) \in \operatorname{Supp}\mathbf{a}'; (p', q') \in \operatorname{Supp}\mathbf{b}'\}.$$

Soit $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $|m| + |n| > M$. Pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$, on a $a'_{p,q}b'_{m-p,n-q} = 0$, donc

$$a_{p,q}b_{m-p,n-q} = a_{p,q}(b_{m-p,n-q} - b'_{m-p,n-q}) + (a_{p,q} - a'_{p,q})b'_{m-p,n-q}.$$

On trouve alors

$$c_{m,n} = \Big(\sum_{p,q} \lambda^{q(m-p)} a_{p,q}(b_{m-p,n-q} - b'_{m-p,n-q})\Big) + \Big(\sum_{p,q} \lambda^{q(m-p)}(a_{p,q} - a'_{p,q})b'_{m-p,n-q}\Big).$$

Or par ce qui précède, $\Big|\sum_{p,q} \lambda^{q(m-p)} a_{p,q}(b_{m-p,n-q} - b'_{m-p,n-q})\Big| \leqslant \|\mathbf{a}\|_2\|\mathbf{b} - \mathbf{b}'\|_2$ et $\Big|\sum_{p,q} \lambda^{q(m-p)}(a_{p,q} - a'_{p,q})b'_{m-p,n-q}\Big| \leqslant \|\mathbf{a} - \mathbf{a}'\|_2\|\mathbf{b}'\|_2$. Alors, il vient

$$\begin{aligned}
|c_{m,n}| &\leqslant \Big|\sum_{p,q} \lambda^{q(m-p)} a_{p,q}(b_{m-p,n-q} - b'_{m-p,n-q})\Big| + \Big|\sum_{p,q} \lambda^{q(m-p)}(a_{p,q} - a'_{p,q})b'_{m-p,n-q}\Big| \\
&\leqslant \|\mathbf{a}\|_2\|\mathbf{b} - \mathbf{b}'\|_2 + \|\mathbf{a} - \mathbf{a}'\|_2\|\mathbf{b}'\|_2 \\
&\leqslant \varepsilon.
\end{aligned}$$

(c) Écrivons $\mathbf{a} \star_\lambda \mathbf{b} = (c_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$, on a $|c_{m,n}| \leqslant \sum_{p,q} |a_{p,q}||b_{m-q,n-p}|$. Donc

$$\|\mathbf{a} \star_\lambda \mathbf{b}\|_1 \leqslant \sum_{m,n}\sum_{p,q} |a_{p,q}||b_{m-q,n-p}| = \|\mathbf{a}\|_1\|\mathbf{b}\|_1.$$

(d) On a

$$\begin{aligned}
(W_{m,n} \star_\lambda W_{m',n'}) \star_\lambda W_{m'',n''} &= \lambda^{nm'} W_{m+m',n+n'} \star_\lambda W_{m'',n''} \\
&= \lambda^{nm'+(n+n')m''} W_{m+m'+m'',n+n'+n''}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
W_{m,n} \star_\lambda (W_{m',n'} \star_\lambda W_{m'',n''}) &= \lambda^{n'm''} W_{m,n} \star_\lambda W_{m'+m'',n'+n''} \\
&= \lambda^{n(m'+m'')+n'm''} W_{m+m'+m'',n+n'+n''} \\
&= (W_{m,n} \star_\lambda W_{m',n'}) \star_\lambda W_{m'',n''}
\end{aligned}$$

Par linéarité, on trouve $(\mathbf{a} \star_\lambda \mathbf{b}) \star_\lambda \mathbf{c} = \mathbf{a} \star_\lambda (\mathbf{b} \star_\lambda \mathbf{c})$ pour $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathcal{A}$. A l'aide de (c), on en déduit l'égalité $(\mathbf{a} \star_\lambda \mathbf{b}) \star_\lambda \mathbf{c} = \mathbf{a} \star_\lambda (\mathbf{b} \star_\lambda \mathbf{c})$ pour $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in A_1$ - par densité de $\mathcal{A}$ dans A_1.

B. Fonctions périodiques de classe C^1.

1. (a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $(fg)'(t) = f(t)g'(t) + f'(t)g(t)$, donc

$$\begin{aligned}
|(fg)(t)| + |(fg)'(t)| &\leqslant |f(t)||g(t)| + |f(t)||g'(t)| + |f'(t)||g(t)| \\
&\leqslant \big(|f(t)| + |f'(t)|\big)\big(|g(t)| + |g'(t)|\big) \\
&\leqslant N(f)N(g).
\end{aligned}$$

Prenant le « sup » sur $t \in \mathbb{R}$, on trouve $N(fg) \leqslant N(f)N(g)$.

(b) Soient $f \in B$ et $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Stone-Weierstrass, il existe $n \in \mathbb{N}$ et des nombres complexes a_k pour $-n \leqslant k \leqslant n$ tels que $\sup\{|f'(t) - P(t)|;\ t \in \mathbb{R}\} \leqslant \varepsilon$ où l'on a posé $P(t) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} a_k e^{2i\pi kt}$.

Puisque $\displaystyle\int_0^1 f'(t)\,dt = 0$, il vient $|a_0| = \Big|\displaystyle\int_0^1 P(t)\,dt\Big| \leqslant \varepsilon$.

Pour $t \in \mathbb{R}$, posons $Q(t) = f(0) + \displaystyle\int_0^t (P(s) - a_0)\,dt$; la fonction Q est périodique de période 1 et appartient à l'espace vectoriel engendré par z^k pour $-n \leqslant k \leqslant n$. Pour $t \in [-1/2, 1/2]$, on a $|f(t) - Q(t)| = \Big|\displaystyle\int_0^t (f'(s) - P(s) + a_0)\,ds\Big| \leqslant \varepsilon$. On trouve alors $N(f - Q) \leqslant 3\varepsilon$.

2. (a) Notons $\mathcal{F} : f \mapsto \widehat{f}$ de B dans $\ell^1(\mathbb{Z})$ la transformation de Fourier et $i : \ell^1(\mathbb{Z}) \to A_1$ l'application qui à une suite $(a_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ associe la famille $(b_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ définie par

$$b_{m,n} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 0 \\ a_m & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

On a $\psi = i \circ \mathcal{F}$. L'application $\mathcal{F}$ est continue et on a $\widehat{fg} = \widehat{f} \star \widehat{g}$. De plus, i est continue car isométrique et l'on a clairement $i(\mathbf{a} \star \mathbf{b}) = i(\mathbf{a}) \star_\lambda i(\mathbf{b})$.

(b) Si $f = z^n$, on a $g = \lambda^n z^n$, donc $\psi(g) \star_\lambda V = \lambda^n \psi(f) \star_\lambda V = \lambda^n U^n \star_\lambda V = V \star_\lambda U^n = V \star_\lambda \psi(f)$. Le cas général en résulte par linéarité et continuité de ψ.

II. Un calcul d'image et de noyau

A. Approximation des réels par des rationnels

1. (a) Quitte à réordonner les s_i, on peut supposer que la suite s_i est croissante. On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} s_{k+1} - s_k = s_{n+1} - s_0 \leqslant 1 - 0$. Il existe donc k tel que $s_{k+1} - s_k \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

(b) Pour $i = 0, \ldots, n$, posons $s_i = t_i - t_0 - E(t_i - t_0)$ où E désigne la partie entière ; posons aussi $s_{n+1} = 1$. Par (a), il existe i, j avec $0 \leqslant i < j \leqslant n+1$ tels que $|s_i - s_j| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. Si $j \neq n+1$, on trouve $|(t_i - t_j) - p| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$, où p est un entier ($p = E(t_i - t_0) - E(t_j - t_0)$). Si $j = n+1$, on trouve $|t_i - t_0 - p| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ avec $p = E(t_i - t_0) + 1$. Remarquons que dans ce cas $i \neq 0$ puisque $1 > \dfrac{1}{n+1}$.

(c) Posons $t_i = it$; il existe i, j avec $0 \leqslant i < j \leqslant n$ tels que $\delta(t_i - t_j) \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. On pose alors $k = j - i$; on trouve $\delta(kt) \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

2. (a) Soit $t \in \mathbb{R}$. Si $t = \dfrac{p}{q}$ est rationnel, alors $t \in U_\alpha(nq)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout α. Donc $t \in Y_\alpha$ pour tout α. Supposons que t soit irrationnel. Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et notons $\varepsilon = \inf\{\delta(kt);\ 1 \leqslant k \leqslant n_0\}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $(n+1)\varepsilon > 1$. Par 1.(c), il

existe $q \leqslant n$ tel que $\delta(qt) \leqslant \dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$. Par définition de ε, on a $q > n_0$; de plus $\delta(qt) \leqslant \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{q}$, donc $t \in U_1(q)$. Cela montre que $t \in Y_1$.

(b) On a $U_\alpha(q) = \displaystyle\bigcup_{p\in\mathbb{Z}} \left]\frac{p}{q} - q^{-\alpha-1}, \frac{p}{q} + q^{-\alpha-1}\right[$. Si $2q^{-\alpha} > 1$, on a $U_\alpha(q) = \mathbb{R}$; sinon, $U_\alpha(q) \cap [0,1]$ est réunion disjointe de $[0, q^{-\alpha-1}[$ de $]1 - q^{-\alpha-1}, 1]$ et des intervalles $\left]\dfrac{p}{q} - q^{-\alpha-1}, \dfrac{p}{q} + q^{-\alpha-1}\right[$ pour $1 \leqslant p \leqslant q-1$. Sa mesure est donc $\inf(1, 2q^{-\alpha})$.

(c) Notons μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Pour $\alpha > 1$ on a $\displaystyle\sum_q \mu(U_\alpha(q) \cap [0,1]) < +\infty$. Par le théorème de Borel-Cantelli, on a $\mu(Y_\alpha \cap [0,1]) = 0$. Il est clair que $Y_\alpha \cap [n, n+1] = \{t + n;\ t \in Y_\alpha \cap [0,1]\}$, donc $\mu(Y_\alpha \cap [n, n+1]) = 0$ (par invariance par translation de μ).

On a $\mu(Y_\alpha) \leqslant \sum \mu(Y_\alpha \cap [n, n+1]) = 0$.

Pour $\alpha \geqslant \beta$ et $q \in \mathbb{N}^*$, on a $U_\alpha(q) \subset U_\beta(q)$, donc $Y_\alpha \subset U_\beta$.

Il s'ensuit que $\displaystyle\bigcup_{\alpha>1} Y_\alpha = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_{\frac{n+2}{n+1}}$. Donc Y est une réunion dénombrable d'ensembles négligeables : c'est une partie négligeable de $\mathbb{R}$.

3. (a) Par définition, on a $Y_\alpha = \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{q>n} U_\alpha(q)\right)$. L'ensemble Y_α est donc une intersection dénombrable d'ouverts de $\mathbb{R}$. De plus par ce qui précède $X = \displaystyle\bigcap_{\alpha\in\mathbb{R}_+^*} Y_\alpha = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Y_{n+1}$ est une intersection dénombrable d'ouverts de $\mathbb{R}$. Enfin, on a déjà noté que $\mathbb{Q} \subset X$, donc X est dense dans $\mathbb{R}$.

(b) Soit $t \in \mathbb{R}$. Supposons que $t \in X$, et soit P un polynôme (à coefficients réels) ; soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$ strictement plus grand que le degré de P.

Pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand, $P(n) < n^\alpha$. L'ensemble $\{n;\ \delta(nt) < n^{-\alpha}\}$ étant infini, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n) < n^\alpha$ et $\delta(nt) < n^{-\alpha}$, donc $\delta(nt)P(n) < 1$.

Supposons que $t \notin X$. Alors il existe $q \in \mathbb{R}_+^*$, que l'on peut supposer entier tel que $t \notin Y_q$; l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}^*;\ \delta(nt) < n^{-q}\}$ étant fini, il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $a\delta(nt) \geqslant 1$ pour tout n dans cet ensemble. Posons alors $P(t) = t^q + a$. On a bien $P(n)\delta(nt) \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

B. Un calcul d'image et de noyau

1. On a $V \star_\lambda U = \lambda U \star_\lambda V$. Donc, pour tout $x \in A_1$, on a

$$(V \star_\lambda U) \star_\lambda x \star_\lambda (V \star_\lambda U)^{-1} = (U \star_\lambda V) \star_\lambda x \star_\lambda (U \star_\lambda V)^{-1}.$$

On en déduit que $S \circ T = T \circ S$, donc $M \circ L = 0$.

2. Soit $\mathbf{a} = (a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ un élément de A_1. Écrivons $L(\mathbf{a}) = ((b_{m,n}), (c_{m,n}))$.

On a $b_{m,n} = (\lambda^{-n} - 1)a_{m,n}$ et $c_{m,n} = (\lambda^m - 1)a_{m,n}$. Si $\mathbf{a} \in \mathrm{Ker}L$, alors pour tout $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$, on a $(\lambda^{-n} - 1)a_{m,n} = (\lambda^m - 1)a_{m,n} = 0$. Si $m \neq 0$ (resp. $n \neq 0$) alors $\lambda^{-n} - 1 \neq 0$ (resp. $\lambda^m - 1 \neq 0$) donc $a_{m,n} = 0$. Il vient $\mathrm{Ker}L = \mathbb{C}\mathbf{1}$.

3. Puisque $\tau(\mathbf{a} \star_\lambda \mathbf{b}) = \tau(\mathbf{b} \star_\lambda \mathbf{a})$, on a $\tau \circ S = \tau \circ T = 0$, donc $\tau \circ M = 0$.
Soit $(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Les éléments $S(W_{m,n})$ et $T(W_{m,n})$ sont proportionnels à $W_{m,n}$ et l'un des deux au moins est non nul. Il en résulte que $W_{m,n} \in \mathrm{Im}M$, donc l'adhérence de $\mathrm{Im}M$ est $\mathrm{Ker}\tau$.
Posons $E = \mathrm{Ker}M \cap (\mathrm{Ker}\tau \times \mathrm{Ker}\tau)$. On sait déjà que $\mathrm{Im}L \subset \mathrm{Ker}M$. Par ailleurs, si $(\mathbf{a},\mathbf{b}) \in \mathrm{Im}L$, il est clair que $\mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathrm{Ker}\tau$, donc $\mathrm{Im}L \subset E$. Comme E est un sous espace fermé de $A_1 \times A_1$, l'adhérence de $\mathrm{Im}L$ est incluse dans E. Pour $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$, posons aussi $E_{m,n} = \{(aW_{m,n}, bW_{m,n});\ (a,b) \in \mathbb{C}^2\} \cap E$. Il est clair que, pour $(m,n) \neq (0,0)$, $E_{m,n}$ est de dimension 1 et engendré par $L(W_{m,n})$. Par ailleurs, si $x = \big((a_{m,n}),(b_{m,n})\big) \in E$, alors x est somme de la famille sommable $x_{m,n} = (a_{m,n}W_{m,n}, b_{m,n}W_{m,n})$. Comme $x_{m,n} \in E_{m,n}$, il en résulte que x est adhérent au sous-espace engendré par les $E_{m,n}$, lui-même contenu dans $\mathrm{Im}L$, soit $x \in \overline{\mathrm{Im}L}$. Cela prouve que $\overline{\mathrm{Im}L} = E$
4. Remarquons que pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a $|e^{i\theta} - 1| = 2|\sin\theta/2|$, donc
$$\|T(U^k)\|_1 = |e^{2ik\pi\theta} - 1| = 2\sin \pi\delta(k\theta).$$
Par A.1.(c), il existe $k \in \{1,\dots,n\}$ tel que $\delta(k\theta) \leqslant \dfrac{1}{n+1}$, donc
$$\inf\{\|T(U^k)\|_1;\ 1 \leqslant k \leqslant n\} \leqslant 2\sin\frac{\pi}{n+1}\cdot$$
On peut démontrer que l'image de L n'est pas fermée par des calculs analogues à ceux de la question suivante. Donnons une méthode basée sur le théorème de Banach : Si l'image de L était fermée, l'application linéaire continue $\mathrm{Ker}\tau \to E$ déduite de L serait bijective ; ce serait un homéomorphisme par le théorème de Banach. Il existerait donc une constante $c > 0$ telle que l'on ait $\|L(x)\|_1 \geqslant c\|x\|_1$ pour tout $x \in \mathrm{Ker}\tau$. Ce n'est pas le cas par ce qui précède puisque $U^k \in \mathrm{Ker}\tau$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $\|L(U^k)\|_1 = \|T(U^k)\|_1$.
5. Soit $\big((a_{m,n}),(b_{m,n})\big) \in \mathrm{Ker}M'$. Pour $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$, posons
$$c_{m,n} = \begin{cases} 0 & \text{si } (m,n) = (0,0) \\ a_{0,n}(\lambda^{-n} - 1)^{-1} & \text{si } m = 0 \text{ et } n \neq 0 \\ b_{m,0}(\lambda^{m} - 1)^{-1} & \text{si } n = 0 \text{ et } m \neq 0 \\ a_{m,n}(\lambda^{-n} - 1)^{-1} = b_{m,n}(\lambda^{m} - 1)^{-1} & \text{sinon} \end{cases}$$
Remarquons que $\big((a_{m,n}),(b_{m,n})\big) \in \mathrm{Im}L'$ si et seulement si $(c_{m,n}) \in \mathcal{E}$.
Reprenons les notations de A.3. Si $\theta \notin X$, il existe un polynôme P à coefficients positifs tel que $|c_{m,n}| \leqslant P(|m|+|n|)(|a_{m,n}| + |b_{m,n}|)$; il en résulte que $(c_{m,n}) \in \mathcal{E}$ pour tout $\big((a_{m,n}),(b_{m,n})\big) \in \mathrm{Ker}M'$, donc $\mathrm{Im}L' = \mathrm{Ker}M'$.
Dans ce cas, pour tout $(a_{m,n}) \in \mathcal{E}$, posons $b_{m,n} = (1-\lambda^m)^{-1}a_{m,n}$ si $m \neq 0$ et $b_{0,n} = 0$ et $c_{m,0} = (\lambda^{-n} - 1)^{-1}a_{0,n}$ si $n \neq 0$, $c_{m,n} = 0$ dans tous les autres cas. On vérifie sans peine que $\big((b_{m,n}),(c_{m,n})\big) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ et $M'\big((b_{m,n}),(c_{m,n})\big) = (a_{m,n})$, donc $\mathrm{Im}L' = \mathcal{E}$.
Si $\theta \in X$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une infinité de $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n^k\delta(n\theta) < 1$. On peut construire une suite strictement croissante $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout k on ait $n_k \in \mathbb{N}^*$ et $\delta(\theta n_k)n_k^k < 1$. Posons alors
$$a_{m,n} = \begin{cases} 1 - \lambda^{n_k} & \text{si } m = 0 \text{ et } n = n_k \\ 0 & \text{dans tous les autres cas} \end{cases}$$
et $b_{m,n} = 0$. Alors $\big((a_{m,n}),(b_{m,n})\big) \in \mathrm{Ker}M'$ mais $\big((a_{m,n}),(b_{m,n})\big) \notin \mathrm{Im}L'$.
De plus, $(a_{m,n}) \notin \mathrm{Im}M'$, donc $\mathrm{Im}M' \neq \mathcal{E}$.

III : Calcul de normes - stabilité par l'inverse

A. La représentation régulière.

1. Soient $\mathbf{a} = (a_{m,n})_{(m,n)} \in A_1$ et $\mathbf{b} = (b_{m,n})_{(m,n)} \in A_2$. Écrivons $\mathbf{a} \star_\lambda \mathbf{b} = (c_{m,n})_{(m,n)}$. On a $\|\mathbf{a} \star_\lambda \mathbf{b}\|_2 = \sup \Big\{ \sum_{m,n} |c_{m,n}||d_{m,n}|;\ \mathbf{d} = (d_{m,n})_{(m,n)} \in \mathcal{A};\ \|\mathbf{d}\|_2 \leqslant 1 \Big\}$.

   Soit $\mathbf{d} = (d_{m,n})_{(m,n)} \in \mathcal{A}$. Pour $m, n \in \mathbb{Z}$, on a $c_{m,n} \leqslant \sum_{p,q} |a_{p,q}||b_{m-p,n-q}|$, donc
   $$\begin{aligned}\sum_{m,n} |c_{m,n}||d_{m,n}| &\leqslant \sum_{m,n,p,q} |a_{p,q}||b_{m-p,n-q}||d_{m,n}| \\ &\leqslant \Big(\sum_{m,n,p,q} |a_{p,q}||b_{m-p,n-q}|^2 \Big)^{1/2} \Big(\sum_{m,n,p,q} |a_{p,q}||d_{m,n}|^2 \Big)^{1/2}\end{aligned}$$
   d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Sommant d'abord par m, n, on trouve
   $$\sum_{m,n,p,q} |a_{p,q}||b_{m-p,n-q}|^2 = \|\mathbf{a}\|_1 \|\mathbf{b}\|_2^2,$$
   donc
   $$\sum_{m,n} |c_{m,n}||d_{m,n}| \leqslant \|\mathbf{a}\|_1 \|\mathbf{b}\|_2 \|\mathbf{d}\|_2.$$
   Cela étant vrai pour tout $\mathbf{d}$, on trouve $\|\mathbf{a} \star_\lambda \mathbf{b}\|_2 \leqslant \|\mathbf{a}\|_1 \|\mathbf{b}\|_2$.
2. On a $\mathbf{a} = \mathbf{a} \star_\lambda \mathbf{1} = \pi(\mathbf{a})(\mathbf{1})$, donc $\|\mathbf{a}\|_2 \leqslant |||\pi(\mathbf{a})||| \|\mathbf{1}\|_2 = |||\pi(\mathbf{a})|||$.
3. Pour $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in A_1$, on a
   $(\mathbf{a} \star_\lambda \mathbf{b}) \star_\lambda \mathbf{c} = \mathbf{a} \star_\lambda (\mathbf{b} \star_\lambda \mathbf{c})$ par I.A.3.(d), donc $\pi(\mathbf{a} \star_\lambda \mathbf{b})(\mathbf{c}) = (\pi(\mathbf{a}) \circ \pi(\mathbf{b}))(\mathbf{c})$.
   Les applications linéaires continues $\pi(\mathbf{a} \star_\lambda \mathbf{b})$ et $\pi(\mathbf{a}) \circ \pi(\mathbf{b})$ coïncident sur le sous-espace dense A_1 de A_2. Elles sont donc égales.
   Remarquons que $\pi(\mathbf{1}) = \mathrm{id}_{A_2}$, donc $\pi(U) \circ \pi(U^{-1}) = \pi(U^{-1}) \circ \pi(U) = \mathrm{id}_{A_2}$.
   Par ailleurs, comme $\|U\|_1 = \|U^{-1}\|_1 = 1$, on trouve $|||\pi(U)||| \leqslant 1$ et $|||\pi(U^{-1}||| \leqslant 1$. On en déduit que, pour tout $\mathbf{a} \in A_2$, on a $\|\pi(U)(\mathbf{a})\|_2 \leqslant \|\mathbf{a}\|_2$.
   Or $\mathbf{a} = \pi(\mathbf{1})(\mathbf{a}) = \pi(U^{-1}) \circ \pi(U)(\mathbf{a})$, donc $\|\mathbf{a}\|_2 \leqslant \|\pi(U)(\mathbf{a})\|_2$. On en déduit que $\|\pi(U)(\mathbf{a})\|_2^2 = \|\mathbf{a}\|_2^2$. Notons $\langle\ |\ \rangle$ le produit scalaire de A_2.
   Par l'identité de polarisation, on trouve $\langle \pi(U)(\mathbf{a}) | \pi(U)(\mathbf{b}) \rangle = \langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle$ pour tout $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A_2$ ce qui s'écrit $\langle \pi(U)^* \circ \pi(U)(\mathbf{a}) | \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle$. On en déduit que $\pi(U)^* \circ \pi(U)(\mathbf{a}) - \mathbf{a}$ est orthogonal à A_2 donc est nul. Cela étant vrai pour tout $\mathbf{a} \in A_2$, on trouve $\pi(U)^* \pi(U) = \mathrm{id}_{A_2}$. Comme U est inversible, on trouve $\pi(U)^* = \pi(U)^{-1}$.
   De même, $\pi(V)$ est unitaire.

B. Un calcul de norme

1. Il est clair que $|||T^* \circ T||| \leqslant |||T|||^2$. Pour tout $x \in A_2$ tel que $\|x\|_2 = 1$, on a
   $$\|T(x)\|^2 = \langle x | T^* \circ T(x) \rangle \leqslant \|T^* \circ T(x)\|_2 \leqslant |||T^* \circ T|||.$$
   Prenant le « sup » sur x, on trouve $|||T|||^2 \leqslant |||T^* \circ T|||$. Appliquant ceci à $(T^* \circ T)^{2^k}$, on trouve (par récurrence) que $|||(T^* \circ T)^{2^k}||| = |||T|||^{2^k}$. La suite convergente '$|||(T^* \circ T)^n|||^{1/n}$ admet une sous-suite constante (pour $n = 2^k$) et $|||T^* \circ T||| = \lim |||(T^* \circ T)^n|||^{1/n}$.
   Donc $|||T||| = \lim |||(T^* \circ T)^n|||^{1/2n}$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note k_n le nombre d'éléments du support de $\mathbf{a}^n$.
   (a) Écrivons $\mathbf{a}^n = (b_{p,q})_{p,q} \in \mathbb{Z}^2$.
   Pour $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ posons $c_{p,q} = 0$ si $b_{p,q} = 0$ et $b_{p,q}c_{p,q} = |b_{p,q}|$ pour tout (p,q). On a $\|(c_{p,q})\|_2 = \sqrt{k_n}$ et, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,
   $$\|\mathbf{a}\|_1 = \langle (b_{p,q})|(c_{p,q})\rangle \leqslant \|\mathbf{a}\|_2\sqrt{k_n}.$$
   (b) Il existe $p_0, p_1, q_0, q_1 \in \mathbb{Z}$ tels que $a_{p,q} \neq 0 \Rightarrow p_0 \leqslant p \leqslant p_1$ et $q_0 \leqslant q \leqslant q_1$. Posons alors $r = 1 + \max(p_1 - p_0, q_1 - q_0)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le support de $\mathbf{a}^n$ est contenu dans $\{(p,q);\ np_0 \leqslant p \leqslant np_1, \text{ et } nq_0 \leqslant q \leqslant nq_1\}$, donc
   $$k_n \leqslant \big(n(p_1 - p_0) + 1\big)\big(n(q_1 - q_0) + 1\big) \leqslant n^2r^2.$$
   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\|\mathbf{a}^n\|_2 \leqslant |||\pi(\mathbf{a}^n)||| \leqslant \|\mathbf{a}^n\|_1 \leqslant rn\|\mathbf{a}^n\|_2$;
   comme $\lim(rn)^{1/n} = 1$, (c) en résulte.
   (d) Appliquant les résultats de (c) à $\mathbf{a}^* \star_\lambda \mathbf{a}$, on trouve
   $$|||\pi(\mathbf{a})|||^2 = \lim \left|\left|\left|\pi\big((\mathbf{a}^* \star_\lambda \mathbf{a})^n\big)\right|\right|\right|^{1/n} = \lim \left\|\big(\mathbf{a}^* \star_\lambda \mathbf{a}\big)^n\right\|_1^{1/n} = \lim \left\|(\mathbf{a}^* \star_\lambda \mathbf{a})^n\right\|_2^{1/n}.$$
   Or $\left\|(\mathbf{a}^*\star_\lambda \mathbf{a})^n\right\|_2^2 = \tau\big((\mathbf{a}^*\star_\lambda\mathbf{a})^{2n}\big)$, d'où l'on trouve $|||\pi(\mathbf{a})||| = \lim \Big(\tau\big((\mathbf{a}^*\star_\lambda\mathbf{a})^{2n}\big)\Big)^{1/4n}$.

C. Deux applications

1. (a) Pour tout $m, n \in \mathbb{Z}^2$, $u^m \circ v^n$ est un unitaire de $\mathcal{L}(H)$, donc $|||u^m \circ v^n||| = 1$. Soit $\mathbf{a} \in A_1$. La famille $(a_{m,n}u^m \circ v^n)_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ est normalement sommable donc sommable (puisque $\mathcal{L}(H)$ est un espace de Banach). Posons
   $$\sigma_{u,v}(\mathbf{a}) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} a_{m,n}u^m \circ v^n.$$
   On a $|||\sigma_{u,v}(\mathbf{a})||| = \left|\left|\left|\sum a_{m,n}u^m \circ v^n\right|\right|\right| \leqslant \sum |||a_{m,n}u^m \circ v^n||| = \|a\|_1$. En particulier, $\sigma_{u,v}$ est continue.
   Il est clair que $\sigma_{u,v}(W_{m,n}) = u^m \circ v^n$. En particulier $\sigma_{u,v}(U) = u$, $\sigma_{u,v}(V) = v$.
   On a $\sigma_{u,v}(W_{m,n})\sigma_{u,v}(W_{p,q}) = u^m \circ v^n \circ u^p \circ v^q = \lambda^{np}u^{m+p} \circ v^{n+q} = \sigma_{u,v}(W_{m,n} \star_\lambda W_{p,q})$.
   Par linéarité et continuité, pour $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A_1$ on a $\sigma_{u,v}(\mathbf{a} \star_\lambda \mathbf{b}) = \sigma_{u,v}(\mathbf{a})\sigma_{u,v}(\mathbf{b})$.
   Si $\sigma' : A_1 \to \mathcal{L}(H)$ vérifie aussi ces propriétés, à l'aide des propriétés $\mathbf{1} \star_\lambda U = U$, $U^{-1} \star_\lambda U = \mathbf{1}$ et $V^{-1} \star_\lambda V = \mathbf{1}$ on trouve successivement $\sigma'(\mathbf{1}) = \mathrm{id}_H$, $\sigma'(U^{-1}) = u^{-1}$, $\sigma'(V^{-1}) = v^{-1}$, puis $\sigma'(W_{m,n}) = \sigma'(U^m \star_\lambda V^n) = u^m \circ v^n$. Il en résulte que σ' coïncide avec $\sigma_{u,v}$ sur $\mathcal{A}$ (par linéarité), donc sur A_1 (par continuité).
   (b) On a $\sigma_{u,v}(\mathbf{a}^*) = \sigma_{u,v}(\mathbf{a})^*$ pour tout $\mathbf{a} \in A_1$. On en déduit que
   $$|||\sigma_{u,v}(\mathbf{a})||| = \lim |||\sigma_{u,v}\big(\mathbf{a}^* \star_\lambda \mathbf{a})^n\big)|||^{1/2n} \leqslant \lim \|(\mathbf{a}^* \star_\lambda \mathbf{a})^n)\|_1^{1/2n} = |||\pi(\mathbf{a})|||.$$

2. (a) Soit $x = \pi(\mathbf{a})^{-1}$. Comme π est continue, $\mathcal{A}$ est dense dans A_1 et $\pi(A_1)$ est dense dans A, $\pi(\mathcal{A})$ est dense dans A. Il existe donc $\mathbf{b} \in \mathcal{A}$ tel que $|||\pi(\mathbf{b}) - x|||\|\mathbf{a}\|_1 < 1$.
   On a alors $|||\pi(\mathbf{a} \star_\lambda \mathbf{b}) - \mathrm{id}_{A_2}||| = |||\pi(\mathbf{a})\big(\pi(\mathbf{b}) - x\big)||| < 1$ et $|||\pi(\mathbf{b} \star_\lambda \mathbf{a}) - \mathrm{id}_{A_2}||| < 1$.

(b) Posons $x = \mathbf{1} - \mathbf{a} \star_\lambda \mathbf{b}$. On a $\lim \|x^n\|^{1/n} = \lim |||\pi(x)^n|||^{1/n} \leqslant |||\pi(x)||| < 1$. Par la règle de Cauchy, la série de terme général $\|x^n\|_1$ est convergente, donc la série de terme général x^n est convergente dans l'epace de Banach A_1. On en déduit que $\mathbf{a} \star_\lambda \mathbf{b} = \mathbf{1} - x$ est inversible dans A_1 (d'inverse $\sum x^n$). De même $\mathbf{b} \star_\lambda \mathbf{a}$ est inversible dans A_1. Il en résulte que $\mathbf{a}$ admet un inverse à droite et un inverse à gauche donc est inversible dans A_1.

D. Idéaux bilatères et représentations

1. (a) Pour tout $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ et $0 \leqslant j,k < n$, on a $U^j \star_\lambda V^k \star_\lambda W_{p,q} \star_\lambda V^{-k} \star_\lambda U^{-j} = \lambda^{kp-jq} W_{p,q}$, donc $\tau_n(W_{p,q}) = \Big(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \lambda^{-jq}\Big)\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{kp}\Big) W_{p,q}$. Il en résulte que, si $(p,q) \neq (0,0)$, la suite $\tau_n(W_{p,q})$ converge vers 0 dans A_1. Par linéarité, la suite $\tau_n(\mathbf{a})$ converge dans A_1 vers $\tau(\mathbf{a})\mathbf{1}$ pour tout $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$. Soient $\mathbf{a} \in A_1$ et $\varepsilon > 0$; il existe $\mathbf{b} \in \mathcal{A}$ tel que $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|_1 < \varepsilon/3$. Par ce qui précède, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait $\|\tau_n(\mathbf{b}) - \tau(\mathbf{b})\mathbf{1}\|_1 < \varepsilon/3$. Remarquons que, pour tout $\mathbf{c} \in A_1$ on a $\|\tau_n(\mathbf{c})\|_1 \leqslant \|\mathbf{c}\|_1$, donc, pour $n \geqslant N$, on a

$$\|\tau_n(\mathbf{a}) - \tau(\mathbf{a})\mathbf{1}\|_1 \leqslant \|\tau_n(\mathbf{a} - \mathbf{b})\|_1 + \|\tau_n(\mathbf{b} - \tau(\mathbf{b})\mathbf{1}\|_1 + \|\tau(\mathbf{b} - \mathbf{a})\mathbf{1}\|_1 < \varepsilon.$$

   (b) Puisque $\mathbf{a} \neq 0$, on a $\tau(\mathbf{a}^* \star_\lambda \mathbf{a}) = \|\mathbf{a}\|_2^2 > 0$.
   Pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand, on a $\|\tau_n(\mathbf{a}^* \star_\lambda \mathbf{a}) - \tau(\mathbf{a}^* \star_\lambda \mathbf{a})\mathbf{1}\|_1 < \tau(\mathbf{a}^* \star_\lambda \mathbf{a})$, donc $\tau_n(\mathbf{a}^* \star_\lambda \mathbf{a})$ est inversible dans A_1.
2. Soit J un idéal bilatère non nul de A_1 et $\mathbf{a}$ un élément non nul de J. Alors J contient tous les $\tau_n(\mathbf{a}^* \star_\lambda \mathbf{a})$, donc un élément inversible de A_1, donc $J = A_1$.
3. (a) Pour tout n on a $\sigma_{u,v}(\tau_n(\mathbf{a})) = n^{-2} \sum_{0 \leqslant j,k < n} u^j \circ v^k \circ \sigma_{u,v}(\mathbf{a}) \circ v^{-k} \circ u^{-j}$,
   donc $|||\sigma_{u,v}(\tau_n(\mathbf{a}))||| \leqslant |||\sigma_{u,v}(\mathbf{a})|||$.
   Or par 1.(a), on a $\lim |||\sigma_{u,v}(\tau_n(\mathbf{a}))||| = |\tau(\mathbf{a})|$, donc $|\tau(\mathbf{a})| \leqslant |||\sigma_{u,v}(\mathbf{a})|||$.
   (b) Soit $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\Big|\Big|\Big|\sigma_{u,v}\big((\mathbf{a}^* \star_\lambda \mathbf{a})^{2n}\big)\Big|\Big|\Big|^{1/4n} \geqslant \Big|\tau\big((\mathbf{a}^* \star_\lambda \mathbf{a})^{2n}\big)\Big|^{1/4n}$.
   Dans cette inégalité, le membre de gauche converge vers $|||\sigma_{u,v}(\mathbf{a})|||$ et celui de droite vers $|||\pi(\mathbf{a})|||$. On en déduit $|||\sigma_{u,v}(\mathbf{a})||| \geqslant |||\pi(\mathbf{a})|||$, d'où l'égalité.
   L'égalité $|||\sigma_{u,v}(\mathbf{a})||| = |||\pi(\mathbf{a})|||$ s'en déduit par densité de $\mathcal{A}$ dans A_1.

IV : Une égalité de norme

Notons $v_\mathbb{R}$, $v_\mathbb{U}$ et $v_\mathbb{Z}$ les opérateurs unitaires définis de la manière suivante : si $\tilde{\xi} \in H_\mathbb{R}$ (*resp.* $\tilde{\xi} \in H_\mathbb{U}$) est la classe d'une fonction mesurable $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, on note $v_\mathbb{R}(\tilde{\xi})$ (*resp.* $v_\mathbb{U}(\tilde{\xi})$) la classe dans $H_\mathbb{R}$ (*resp.* dans $H_\mathbb{U}$) de la fonction $t \mapsto \xi(t+\theta)$. Si $\xi \in H_\mathbb{Z}$, on pose $(v_\mathbb{Z}(\xi))(n) = \xi(n+1)$.

Reprenons les notations de la partie I.B. Si $g \in B$, notons $\rho_\mathbb{R}(g)$, $\rho_\mathbb{U}(g)$ et $\rho_\mathbb{Z}(g)$ les opérateurs définis de la manière suivante : si $\tilde{\xi} \in H_\mathbb{R}$ (*resp.* $\tilde{\xi} \in H_\mathbb{U}$) est la classe d'une fonction mesurable $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, on note $(\rho_\mathbb{R}(g))(\tilde{\xi})$ (*resp.* $(\rho_\mathbb{U}(g))(\tilde{\xi})$) la classe dans $H_\mathbb{R}$ (*resp.* dans $H_\mathbb{U}$) de la fonction $t \mapsto g(t)\xi(t)$. Si $\xi \in H_\mathbb{Z}$, on pose $((\rho_\mathbb{Z}(g))(\xi))(n) = g(n\theta)\xi(n)$. Posons $u_\mathbb{R} = \rho_\mathbb{R}(z)$, $u_\mathbb{U} = \rho_\mathbb{U}(z)$ et $u_\mathbb{Z} = \rho_\mathbb{Z}(z)$. On vérifie immédiatement que l'on a

$$v_\mathbb{R} \circ u_\mathbb{R} = \lambda u_\mathbb{R} \circ v_\mathbb{R},\ v_\mathbb{U} \circ u_\mathbb{U} = \lambda u_\mathbb{U} \circ v_\mathbb{U} \text{ et } v_\mathbb{Z} \circ u_\mathbb{Z} = \lambda u_\mathbb{Z} \circ v_\mathbb{Z}.$$

Par III.C.1, il existe des homomorphismes

$$\sigma_{\mathbb{R}} : A_1 \to \mathcal{L}(H_{\mathbb{R}}),\ \sigma_{\mathbb{U}} : A_1 \to \mathcal{L}(H_{\mathbb{U}}) \text{ et } \sigma_{\mathbb{Z}} : A_1 \to \mathcal{L}(H_{\mathbb{Z}})$$

tels que $\sigma_{\mathbb{R}}(U) = u_{\mathbb{R}}$, $\sigma_{\mathbb{R}}(V) = v_{\mathbb{R}}$, $\sigma_{\mathbb{U}}(U) = u_{\mathbb{U}}$, $\sigma_{\mathbb{U}}(V) = v_{\mathbb{U}}$ et $\sigma_{\mathbb{Z}}(U) = u_{\mathbb{Z}}$, $\sigma_{\mathbb{Z}}(V) = v_{\mathbb{Z}}$.
Les homomorphismes $\sigma_{\mathbb{R}} \circ \psi$ et $\rho_{\mathbb{R}}$ prennent la même valeur $u_{\mathbb{R}}$ en z, donc en z^n. Ils coïncident par I.B.1.(b). De même, $\sigma_{\mathbb{U}} \circ \psi = \rho_{\mathbb{U}}$ et $\sigma_{\mathbb{Z}} \circ \psi = \rho_{\mathbb{Z}}$.

Posons $T = \displaystyle\sum_{k=-N}^{N} \psi(f_k)V^k$. On a $\sigma_{\mathbb{R}}(T) = T_{\mathbb{R}}$, $\sigma_{\mathbb{U}}(T) = T_{\mathbb{U}}$ et $\sigma_{\mathbb{Z}}(T) = T_{\mathbb{Z}}$.

Par III.D, on a $|||T_{\mathbb{R}}||| = |||T_{\mathbb{U}}||| = |||T_{\mathbb{Z}}||| = |||\pi(T)|||$.

Rapport des correcteurs

Ce problème porte sur le « tore non commutatif » ou algèbre de la rotation irrationnelle - c'est-à-dire sur l'algèbre engendrée par deux opérateurs unitaires u et v tels que $vu = \lambda uv$ où λ est un nombre complexe de module 1 (qui n'est pas une racine de l'unité). Dans ce problème on démontre que l'algèbre engendrée par u et v ne dépend pas des unitaires u et v vérifiant cette relation (paragraphe III.D). Le paragraphe IV propose une application de ce résultat.

Le deuxième paragraphe établit un résultat un peu technique qui est apparu dans un calcul lié à la cohomologie cyclique de cette algèbre. Ce résultat ne sert pas dans la suite.

L'analyse fonctionnelle et hilbertienne, les propriétés de prolongement par continuité des applications linéaires continues, l'inégalité de Cauchy-Schwarz sont présentes tout le long du problème. On a cependant cherché à proposer quelques questions portant sur d'autres thèmes d'analyse : Fourier, théorie de la mesure, propriété de Baire...

Bien de candidats ont trouvé ce problème très long. La moitié des candidats n'ont pas dépassé les deux premières parties. La plupart des autres se sont arrêtés après la partie III.A ou III.B.

I. Algèbres de convolution tordue

Dans cette partie, on introduit l'objet principal d'étude. Comme dans la suite du problème, plusieurs propriétés simples mais fastidieuses sont admises.

I.A La convolution tordue

Cette partie préparatoire introduit la convolution tordue et en établit les principales propriétés et notations qui serviront dans la suite.

Les questions sont ici assez classiques et faciles - et ont été généralement bien comprises. Une des difficultés était de décider jusqu'à quel point il fallait détailler l'argumentation.

I.B Fonctions périodiques de classe C^1

On utilise ici le théorème de Stone-Weierstrass et la décomposition en séries de Fourier.

Cette partie, assez difficile s'est avérée discriminante.

Signalons quelques écueils :

- le théorème de Stone-Weierstrass tout seul ne suffit pas pour démontrer que les polynômes trigonométriques forment un sous-espace dense pour la topologie C^1.
- L'appel aux fonctions de classe C^1 suggérait à tort qu'on devait utiliser le théorème de Dirichlet. Par contre, ce que l'on utilisait est que la transformation de Fourier définit une application continue de C^1 dans ℓ^1.

II. Un calcul d'image et de noyau

II.A Approximation des réels par des rationnels

On démontre ici que les nombres réels qui admettent de bonnes approximations par les rationnels sont « rares » pour la théorie de la mesure (leur mesure est nulle) mais très courants du point de vue de la topologie (ils forment un G^δ-dense).

La question 1.b a malheureusement joué un rôle de question « STOP ». De bons candidats s'y sont arrêtés et ne sont guère allés plus loin. À l'inverse, certains ont « sauté la difficulté » et ont poursuivi sur des questions plus faciles qui suivaient, ce qui était une bonne stratégie.

II.B Un calcul d'image et de noyau

Il s'agit ici d'un calcul utilisé en cohomologie cyclique. On y démontre qu'une certaine cohomologie est nulle si et seulement si le nombre λ n'admet pas de bonnes approximations par des racines de l'unité.

Les premières questions de cette partie étaient relativement faciles. On pouvait ici invoquer le théorème de Banach à la question 4, même si une démonstration bien plus élémentaire était possible.
La 5e question se basait sur la partie II.A, et était plus difficile. Cette question sert ici un peu de prétexte pour la partie II.A et n'est plus utilisé dans la suite.

III. Calcul de normes stabilité par l'inverse

Dans la partie III, on étudie les représentations de notre algèbre de convolution tordue, c'est-à-dire les couples d'unitaires u, v qui vérifient $vu = \lambda uv$. On construit d'abord la représentation régulière. On montre qu'elle est dans un sens « plus grosse » que toute autre représentation, et que l'on ne perd rien en termes de spectre dans cette représentation. Enfin, si λ n'est pas racine de 1, notre algèbre est *simple*. Cela permet de démontrer, à l'aide de la partie I.B, une égalité de norme dans la 4e partie.

Les parties III.A et III.B comportaient des questions relativement faciles et ont été abordées par plusieurs candidats. Très peu de candidats ont dépassé ces parties.

LES ÉPREUVES ORALES D'ALGÈBRE ET D'ANALYSE

Les recommandations du rapport 2004 sont encore d'actualité. Nous ne proposons que peu de changements.

Organisation des épreuves

Les modalités, mises en place au concours 2001, ont cette année encore donné entière satisfaction et sont reconduites pour la session 2006. Elles sont décrites ci-après de manière détaillée, prenant en compte l'expérience acquise.

A l'issue de la période de préparation, le jury fait procéder à la photocopie des plans préparés par les candidats. Ces derniers sont manuscrits, comportent 3 pages A4 *au maximum* et possèdent une marge de 1 cm sur tous les côtés afin d'éviter tout problème lors de la photocopie. Les plans peuvent être complétés par des planches de figures.

Le candidat *peut utiliser sa copie du plan pendant l'épreuve* et pourra utiliser les notes manuscrites produites durant la préparation, pendant la première phase de l'interrogation dite « argumentation et présentation du plan ».

L'épreuve s'organise en trois temps, prévus pour une durée totale d'un maximum de 50 minutes : une présentation du plan suivie d'une brève discussion, un développement de 15 minutes et enfin une partie consacrée au dialogue et aux questions.

Première partie : le plan

Le candidat est convié à utiliser son temps de parole, 8 minutes maximum, pour présenter, argumenter et mettre en valeur son plan.

Le plan écrit n'est ni une énumération de paragraphes, ni un exposé complet avec développement des démonstrations. Il définit avec précision les notions introduites, donne les *énoncés complets* des résultats fondamentaux, cite des exemples et des applications. *Le plan doit être maîtrisé*, c'est à dire que les résultats exposés doivent être compris ainsi que l'organisation d'ensemble. Il est souhaitable que le candidat connaisse dans leurs grandes lignes les démonstrations des résultats figurant au programme du concours : le jury pourra appliquer ce critère pour évaluer la maîtrise du plan. C'est au candidat de circonscrire son plan, notamment en ce qui concerne les énoncés débordant largement le cadre du programme.

Il s'agit d'une épreuve orale, il est donc inutile de recopier le plan au tableau, dans la mesure où le jury possède une copie du texte. Il est souhaitable que le candidat utilise son temps de parole pour expliquer de façon systématique les articulations principales de son plan. Les détails techniques, s'ils sont clairement écrits dans le plan, pourront ne pas être repris oralement. Le candidat peut faire un bref exposé introductif et commenter utilement ensuite ses résultats principaux, les outils développés, l'organisation d'ensemble et mettre en perspective les méthodes utilisées. Il peut être utile de consacrer du temps à un exemple pertinent qui éclaire la problématique de la leçon, à faire usage du tableau pour illustrer ses propos. La présentation et la justification orale du plan sont des points importants d'appréciation.

À la fin de cette présentation, le jury peut questionner brièvement le candidat. Ce temps de dialogue permet au candidat de préciser certains aspects du plan, de développer l'argumentation et de justifier certains choix. On peut aborder quelques points techniques sans entrer dans des détails qui retarderaient le début du développement. Le jury ne cherche pas à déstabiliser le candidat.

Deuxième partie : le développement

Le candidat soumet au jury une liste de plusieurs points (deux au minimum, mais trois sont appréciés) qu'il propose de développer. Ceux-ci peuvent être soit la démonstration d'un théorème, soit la présentation d'un exemple significatif, soit le développement détaillé d'une partie délimitée du plan.

La pertinence de tous les développements proposés, *leur adéquation au sujet* et leur niveau de difficulté sont des éléments essentiels de la notation. Les candidats veilleront à proposer des développements qui permettent de mettre en valeur leur maîtrise technique, sans excéder leur capacité, à en faire un exposé clair et complet dans le temps imparti. Les développements manifestement hors sujet ou en dessous du niveau exigible de l'agrégation sont pénalisés par le jury.

Le jury choisit, parmi les propositions du candidat, le thème d'un exposé. Le jury refusera d'avantager par son choix de développement le candidat qui a concentré sa préparation sur un seul développement substantiel et intéressant, par rapport à ceux qui ont réellement préparé les deux ou trois développements demandés.

Le candidat dispose d'au plus 15 minutes pour ce développement détaillé, qui doit comprendre toutes les explications nécessaires à la compréhension du jury. Le candidat peut adopter un rythme rapide, mais ne doit pas perdre sciemment son temps. On s'attend à ce que le candidat expose sans le support de ses notes (sauf exception éventuelle sur un énoncé très technique, pour lequel le candidat sera convié par le jury à consulter ses notes si le besoin s'en fait sentir). La clarté de cet exposé, l'aisance et la sûreté avec lesquelles il est présenté constituent un facteur important d'appréciation

L'exposé doit être complet, sans suppression d'étapes intermédiaires, ni report d'argumentation techniques dans des résultats *ad hoc* admis. En particulier la technique qui consiste à admettre un « lemme préliminaire » qui contient toute la difficulté de la preuve, est sanctionnée. Le jury peut intervenir durant le développement pour une précision, une correction ou une justification. L'intervention éventuelle du jury ne donne pas lieu à une extension de la durée totale de l'exposé.

Au terme du développement le jury peut poser des questions sur l'exposé pour s'assurer de la maîtrise et de la compréhension du sujet abordé.

Troisième partie : questions et dialogue

L'exposé est suivi d'une discussion au cours de laquelle le jury s'assure de la solidité des connaissances du candidat sur les questions précédemment abordées (plan, exposé) ou sur tout autre point en rapport avec le sujet et figurant au programme de l'oral. Un ou plusieurs exercices peuvent être proposés par le jury. Le jury peut à son gré poser des questions dans des champs connexes aux thèmes de la leçon, voire plus éloignés.

Durant cette partie, les exercices et questions posés permettent d'évaluer les réactions et les capacités techniques des candidats dans un champ vierge. Le candidat doit donc s'attendre à ce qu'un dialogue s'établisse, lui permettant de profiter de suggestions si le besoin apparaît au jury. Il peut adopter un style moins formalisé que dans le développement, s'appuyer sur le plan : la priorité est ici à l'élaboration des idées, à la méthode d'appréhension des problèmes mathématiques. Le jury peut parfois poser des questions difficiles pour lesquelles il n'attend pas de réponses immédiates ; cela lui permet d'évaluer les capacités de réflexion du candidat et de tester son esprit de méthode.

Pendant cette discussion le jury veille à laisser un temps raisonnable au candidat pour réfléchir, sans le submerger de questions.

Remarques détaillées sur les épreuves orales d'algèbre et d'analyse

Comportement général

Le jury constate avec satisfaction une augmentation du nombre de bons candidats et de candidats bien préparés. En revanche, comme chaque année, des candidats très faibles, ou n'ayant pas compris les exigences de l'oral, continuent de réussir à passer le cap de l'écrit.

Les candidats présentent tous un texte construit et au moins deux développements associés (les candidats ne présentant qu'un développement sont très rares). Ils ne se laissent plus surprendre par le temps ni pendant leur préparation ni pendant leur présentation.

Le plan : Dans l'ensemble, les plans photocopiés donnent satisfaction. Ils sont bien écrits, tiennent en trois pages comme demandé. Précisons, que le candidat doit laisser *une marge pour la photocopie de 1 cm au minimum.* Ce n'est pas toujours le cas – bien que cela soit rappelé aux candidats lors des tirages – et cela donne malheureusement des textes tronqués à la photocopie.

Nous confirmons que le plan doit tenir en trois pages maximum mais que la limite inférieure de deux pages n'est pas pas exigée. D'autre part, les notes écrites de la préparation (hors du plan lui-même) sont autorisées pendant la présentation du plan.

La présentation du plan : Cette année, comme l'an passé, la quasi-totalité des candidats tiennent en 8 minutes. Ceci montre qu'ils sont dans l'ensemble bien préparés.

Malheureusement cette partie de l'oral reste souvent une simple paraphrase du texte que le jury a sous les yeux.

Signalons une uniformisation voire une standardisation des présentations : le jury n'a pas de peine à repérer ce qui est de l'ordre de la réflexion personnelle de ce qui est de l'ordre de la recopie. Or la maîtrise du plan est un élément essentiel de la note finale : tout ce qui est mis dans le plan doit pouvoir être défendu, sans impasse (exception faite pour les résultats « culturels ») sur les parties non proposées en développement. Or, le plan révèle souvent une utilisation servile des documents, sans même un effort d'adaptation des notations ; ainsi dans une même leçon sur les équations différentielles, a-t-on vu coexister les notations $x' = f(t, x)$ et $y' = f(x, y)$, ce qui est inadmissible. Le jury reste par exemple dubitatif lorsqu'il observe d'une part des plans écrits bien fournis, voire très bons et des candidats incapables de défendre ce même plan, de l'utiliser, ou même de répondre à des questions élémentaires s'y rapportant.

Principaux Défauts :

- Les énoncés du plan sont trop vagues, voire faux.
- Le candidat ne semble pas connaître les preuves des résultats annoncés ou fait l'impasse sur une présentation même rapide des aspects élémentaires du thème de la leçon.
- Le candidat relit de manière monotone son plan *in extenso*, avec tous les détails. Cela n'a pas grand intérêt, car le jury dispose déjà de la copie du texte.

- Les plans qui se veulent exhaustifs. On rappelle que ce n'est pas le but de cette épreuve et que cela nuit certainement au candidat, car il est alors très difficile de dégager des grands axes de synthèse ou de mettre en valeur le travail de réflexion personnelle du candidat. Mieux vaut faire des choix et les expliquer.
- Le candidat n'arrive pas à faire une synthèse, ni à mettre en perspective résultats et méthodes. Il ne décolle pas de son plan qu'il a simplement recopié – voire appris – lors de la préparation.
- Il semble réciter une leçon apprise par coeur ; il passe trop de temps à introduire les notions de base et n'a plus le temps de développer les thèmes plus profonds de la leçon.

Principales Qualités :

- Le candidat fait une synthèse de son texte, sans s'attarder sur les détails inutiles ou élémentaires. Il explique les résultats importants, ajoute oralement des précisions qui ne figurent pas dans le texte. Par exemple, il explique que l'hypothèse du théorème est nécessaire en citant un contre-exemple. Bref, le plan semble maîtrisé.
- Le candidat prend la craie pour exposer un exemple pertinent, sans perdre de temps. Il explique comment utiliser ses résultats pour résoudre d'autres problèmes mathématiques.
- Le candidat explique l'articulation de son plan, la finalité et les difficultés principales rencontrées. Il fait part de ses réflexions sur le sujet et la manière dont il a compris les choses.

Le développement : Voici quelques remarques qui portent sur le choix des points proposés en développement et sur la présentation du point développement choisi par le jury.

Les propositions de développements :

- Il importe que tous les développements proposés soient en rapport avec le sujet de la leçon et soient du niveau de l'agrégation. Le hors-sujet, même s'il conduit à des résultats intéressants, est pénalisé ainsi que les développements de niveau trop faible.
- La technique qui consiste à admettre un lemme préliminaire qui vide de sa substance le développement est encore une fois sévèrement sanctionnée.
- Il importe que les développements proposés soient suffisamment différenciés. Il arrive encore que le deuxième développement ne soit qu'un cas particulier du premier.
- Le candidat doit aussi veiller à l'adéquation entre les développements proposés et son propre niveau. Cela est vrai dans les deux sens :
  - un développement trop ambitieux peut comporter des risques, en particulier s'il n'aboutit pas, mais s'il est bien maîtrisé il peut se voir attribuer *une note excellente* ;
  - *a contrario* un candidat que l'on imagine brillant ne sera pas valorisé s'il se contente d'un développement trivial ;
  - en revanche, un candidat moyen aura tout intérêt à choisir un développement qui met en valeur ses qualités d'exposition et sa compréhension satisfaisante d'un sujet préparé. Il faut bien se souvenir, cependant, qu'un développement vraiment trop élémentaire, ou trop court et trop peu en rapport avec le programme de l'agrégation, *n'obtiendra qu'une note assez basse*, même s'il est parfaitement mené.

L'exposé :

- On veillera à ce que les développements soient présentés de manière structurée. Il peut être utile de prendre quelques instants pour expliquer la stratégie de la preuve et éclairer les membres du Jury, cela montre que le candidat maîtrise son sujet et n'a pas juste appris par cœur son développement, sans discernement. Le jury apprécie par exemple que les candidats aient une opinion sur ce qu'ils présentent.
- Le jury attend que le candidat soit capable de détailler les différents passages de sa démonstration

en profondeur, de l'appliquer à un exemple simple, d'en comprendre les cas particuliers. Par contre jouer la montre n'est pas une bonne technique. On a vu un candidat mettre 5 minutes pour prouver qu'il y a $\frac{p-1}{2}$ carrés dans $\mathbb{F}_p^*$.

- Les développements appris et récités par coeur n'ont aucun intérêt : l'exposé donne alors une vision très négative de la science mathématique, qui paraît plus proche de la magie que d'une démarche scientifique et progressive ; l'emploi par les candidats du mot « astuce » est révélateur à cet égard, alors que, quand on a vraiment compris une situation, les « astuces » disparaissent d'elles-mêmes.
- Même si les références (souvent pour des raisons techniques) sont parfois pauvres en illustrations, les candidats ont le devoir de compléter leur exposé par des dessins, pour leur propre compréhension et pour celle du jury !
- Enfin le candidat doit avoir présent à l'esprit que son exposé gagnera grandement en clarté et en intérêt si :
  - Il explique ce qu'il va faire (ce n'est pas difficile).
  - Il donne un fil conducteur de sa démonstration (c'est plus difficile...).
- Comme les années précédentes, le jury n'a pas de peine à distinguer les candidats qui ont suivi une préparation méthodique et complète des candidats, fussent-ils intrinsèquement brillants, qui découvrent les thématiques de l'agrégation le jour de l'oral.

Autres remarques générales :

- Bien choisir le niveau de sa leçon : un plan ambitieux amènera des questions du Jury plus difficiles qu'un plan plus modeste. Notamment, le fait d'aborder les points difficiles du programme d'agrégation (produit semi-direct, formes quadratiques sur $\mathbb{F}_q$, holomorphie, ...) n'est conseillé que dans le cas d'une maîtrise du sujet. Un candidat ayant parlé par exemple de produit semi-direct peut être sanctionné s'il n'en connaît pas d'exemples.
- Les candidats doivent s'attendre lorsqu'ils développent un sujet conceptuel à ce qu'on les mette en situation sur un exemple simple et concret.
- Les candidats doivent être capables de résumer une fin de preuve oralement, sans donner tous les détails et tous les calculs.
- Les candidats devraient faire plus d'efforts pour éviter le langage familier ou approximatif qui ne leur rend pas service. Le jury, en effet, garde à l'esprit que l'agrégation est un concours de recrutement d'enseignants et attend des candidats une expression orale compatible avec cette fonction.
- Comme il a été dit plus haut, l'illustration d'un raisonnement par un dessin n'est que rarement obtenue. D'ailleurs, d'une manière générale, les candidats gagneraient à utiliser plus systématiquement le tableau pendant le dialogue avec le jury : il n'est pas inutile, par exemple, d'écrire les questions au tableau.

Oral d'Algèbre et géométrie

1. **Groupes finis**
   Il semble important de connaître les classes d'isomorphismes des groupes à 2, 3, 4, 5, 6 éléments et de savoir démontrer que tous les groupes finis se plongent dans un S_n. Un minimun de connaissance est exigible sur les groupes diédraux (description, présentation en terme de générateurs et relation).

2. **Nombres premiers, anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.**

   Dans ces leçons, la loi de réciprocité quadratique devient un point de développement courant. La démonstration est souvent bien apprise, mais les idées sous-jacentes ne sont pas mises en valeur. En bref, on assiste à une suite de calculs incompréhensibles, car sans ligne directrice.

   Pour le codage RSA, il serait utile de connaître la taille des nombres premiers intervenant et une méthode de calcul de $a^k \bmod N$ efficace : l'exponentiation rapide.

   À l'énoncé d'un résultat, il est toujours utile (indispensable ?) de se poser la question de la réciproque : ainsi, certains candidats ont retrouvé (découvert ?) avec l'aide du jury le plus souvent que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \sim \mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} \Rightarrow m \wedge n = 1$.

3. **Anneaux principaux**

   Il faudrait savoir pourquoi $A[X]$ est principal si et seulement si A est un corps.

4. **Méthodes combinatoires**

   Cette leçon a été choisie un grand nombre de fois, mais a souvent laissé le jury sur sa faim. Il est essentiel que des méthodes soient dégagées et illustrées : principe de récurrence, principe d'inclusion-exclusion, principe des bergers, le tout est la somme des parties, utilisation de séries entières (génératrices), etc.

   La partie élémentaire de cette leçon ne doit pas être oubliée. Notamment le jury s'attend à ce que les candidats sachent calculer le nombre d'applications strictement croissantes de $\{1, \dots, p\}$ dans $\{1, \dots, n\}$, le nombre de surjections entre deux ensembles finis etc.

5. **Corps finis**

   Il faut savoir construire et mener des calculs dans un corps de petit cardinal, par exemple : $\mathbb{F}_4$, $\mathbb{F}_8$, $\mathbb{F}_9$, $\dots$

6. **Polynôme d'endomorphisme, polynômes annulateurs**

   Après avoir élaboré et décrit des outils efficaces, le candidat doit pouvoir décrire les matrices vérifiant par exemple

   $$\left\{ \begin{array}{l} A^3 - 2A^2 - A + 2I = 0 \\ A^3 - 3A + 2I = 0 \end{array} \right. .$$

   Le jury signale que les polynômes d'endomorphismes ne sont pas tous nuls. Cette leçon ne porte pas uniquement sur la réduction des endomorphismes. Par exemple, le calcul des puissances ou de l'exponentielle d'une matrice peut illustrer cette leçon (sans passer par la décomposition de Dunford). On pourra méditer sur l'exemple suivant en utilisant les projecteurs sur les espaces caractéristiques :

   $$A^2 - 3A + 2I = 0 \Rightarrow \exp(A) = (\mathrm{e}^2 - \mathrm{e})A + (2\mathrm{e} - \mathrm{e}^2)I = P(A).$$

   On attend aussi pour les meilleurs quelques résultats concernant l'algèbre formée par les polynômes d'une matrice (dimension, commutant etc.).

7. **Sous-espaces stables**

   Comme signalé dans le rapport 2004, c'est une leçon difficile, qui résiste mal à l'improvisation. Elle ne peut se réduire à la réduction (voir les suggestions faites en 2004). Le jury a remarqué l'effort personnel fait par certains candidats pour éviter cet écueil.

8. **Formes quadratiques**

   L'intitulé de la leçon a évolué, on attend que les candidats réfléchissent plus attentivement sur la notion d'orthogonalité.

   Cette leçon a été souvent mal traitée : les énoncés sur la signature ont été au mieux vagues et au pire fantaisistes. Il existe des formes quadratiques sur $\mathbb{C}$, contrairement à ce que beaucoup de candidats affirment et il y a une différence entre formes quadratiques sur $\mathbb{C}$ et formes hermitiennes !

   Il est utile de faire le lien, même de manière élémentaire, avec la géométrie (coniques, calcul de tangentes, polaires, étude locale des fonctions etc.).

   L'algorithme de Gauss doit être énoncé et pouvoir être appliqué sur une forme de $\mathbb{R}^3$. Le lien avec la signature doit être clairement énoncé.

   Il est important d'illustrer cette leçon d'exemples.

9. **Leçons de géométrie**

   Elles n'ont eu que peu de succès comme souvent : c'est un tort. Il semble impossible d'obtenir un dessin de la part des candidats. Répétons encore une fois que c'est un non-sens mathématique, pédagogique et historique de ne pas vouloir illustrer la géométrie ou les mathématiques par le dessin.

   Pour certains candidats, il serait plus profitable de travailler des leçons de géométrie, même à un niveau élémentaire, plutôt que de choisir des sujets d'algèbre générale qu'ils ne maîtrisent pas. Par exemple, avec un peu de préparation, il est plus pertinent de choisir « Coniques » ou « Utilisation des nombres complexes en géométrie » plutôt que « Corps finis », « Polynômes irréductibles » ou « Corps de rupture », leçons rarement maîtrisées.

   Dans la leçon « Coniques », il faut savoir trouver le centre d'une ellipse, les asymptotes d'une hyperbole et quelques formules célèbres et élémentaires.

10. **Nombres complexes**

    Le minimum est exigible sur l'exponentielle complexe et le calcul d'un argument. Le jury est souvent resté perplexe quand le candidat ne savait pas calculer l'argument de $\mathrm{e}^{\imath a} - \mathrm{e}^{\imath b}$. Il semble opportun de soigner la logique de présentation (par exemple on peut définir l'exponentielle complexe, puis les fonctions cosinus et sinus).

Oral d'Analyse et probabilités

1. **Espaces fonctionnels**

   La leçon « Espaces de fonctions » est souvent pauvre, hors-sujet, et les espaces considérés ne sont pas des espaces de fonctions !

   À propos des exemples d'espaces fonctionnels, qui apparaissent dans de nombreuses leçons, il est suggéré d'examiner l'espace des séries de Taylor absolument convergentes (copie de ℓ^1) qui fournit un exemple simple d'algèbre de Banach de dimension infinie, pourvue de propriétés remarquables.

2. **Topologie**

   Le vocabulaire (« discret », « point d'accumulation ») et les notions (définition de la compacité par recouvrements ouverts) de la topologie générale sont très mal maîtrisés ce qui est regrettable, même si l'on se restreint au cadre des espaces métriques.

3. **Continuité, dérivabilité**

   Certains développements intéressants mais techniques, comme la construction d'une fonction continue partout non dérivable, ou le théorème de Balagner-Colominas, sont à *déconseiller fortement* aux candidats moyens, car ils peuvent aboutir à des oraux globalement catastrophiques.

4. **Formule de Taylor**

   Au hit-parade des formules de Taylor, c'est Taylor-Young qui vient en tête dans l'esprit des candidats, alors que ça devrait être Taylor avec reste intégral !

5. **Suites**

   La leçon relative au comportement asymptotique des suites a parfois été traitée de manière partielle, excluant toute étude de suite divergente. Le jury suggère de mieux prendre en compte les problèmes de valeurs d'adhérence ou de densité.

   Dans cette leçon, il y a en effet d'autres problématiques que la vitesse de convergence : par exemple la nature topologique (fermé presque arbitraire) de l'ensemble des valeurs d'adhérence ou l'équirépartition modulo 1.

6. **Approximation des solutions d'équations**

   Les candidats présentent souvent des résultats tels que la méthode de Newton avec un jeu d'hypothèses correct mais qui ne correspond pas à l'exemple choisi. Cela provient souvent du fait que les hypothèses présentées sont mal adaptées à des applications pratiques.

   Quelquefois, cf. $x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$, la dérivée de $\dfrac{u}{v}$ se comprend mieux en l'écrivant $\dfrac{u'}{v} - u \times \dfrac{v'}{v^2}$.

7. **Séries entières**

   La leçon relative à la convergence des séries entières et aux propriétés de la somme a trop souvent été limitée à la variable complexe (voire réelle), excluant de ce fait les séries matricielles, ou sur une algèbre de Banach.

8. **Intégration des fonctions**

   La leçon « Intégration des fonctions sur un intervalle ; suite de fonctions intégrables » est souvent présentée dans le cadre de l'intégrale de Riemann, alors que tous les théorèmes utilisés relèvent du cadre de l'intégrale de Lebesgue.

9. **Fonctions définies par une intégrale**

   La dérivation de fonctions du type $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(x,t)\,\mathrm{d}t$, voire $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ a souvent posé bien des problèmes aux candidats.

   Le jury a proposé d'étudier la fonction de deux variables $(x,y) \mapsto \displaystyle\int_0^y f(x,t)t$, mais aucun candidat, à qui cette question a été posée, n'a songé à utiliser et n'a évoqué la caractérisation des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ par la continuité de leurs dérivées partielles.

10. **Fonctions holomorphes**

    Les candidats ont souvent une perception limitée des rapports entre holomorphie, analyticité, conformité et différentiabilité. Ils ont eu souvent des difficultés pour prouver que toute fonction holomorphe est ouverte dès que sa dérivée ne s'annule pas sur le domaine de définition.

11. **Probabilités**

    Les candidats restent encore très timorés devant les leçons de probabilités et les choisissent très rarement. Pourtant, préparer soigneusement ces leçons est, au moins pour ceux ayant choisi l'option Probabilités et statistiques, un complément très utile de la préparation à l'épreuve de modélisation.

12. **Divers**

L'absence de curiosité intellectuelle des candidats est parfois affligeante ; un candidat a proposé en développement, sur les séries entières, le théorème de Tauber baptisé « théorème taubérien faible » dans la référence qu'il avait utilisée. Le jury a évidemment posé les deux questions :

- Et si on ne met aucune condition sur les coefficients ?
- Que pourrait-être un théorème taubérien fort ?

Le candidat a paru trouver les questions saugrenues et n'avait aucune idée de la réponse.

ÉPREUVE DE MODÉLISATION

Organisation de l'épreuve de modélisation

Jusqu'à la session 2005 incluse, les candidats à l'épreuve de modélisation avaient le choix entre une leçon et l'étude d'un texte. À partir de 2006, deux textes seront proposés, la leçon est abandonnée. À l'occasion de ce changement de format, le jury souhaite rappeler ce qu'il attend des candidats dans cette épreuve.

Les textes sont surmontés du bandeau suivant :

> *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes laissé(e) libre d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur. Le jury aura le texte sous les yeux, mais considérez qu'il ne l'a pas lu.*

Plus précisément, le jury s'attend à ce que le candidat dégage une problématique, en s'inspirant du texte, pour mettre en valeur sa maturité mathématique et ses connaissances. L'interrogation dure une heure, pendant laquelle le candidat gère comme il le désire le tableau et les illustrations informatiques qu'il entend présenter (le jury dispose d'écrans de contrôle reproduisant celui du candidat). Le candidat doit préparer un exposé d'environ 3/4 d'heure, le quart d'heure restant étant occupé par les questions du jury.

Le texte est court, environ 5 pages, motivé par un problème concret. Il peut se permettre des arguments rapides, voire heuristiques (signalés comme tels, il ne contient pas d'assertion délibérément trompeuse). Il se conclut par une liste de suggestions.

Il appartient au candidat de discuter la mathématisation du problème, en particulier d'expliquer les hypothèses faites lors de la modélisation ou du traitement du modèle, de critiquer ou d'améliorer le modèle, du point de vue de l'adéquation à la réalité, de la généralité, de la rigueur, de la simplicité du traitement mathématique subséquent...

Le jury n'ayant *a priori* pas lu le texte, le candidat commencera par présenter celui-ci. Un plan en début d'exposé est apprécié, annonçant en particulier les propriétés du modèle que le candidat va dégager. Il est important d'expliquer le problème et le modèle, de l'illustrer, ainsi que d'y revenir en fin d'exposé. Le modèle mathématique a-t-il les propriétés attendues ? Des propriétés parasites surprenantes ? A-t-on résolu le problème posé ?

Le candidat dispose pendant sa préparation et l'interrogation d'un ordinateur dont la configuration est décrite à l'adresse `http://www.agreg.org`.

Il est vivement souhaité que des illustrations informatiques (simulation, résolution numérique ou formelle, cas particuliers éclairants...) soient présentées. *Il ne s'agit pas d'une épreuve de programmation.* Un programme qui ne fonctionne pas n'est en rien rédhibitoire, le jury appréciera un regard critique sur une tentative non aboutie. Une utilisation raisonnée des fonctions des logiciels disponibles est plus appréciée qu'une reprogrammation d'algorithmes standards. Bien intégré dans l'exposé, un tel travail peut toutefois devenir pertinent pour illustrer les insuffisances d'une méthode naïve.

Les suggestions sont facultatives et ne sont là que pour guider la réflexion du candidat sur des points significatifs du texte, ou des exemples utilisables. Certaines d'entre elles sont conçues pour permettre au candidat de comprendre le problème, de «rentrer» dans le modèle.

S'il est exclu de plaquer une démonstration d'un théorème du programme dans l'exposé, les démonstrations mathématiques de certaines assertions du textes sont très appréciées. Le candidat peut, tout comme le texte, utiliser des arguments heuristiques s'il les signale comme tels.

Un travers à éviter à tout prix : la paraphrase linéaire du texte sans aucun apport personnel du candidat, ni mise en perspective, agrémentée de la recopie de toutes les formules rencontrées.

Commentaires du jury

Les candidats sont dans l'ensemble bien préparés aux leçons, avec parfois un certain manque de recul, mais un nombre encore trop élevé d'entre eux a du mal à exploiter un texte.

Rappelons d'abord que le jury attache un intérêt particulier à l'effort de modélisation (c'est-à-dire de passage du «concret» aux mathématiques), à la mise en perspective des applications présentées, ainsi qu'aux illustrations permises par les moyens informatiques mis à disposition des candidats.

Les leçons

Celles-ci n'existent plus dans l'épreuve 2006 mais certaines des remarques conservent toute leur pertinence une fois transposées aux textes.

Au cours des leçons, le jury déplore la répétition de modèles artificiels, prétexte à la résolution d'un exercice. Peu de candidats jouent vraiment le jeu de la modélisation, en prenant le temps d'exposer une problématique, d'expliquer sa mathématisation, et enfin de la résoudre. Souvent, l'étape de modélisation se limite à quelques mots sur l'importance de la résolution d'EDP ou du calcul de pgcd, avant d'aboutir à un catalogue de méthodes, très loin de l'esprit de l'épreuve. Il arrive aussi que le candidat oublie son problème initial et n'arrive pas à interpréter les résultats qu'il vient de présenter, perdant ses moyens face à la question « le problème est-il résolu » ?

À l'inverse, le jury a sanctionné les modèles trop ambitieux, visiblement non maîtrisés par des candidats ne parvenant pas à expliquer leurs propres notations, ou introduisant des notions qu'ils sont incapables de définir.

Finalement, le jury a trop souvent assisté à des exposés catalogues ou les algorithmes élémentaires et les modèles superficiels se succèdent sans approfondissement ni mise en perspective. Tout candidat présentant plusieurs méthodes pour une même tâche doit s'attendre à ce qu'on lui demande de les comparer *de façon qualitative* (efficacité, stabilité, adéquation au problème), puis de choisir dans le cadre de *ses* applications (il est bien sûr légitime de présenter d'abord une solution naïve ou partielle, finalement inappropriée, avant d'introduire une méthode plus élaborée). Mais sont à éviter, d'interminables considérations générales sur stabilité et consistance de schémas numériques assénées à grands coups de théorèmes qui ne sont pas compris et de définitions qui le sont moins encore.

Il est opportun de préparer une illustration informatique pour exhiber la différence de comportement de diverses méthodes, pour illustrer la pertinence d'un choix. S'il programme un algorithme, le candidat doit pouvoir l'expliquer, et justifier de son intérêt dans le cadre de sa leçon ou du texte qu'il illustre : la programmation d'un système RSA complet (y compris le calcul d'un inverse modulaire et l'exponentiation binaire) est difficilement justifiable par un argument du type : « le texte présente une belle application de l'arithmétique, j'en connais une autre ».

Les textes

Le jury se félicite du passage de l'épreuve au format « tout texte » pour la session 2006. Des précision pratiques importantes sont données plus loin.

Le principal travers observé est la répétition linéaire du texte, y compris les passages non compris en espérant que le jury ne demandera pas de détails. Rappelons qu'utiliser des notions que l'on ne comprend pas, qu'il s'agisse d'un texte ou d'une leçon, est une faute lourdement sanctionnée. Enfin, rappelons qu'*aucun développement n'est attendu.* Le candidat est libre de proposer des démonstrations de résultats utilisés, mais le jury peut les refuser, ou demander au candidat d'en donner les grandes lignes.

Quelques qualités appréciées : prise de distance et d'initiative par rapport au texte, étude d'un exemple ou d'un cas simple pour comprendre le texte et le faire comprendre au jury, simplification ou, à l'inverse, généralisation du problème proposé, étude qualitative ou heuristique, critique du modèle.

Lacunes fréquentes

Les théorèmes de Cauchy-Lipschitz ou d'échappement font encore des ravages. Peu de candidats sont capables de montrer l'existence locale de solutions d'une EDO concrète : certains veulent l'appliquer à un problème d'ordre deux, d'autres à des espaces fonctionnels (en voyant, dans une équation $y' = f(y,t)$, la fonction f comme une distribution sur $C^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ (?)), d'autres enfin introduisent des notions fines (cylindres de sécurité, fonctions localement lipschitziennes) sans être capables de les exploiter ni de les définir. Le jeu d'écriture permettant de réduire une équation d'ordre supérieur à un système d'ordre un est souvent mal compris. Très peu de candidats réalisent qu'une solution locale n'est pas nécessairement globale.

Si les candidats savent généralement donner une description abstraite des corps finis non premiers, il est rare d'en obtenir une réalisation concrète comme $\mathbb{F}_4 \simeq \mathbb{F}_2[X]/(X^2+X+1)$. Au mieux parviendra-t-on au corps de décomposition de $X^{2^2}-X$ sur $\mathbb{F}_2$, dans une clôture algébrique fixée mais bien mystérieuse.

La complexité des opérations arithmétiques sur les grands entiers (ou les polynômes) n'est pas connue, et les candidats ont du mal à la retrouver. Il n'y a pas grand sens à estimer le nombre d'itérations de l'algorithme d'Euclide si on n'estime pas le coût de chaque étape, même grossièrement. Ni à décrire RSA pour affirmer finalement que le coût de chiffrement (resp. déchiffrement) est de e (resp. d) multiplications.

Quand on introduit l'algorithme de Berlekamp pour construire des codes correcteurs, il est bon de savoir exhiber quelques codes simples (code de répétition, code de parité...), et de pouvoir expliquer comment on réalise l'étape de codage sur un exemple.

Ouvrages autorisés

Les candidats peuvent utiliser librement les ouvrages de la bibliothèque de l'agrégation dont la composition, pour la session 2004, est rappelée en annexe 3. Ils peuvent aussi emprunter les ouvrages mis à la disposition de tous les candidats par les centres de préparation à l'agrégation. Ces ouvrages sont rangés dans une des deux salles de la bibliothèque. Le nombre d'exemplaires de chaque titre étant limité, un ouvrage emprunté par un ou plusieurs candidats peut être indisponible.

Un candidat peut aussi utiliser tout ouvrage qu'il a apporté à la condition :

- qu'il soit en vente dans le commerce, ce qui se manifeste par la présence d'un numéro d'identification ISBN ;
- qu'il soit rédigé en langue française ou en langue anglaise ;
- qu'il soit vierge de toute annotation ;
- qu'il ne comporte pas des plans ou des développements tous faits, spécifiquement rédigés pour la préparation de l'agrégation : à cet égard une liste d'ouvrages interdits est affichée sur la porte de la bibliothèque.

Le président du jury, ou l'un des membres du jury, a toute autorité pour refuser l'utilisation d'un ouvrage ne remplissant pas l'ensemble de ces conditions.

À titre indicatif, on trouvera ci-après la liste des ouvrages non autorisés pour le concours 2005 :

AVEZ A. Analyse pour l'agrégation [Masson]
AVEZ A. La leçon d'analyse à l'Oral de l'agrégation [Masson]
AVEZ A. La leçon de géométrie à l'Oral de l'agrégation [Masson]
CHAMBERT-LOIR A. Exercices de mathématiques pour l'agrégation, tome I, 1re édition [Masson]
CORTIER J.P. Exercices corrigés d'algèbre et géométrie [CRDP de Champagne Ardenne]
DUMAS L. Modélisation à l'oral de l'agégation. Calcul Scientifique [Ellipses]
GUÉNARD F. Vademecum de l'oral d'analyse, agrégation de mathématiques [Eska]
MADERÈ K. Préparation à l'oral de l'agrégation. Leçon d'algèbre [Ellipses]
MADÈRE K. Préparation à l'oral de l'agrégation. Leçon d'analyse [Ellipses]
MADÈRE K. Développement pour leçon d'analyse, agrégation de mathématiques [Ellipses]
MADÈRE K. Développement pour leçon d'algèbre, agrégation de mathématiques [Ellipses]
MEUNIER P. Exercices pour l'agrégation interne de mathématiques [PUF]
MEUNIER P. Préparation à l'agrégation interne, IREM de Montpellier [PUF]
TOULOUSE P.S. Thèmes de probabilités et statistiques, agrégation de mathématiques [Dunod]

L'évolution du concours pour la session 2006

La session 2006 se déroulera selon de nouvelles modalités, conformément à l'arrêté du 23 juin 2004 paru au journal officiel n° 153 du 3 juillet 2004. Ces modalités sont rappelées ci-dessous :

L'écrit

Pour les épreuves écrites d'admissibilité, il n'y a aucun changement. L'écrit comporte, comme pour les sessions antérieures, deux épreuves :

- une composition de mathématiques générales (durée : six heures ; coefficient 1) ;
- une composition d'analyse et de probabilités (durée : six heures ; coefficient 1).

L'oral

Pour les épreuves orales d'admission, les candidats ont le choix entre quatre options :

- option A : probabilités et statistiques ;
- option B : calcul scientifique ;
- option C : algébre et calcul formel ;
- option D : informatique.

Le choix de l'option s'effectue lors de l'inscription. Les candidats proposés par le jury pour l'admission ne font pas l'objet de classements distincts selon l'option choisie : il n'y a donc pas de quotas. Les deux premières épreuves orales sont communes aux candidats des options A, B et C, elles sont spécifiques pour les candidats de l'option D.

Option A : probabilités et statistiques

Option B : calcul scientifique

Option C : algébre et calcul formel

1) Épreuve d'algébre et géométrie (durée de la préparation : trois heures ; durée de l'épreuve : une heure maximum ; coefficient 1).

L'épreuve est commune aux options A, B et C.

2) Épreuve d'analyse et probabilités (durée de la préparation : trois heures ; durée de l'épreuve : une heure maximum ; coefficient 1).

L'épreuve est commune aux options A, B et C.

Pour chacune de ces épreuves :

- deux sujets au choix sont proposés par le jury au candidat ;
- pour la préparation, le candidat dispose de documents fournis par le jury et peut utiliser ses propres ouvrages s'ils sont autorisés ;
- à l'issue de la préparation, le candidat présente au jury un plan d'étude détaillé du sujet qu'il a choisi. Ce plan est présenté quinze minutes au maximum. Il est suivi du développement d'une question qui lui est liée. L'épreuve se termine par un entretien avec le jury au cours duquel celui-ci peut éventuellement proposer un ou plusieurs exercices.

3) Épreuve de modélisation (durée de la préparation : quatre heures ; durée de l'épreuve : une heure et quinze minutes maximum ; coefficient 1).

L'épreuve porte sur un programme commun aux options A, B et C et sur un programme spécifique à l'option choisie.

Deux textes de modélisation mathématique sont proposés au candidat suivant l'option choisie.

Pour la préparation, le candidat dispose de documents fournis par le jury et peut utiliser ses propres ouvrages s'ils sont autorisés. Il dispose également d'un ordinateur muni des logiciels indiqués au programme de l'option.

Le candidat présente un exposé construit à partir du texte choisi. Il peut en faire la synthèse, détailler la signification et le schéma de preuve de résultats choisis dans le texte, en montrer l'exploitation dans une séquence pédagogique. Cette séquence pédagogique peut faire l'usage d'une illustration à l'aide des logiciels indiqués au programme.

Le jury intervient à son gré au cours de l'épreuve et conduit le dialogue avec le candidat.

Option D : informatique

Ce texte présente les modalités prévues pour le déroulement des épreuves orales, spécifiques à l'option D, de la session 2006. En fonction des contraintes matérielles, des aménagements pourront être apportés à ces modalités, dans le cadre des textes réglementaires.

1) Épreuve de mathématiques (durée de la préparation : trois heures ; durée de l'épreuve : une heure maximum ; coefficient 1).

- Pour cette épreuve deux sujets au choix sont proposés au candidat ; ils sont pris dans la liste des leçons publiées. L'un de ces sujets est issu de la liste des leçons d'Algèbre et géométrie, l'autre de la liste des leçons d'Analyse et probabilités ;
- pour la préparation, le candidat dispose de documents fournis par le jury et peut utiliser ses propres ouvrages s'ils sont autorisés ;
- à l'issue de la préparation, le candidat présente au jury un plan détaillé du sujet qu'il a choisi. Le jury dispose de photocopies du plan que le candidat a mis au point au cours de sa préparation (trois feuillets au maximum). Ce plan est présenté par le candidat pendant dix minutes au maximum. Il est suivi du développement d'une question qui lui est liée : deux développements au moins doivent être proposés au jury qui choisit celui qu'il souhaite voir traiter, L'épreuve se termine par un entretien avec le jury au cours duquel celui-ci peut éventuellement proposer un ou plusieurs exercices. Au cours de l'entretien, le jury s'assurera que le candidat a une maîtrise suffisante de la partie du programme non couverte par le sujet choisi.

2) Épreuve d'informatique fondamentale (durée de la préparation : trois heures ; durée de l'épreuve : une heure maximum ; coefficient 1).

- Pour cette épreuve, deux sujets au choix sont proposés par le jury au candidat ;
- pour la préparation, le candidat dispose de documents fournis par le jury et peut utiliser ses propres ouvrages s'ils sont autorisés ;
- à l'issue de la préparation, le candidat présente au jury un plan détaillé du sujet qu'il a choisi. Le jury dispose de photocopies du plan que le candidat a mis au point au cours de sa préparation (trois feuillets au maximum). Ce plan est présenté par le candidat pendant dix minutes au maximum. Il est suivi du développement d'une question qui lui est liée :

deux développements au moins doivent être proposés au jury qui choisit celui qu'il souhaite voir traiter, L'épreuve se termine par un entretien avec le jury au cours duquel celui-ci peut éventuellement proposer un ou plusieurs exercices.

3) Épreuve d'analyse de système informatique (durée de la préparation : quatre heures ; durée de l'épreuve : une heure et quinze minutes maximum ; coefficient 1).

Cette épreuve constitue l'épreuve de modélisation de l'option informatique.

- Deux textes au choix décrivant un système informatique sont proposés au candidat ;
- chaque texte comporte un exercice préliminaire élémentaire de programmation que le candidat doit traiter dans l'un des langages de programmation prévus dans le texte réglementaire (C, Java, CAML). Cet exercice a pour but de vérifier la capacité du candidat à mettre en forme un algorithme élémentaire dans un langage de programmation. Une importance particulière sera accordée à la qualité « pédagogique » du programme présenté. Le code ne devrait pas dépasser une page d'écran et sa mise au point par le candidat ne devrait pas nécessiter plus d'une demi-heure ;
- pour la préparation, le candidat dispose de documents fournis par le jury et peut utiliser ses propres ouvrages s'ils sont autorisés. Il dispose également d'un ordinateur sous système d'exploitation Linux (environnement KDE) muni des logiciels indiqués au programme (langages de programmation, logiciels de calcul numérique et de calcul formel). Au bout d'une heure, le texte non choisi est rendu par le candidat.
- dans la salle du jury est installé un ordinateur reproduisant l'environnement dans lequel a travaillé le candidat, avec les fichiers qu'il a produits pendant la préparation. Le candidat présente d'abord rapidement, sur l'ordinateur, le programme informatique réalisé pour répondre à l'exercice préliminaire, puis il fait un exposé construit à partir du texte choisi. Il peut en proposer une synthèse, développer une ou plusieurs des pistes suggérées par le texte, à sa convenance, expliciter les relations entre les systèmes et les modèles informatiques présentés, justifier leur pertinence et leur efficacité. Cette présentation peut faire usage de l'ordinateur avec une utilisation d'un quelconque des logiciels présents dans l'environnement. Le jury intervient à son gré au cours de l'épreuve et conduit le dialogue avec le candidat. Il sera particulièrement attentif aux qualités d'organisation du candidat, au contenu scientifique de ses développements, à son approche critique de l'ensemble de la démarche d'analyse du problème et de sa modélisation, à son interprétation des résultats obtenus, ainsi qu'à sa réactivité dans le dialogue avec le jury.

Remarques

- L'innovation la plus importante est l'introduction d'une option informatique pour laquelle les trois épreuves orales sont spécifiques et nouvelles, même si leurs modalités techniques sont semblables à celles des autres options.
- Pour les options A, B et C, qui remplacent les deux options actuelles (statistiques et probabilités, calcul scientifique), l'épreuve orale de modélisation s'appuie obligatoirement sur un texte fourni par le jury et le candidat a le choix entre deux textes relatifs à son option.
- Les nouveaux programmes, applicables à partir de la session 2006, ont été publiés au B.O. Spécial n° 5 du 19 mai 2005. Ils sont accessibles depuis le site de l'agrégation externe de mathématiques, à l'adresse URL : `http://www.agreg.org`
- Le jury a publié, à cette adresse, en septembre 2005 la liste des leçons d'oral qui seront posées à la session 2006 dans les deux premières épreuves orales de l'option D, respectivement mathématiques et informatique fondamentale. Cette liste figure ci-après, en annexe 2.

ANNEXE 1 : Leçons d'oral 2005

Algébre et géométrie

101 - Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
102 - Sous-groupes discrets de $\mathbb{R}^n$. Réseaux.
103 - Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.
104 - Groupes finis. Exemples et applications.
105 - Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.
106 - Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.
107 - Sous-groupes finis de $\mathrm{O}(2,\mathbb{R})$, de $\mathrm{O}(3,\mathbb{R})$. Applications.
108 - Exemples de parties génératrices d'un groupe.
109 - Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications.
110 - Nombres premiers. Applications.
111 - Exemples d'applications des idéaux d'un anneau commutatif unitaire.
146 - Anneaux principaux.
112 - Corps finis. Applications.
113 - Groupe des nombres complexes de module 1. Applications.
114 - Équations diophantiennes du premier degré $ax+by=c$. Autres exemples d'équations diophantiennes.
115 - Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.
116 - Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.
117 - Algèbre des polynômes à n indéterminées ($n \geqslant 2$). Polynômes symétriques. Applications.
118 - Racines des polynômes à une indéterminée. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme. Exemples et applications.
120 - Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.
121 - Matrices équivalentes. Matrices semblables. Applications.
122 - Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice. Résolution d'un système d'équations linéaires. Exemples et applications.
123 - Déterminant. Exemples et applications.
124 - Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
125 - Sous-espaces stables d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

126 - Endomorphismes diagonalisables.

127 - Exponentielle de matrices. Applications.

128 - Endomorphismes nilpotents.

129 - Polynômes d'endomorphismes. Polynômes annulateurs. Applications.

130 - Exemples de décompositions remarquables dans le groupe linéaire. Applications.

131 - Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

132 - Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.

133 - Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien de dimension finie.

134 - Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel hermitien de dimension finie.

135 - Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Formes réduites. Applications.

136 - Coniques. Applications

137 - Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie ; convexité. Applications.

138 - Homographies de la droite complexe. Applications.

139 - Applications des nombres complexes à la géométrie.

140 - Angles : définitions et utilisation en géométrie.

141 - Utilisation des groupes en géométrie.

142 - Exemples de propriétés projectives et d'utilisation d'éléments à l'infini.

143 - Constructions à la règle et au compas.

147 - Applications affines.

144 - Problèmes d'angles et de distances en dimension 2 ou 3.

145 - Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

148 - Groupe orthogonal d'une forme quadratique.

Analyse et probabilités

201 - Espaces de fonctions. Exemples et applications.

202 - Exemples de parties denses et applications.

203 - Utilisation de la notion de compacité.

204 - Connexité. Exemples et applications.

205 - Espaces complets. Exemples et applications.

206 - Utilisation de théorèmes de point fixe.

207 - Prolongement de fonctions. Applications.

208 - Utilisation de la continuité uniforme en analyse.

209 - Utilisation de la dénombrabilité en analyse et en probabilités.

210 - Applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés. Exemples et applications.

211 - Utilisation de la dimension finie en analyse.

212 - Méthodes hilbertiennes en dimension finie et infinie.

213 - Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

214 - Applications du théorème d'inversion locale et du théorème des fonctions implicites.

215 - Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

216 - Étude de courbes. Exemples.

217 - Étude locale de surfaces. Exemples.

218 - Applications des formules de Taylor.

219 - Problèmes d'extremums.

220 - Équations différentielles $X' = f(t, X)$; exemples d'études qualitatives des solutions.

221 - Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

222 - Exemples d'équations différentielles. Solutions exactes ou approchées.

223 - Convergence des suites numériques. Exemples et applications.

224 - Comportement asymptotique des suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.

226 - Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples.

227 - Développement asymptotique d'une fonction d'une variable réelle.

228 - Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.

229 - Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

230 - Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

231 - Illustrer par des exemples et des contre-exemples la théorie des séries numériques.

232 - Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.

233 - Intégration des fonctions d'une variable réelle. Suites de fonctions intégrables.

234 - Espaces L^p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.

235 - Interversion d'une limite et d'une intégrale. Exemples et applications.

236 - Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.

237 - Problèmes de convergence et de divergence d'une intégrale sur un intervalle de $\mathbb{R}$.

238 - Méthodes de calcul approché d'intégrales.

239 - Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

240 - Transformation de Fourier, produit de convolution. Applications.

241 - Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

242 - Exemples d'utilisation de fonctions définies par des séries.

243 - Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

244 - Fonctions d'une variable complexe, holomorphie. Exemples et applications.

245 - Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$.

246 - Développement d'une fonction périodique en série de Fourier. Exemples et applications.

247 - Exemples de problèmes d'interversion de limites.

248 - Approximation des fonctions numériques par des fonctions polynomiales ou polynomiales par morceaux. Exemples.

249 - Le jeu de pile ou face (suites de variables de Bernoulli indépendantes).

250 - Loi binomiale, loi de Poisson. Applications.

251 - Indépendance d'événements et de variables aléatoires. Exemples.

252 - Parties convexes, fonctions convexes (d'une ou plusieurs variables). Applications.

253 - Variables gaussiennes. Applications.

Modélisation : calcul scientifique

301 - Appliquer et comparer des méthodes numériques ou symboliques de réduction de matrices dans des problèmes issus de modélisations.

302 - Utiliser et comparer des méthodes numériques ou symboliques de résolution de systèmes linéaires dans des problèmes issus de modélisations.

303 - Dégager et étudier par des méthodes numériques ou symboliques des systèmes d'équations non linéaires – par exemple polynomiales – dans des problèmes issus de modélisations.

304 - Utiliser dans des problèmes issus de modélisations des résultats relatifs à l'approximation ou à l'interpolation de fonctions.

305 - Utiliser et comparer des méthodes numériques ou symboliques de résolution d'équations différentielles dans des problèmes issus de modélisations.

306 - Applications de la transformée ou des séries de Fourier – par exemple aux équations aux dérivées partielles.

307 - Propriétés qualitatives d'une équation différentielle ou d'un système différentiel, applications.

308 - Utiliser et comparer des méthodes de factorisation et de recherche des racines d'un polynôme, applications.

309 - Appliquer et comparer des méthodes de minimisation dans des problèmes issus de modélisations.

311 - Étudier la dépendance des solutions d'une équation par rapport à un paramètre dans des problèmes issus de modélisations.

312 - PGCD, PPCM : méthodes de calcul et applications.

313 - Application des congruences ou des corps finis.

314 - Utilisation de la convexité dans des problèmes issus de modélisations.

315 - Utiliser et comparer des méthodes numériques ou symboliques de résolution d'équations aux dérivées partielles dans des problèmes issus de modélisations.

Modélisation : probabilités et statistiques

401 - Exemples d'applications de lois des grands nombres et du théorème de la limite centrale en situation de modélisation.

402 - À partir d'exemples issus de la modélisation motiver, décrire et critiquer une méthode probabiliste pour le calcul approché d'une intégrale.

403 - Utilisation de l'espérance conditionnelle dans différents modèles.

404 - Exemples d'utilisation des martingales en modélisation.

405 - Utilisation en modélisation de vecteurs aléatoires gaussiens.

406 - Exemples d'utilisation du modèle linéaire gaussien en modélisation.

407 - Exemples et principes de tests statistiques en modélisation.

408 - Utilisation d'ensembles de confiance en modélisation.

409 - Utilisation en modélisation de la notion de fonction de répartition empirique.

410 - Utilisation de lois exponentielles en modélisation.

411 - Applications de méthodes de simulation de variables ou de vecteurs aléatoires à des problèmes de modélisation.

412 - Exemples liés à la modélisation de chaînes de Markov récurrentes ou transientes à espace d'états au plus dénombrable.

413 - À partir d'exemples liés à la modélisation décrire la convergence d'une chaîne de Markov vers une loi invariante.

414 - Utilisation de la loi de Poisson en modélisation.

415 - Utilisation(s) de la transformée de Laplace ou de la fonction génératrice dans des problèmes de modélisation.

ANNEXE 2 : Leçons 2006 pour l'option informatique

Leçons de mathématiques

Algèbre et géométrie

104 - Groupes finis. Exemples et applications.

105 - Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

106 - Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

109 - Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications.

110 - Nombres premiers. Applications.

112 - Corps finis. Applications.

116 - Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

118 - Racines des polynômes à une indéterminée. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme. Exemples et applications.

120 - Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

121 - Matrices équivalentes. Matrices semblables. Applications.

122 - Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice. Résolution d'un système d'équations linéaires. Exemples et applications.

123 - Déterminant. Exemples et applications.

124 - Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

128 - Endomorphismes nilpotents.

129 - Polynômes d'endomorphismes. Polynômes annulateurs. Applications.

131 - Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

132 - Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.

133 - Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien de dimension finie.

135 - Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Formes réduites. Applications.

136 - Coniques. Applications.

137 - Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie ; convexité. Applications.

139 - Applications des nombres complexes à la géométrie.

141 - Utilisation des groupes en géométrie.

144 - Problèmes d'angles et de distances en dimension 2 ou 3.

145 - Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

Analyse et probabilités

203 - Utilisation de la notion de compacité.

206 - Utilisation de théorèmes de point fixe.

210 - Applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés. Exemples et applications.

214 - Applications du théorème d'inversion locale et du théorème des fonctions implicites.

215 - Applications différentiables définies sur un ouvert de Rn . Exemples et applications.

216 - Étude de courbes. Exemples.

218 - Applications des formules de Taylor.

221 - Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

222 - Exemples d'équations différentielles. Solutions exactes ou approchées.

224 - Comportement asymptotique des suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.

226 - Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples.

254 - Développement asymptotique d'une fonction d'une variable réelle. Exemples et applications.

229 - Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

231 - Illustrer par des exemples et des contre-exemples la théorie des séries numériques.

232 - Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.

233 - Intégration des fonctions d'une variable réelle. Suites de fonctions intégrables.

236 - Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.

239 - Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

240 - Transformation de Fourier, produit de convolution. Applications.

243 - Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

244 - Fonctions d'une variable complexe, holomorphie. Exemples et applications.

246 - Développement d'une fonction périodique en série de Fourier. Exemples et applications.

248 - Approximation des fonctions numériques par des fonctions polynomiales ou polynomiales par morceaux. Exemples.

250 - Loi binomiale, loi de Poisson. Applications.

253 - Variables gaussiennes. Applications.

Leçons d'informatique fondamentale

901 - Exemples de structures de données et de leurs applications.
902 - Diviser pour régner : exemples et applications.
903 - Exemples d'algorithmes de tri : complexité.
904 - Arbres binaires de recherche. Applications.
905 - Parcours de graphes : exemples et applications.
906 - Programmation dynamique : exemples et applications.
907 - Algorithmique du texte : exemples et applications.
908 - Automates finis. Exemples et applications.
909 - Langages rationnels. Exemples et applications.
910 - Langages algébriques. Exemples et applications.
911 - Automates à pile ; puissance et limites.
912 - Fonctions récursives primitives et non primitives.
913 - Machines de Turing.
914 - Décidabilité et indécidabilité.
915 - Classes P et NP, NP-complétude. Exemples.
916 - Formules booléennes. Représentation et satisfiabilité.
917 - Logique du premier ordre : syntaxe et sémantique.
918 - Méthode de résolution, programmation logique.
919 - Unification : algorithmes et applications.
920 - Réécriture et formes normales.
921 - Langages typés : objectifs, mise en œuvre, applications.
922 - Descriptions sémantiques des langages de programmation.
923 - Analyses lexicale et syntaxique : principes, mise en œuvre, applications.
924 - Typage statique : objectifs, mise en œuvre, applications.
925 - Génération de code pour une machine à pile : principes, mise en œuvre, applications.

ANNEXE 3 : La bibliothèque de l'agrégation

AHUÉS M. **CHATELIN F.**	Exercices de valeurs propres de matrices	MASSON
ALESSANDRI M.	Thèmes de géométrie	DUNOD
AMAR E. **MATHERON É.**	Analyse complexe	CASSINI
ANDLER M. **BLOCH J. D.** **MAILLARD B.**	Exercices corrigés de Mathématiques • Tome 1A - Topologie • Tome 1B - Fonctions numériques • Tome 2 - Suites et séries numériques • Tome 3 - Analyse fonctionnelle • Tome 5 - Algèbre générale, polynômes • Tome 6 - Algèbre linéaire, première partie • Tome 7 - Algèbre linéaire, deuxième partie	ELLIPSES
ANDREWS G.	Number Theory	DOVER
ARIBAUD F. **VAUTHIER J.**	Mathématiques. Première année de DEUG	ESKA
ARNAUDIES J-M. **BERTIN J.**	Groupes, Algèbres et Géométrie • Tome I • Tome II	ELLIPSES
ARNAUDIES J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus d'analyse	DUNOD
ARNAUDIES J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus d'algèbre bilinéaire et géométrie du cours de Mathématiques tome 4	DUNOD

ARNAUDIES J-M. **FRAYSSE H.**	Cours de Mathématiques • 1. Algèbre • 2. Analyse • 3. Compléments d'analyse • 4. Algèbre bilinéaire et géométrie	DUNOD
ARNOLD V.	Chapitre supplémentaire de la théorie des équations différentielles ordinaires	MIR
ARNOLD V.	Équations différentielles ordinaires	MIR
ARTIN E.	Algèbre géométrique	GAUTHIER-VILLARS
ARTIN E.	Algèbre géométrique	GABAY
ARTIN M.	Algebra	PRENTICE HALL
AUBIN J.P.	Analyse fonctionnelle appliquée • Tome 1 • Tome 2	PUF
AUDIN M.	Géométrie de la licence à l'agrégation	BELIN
AVANISSIAN V.	Initiation à l'analyse fonctionnelle	PUF
AVEZ A.	Calcul différentiel	MASSON
BAKHVALOV N.	Méthodes numériques	MIR
BARANGER J.	Analyse numérique	HERMANN

BARRET M. **BENIDIR M.**	Stabilité des filtres et des systèmes linéaires	DUNOD
BASILI B. **PESKINE C.**	Algèbre	DIDEROT, ÉDITEUR ARTS ET SCIENCES
BASS J.	Cours de Mathématiques • Tome 1 • Tome 2	MASSON
BENDER C. **ORSZAG S.**	Advanced mathematical methods for scientists and engineers	MC GRAW HILL
BERGER M. **GOSTIAUX B.**	Géométrie différentielle	ARMAND COLIN
BERGER M. **BERRY J-P.** **PANSU P.** **SAINT RAYMOND X.**	Problèmes de géométrie commentés et rédigés	CÉDIC/NATHAN
BERGER M.	Géométrie • Index • 1. Action de groupes, espaces affines et projectifs • 2. Espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères • 3. Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes • 4. Formes quadratiques, quadriques et coniques • 5. La sphère pour elle-même, géométrie hyperbolique, l'espace des sphères	CÉDIC/NATHAN
BERGER M.	Géométrie tome 2	NATHAN
BICKEL P.J. **DOKSUM K.A.**	Mathematical statistics	PRENTICE HALL

BIGGS NORMAN L.	Discrete mathematics	OXFORD SCIENCE PUBLICATIONS
BLANCHARD A.	Les corps non commutatifs	PUF
BOAS R.	A primer of real functions	MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA
BON J.L.	Fiabilité des systèmes	MASSON
BONNANS J.F. **GILBERT J.C.** **LEMARECHAL C.** **SAGASTIZABAL C.**	Optimisation numérique	SPRINGER
BOURBAKI N.	Éléments de Mathématique • Topologie générale, chapitres V à X • Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à VII • Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à III • Fascicule XIII Intégration, chapitres I à IV	HERMANN
BOUVIER A. **RICHARD D.**	Groupes	HERMANN
BREMAUD P.	Introduction aux probabilités	SPRINGER
BREZIS H.	Analyse fonctionnelle, théorie et applications	MASSON
BRIANE M. **PAGES G.**	Théorie de l'intégration Cours et exercices, 3ème édition	VUIBERT
BROUSSE P.	Mécanique MP - PC.- Spéciales A. A'. B. B'.	ARMAND COLIN

BRUCE J.W. **GIBLIN P.J.** **RIPPON P.J.**	Microcomputers and Mathematics	CAMBRIDGE
CABANE R. **LEBOEUF C.**	Algèbre linéaire • 1. Espaces vectoriels , Polynômes • 2. Matrices et réduction	ELLIPSES
CABANNES H.	Cours de Mécanique générale	DUNOD
CAGNAC G. **THIBERGE L.**	Géométrie. Classes terminales C et T	MASSON
CALAIS J.	Éléments de théorie des anneaux	PUF
CALAIS J.	Éléments de théorie des groupes	PUF
CARREGA J.C.	Théorie des corps	HERMANN
CARTAN H.	Calcul différentiel (1971)	HERMANN
CARTAN H.	Cours de calcul différentiel (1977)	HERMANN
CARTAN H.	Formes différentielles	HERMANN
CARTAN H.	Théorie élémentaire des fonctions analytiques	HERMANN
CARTIER P. **KAHANE J.P.** **ARNOLD V. et al.**	Leçons de mathématiques d'aujourd'hui	CASSINI
CASTLEMAN K.R.	Digital image processing	PRENTICE HALL

CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.** **MAILLOT V.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Analyse 1 (seconde édition revue et corrigée)	MASSON
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation • Analyse 2 • Analyse 3	MASSON
CHATELIN F.	Valeurs propres de matrices	MASSON
CHEVALLARD Y.	Théorie des séries 1. Séries numériques	CÉDIC/NATHAN
CHILDS L.	A concrete introduction to Higher Algebra	SPRINGER VERLAG
CHOQUET G.	Cours d'analyse Tome II : Topologie	MASSON
CHOQUET G.	L'enseignement de la géométrie	HERMANN
CHRISTOL G. **PILIBOSSIAN P.** **YAMMINE S.**	• Algèbre 1 • Algèbre 2	ELLIPSES
CIARLET P.G.	Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation	MASSON
COCOZZA **THIVENT**	Processus stochastiques et fiabilité des systèmes	SPRINGER
COGIS O. **ROBERT C.**	Au-delà des ponts de Könisberg. Théorie des graphes. Problèmes, théorie, algorithmes	VUIBERT
COHN P.M.	Algebra Volume 1	JOHN WILEY

COLLET P.	Modeling binary data	Chapman and Hall
COMBROUZE A.	Probabilités et statistiques	PUF
COTRELL M. **GENON-CATALOT V.** **DUHAMEL C.** **MEYRE T.**	Exercices de probabilités	Cassini
COURANT R. **HILBERT D.**	Methods of Mathematical Physics • Volume 1 • Volume 2	John Wiley
COXETER H.S.M.	Introduction to Geometry	John Wiley
CROUZEIX M. **MIGNOT A.**	Analyse numérique des équations différentielles	Masson
CVITANOVIC P.	Universality in Chaos	Institute of Physics Publishing
DACUNHA-CASTELLE D. **DUFLO M.**	• Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe • Exercices de Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe	Masson
DACUNHA-CASTELLE D. **REVUZ D.** **SCHREIBER M.**	Recueil de problèmes de calcul des probabilités	Masson
DEHAME **HENOCQ**	Algèbre, analyse, géométrie Prépa PT/PT*/TSI 2ème édition	Vuibert
DEHEUVELS P.	L'intégrale	PUF

DEHEUVELS P.	L'intégrale	Que-sais-je ? PUF
DEHEUVELS R.	Formes quadratiques et groupes classiques	PUF
DEHORNOY P.	Mathématiques de l'informatique	Dunod
DEHORNOY P.	Complexité et décidabilité	Springer
DELTHEIL R. **CAIRE D.**	Géométrie et compléments	Jacques Gabay
DEMAILLY J.P.	Analyse numérique et équations différentielles	PU Grenoble
DEMAZURE M.	Catastrophes et bifurcations	Ellipses
DEMAZURE M.	Cours d'algèbre : primalité, divisibilité, codes	Cassini
DEMBO A. **ZEITOUNI O.**	Large deviations techniques and applications	Springer
DESCOMBES R.	Éléments de théorie des nombres	PUF
DESCHAMPS **WARUSFEL** **MOULIN, RUAUD** **MIQUEL, SIFRE**	Mathématiques, cours et exercices corrigés • 1ère année MPSI, PCSI, PTSI • 2ème année MP, PC, PSI	Dunod
DEVANZ **ELHODAIBI**	Exercices corrigés de Mathématiques posés à l'oral des Ensi, Tome 2	Ellipses
DIEUDONNÉ J.	Algèbre linéaire et géométrie élémentaire	Hermann

DIEUDONNÉ J.	Calcul infinitésimal	HERMANN
DIEUDONNÉ J.	Sur les groupes classiques	HERMANN
DIEUDONNÉ J.	Éléments d'Analyse. • Fondements de l'analyse moderne • Éléments d'Analyse Tome 2.	GAUTHIER-VILLARS
DIXMIER J.	Cours de Mathématiques du premier cycle • Première année • Deuxième année	GAUTHIER-VILLARS
DRAPPER N. **SCHMITH H.**	Applied regression analysis	WILEY
DUBREIL P. **DUBREIL-JACOTIN M.L.**	Leçons d'Algèbre moderne	DUNOD
DUBUC S.	Géométrie plane	PUF
DUCROCQ A. **WARUSFEL A.**	Les Mathématiques, plaisir et nécessité Un parcours guidé dans l'univers des mathématiques	VUIBERT
DUGAC P.	Histoire de l'analyse. Autour de la notion de limite et de ses voisinages	VUIBERT
DURRETT R.	Probability - Theory and Examples	DUXBURY PRESS
DYM H. **Mac KEAN H.P.**	Fouriers series and integrals	ACADEMICS PRESS

EBBINGHAUS, HERMES HIRZEBRUCH, KOECHER, LAMOTKE, MAINZER NEUKIRSCH, PRESTEL, REMMERT	Les Nombres	VUIBERT
EL HAJ LAAMRI	Mesures, intégration et transformée de Fourier des fonctions	DUNOD
EL KACIMI ALAOUI A. QUEFFÉLEC H. SACRÉ C. VASSALLO V.	Quelques aspects des mathématiques actuelles	ELLIPSES
EPISTEMON L. (OVAERT J.L. VERLEY J.L.)	Exercices et problèmes • Analyse. Volume 1 • Algèbre.	CÉDIC/NATHAN
EXBRAYAT J.M. MAZET P.	Notions modernes de mathématiques • Algèbre 1 : Notions fondamentales de la théorie des ensembles • Analyse 1 : Construction des espaces fondamentaux de l'analyse • Analyse 2 : Éléments de topologie générale	HATIER
FADDEEV D. SOMINSKI I.	Recueil d'exercices d'Algèbre Supérieure	MIR
FAIRBANK X. BEEF C.	POX - Exercices posés au petit oral de l'X	ELLIPSES
FARAUT J. KHALILI E.	Arithmétique Cours, Exercices et Travaux Pratiques sur Micro-Ordinateur	ELLIPSES
FELLER W.	An introduction to probability theory and its applications • Volume 1 • Volume 2	JOHN WILEY

FERRIER J.P.	Mathématiques pour la licence	MASSON
FLORY G.	Exercices de topologie et analyse avec solutions • Tome 1 - Topologie • Tome 2 - Fonctions d'une variable réelle • Tome 3 - Fonctions différentiables, intégrales multiples • Tome 4 - Séries, équations différentielles	VUIBERT
FOATA D. **FUCHS A.**	Calcul des probabilités	MASSON
FRANCHINI J. **JACQUENS J-C.**	Mathématiques Spéciales • Algèbre • Analyse 1 • Analyse 2	ELLIPSES
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Algèbre 1	CASSINI
FRANCINOU S. **GIANELLA H.**	Exercices de Mathématiques Algèbre 1	MASSON
FRENKEL J.	Géométrie pour l'élève-professeur	HERMANN
FRESNEL J.	Géométrie algébrique	UFR MATHS BORDEAUX
FRESNEL J.	Géométrie	IREM DE BORDEAUX
FRESNEL J.	Anneaux	HERMANN
FRESNEL J.	Groupes	HERMANN
FRESNEL J.	Méthodes modernes en géométrie	HERMANN

FUHRMANN P.	A polynomial approach to linear algebra	SPRINGER
GABRIEL P.	Matrices, géométrie, algèbre linéaire	CASSINI
GANTMACHER F.R.	Théorie des matrices • Tome 1 • Tome 2	DUNOD
GENET J.	Mesure et intégration. Théorie élémentaire. Cours et exercices résolus	VUIBERT
GHIDAGLIA J.M.	Petits problèmes d'analyse	SPRINGER
GOBLOT R.	Algèbre commutative	MASSON
GOBLOT R.	Thèmes de géométrie	MASSON
GODEMENT R.	Analyse • Tome 1 • Tome 2 • Tome 3	SPRINGER
GODEMENT R.	Cours d'Algèbre	HERMANN
GOLUB G.H. **VAN LOAN C.F.**	Matrix computations	WILEY
GONNORD S. **TOSEL N.**	Thèmes d'Analyse pour l'agrégation I Topologie et Analyse fonctionnelle	ELLIPSES

GOSTIAUX B.	Cours de mathématiques spéciales • Tome 1 - Algèbre • Tome 2 - Topologie et analyse réelle • Tome 3 - Analyse fonctionnelle et calcul différentiel • Tome 4 - Géométrie affine et métrique • Tome 5 - Géométrie : arcs et nappes	PUF
GOURDON X.	Les maths en tête, mathématiques pour M' • Algèbre • Analyse	Ellipses
GRAMAIN A.	Géométrie élémentaire	Hermann
GRAMAIN A.	Intégration	Hermann
GREUB W.	Linear Algebra	Springer Verlag
GRIMMET G. **WELSH D.**	Probability (an introduction)	Oxford
GUICHARDET A.	Calcul intégral. Maîtrise de Mathématiques C. 2	Armand Colin
GUININ D. **JOPPIN**	Cours et exercices résolus • Algèbre-Géométrie MPSI • MP	Bréal
GUJARATI D. N.	Basic Econometrics	Wiley
HABSIEGER L. **MARTEL V.**	Exercices corrigés posés à l'oral des ENSI Tome 1 Analyse	Ellipses
HALMOS P.	Problèmes de mathématiciens petits et grands	Cassini

HAMMAD P.	Cours de probabilités	CUJAS
HAMMAD P. **TARANCO A.**	Exercices de probabilités	CUJAS
HAMMER R. **HOCKS M.** **KULISH U.** **RATZ D.**	C++ toolbox for verified computing	SPRINGER
HARDY G.H. **WRIGH E.M.**	An introduction to the theory of numbers	OXFORD
HENNEQUIN P.L. **TORTRAT A.**	Théorie des probabilités et quelques applications	MASSON
HENRICI P.	Applied and Computational Complex Analysis • Volume 1 • Volume 2 • Volume 3	WILEY-INTERSCIENCE
HERVE M.	Les fonctions analytiques	PUF
HIRSCH F. **LACOMBE G.**	Eléments d'analyse fonctionnelle	MASSON
HOCHART **SCIUTO**	Algèbre Analyse Géométrie (MPSI/PCSI)	VUIBERT
HOUZEL C.	Analyse mathématique : cours et exercices	BELIN
HUBBARD J. **WEST B.**	Équations différentielles et systèmes dynamiques	SPRINGER
IRELAND K. **ROSEN M.**	A Classical Introduction to Modern Numbers Theory	SPRINGER VERLAG

ISAAC R.	Une initiation aux probabilités (Trad. R. Mansuy)	VUIBERT-SPRINGER
ITARD J.	Les nombres premiers	QUE SAIS-JE ? PUF
JACOBSON N.	Basic Algebra • Tome I • Tome II	FREEMAN AND CO
KAHANE J.P. **GILLES P.**	Séries de Fourier et ondelettes	CASSINI
KATZNELSON Y.	An Introduction to Harmonic Analysis	DOVER
KERBRAT Y. **BRAEMER J-M.**	Géométrie des courbes et des surfaces	HERMANN
KNUTH D.E.	The art of computer programming • Volume 1 : Fundamental algorithms • Volume 2 : Seminumerical algorithms • Volume 3 : Sorting and Searching	ADDISON-WESLEY
KOLMOGOROV A. **FOMINE S.**	Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle	ELLIPSES
de KONNINCK J.M. **MERCIER A.**	Introduction à la théorie des nombres	MODULO
KÖRNER T.W.	Fourier analysis	CAMBRIDGE
KÖRNER T.W.	Exercises for Fourier analysis	CAMBRIDGE
KREE P.	Introduction aux Mathématiques et à leurs applications fondamentales M.P.2	DUNOD

KRIVINE H.	Exercices de Mathématiques pour physiciens	CASSSINI
KRIVINE J.L.	Théorie axiomatique des ensembles	PUF
KRIVINE J.L.	Théorie des ensembles	CASSINI
LAFONTAINE J.	Introduction aux variétés différentielles	PUF
LANG S.	Algèbre linéaire • Tome 1 • Tome 2	INTEREDITIONS
LANG S.	Algebra	ADDISON-WESLEY
LANG S.	Linear Algebra	ADDISON-WESLEY
LAVILLE	Géométrie pour le CAPES et l'Agrégation	ELLIPSES
LAX P. D.	Linear Algebra	WILEY
LE BRIS G.	Maple Sugar : une initiation progressive à Maple	CASSINI
LEBŒUF C. **GUEGAND J.** **ROQUE J.L.** **LANDRY P.**	Exercices corrigés de probabilités	ELLIPSES
LEBORGNE D.	Calcul différentiel et géométrie	PUF
LEBOSSÉ C. **HÉMERY C.**	Géométrie. Classe de Mathématiques	JACQUES GABAY

LEHMANN D. **SACRÉ C.**	Géométrie et topologie des surfaces	PUF
LEHNING H. **JAKUBOWICZ D.**	Mathématiques supérieures et spéciales 2 : Dérivation	Masson
LEHNING H.	Mathématiques supérieures et spéciales • Tome 1 : Topologie • Tome 3 : Intégration et sommation • Tome 4 : Analyse en dimension finie • Tome 5 : Analyse fonctionnelle	Masson
LEICHTNAM E. **SCHAUER X.**	Exercices corrigés de mathématiques posés aux oraux X-ENS • Tome I - Algèbre 1 • Tome 2 - Algèbre et géométrie • Tome 3 - Analyse 1 • Tome 4 - Analyse 2	Ellipses
LELONG-FERRAND J. **ARNAUDIES J.M.**	Cours de Mathématiques • Tome 1 pour M-M' : Algèbre • Tome 1 pour A-A' : Algèbre • Tome 2 : Analyse • Tome 3 : Géométrie et cinématique • Tome 4 : Equations différentielles, intégrales multiples	Dunod
LELONG-FERRAND J.	Géométrie différentielle	Masson
LELONG-FERRAND J.	Les fondements de la géométrie	PUF
LESIEUR L. **MEYER Y.** **JOULAIN C.** **LEFEBVRE J.**	Algèbre linéaire, géométrie	Armand Colin
LION G.	Algèbre pour la licence Cours et exercices (2ème édition)	Vuibert

LION G.	Géométrie du plan Cours complet avec 600 exercices résolus	Vuibert
MAC LANE S. **BIRKHOFF G.**	Algèbre • 1 : Structures fondamentales • 2 : Les grands théorèmes	Gauthier-Villars
MACKI J. **STRAUSS A.**	Introduction to optimal control theory	Springer
MALLIAVIN M. P. **WARUSFEL A.**	Algèbre linéaire et géométrie classique. Exercices	Masson
MALLIAVIN M. P.	Les groupes finis et leurs représentations complexes	Masson
MALLIAVIN P.	Géométrie différentielle intrinsèque	Hermann
Manuels Matlab	• Using Matlab version 5 • Using Matlab version 6 • Statistics Toolbox	
MARCE S. **DEVAL-GUILLY E.**	Problèmes corrigés des ENSI	Ellipses
MASCART H. **STOKA M.**	Fonctions d'une variable réelle • Tome 1 : Exercices et corrigés • Tome 2 : Exercices et corrigés • Tome 3 : Exercices et corrigés • Tome 4 : Exercices et corrigés	PUF
MAWHIN J.	Analyse : fondements, technique, évolutions	De Boeck Université
MAZET P.	Algèbre et géométrie pour le CAPES et l'Agrégation	Ellipses

MERKIN D.	Introduction to the theory of stability	SPRINGER
MÉTIVIER M.	Notions fondamentales de la théorie des probabilités	DUNOD
MÉTIVIER M.	Probabilités : dix leçons d'introduction . École Polytechnique	ELLIPSES
MEUNIER	Agrégation interne de Mathématiques Exercices d'oral corrigés et commentés • Tome 2 • Tome 3	PUF
MIGNOTTE M.	Mathématiques pour le calcul formel	PUF
MNEIMNÉ R.	Eléments de géométrie : action de groupes	CASSINI
MNEIMNÉ R. **TESTARD F.**	Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques	HERMANN
MOISAN J. **VERNOTTE A.** **TOSEL N.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales Analyse : suites et séries de fonctions	ELLIPSES
MOISAN J. **VERNOTTE A.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales Analyse : topologie et séries	ELLIPSES

MONIER J.M.	Cours de mathématiques • Analyse 1 MPSI, PCSI, PTSI • Analyse 2 MPSI, PCSI, PTSI • Analyse 3 MP, PSI, PC, PT • Analyse 4 MP, PSI, PC, PT • Algèbre 1 MPSI, PCSI, PTSI • Algèbre 2 MP, PSI, PC, PT • Exercices d'analyse MPSI • Exercices d'analyse MP • Exercice d'algèbre et géométrie MPSI • Exercice d'algèbre et géométrie MP	DUNOD
MUTAFIAN C.	Le défi algébrique • Tome 1 • Tome 2	VUIBERT
NAUDIN P. **QUITTE C.**	Algorithmique algébrique avec exercices corrigés	MASSON
NEVEU J.	Base mathématique du calcul des probabilités	MASSON
NIVEN I.	Irrational numbers	MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA
NORRIS J.R.	Markov chains	CAMBRIDGE
OPREA J.	Differential geometry	PRENTICE HALL
OUVRARD J.Y.	• Probabilités 1 • Probabilités 2	CASSINI
PAGES G. **BOUZITAT C.**	En passant par hasard ... Les probabilités de tous les jours	VUIBERT

PAPINI O. **WOLFMANN J.**	Algèbre discrète et codes correcteurs	SPRINGER
PEDOE D.	Geometry- A comprehensive course	DOVER
PERKO L.	Differential equation and dynamical systems	SPRINGER
PERRIN D.	Cours d'Algèbre	ELLIPSES
PERRIN D.	Cours d'Algèbre	ENSJF
PERRIN D.	Géométrie algébrique - Une introduction	INTERÉDITIONS/ CNRS ÉDITIONS
PERRIN-RIOU B.	Algèbre, arithmétique et MAPLE	CASSINI
PÓLYA G. **SZEGÖ G.**	Problems and Theorems in Analysis • Volume I • Volume II	SPRINGER VERLAG
POMMELLET A.	Agrégation de Mathématiques. Cours d'Analyse	ELLIPSES
RALSTON A. **RABINOWITCH P**	A first curse in numerical analysis	INTERNATINAL STUDENT EDITION
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Cours de Mathématiques spéciales • 1- Algèbre • 2- Algèbre et applications à la géométrie • 3- Topologie et éléments d'analyse • 4- Séries et équations différentielles • 5- Applications de l'analyse à la géométrie	MASSON

RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Exercices avec solutions • Algèbre • Analyse 1 • Analyse 2	MASSON
RAO C.R.	Linear statistical inference and its application	WILEY
RIDEAU F.	Exercices de calcul différentiel	HERMANN
RIESZ F. **NAGY SZ. B.**	Leçons d'analyse fonctionnelle	GAUTHIER-VILLARS
RIO E.	Théorie asymptotique des processus aléatoires faiblement dépendants	SPRINGER
ROLLAND R.	Théorie des séries 2- Séries entières	CÉDIC/NATHAN
ROMBALDI J.E.	Thèmes pour l'agrégation de mathématiques	EDP SCIENCES
ROMBALDI J.E.	Analyse matricielle	EDP SCIENCES
ROMBALDI J.E.	Interpolation, approximation Analyse pour l'agrégation	VUIBERT
ROUVIÈRE F.	Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation	CASSINI
RUAUD J.F. **WARUSFEL A.**	Exercices de Mathématiques Algèbre 3	MASSON
RUDIN W.	Analyse réelle et complexe	MASSON

RUDIN W.	Functional analysis	Mc Graw Hill
RUDIN W.	Real and complex analysis	Mc Graw Hill
SAKS S. **ZYGMUND A.**	Fonctions analytiques	Masson
SAMUEL P.	Géométrie projective	PUF
SAMUEL P.	Théorie algébrique des nombres	Hermann
SARMANT	Analyse 1	Ellipses
SAUVAGEOT F.	Petits problèmes de géométrie et d'algèbre	Springer
SAUX PICARD P.	Cours de calcul formel - Algorithmes fondamentaux	Ellipses
SAVIOZ J.C.	Algèbre linéaire, cours et exercices	Vuibert
SCHWARTZ L.	Analyse • I Topologie générale et analyse fonctionnelle • II Calcul différentiel et équations différentielles	Hermann
SCHWARTZ L.	Cours d'Analyse	Hermann
SCHWARTZ L.	Méthodes Mathématiques pour les sciences physiques	Hermann
SEDGEWICK R.	Algorithms	Addison Wesley

SELBERHERR S. **STIPPEL H.** **STRASSER E.**	Simulation of semi-conductor devices and processes	Springer
SERRE J.P.	Cours d'arithmétique	PUF
SERVIEN Cl.	• Analyse 1 • Analyse 3 • Analyse 4	Ellipses
SIDLER J.C.	Géométrie Projective	Dunod
SKANDALIS G.	Topologie et analyse	Dunod
STANLEY R.P.	Enumerative combinatorics Volume I	Waddworth and Brooks
STEWART I.	Galois theory	Chapman and Hall
SZPIRGLAS A.	Exercices d'algèbre	Cassini
TAUVEL P.	Cours de Géométrie	Dunod
TAUVEL P.	Mathématiques générales pour l'agrégation	Masson
TAUVEL P.	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Algèbre 2	Masson
TENENBAUM G.	Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres T 2	S. M. F.
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres T 1	S. M. F.

TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres	INSTITUT ELIE CARTAN
TENENBAUM G. **MENDÈS-FRANCE M.**	Les nombres premiers	QUE SAIS-JE ? PUF
TISSERON C.	Géométries affine, projective et euclidienne	HERMANN
TISSIER A.	Mathématiques générales : exercices avec solutions	BRÉAL
TITCHMARSH E.C.	The theory of functions	OXFORD
TORTRAT A.	Calcul des probabilités et introduction aux processus aléatoires	MASSON
TRIGNAN J.	Constructions géométriques et courbes remarquables	VUIBERT
TRUFFAULT B.	Exercices de géométrie élémentaires	IREM DES PAYS DE LOIRE
VALIRON G.	Cours d'analyse mathématique • I Théorie des fonctions • II Équations fonctionnelles - Applications	MASSON
VAUQUOIS B.	Outils Mathématiques. Probabilités	HERMANN
VAUTHIER J. **PRAT J-J.**	Cours d'Analyse Mathématique de l'Agrégation	MASSON
VEIGNEAU S.	Approche impérative et fonctionnelle de l'algorithmique	SPRINGER

WAGSCHAL C.	Fonctions holomorphes Équations différentielles	HERMANN
WARUSFEL A.	Structures algébriques finies	CLASSIQUES HACHETTE
WARUSFEL, ATTALI COLLET, GAUTIER, NICOLAS	Mathématiques • Analyse • Arithmétique • Géométrie • Probabilités	VUIBERT
WHITTAKER E.T. WATSON G.N.	A course of modern analysis	CAMBRIDGE
WILF H.	Generatingfunctionology	ACADEMIC PRESS
WILLEM M.	Analyse fonctionnelle élémentaire	CASSINI
YALE P.B.	Geometry and Symmetry	DOVER
YOUNG D.M. GREGORY R.T.	A survey of numerical mathematics	DOVER
ZÉMOR G.	Cours de cryptographie	CASSINI
ZUILY Cl. QUEFFELEC H.	Éléments d'analyse pour l'agrégation	MASSON