

# **MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE**

**DIRECTION DES PERSONNELS ENSEIGNANTS**

**RAPPORT DE JURY DE CONCOURS**

**AGRÉGATION**

**MATHÉMATIQUES**

**CONCOURS EXTERNE**

**Session 2001**

**CENTRE NATIONAL DE DOCUMENTATION PÉDAGOGIQUE**

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

DIRECTION DES ÉVALUATIONS ÉDUCATIVES

RAPPORT DE JURY DE CONCOURS

**"LES RAPPORTS DES JURYS DES CONCOURS SONT  
ÉTABLIS SOUS LA RESPONSABILITÉ DES PRÉSIDENTS  
DE JURY."**

CONCOURS EXTERNE

Séssion 2001

CENTRE NATIONAL DE DOCUMENTATION PÉDAGOGIQUE

## Composition du Jury

Monsieur Alain LICHNEWSKY	Académie de Versailles Professeur des Universités Président	
Monsieur Paul DOUKHAN	Académie de Versailles Professeur des Universités Vice Président	
Monsieur Dominique ROUX	Académie de Paris Inspecteur Général de l'Education Nationale Universités Vice Président	
Monsieur Georges SKANDALIS	Académie de Paris Professeur des Universités Universités Vice Président	
Monsieur André WARUSFEL	Académie de Paris Inspecteur Général de l'Education Nationale Universités Vice Président	
Monsieur Luc ALBERT	Académie de Nice	Professeur de Spéciales
Monsieur Patrick ANGO NZE	Académie de Lille	Maître de Conférences
Madame Anne Marie AUBERT	Académie de Paris	Chargée de recherches
Monsieur Jean Marc BARDET	Académie de Toulouse	Maître de Conférences
Madame Valérie BERTHE	Académie d' Aix - Marseille	Chargée de Recherches
Madame Geneviève BIDAUD	Académie de Paris	Professeur de Spéciales
Madame Agnès BOREL	Académie d' Aix - Marseille	Professeur de Spéciales
Monsieur Philippe BOUCHAUD	Académie de Paris	Chercheur CEA
Monsieur Julien CASSAIGNE	Académie d' Aix Marseille	Chargé de Recherches
Monsieur Antoine CHAMBERT-LOIR	Académie de Paris	Maître de Conférences
Monsieur Jean Philippe CHANCELIER	Académie de Paris	Chercheur ENPC
Monsieur Marc CHAPERON	Académie de Paris	Professeur des Universités
Monsieur Patrick CHENIN	Académie de Grenoble	Maître de Conférences
Monsieur Alain CHILLES	Académie de Versailles	Professeur de Spéciales
Monsieur Denis CHOIMET	Académie de Nantes	Professeur de Spéciales
Monsieur Jean COUGNARD	Académie de Caen	Professeur des Universités

Monsieur François DELEBECQUE	Académie de Versailles	Directeur de Recherches
Monsieur Jean DELLA DORA	Académie de Grenoble	Professeur des Universités
Madame Jacqueline DETRAZ	Académie d' Aix Marseille	Professeur des Universités
Monsieur Jean DIEBOLT	Académie de Grenoble	Directeur de Recherches
Monsieur Zindine DJADLI	Académie de Versailles	Maître de Conférences
Monsieur Philippe DUBOIS	Académie d' Anger	Professeur des Universités
Monsieur Guy FAYOLLE	Académie de Versailles	Directeur de Recherches
Monsieur Vincent FLECKINGER	Académie de Besançon	Professeur des Universités
Monsieur Jean Claude FORT	Académie de Nancy	Professeur des Universités
Monsieur Patrick FOULON	Académie de Strasbourg	Professeur des Universités
Monsieur Fabrice GAMBOA	Académie de Toulouse	Professeur des Universités
Monsieur Hervé GIANELLA	Académie de Paris	Professeur de Spéciales
Monsieur François GOLSE	Académie de Paris	Professeur des Universités
Monsieur Claude GOMEZ	Académie de Versailles	Directeur de Recherches
Monsieur Gérard GRÉGOIRE	Académie de Grenoble	Professeur des Universités
Monsieur Pascal GUELFY	Académie de Clermont Ferrand	Professeur de Spéciales
Monsieur David HARARI	Académie de Strasbourg	Chargé de Recherches
Monsieur Bertrand HAUCHECORNE	Académie d'Orléans Tours	Professeur de Spéciales
Monsieur Guy HENNIART	Académie de Versailles	Professeur des Universités
Monsieur Pierre-Vincent KOSELEFF	Académie de Paris	Maître de Conférences
Monsieur Thomas LACHAND-ROBERT	Académie de Paris	Maître de Conférences
Monsieur Hervé LE DRET	Académie de Paris	Professeur des Universités
Monsieur Jean Charles LECCIA	Académie de Annecy	Professeur de Spéciales
Monsieur Pierre-Gilles LEMARIÉ	Académie de Versailles	Professeur des Universités
Monsieur Christian LÉONARD	Académie de Versailles	Professeur des Universités
Madame Danièle LINO	Académie de Reims	Professeur de Spéciales
Madame Véronique LODS	Académie de Poitiers	Professeur des Universités
Monsieur Vincent MAILLOT	Académie de Paris	Chargé de Recherches

Monsieur Michel MATIGNON	Académie de Bordeaux	Professeur des Universités
Monsieur Bertrand MAURY	Académie de Paris	Maître de Conférences
Monsieur Jean François MESTRE	Académie de Paris	Professeur des Universités
Monsieur Rached MNEIMNÉ	Académie de Paris	Professeur des Universités
Monsieur Laurent NIEDERMAN	Académie de Versailles	Maître de Conférences
Madame Martine PAGES	Académie de Nice	Professeur de Spéciales
Monsieur Alain PIETRUS	Académie de Cayenne	Professeur des Universités
Monsieur Jean-Luc PRIGENT	Académie de Versailles	Maître de Conférences
Monsieur Jean Pierre RAOULT	Académie de Créteil	Professeur des Universités
Monsieur Marc REVERSAT	Académie de Toulouse	Professeur des Universités
Monsieur Bernard SARAMITO	Académie de Clermont Ferrand	Professeur des Universités
Monsieur François SAUVAGEOT	Académie de Paris	Maître de Conférences
Monsieur David SAUZIN	Académie de Paris	Chercheur CNRS
Monsieur Eric SÉRÉ	Académie de Paris	Professeur des Universités
Monsieur Jean Claude SOLADIE	Académie de Bordeaux	Professeur de Spéciales
Monsieur Philippe SOULIER	Académie de Versailles	Maître de Conférences
Monsieur Frank TAIEB	Académie de Paris	Professeur de Spéciales
Madame Nicoletta TCHOU	Académie de Rennes	Maître de Conférences
Monsieur Charles TOROSSIAN	Académie de Paris	Chargé de Recherches
Monsieur Nizar TOUZI	Académie de Paris	Professeur des Universités
Monsieur Serge VARJABÉDIAN	Académie de Lille	Professeur de Spéciales
Monsieur Alain VEERAVALLI	Académie de Versailles	Maître de Conférences
Monsieur Pierre VOGEL	Académie de Paris	Professeur des Universités
Monsieur Johan YEBBOU	Académie de Paris	Professeur de Spéciales
Monsieur Alain YGER	Académie de Bordeaux	Professeur des Universités



## Présentation du Concours

### Déroulement de la Session de 2001

La session de 2001 s'est déroulée selon le calendrier suivant:

#### ECRIT

Composition de Mathématiques Générales	jeudi	5 avril de 9h à 15h
Composition d' Analyse et Probabilités	vendredi	6 avril de 9h à 15h

La liste d'admissibilité a été affichée le lundi 28 mai à la DPE, 34 rue de Châteaudun, 75009 Paris; et simultanément sur Minitel.

#### ORAL

L'oral s'est déroulé du lundi 25 juin au mercredi 18 juillet dans les locaux de l'Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay. La liste d'admission a été affichée le vendredi 20 juillet à la DPE, et sur Minitel.

### Le concours

Le concours d'agrégation externe est un concours de recrutement d'enseignants qui sont destinés, suivant leurs talents et leur intérêt, à occuper des fonctions dans l'enseignement du second degré, les classes préparatoires aux grandes écoles (CPGE), l'enseignement supérieur. Les candidats admis se voient proposer des stages probatoires et de formation en IUFM dès la rentrée scolaire qui suit le concours. Ces stages peuvent comporter des périodes d'exercice dans les classes du second degré. Des reports de stage peuvent être accordés par la DPE pour permettre aux lauréats d'effectuer des études doctorales ou des travaux de recherche dans un établissement ou organisme public français <sup>(1)</sup>; les élèves des Ecoles Normales Supérieures en bénéficient également pour terminer leur période de scolarité.

Le concours s'adresse à des candidats titulaires d'une Maîtrise, à l'intention desquels des formations complémentaires spécifiques de préparation au concours sont organisées dans les universités. La principale originalité de l'agrégation externe est de sanctionner une formation généraliste de haut niveau. Ceci correspond d'une part aux besoins des formations d'enseignement auxquelles les agrégés participent. D'autre part, cette base permet de s'adapter au fil de l'évolution scientifique et pédagogique des mathématiques.

Le programme, la nature des épreuves écrites et orales, font l'objet de publications au Bulletin Officiel du Ministère de l'Éducation Nationale (B.O.), et leur actualisation peut être consultée sous forme électronique Internet à travers l'URL "<http://www.education.gouv.fr/siac/siac2/default.htm>". La référence principale pour le programme en vigueur pour la session 2001 est le B.O. N° 27 du 2 juillet 1998. La session 2002 utilisera un programme remanié publié dans le B.O. N°8 du 24 Mai 2001. Le rapport du jury donne des informations détaillées sur les attentes du jury pour les diverses épreuves. On trouve également des informations en provenance du jury et concernant les sessions futures à l'adresse Internet "<http://www.education.gouv.fr/siac/siac2/informations.htm>". Les informations publiées sur l'Internet permettent de donner un maximum d'indications sur l'organisation matérielle du

<sup>1</sup> On se doit d'insister sur le fait que l'administration exige une attestation de poursuite de recherches, ou à défaut une autorisation à s'inscrire dans une formation de troisième cycle universitaire. En cas de succès, l'examen des dossiers se fait immédiatement à l'issue du concours, et on conseille donc aux candidats de se munir des attestations requises avant le début des congés universitaires.

concours: configuration informatique pour l'épreuve de modélisation, accès au lieu des épreuves et possibilités de logement. Le jury utilise également cette diffusion pour des précisions supplémentaires; ceci concilie flexibilité et informe tous les candidats de manière égale.

Les critères essentiels d'appréciation des candidats par le jury sont:

1. La solidité de la formation mathématique.
2. La capacité à mobiliser ses connaissances pour fournir des démonstrations pertinentes, complètes, bien structurées et claires.
3. Les aptitudes pédagogiques et d'expression, surtout testées lors des épreuves orales, mais qui peuvent également apparaître dans l'expression écrite de la solution des problèmes.
4. La capacité à donner des applications convaincantes des théories mathématiques. Les deux épreuves orales Algèbre et Analyse donnent lieu à des illustrations dans le cadre mathématique. L'épreuve de Modélisation propose plus particulièrement des modèles mathématiques numériques, statistiques ou symboliques; ils proviennent de grandes disciplines scientifiques précisées dans les "Thèmes applicatifs" du programme.

Les modalités d'interrogation sont précisées ci-après dans le paragraphe consacré à l'organisation des épreuves orales. Elles sont formalisées et structurées pour que les candidats puissent se préparer, effectuer efficacement leur prestation et être à l'aise dans leur interaction avec le jury.

Les rapports détaillés concernant les diverses épreuves précisent les attentes du jury et donnent des conseils permettant aux candidats de mettre en valeur efficacement leurs compétences et leur motivation.

### **Commentaire et observations du président**

Le jury tient à remercier les préparations qui se sont organisées sous l'égide de la Société Mathématique de France (SMF) pour exprimer leurs observations sur les modalités et l'évolution du concours. Ceci a permis un large échange de vues avec des représentants du jury sur les orientations futures du concours, en particulier lors d'une table ronde organisée à l'I.H.P. en Mai 2001.

Lors de ses délibérations, le jury s'est déclaré satisfait du niveau des candidats, ce qui a permis de pourvoir les 310 postes disponibles et d'afficher un seuil d'admission de 08,5/20, en augmentation.

Par contre, l'évolution du nombre des inscrits (-8% par rapport à la session 2000) et des présents (-4%) fait apparaître une diminution régulière de l'effectif des candidats. Il en va de même de l'évolution du segment « étudiant » auquel appartiennent la très grande majorité des candidats non-normaliens. Cette évolution est un sujet de préoccupation pour le jury; il faudrait certainement anticiper le besoin de recrutement des années à venir et prendre dès à présent des mesures capables de motiver plus de candidats. Le travail effectué par les préparations pour consolider les savoirs des candidats en vue d'une utilisation professionnelle doit continuer à être reconnu et soutenu.

Pour répondre à cette préoccupation, il convient également que les candidats potentiels aient la possibilité de choisir sereinement la progression de leurs études universitaires. Ceci requiert qu'on facilite l'intégration de la préparation à l'agrégation dans leur cursus, en maintenant le mécanisme essentiel du report de stage pour préparer un DEA puis une thèse. Cette disposition permet aux jeunes agrégés les plus aptes de compléter leur formation initiale, ce qui est très bénéfique à l'exercice des métiers de l'enseignement auquel l'agrégation leur donne accès.

L'évolution de l'épreuve orale de modélisation dans le sens d'une épreuve basée sur l'étude d'un texte de modélisation est maintenant prévue pour la session 2003. Les trois sessions passées ont montré un réel progrès des candidats dans la prise en compte des textes. L'objectif est d'inciter au développement de qualités essentielles au plan professionnel : autonomie, initiative, ouverture d'esprit et sens de la transdisciplinarité. Ceci doit préparer les candidats aux nouvelles modalités d'enseignement introduites par les TPE, TIPE et l'introduction d'outils logiciels dans une pédagogie active. Ainsi le jury souhaite participer à un effort collectif de modernisation allant dans le sens des

initiatives ministérielles, mais il ne peut réussir seul : les candidats se comporteront d'autant mieux qu'ils auront été préparés à la modélisation mathématique et numérique dès le début de leurs études universitaires.

## Statistiques sur la Session de 2001

### **Vue d'ensemble**

Le nombre de postes mis au concours était de 310. Sur 2663 inscrits, 1828 ont participé aux deux épreuves écrites. On étes déclarés admissibles 496 candidats, auxquels il faut ajouter 33 candidats admissibles aux agrégations marocaines et tunisiennes. Ces derniers subissent les épreuves écrites et sont déclarés admissibles dans les mêmes conditions que les candidats français et CEE . Ils passent l'oral devant des jurys de leur nationalité et ne figurent pas dans les statistiques d'admissibilité et d'admission du concours français.

Le nombre des admis a été de 310, soit le nombre de postes à pourvoir. Le premier admissible avait une moyenne de 20,00 sur 20, le dernier une moyenne de 7 sur 20. Le premier admis obtient une moyenne de 17,85 sur 20, le dernier de 08,5 sur 20. Les femmes candidates constituaient 33% des inscrits, 28% des admissibles et 30% des admis.

Par rapport à la session 2000, on constate une forte diminution ( -8% ) du nombre d'inscrits. Le nombre de candidats présents aux deux épreuves écrites est également réduit (-4%). Ceci n'a pas eu d'influence sur le niveau général des admis, qui est très comparable à celui de la session 2000.

Nous analysons dans ce document les résultats suivant les catégories socio-professionnelles des candidats, ce qui montre les sources de recrutement. La catégorie des « étudiants » désigne les candidats « sans profession » qui sont inscrits dans une université, à l'exclusion des ENS et IUFM dont les statistiques sont séparées. Le nombres d'étudiants inscrits et présents aux deux épreuves écrites a décréu de 12% par rapport à la session 2000 et de 33% par rapport à la session 1998<sup>2</sup>. Cette réduction régulière du vivier des étudiants motivés par l'agrégation est certainement un sujet de préoccupation, car il s'agit de la principale source de notre recrutement. Le classement d'admission compte 3 étudiants parmi les 6 premiers, 10 parmi les 50 premiers, 39 parmi les 100 premiers, 202 au total. Les ENS ont inscrit 108 candidats, dont 105 se sont présentés effectivement; 90 ont été déclarés admissibles et 84 reçus. Le nombre de certifiés qui se sont présentés est de 257, dont 17 bi-admissibles, ainsi que 132 stagiaires certifiés. Au total 10 certifiés ont été admis.

Pour l'épreuve orale de modélisation, 43% des candidats ont choisi le texte plutôt que la leçon.. Ceci indique que l'épreuve sur texte est généralisable et confirme le jury dans son intention de passer à une épreuve uniquement sur texte dès 2003.

### **Résultats par Académies**

La table ci-après détaille les résultats par académies. Nous n'avons pas distingué les candidats normaliens des autres, ce qui améliore sensiblement les résultats des académies de Paris, Lyon et Rennes.

	Inscrits	Présents à l'écrit	Admissibles	Présents à l'oral	Admis	Ratio admissibles / Présents	Ratio admis / Présents
AIX-MARSEILLE	135	91	20	20	12	22%	13%
AMIENS	64	44	5	5	3	11%	7%

<sup>2</sup> Voir page 11

BESANCON	37	26	9	8	5	35%	19%
BORDEAUX	122	82	22	20	16	27%	20%
CAEN	50	31	4	4	2	13%	6%
CLERMONT-FERRAND	31	21	5	5		24%	
CORSE	10	7					
CRETEIL-PARIS-VERSAIL.	609	405	150	135	99	37%	24%
DIJON	43	30	2	1	1	7%	3%
GRENOBLE	88	60	15	14	8	25%	13%
GUADELOUPE	23	13					
GUYANE	2	2					
LA REUNION	27	17	1			6%	
LILLE	191	125	20	20	10	16%	8%
LIMOGES	8	6	1	1		17%	
LYON	152	126	58	56	46	46%	37%
MARTINIQUE	7	3					
MONTPELLIER	118	80	8	8	3	10%	4%
NANCY-METZ	104	65	19	16	7	29%	11%
NANTES	95	59	21	20	13	36%	22%
NICE	164	111	13	13	9	12%	8%
ORLEANS-TOURS	66	42	9	9	4	21%	10%
POITIERS	106	92	20	20	10	22%	11%
REIMS	46	37	9	8	5	24%	14%
RENNES	111	87	43	40	32	49%	37%
ROUEN	72	41	6	4	2	15%	5%
STRASBOURG	73	57	17	16	11	30%	19%
TOULOUSE	109	68	19	17	12	28%	18%

### Résultats par catégorie socioprofessionnelle

L'étude des résultats répartis selon les catégories socioprofessionnelles fait apparaître l'importance de la préparation des candidats. La catégorie "étudiant" bénéficie d'une préparation dans le cadre universitaire.

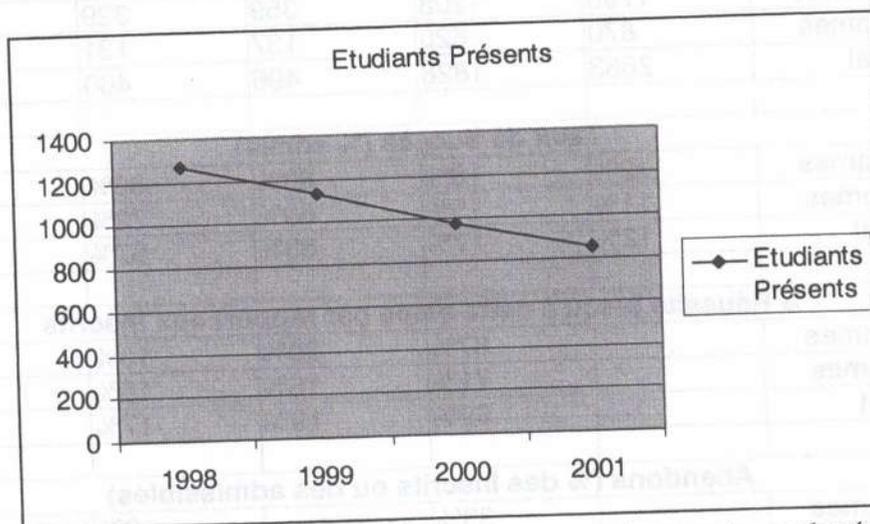
	Inscrits	Présents à l'écrit	Admissibles	Présents à l'oral	Admis
CERTIFIE BI-ADMISSIBLE	17	11	2	2	
CERTIFIE CLASSE NORMALE	411	246	11	9	3
ELEVE D UNE ENS	108	105	90	88	84
ELEVE.IUFM.ET EMPLOI	13	8			
ELEVE.IUFM.ETUDIANT	153	123	17	16	6
ELEVE.IUFM.MI/SE	5	3			
ELEVE.IUFM.NON TIT.ENS.PRIVE	3	3			
ELEVE.IUFM.NON TIT.ENS.PUBLIC	9	3	1	1	
ELEVE.IUFM.SANS.ACTIVITE	130	98	3	1	
EMPLOI JEUNES DONT AIDE-EDUCAT	3	1			
ETUDIANT	1053	857	330	310	202
SANS EMPLOI	181	80	7	5	2
PROF AGREGE	6	1	1	1	
STAGIAIRE ENSEIGNEMENT	227	140	17	13	7
Autres ENSEIGNANTS	145	68	3	2	

FONCT STAGIAIRE FONCT PUBLIQUE	2	1	1	1	1
MILITAIRE	2	1			
Autres FONCTIONNAIRES	2	1			
CONTRACTUELS ENSEIGNEMENT	102	49	9	7	4
ARTISANS / COMMERCANTS	2	2	1	1	
SALARIES SECTEUR INDUSTRIEL	7	2	1	1	
SALARIES SECTEUR TERTIAIRE	20	4			
CADRES SECT PRIVE CONV COLLECT	41	10	1	1	1
PROFESSIONS LIBERALES	10	5			

La table ci-après analyse le taux de réussite par rapport aux inscrits pour les catégories de candidats les plus significatives.

	Nombre Inscrits	Présents à l'écrit	Admissibles	Présents à l'oral	Admis
CERTIFIE CLASSE NORMALE	411	60%	3%	2%	1%
CONTRACTUELS ENSEIGNEMENT	102	48%	9%	7%	4%
ELEVE D UNE ENS	108	97%	83%	81%	78%
ELEVE.IUFM.ETUDIANT	153	80%	11%	10%	4%
ETUDIANT	1053	81%	31%	29%	19%
SANS EMPLOI	181	44%	4%	3%	1%
STAGIAIRE ENSEIGNEMENT	227	62%	7%	6%	3%

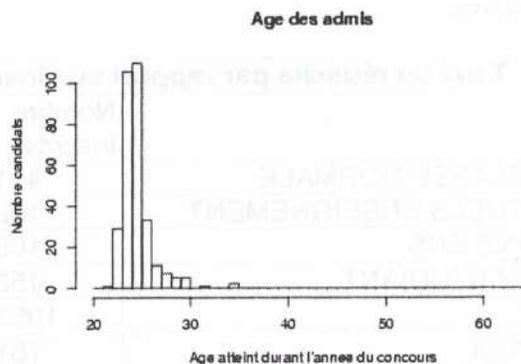
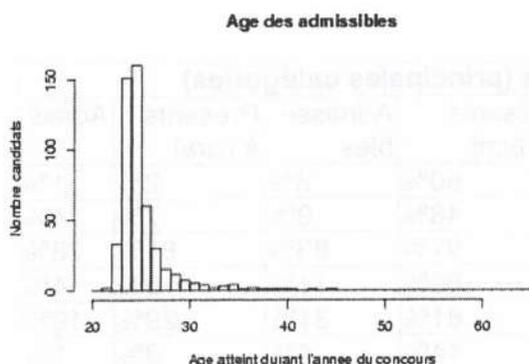
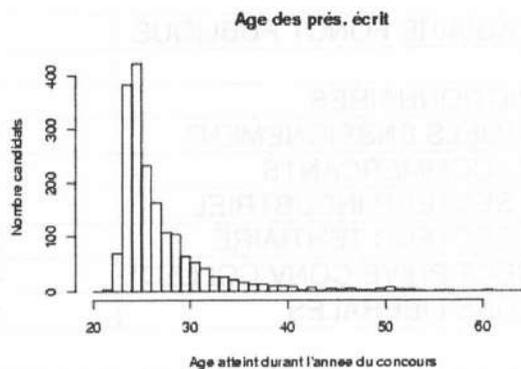
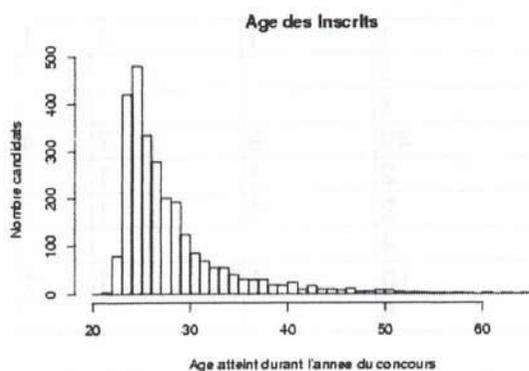
L'évolution du nombre d'étudiants présents aux deux épreuves écrites est décrite dans le graphique ci-après.. On constate que la tendance des années passées se maintient, avec un taux de décroissance



annuelle de l'ordre de 12%. Cette évolution est extrêmement préoccupante, car les étudiants constituent la source la plus importante d'admis. Il est clair qu'une action est requise pour motiver cette population afin de rendre possible des recrutements plus nombreux dans les années qui viennent pour remplacer les départs en retraite.

### Statistiques sur l'âge et le sexe des candidats

Globalement les taux de succès des hommes et des femmes sont comparables. Toutefois les femmes paraissent avoir plus de difficulté à l'écrit et plus de facilité ensuite. Elles refusent moins souvent de se présenter que ce soit à l'écrit ou à l'oral.



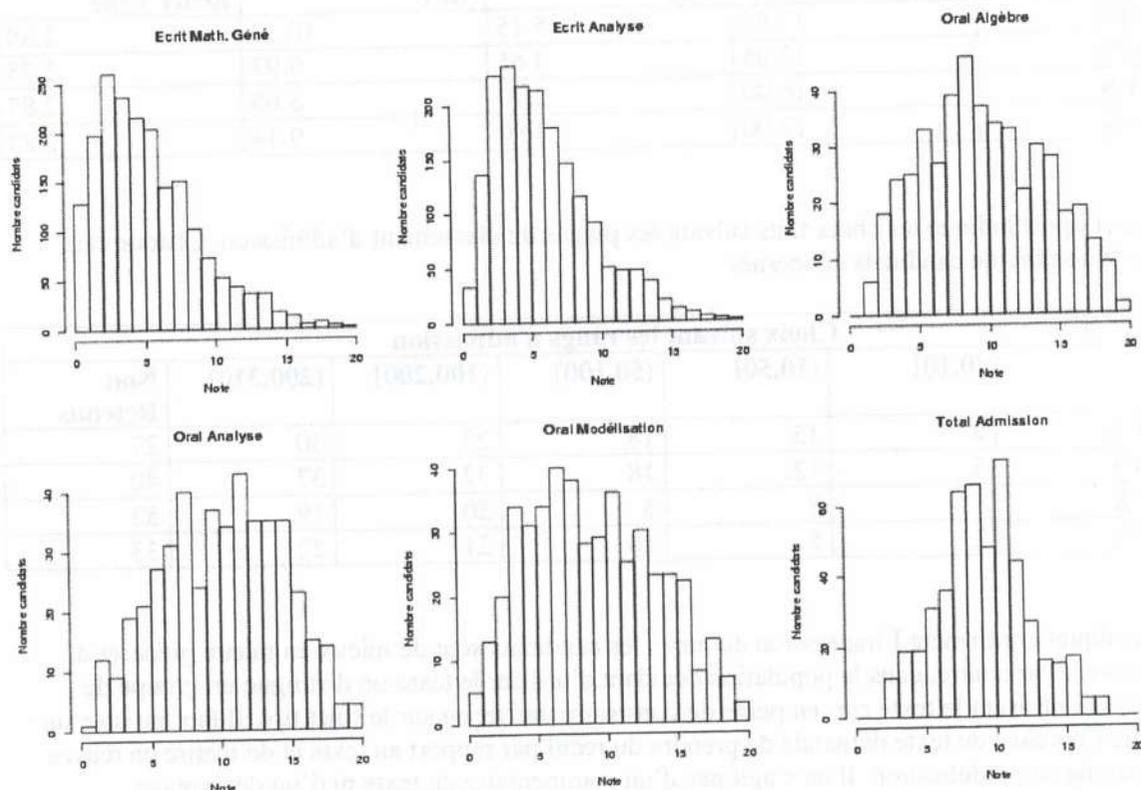
	Inscrits	Présents écrit	Admissibles	Présents oral	Admis
<b>Hommes</b>	1793	1208	359	329	216
<b>Femmes</b>	870	620	137	131	94
<b>Total</b>	2663	1828	496	460	310
<b>Taux de Succès (% admis)</b>					
<b>Hommes</b>	12%	18%	60%	66%	
<b>Femmes</b>	11%	15%	69%	72%	
<b>Total</b>	12%	17%	63%	67%	
<b>% Réussite jusqu'à cette étape par rapport aux inscrits</b>					
<b>Hommes</b>		67%	20%	18%	12%
<b>Femmes</b>		71%	16%	15%	11%
<b>Total</b>		69%	19%	17%	12%
<b>Abandons (% des Inscrits ou des admissibles)</b>					
<b>Hommes</b>		33%		8%	
<b>Femmes</b>		29%		4%	
<b>Total</b>		31%		7%	

Concernant l'âge, les statistiques confirment que la grande majorité des agrégés est recrutée à l'issue de sa formation initiale.

## Notes recueillies aux épreuves

Toutes les notes citées dans ce paragraphe sont sur 20 points. Les statistiques ci-après ont été établies sur la base des candidats présents aux épreuves.

Épreuve	Note Minimum /20	Note Maximum /20	Note Moyenne /20	Écart Type
Écrit Math. Généré	0.25	20.00	5.20	3.59
Écrit Analyse	0.25	20.00	5.80	3.47
Oral Algèbre	1.00	19.50	9.53	4.23
Oral Analyse	0.50	19.25	9.94	4.23
Oral Modélisation	0.25	20.00	8.81	4.50
Total Admission	2.65	17.85	9.20	3.19



La répartition des notes est résumée la table des déciles ci-après

Épreuve	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100 %
Écrit Math. Généré	1.25	2.00	2.75	3.50	4.50	5.50	6.50	8.00	10.25	20.00
Écrit Analyse	2.00	2.25	3.50	4.25	5.25	6.00	7.00	8.50	10.75	20.00
Oral Algèbre	3.75	5.50	7.00	8.00	9.25	10.50	12.00	13.75	15.50	19.50
Oral Analyse	4.30	6.00	7.25	9.00	10.00	11.50	12.50	14.00	15.25	19.25
Oral Modélisation	3.00	4.50	6.00	7.00	8.50	10.00	11.25	13.00	15.00	20.00
Total Admission	5.18	6.55	7.50	8.50	9.05	10.00	10.73	11.65	13.53	17.85

## Épreuve de Modélisation

Pour l'épreuve de modélisation, plusieurs choix sont possibles :

- À l'inscription, l'option « Calcul Scientifique » ou « Probabilités et Statistiques »,
- Durant la préparation le candidat choisit entre texte et leçon après avoir pris connaissance du libellé et du texte complet.

Statistiques des notes de modélisation sur 20 suivant la modalité retenue				
	Max	Min	Moy	Écart Type
Leçon CS	18.75	2.25	10.13	4.41
Leçon PS	19.25	0.25	9.16	4.21
Texte CS	19.00	0.25	8.10	4.88
Texte PS	20.00	0.25	7.44	4.15
Statistiques des totaux d'admission sur 20 suivant la modalité retenue				
	Max	Min	Moy	Écart Type
Leçon CS	17.55	5.15	10.18	2.89
Leçon PS	17.85	4.65	9.97	2.75
Texte CS	16.00	2.70	8.65	2.87
Texte PS	17.00	3.90	9.44	2.85

La table ci-après indique les choix faits suivant les plages du classement d'admission. Chaque case indique le nombre de candidats concernés.

Choix suivant les rangs d'admission						
Rangs	(0,10]	(10,50]	(50,100]	(100,200]	(200,310]	Non Retenus
Leçon CS	2	15	18	23	30	27
Leçon PS	5	12	18	37	37	40
Texte CS	1	8	5	20	19	52
Texte PS	2	5	10	21	22	33

Ces statistiques confirment l'impression du jury : les candidats sont de mieux en mieux préparés à cette épreuve. Par contre, dans la population décidant d'utiliser le texte on distingue un groupe de candidats qui utilisent le texte car en peine de construire une leçon sur le sujet tiré. Il faut insister sur le fait que l'épreuve de texte demande de prendre du recul par rapport au texte et de mettre en œuvre une démarche de modélisation. Il ne s'agit pas d'un commentaire du texte ni d'un décryptage approximatif. En conséquence, la préparation de cette épreuve demande aussi bien d'en maîtriser le programme que d'avoir une expérience de la démarche de modélisation.

# Organisation des épreuves orales

(Session de 2001)

## Épreuves orales d'Algèbre et Analyse

Les modalités, nouvelles en 2000, ont donné entière satisfaction cette année aussi. Elles sont décrites ci-après de manière détaillée, de façon à rendre compte précisément du concours 2001. Les évolutions proposées ci-dessous pour les sessions à venir concernent surtout la première partie et l'utilisation globale du temps de parole.

### Modalités

À l'issue de la période de préparation, le jury fait procéder à la photocopie des plans préparés par les candidats. Ces derniers sont manuscrits, comportent 3 pages A4 au maximum et peuvent être complétés par des planches de figures. Le candidat peut utiliser sa copie du plan pendant l'épreuve, et pourra utiliser les notes manuscrites produites pendant la préparation pendant la phase « Argumentation du plan ».

L'épreuve s'organise en 3 temps, prévus pour une durée de 15 minutes chacun.

### Première partie : le plan

Le candidat est convié à utiliser son temps de parole (10 minutes environ) pour présenter, argumenter et mettre en valeur son plan. Le plan d'étude n'est ni une énumération de paragraphes, ni un exposé complet avec développement des démonstrations. Il définit avec précision les notions introduites, donne les énoncés complets des résultats fondamentaux, cite des exemples et des applications.

Il importe que le candidat insiste sur les articulations principales de son plan et explique les choix qui ont guidé à son élaboration. Après un exposé introductif, le candidat doit reprendre le plan point par point, lire et commenter les définitions et résultats principaux. En gérant au mieux le temps d'exposé, il faut mettre en perspective les méthodes, outils et résultats de la leçon. Il s'agit d'une épreuve orale, le plan écrit est un support à l'expression ; il rend inutile la recopie in extenso du plan au tableau, mais doit être lu, éventuellement complété par des remarques. Les compléments se font au niveau de détail du plan, il ne s'agit pas de développements techniques. Par contre, les exemples significatifs et applications sont appréciés ; l'usage du tableau pour les exposer et les illustrer par des dessins est recommandé.

Le temps restant permet un dialogue avec le jury pour préciser certains aspects du plan, développer son argumentation. Les questions techniques relatives au plan sont reportées dans la troisième partie.

### Seconde partie : le développement

Le candidat soumet au jury une liste de plusieurs points (2 au minimum) qu'il propose de développer. Le jury choisit parmi ces points le thème d'un exposé qui peut être soit la démonstration d'un théorème, soit la présentation d'un exemple significatif, soit le développement détaillé d'une partie délimitée du plan. La clarté de cet exposé, l'aisance et la sûreté avec lesquelles il est présenté constituent un facteur important d'appréciation.

La pertinence de tous les développements proposés et leur adéquation au sujet est essentielle. Les candidats veilleront à proposer des développements qui permettent de mettre en valeur leur maîtrise technique, sans excéder leur capacité à en faire un exposé clair et complet dans le temps imparti.

Le candidat dispose de 10 à 15 minutes pour ce développement détaillé, qui doit comprendre toutes les explications nécessaires à la compréhension du jury. Le candidat peut adopter un rythme rapide, mais on s'attend à ce qu'il expose sans le support de notes. L'exposé technique doit être complet, sans suppression d'étapes intermédiaires, ni report d'argumentation technique dans des résultats ad hoc admis. Si des explications s'avèrent nécessaires à la compréhension du jury, elles devront être données séance tenante, sans extension de la durée totale d'exposé.

### **Troisième partie : questions et dialogue**

L'exposé est suivi d'une discussion au cours de laquelle le jury s'assure de la solidité des connaissances du candidat sur les questions abordées dans le plan et dans l'exposé, et éventuellement sur tout autre point en rapport avec le sujet et figurant au programme de l'oral. Un ou plusieurs exercices peuvent être proposés par le jury.

Durant cette partie, les exercices et questions posées permettent d'évaluer les réactions et capacités techniques des candidats dans un champ vierge. Le candidat doit donc s'attendre à ce qu'un dialogue s'établisse, lui permettant de profiter de suggestions si le besoin apparaît au jury. Il peut adopter un style moins formalisé que dans le développement, s'appuyer sur le plan ; la priorité est ici à l'élaboration des idées, à la méthode d'appréhension des problèmes mathématiques.

## **Épreuve orale de Modélisation**

### **Généralités**

L'utilisation machine est obligatoire. Ceci signifie que les candidats doivent faire usage de logiciels pour illustrer ou motiver les modèles mathématiques. La sanction de cette obligation est que l'absence ou la faiblesse d'illustration informatique est prise en compte dans l'évaluation.

Le jury souhaite que les aspects relatifs à la modélisation soient davantage développés. Ceci requiert que les candidats s'exercent à associer des modèles illustratifs aux sujets de leçon et au programme de l'épreuve.

Comme les années précédentes, le programme de tronc commun doit être maîtrisé par tous les candidats. Ainsi, des textes s'appuyant sur ce programme peuvent être proposés, et le jury peut interroger sur ce programme indépendamment de l'option choisie.

### **Modalités de l'épreuve orale**

Les modalités d'interrogations ont été les mêmes que les deux années antérieures. L'épreuve de modélisation n'est pas organisée comme celles d'Algèbre et d'Analyse. L'utilisation du temps d'exposé est plus libre pour le candidat. Les recommandations ci-après, déduites de l'expérience de trois sessions, correspondent aux attentes du jury.

- Dès le début, le candidat doit indiquer l'organisation générale de l'exposé, les illustrations informatiques prévues, séparées ou intégrées à l'exposé. Ceci est fait verbalement de façon succincte. Il indique, pour chaque partie de l'exposé, les démonstrations mathématiques qui ont été préparées pour être développées in extenso.
- Dans le cas d'une leçon, l'exposé sera centré sur la démarche générale, comprenant outre l'élaboration du sujet mathématique, la discussion d'une ou plusieurs applications en modélisation, et les illustrations par simulation informatique. Le développement détaillé de résultats mathématiques pourra être reporté à la fin de l'exposé, à la discrétion du jury.

Les applications de modélisation sont choisies par le candidat et doivent correspondre à un thème applicatif du programme. Le jury n'exige pas la connaissance extensive de ces

thèmes, mais le candidat doit être en mesure d'expliquer l'objet du modèle choisi dans des termes simples, en utilisant la culture générale scientifique du niveau « Terminale Scientifique ». Les résultats obtenus par l'étude mathématique seront ensuite exprimés dans les termes du modèle, en soulignant leur pertinence et leurs limitations. L'exigence vis-à-vis des aspects de modélisation s'est vue confirmée par une importance accrue dans la notation.

Une bonne organisation du temps d'exposé consacre approximativement : 20 minutes à l'exposé initial, 20 minutes à l'approfondissement ou à la discussion détaillée du modèle et des illustrations, 20 minutes restant disponibles pour le dialogue avec le jury.

Le jury intervient librement après l'exposé initial, pour demander des précisions, approfondir la discussion mathématique ou du modèle. Les illustrations informatiques sont également l'objet d'une investigation par le jury, les critères essentiels étant l'adéquation au sujet traité et la maîtrise du candidat.

- Dans le cas d'un texte, il est souhaitable que le candidat ne se contente pas d'une paraphrase du document, mais construise un exposé à partir de tout ou partie de la monographie. Cet exposé peut faire usage de notes personnelles préparées par le candidat.

Ceci doit couvrir : l'exposé synthétique du problème de modélisation et de la démarche mathématique, le développement des outils mathématiques correspondants, la mise en œuvre des logiciels pour obtenir une information sur le modèle, le retour critique sur la pertinence du modèle et des résultats mathématiques.

Ici aussi, les aspects non mathématiques du sujet modélisé doivent être compris en se plaçant au niveau de la culture générale scientifique d'une classe de terminale.

Le candidat doit s'attendre à ce que 20 minutes de l'heure soient consacrées à un dialogue avec le jury. Suivant le cas, ce temps pourra être utilisé pour vérifier les connaissances du programme ayant rapport avec le texte ou pour approfondir son exploitation.

## Modalités applicables pour la session 2002

Les modalités sont essentiellement les mêmes que pour la session 2001, et n'ont été remaniées que sur les points suivants :

- Épreuves orales d'algèbre et d'analyse :
  - première partie, le plan.
  - globalisation du temps consacré au dialogue avec le jury
- Epreuve de modélisation :
  - Temps consacrés au dialogue avec le jury
  - Commentaire sur la démarche de modélisation

On rappelle *in extenso* ci-après la partie modifiée pour faciliter leur analyse par les candidats et les préparations. Les modalités applicables pour l'épreuve de Modélisation sont essentiellement inchangées et apparaissent donc ci-dessus. A côté de modifications mineures touchant à l'organisation des temps de parole et d'interaction avec le jury, nous faisons ci-après quelques commentaires.

### Épreuves orales d'Algèbre et Analyse

A l'issue de la période de préparation, le jury fait procéder à la photocopie des plans préparés par les candidats. Ces derniers sont manuscrits, comportent 3 pages A4 au maximum et possèdent une

marge de 1cm sur tous les cotés. Les plans peuvent être complétés par des planches de figures. Le candidat peut utiliser sa copie du plan pendant l'épreuve et pourra utiliser les notes manuscrites produites durant la préparation, pendant la phase « argumentation et présentation du plan ».

Le plan écrit n'est ni une énumération de paragraphes, ni un exposé complet avec développement des démonstrations. Il définit avec précision les notions introduites, donne les énoncés complets des résultats fondamentaux, cite des exemples et des applications. Le plan doit être maîtrisé, c'est à dire que les résultats exposés doivent être compris ainsi que son organisation d'ensemble. Il est souhaitable que le candidat connaisse dans leurs grandes lignes les démonstrations des résultats figurant au programme du concours : le jury pourra appliquer ce critère pour évaluer la maîtrise du plan.

L'épreuve s'organise en 3 temps, prévus pour une durée totale de 50 minutes.

### **Première partie: le plan**

Le candidat est convié à utiliser son temps de paroles, 8 à 10mn maximum, pour présenter, argumenter et mettre en valeur son plan.

Il s'agit d'une épreuve orale, il est inutile de recopier au tableau le plan, dans la mesure où le jury en possède une copie. Il est souhaitable que le candidat utilise son temps de parole pour expliquer les articulations principales de son plan. Il peut faire un bref exposé introductif et devra ensuite commenter les résultats principaux, les outils développés et mettre en perspective les méthodes. Il peut être utile de consacrer du temps à un exemple pertinent qui éclaire la problématique de la leçon, à faire usage du tableau pour illustrer ses propos. La présentation et la justification orale du plan sont des points importants d'appréciation.

Les détails techniques, s'ils sont clairement écrits dans le plan, pourront ne pas être repris oralement. Il est préférable de viser à une synthèse maîtrisée.

S'instaure ensuite une discussion sur le plan pendant 5 à 10 minutes. Ce dialogue permet de préciser certains aspects du plan, de développer l'argumentation et de justifier ses choix. C'est un élément important d'appréciation pour le jury qui profitera des échanges pour s'assurer de la maîtrise des notions mises en avant.

### **Deuxième partie: le développement**

Le candidat soumet au jury une liste de plusieurs points (2 au minimum, mais 3 sont appréciés) qu'il propose de développer. Le jury choisit parmi ces points le thème d'un exposé qui peut être soit la démonstration d'un théorème, soit la présentation d'un exemple significatif, soit le développement détaillé d'une partie délimitée du plan. La clarté de cet exposé, l'aisance et la sûreté avec lesquelles il est présenté constituent un facteur important d'appréciation

La pertinence de tous les développements proposés, leur adéquation au sujet et leur intérêt technique sont des éléments essentiels de la notation. Le jury refusera d'avantager par son choix de développement le candidat qui a concentré sa préparation sur un seul développement substantiel et intéressant, par rapport à ceux qui ont réellement préparé les 2 ou 3 développements demandés.

Les candidats veilleront à proposer des développements qui permettent de mettre en valeur leur maîtrise technique, sans excéder leur capacité à en faire un exposé clair et complet dans le temps imparti.

Le candidat dispose de 10 à 15mn pour ce développement détaillé, qui doit comprendre toutes les explications nécessaires à la compréhension du jury. Il ne doit en aucun cas dépasser le temps imparti. Le candidat peut adopter un rythme rapide, mais ne doit pas perdre sciemment son temps. On s'attend à ce que le candidat expose sans le support de ses notes (sauf exception éventuelle sur les énoncés très techniques).

L'exposé doit être complet, sans suppression d'étapes intermédiaires, ni report d'argumentation technique dans des résultats ad hoc admis. Le jury peut intervenir durant le développement pour une précision, une correction ou une justification. L'intervention éventuelle du jury ne donne pas lieu à une extension de la durée totale de l'exposé.

Au terme du développement le jury peut poser des questions sur l'exposé pour s'assurer de la compréhension du sujet abordé.

### **Troisième partie: questions et dialogue**

L'exposé est suivi d'une discussion au cours de laquelle le jury s'assure de la solidité des connaissances du candidat sur les questions précédemment abordées (plan, exposé) ou sur tout autre point en rapport avec le sujet et figurant au programme de l'oral. Un ou plusieurs exercices peuvent être proposés par le jury.

Durant cette partie, les exercices et questions posés permettent d'évaluer les réactions et capacités techniques des candidats dans un champ vierge. Le candidat doit donc s'attendre à ce qu'un dialogue s'établisse, lui permettant de profiter de suggestions si le besoin apparaît au jury. Il peut adopter un style moins formalisé que dans le développement, s'appuyer sur le plan: la priorité est ici à l'élaboration des idées, à la méthode d'appréhension des problèmes mathématiques.

### **Globalisation du temps de dialogue avec le jury**

Le jury pourra utiliser les temps réservés au dialogue avec le candidat comme il l'entend, soit en suivant verbatim les indications ci-dessus ( 5 à 10 minutes à la conclusion du plan, 15 minutes dans la troisième partie), soit en regroupant différemment les périodes consacrées aux questions. La notation tient compte des qualités évaluées au cours de ces dialogues et non d'une répartition stricte par période.

### **Épreuve orale de Modélisation**

Les modalités sont essentiellement identiques à celles de la session 2001, exposées ci-devant. Elles ne sont donc pas reproduites ici, où ne figurent que des ajustements et des commentaires.

### **Organisation temporelle :**

Afin de réserver suffisamment de temps au dialogue avec le jury il est souhaitable que les candidats prévoient les durées :

- Exposé : 25 à 30 minutes
- Illustrations informatiques : 10 minutes
- Dialogue avec le jury : 15 minutes

Il ne s'agit pas de phases séquentielles, le candidat étant libre de placer les illustrations informatiques comme il le souhaite. Le jury est également susceptible de questionner le candidat comme il le souhaite après le premier quart d'heure d'exposé.

### **Commentaires**

On se doit d'insister sur les points suivants :

- **Démarche de modélisation** : Les candidats doivent se préparer à cette épreuve en comprenant que l'on attend d'eux une démarche scientifique de modélisation mathématique. Le jury ne recherche pas une modélisation mathématique avancée faisant usage de techniques dont l'enseignement ne débute qu'en troisième cycle universitaire. Il souhaite au contraire voir les mathématiques au programme utilisées pour cette étude. Le

fait que le résultat obtenu soit imparfait et que sa validation par rapport à l'expérience dénote des insuffisances est une motivation à aller plus loin, en dehors du cadre du concours.

La démarche de modélisation que nous souhaitons voir mettre en œuvre comporte : présentation d'un problème « concret », présentation ou construction d'un modèle, étude mathématique du modèle, validation et critique des résultats obtenus.

- **Techniques mathématiques** : Le candidat doit organiser son exposé pour qu'il comporte au moins l'énoncé et la démonstration d'un résultat mathématique. Ceci permet au jury d'évaluer la maîtrise des connaissances mathématiques. Les critères de qualité sont alors les mêmes que pour le développement dans les deux autres épreuves orales : clarté et articulation des énoncés, solidité de la preuve, précision<sup>3</sup>. Une dizaine de minutes pourra utilement être consacrée à ce point.

## Sessions ultérieures

### Utilisation exclusive des textes pour l'épreuve orale de Modélisation

Il est dans l'intention du jury de modifier les modalités de l'épreuve de modélisation pour qu'elle se déroule obligatoirement en partant d'un texte de modélisation, à partir de la session 2003. Ceci requiert que les nouvelles modalités fassent l'objet de publications rectificatives au B.O.E.N. et au J.O. Le jury proposera aux autorités compétentes ces nouveaux textes avant le 15/3/2002.

### Modifications réglementaires

Les modifications porteront sur :

- Remise en forme du programme de l'épreuve de modélisation. Le rôle de ce programme est maintenant d'indiquer les connaissances requises pour cette épreuve, en sus de celles au programme des épreuves écrites. Le jury n'effectue pas une évaluation directe de ces connaissances, mais évalue l'aptitude des candidats à exploiter un texte de modélisation mathématique. D'une manière générale cette remise en forme ira dans le sens d'un allègement et d'une plus grande focalisation.
- Précision concernant les connaissances non mathématiques. L'épreuve et le texte ayant pour but l'étude d'un modèle mathématique intervenant dans une situation concrète, il est naturel que le texte décrive une telle situation ou interviennent des concepts extra mathématiques (Physique, économie, etc...). Il sera indiqué que les connaissances de ce type requises pour aborder l'étude des textes soumis aux candidats correspondront au baccalauréat scientifique.
- Les thèmes applicatifs seront supprimés. Leur rôle était essentiellement de fournir un cadre aux candidats dans lequel rechercher des situations de modélisation mathématique pour illustrer les leçons. Ceci va dans le sens de l'interprétation du rôle de ces thèmes par les jurys précédents : il ne s'agissait en aucun cas de favoriser des formations complémentaires spécialisées que seules certaines préparations sont à même de mettre en place. Le jury confirme son intention de faire évoluer les textes suffisamment rapidement pour éviter que l'épreuve ne prenne un caractère convenu et artificiel. L'épreuve a pour but d'évaluer les candidats sur leur aptitude à mettre en relation leurs connaissances mathématiques et une exploitation de modélisation qui reste d'actualité.

<sup>3</sup> Par exemple bonne utilisation des quantificateurs et d'énoncés mathématiques formalisés.

## Commentaires

L'épreuve sur texte n'est en aucun cas une épreuve de commentaire de texte. Il est demandé au candidat de construire un exposé en partant du texte. Il s'agit obligatoirement d'un exposé pédagogique de modélisation mathématique. Le texte peut être utilisé avec une grande liberté : le candidat est libre d'utiliser tout ou partie du texte, ce qui est rappelé systématiquement aussi bien dans les préambules des textes que dans les rapports de jury.

Pour se préparer à cette épreuve, il convient :

- De bien connaître et de maîtriser le programme complémentaire de l'épreuve. Celui-ci est une liste de techniques mathématiques utilisées en modélisation mathématique ou à l'appui de cette démarche.
- D'apprendre à dégager les idées principales, à les exposer avec concision et précision,
- De s'être entraîné à l'exploitation d'un texte mathématique simple : preuves à compléter, retrouver les résultats utilisés, test des hypothèses et des conséquences sur des situations limites,....
- D'être en mesure de montrer l'apport des résultats mathématiques : condition d'application effective, portée et interprétation des résultats, limitations éventuelles.
- D'apprendre à organiser un exposé pédagogique en partant du texte : sélection des éléments utilisés, articulation, mise en perspective. Cet objectif requiert de prendre du recul par rapport au texte, à l'exploiter dans une démarche motivée et non à le paraphraser par une lecture linéaire. Le fait que l'épreuve comporte la découverte par le candidat d'un texte nouveau et sans exploitation en temps limité est pris en compte dans la notation et les critères d'évaluation.

Le jury est conscient de l'effort demandé par la préparation à cette épreuve. Il permet aux candidats de développer au cours de leur cursus universitaire les aptitudes requises pour utiliser au mieux les méthodes de pédagogie active (TPE, TIPE, technologies de l'information) dans le métier d'enseignant mathématicien.



# COMMENTAIRES DÉTAILLÉS SUR LES ÉPREUVES

## 1. ÉPREUVES ÉCRITES

### 1.1. Mathématiques Générales.

1.1.1. *Objectif du problème.* Le problème se voulait progressif et peu ouvert au grapillage. Il demandait une assimilation en profondeur, notamment de par l'étude d'exemples explicites dans le plan. Précisons au passage que ces exemples ne sont pas là uniquement pour l'esthétique et que le nombre de points qu'il leur est alloué dans le barème est proportionnel au temps conséquent que les candidats devaient y consacrer pour les traiter correctement.

Le but était de classer les candidats selon les critères suivants : on pouvait obtenir une note amenant vers l'admissibilité avec uniquement la première partie mais pas avec beaucoup moins. Les notions qui y sont requises sont basiques et doivent, pour la plupart, pouvoir être exigées. Les candidats visant un bon rang ont dû rajouter l'une ou l'autre entre la deuxième et la troisième partie. La dernière partie donne une application des notions présentées dans un domaine actuel et ne sert qu'à distinguer entre les meilleurs candidats.

La première partie présente l'étude des corps convexes compacts et absorbants. On étudie les jauges associées et on établit le lien entre les normes sur un espace vectoriel réel de dimension  $n$  et les corps convexes compacts, absorbants et symétriques de l'espace euclidien  $\mathbf{R}^n$ . Enfin on montre que la dualité entre espaces normés se traduit en termes de polarité sur les corps convexes. De la sorte une grande partie de la géométrie de ces espaces relève de la géométrie des corps convexes.

La seconde partie repose sur des notions classiques et aboutit à des résultats de F. John, C. Loewner et É. Cartan établis dans les années 1940. La problématique est issue d'une vision géométrique de la dualité, en termes de quadriques et de figures polaires. Cette approche est celle qui fut historiquement prédominante (au XIX<sup>ème</sup> siècle) avant d'être quelque peu oubliée (du moins dans les cursus académiques) depuis quelques dizaines d'années. Un des résultats phares est l'existence d'un unique ellipsoïde de volume maximal inclus dans un corps convexe  $K$  compact absorbant (ellipsoïde de Loewner-John) et, par dualité, d'un unique ellipsoïde de volume minimal contenant  $K$ . Ce résultat a de nombreuses applications dont un cas particulier du résultat d'Élie Cartan affirmant que tous les sous-groupes compacts maximaux d'un groupe de Lie sont conjugués (on s'est intéressé ici, en le reformulant, au cas de  $GL_n(\mathbf{R})$ ). D'autres applications sont développées dans la quatrième partie.

La troisième partie est consacrée au difficile et profond théorème de Brunn-Minkowski. La démonstration présentée ici est l'aboutissement de la tentative naturelle de démonstration par récurrence. Elle s'éloigne finalement assez des notions de convexité et ne peut traiter le cas d'égalité convenablement. Le cas, plus classique, du théorème de Brunn-Minkowski est celui où l'on prend les compacts convexes.

Il s'agit alors en fait d'une inégalité de convexité si l'on fait la remarque que tout convexe ouvert borné  $U$  est image de  $\mathbf{R}^n$  par un difféomorphisme  $u$  de la forme  $u = df$  pour une fonction  $f$  de classe  $C^2$  sur  $\mathbf{R}^n$  et strictement convexe (on peut par exemple prendre  $f : x \mapsto \log(\int_U \exp(\langle x, y \rangle) dy)$ ).

La dernière partie est consacrée à l'étude de la quantité  $\text{vol}(K)\text{vol}(K^*)$  pour  $K$  un corps convexe compact absorbant et symétrique. Il a été conjecturé par K. Mahler que cette quantité est toujours supérieure à la quantité obtenue pour les parallélépipèdes, i.e.

$$\text{vol}(K)\text{vol}(K^*) \geq \frac{4^n}{n!}.$$

Ce problème est encore ouvert. Le problème donne la minoration de R. Bambah, obtenue grâce à l'ellipsoïde de Loewner-John. L'approche de K. Mahler était basée sur les parallélépipèdes. On peut démontrer qu'il existe toujours un parallélépipède inclus dans  $K$  de volume supérieur à  $\text{vol}(K)/n^n$  et un autre contenant  $K$  de volume inférieur à  $n! \text{vol}(K)$ . En utilisant cette dernière remarque on obtient

$$4^n \geq \text{vol}(K)\text{vol}(K^*) \geq \frac{4^n}{(n!)^2}.$$

La meilleure majoration a été obtenue par L. Santaló via la géométrie différentielle. Le résultat est que le maximum du produit volumétrique est obtenu pour les ellipsoïdes, et uniquement pour ceux-ci. La fin du problème est consacré à la preuve, par J. Saint Raymond, de ce résultat. En termes d'espaces vectoriels normés, on peut introduire, pour un tel espace  $E$ , la caractéristique de Santaló :

$$\left( \frac{\text{vol}(K)\text{vol}(K^*)}{\text{vol}(B_n)^2} \right)^{1/n}$$

où  $n$  est la dimension de  $E$ ,  $K$  sa boule unité et  $B_n$  la boule unité euclidienne de dimension  $n$ . Cette caractéristique est donc majorée par 1 et la valeur 1 n'est atteinte que pour les espaces euclidiens.

La démonstration utilise un corollaire de l'existence de l'ellipsoïde de Loewner-John : les ellipsoïdes sont caractérisés par le fait que, pour toute direction de droite, il existe une symétrie hyperplane le long de cette direction qui préserve l'ellipsoïde (insistons sur le fait que la symétrie n'est pas orthogonale a priori).

La fin du problème introduit la distance de Banach-Mazur sur les corps convexes compacts symétriques. Le résultat de John, donné par la question IV.1, est que la distance maximale d'un tel corps à la boule unité euclidienne est  $\sqrt{n}$ . C'est un problème ouvert de maximiser la distance de Banach-Mazur à un cube. On sait simplement que le maximum est supérieur à  $\sqrt{n} \log(n)$ , par un résultat de S. Szarek.

Signalons que la conjecture de Mahler a été vérifiée par lui-même en dimension 2. J. Saint Raymond a obtenu un résultat en dimension quelconque pour les espaces normés ayant la propriété de posséder une base pour laquelle les projections sur les axes de coordonnées sont bicontractantes (propriété vérifiée par tous les espaces normés de dimension 2) et a décrit une classe d'espaces atteignant la borne inférieure. Il s'agit d'espaces obtenus comme sommes, au sens  $l^1$  ou  $l^\infty$ , d'espaces  $l^1$  ou  $l^\infty$  (espaces de Lima). Enfin S. Reisner a démontré la conjecture dans la classe des zonoïdes.

Néanmoins le cas général est encore ouvert. Un résultat de J. Bourgain et V. Milman assure qu'il existe une constante universelle minorant la caractéristique de Santaló, mais la démonstration n'est en rien élémentaire. Ce résultat a de nombreuses applications théoriques (géométrie des nombres, analyse harmonique) mais également en géométrie algorithmique. On peut par exemple s'en servir pour démontrer que, pour tout algorithme en temps polynomial calculant un minorant et un majorant du volume de corps convexes compacts, le rapport entre ces deux quantités ne peut pas être garanti inférieur à  $(cn/\log(n))^n$ , pour une constante  $c$  proportionnelle à la caractéristique de Santaló minimale.

**Bambah:** *Polar reciprocal bodies, Proceedings of the Cambridge philosophical society* 51, 377-378 (1954).

**Barany-Füredi:** *Computing the volume is difficult, Discrete and computational geometry* 2, 319-326 (1987).

**Bourgain-Milman:** *New volume ratio properties for convex symmetric bodies in  $\mathbf{R}^n$ , Inventiones mathematicæ* 88, 319-340 (1987).

**Grötschel-Lovasz-Schrijver:** *Geometric algorithms and combinatorial optimization, Springer, 1988.*

**Mahler:** *Ein Übertragungsprinzip für Konvexe Körper, Casopis Matematiky a Fysiky* 68, 93-102 (1939).

**Saint Raymond:** *Sur le volume des corps convexes symétriques, Séminaire d'initiation à l'analyse de Paris VI, exposé 11 (5/2/1981).*

**Santaló:** *Un invariante afin para los cuerpos convexos del espacio de  $n$  dimensiones, Portugaliae mathematica* 8, 155-161 (1949).

### 1.1.2. Première partie: Généralités.

Question 1. L'unique difficulté est de bien manier les quantificateurs. Il est important d'insister ici sur le fait que l'agrégation est un concours de recrutement d'enseignants et, par conséquent, que le jury attache de l'importance à la rédaction. Même une question facile appelle un effort : celui de montrer avec clarté pourquoi elle ne recèle aucune difficulté ! On a constaté ici de nombreuses imprécisions et l'oral n'a pas toujours dissipé ces manques : il est parfois difficile d'obtenir d'un candidat un énoncé proprement quantifié et un sens clair. Insistons sur le fait que les quantificateurs s'emploient au début des phrases mathématiques et ont pour vocation de présenter les objets utilisés dans la suite de la phrase, en les quantifiant.

Question 2. Il s'agit ici encore de bien manier les définitions. Une différence s'effectue entre les candidats capables de bien manier le raisonnement par équivalence, ceux qui l'affirment (sans convaincre) et ceux qui s'obligent à écrire les deux sens requis. Le jury apprécie l'utilisation du raisonnement par équivalence mais préfère un argument détaillé, à défaut d'être synthétique, à une affirmation du genre "*la réciproque est immédiate*". De telles affirmations ne font gagner aucun point et ont même tendance à pénaliser le candidat, de par le sentiment négatif qu'elles introduisent. Les premières questions (et plus généralement les questions faciles) ne sont pas là pour être écartées d'un revers de main mais pour permettre aux candidats de prendre confiance et de montrer leur maîtrise des mathématiques de ce niveau. Le jury apprécie les réflexes acquis par les candidats lors de leur formation ; ainsi si l'on s'aperçoit trop tard que la méthode de démonstration n'est pas la meilleure, il est maladroit de continuer dans cette direction tout en bâclant la

fin de la démonstration, car c'est montrer que l'on n'a pas réfléchi avant d'écrire. L'agrégation n'est pas un concours de vitesse.

Question 3.a. Il s'agit ici de vérifier les connaissances en topologie. Une erreur standard a été de raisonner ainsi : pour  $x$  non nul,  $I_x$  est l'image réciproque du fermé  $\mathbf{R}^n$  par la fonction continue sur  $\mathbf{R}_+^*$  qui à  $\lambda$  associe  $x/\lambda$ , et est donc fermé. En effet on n'obtient de la sorte que le caractère fermé de  $I_x$  comme sous-ensemble de  $\mathbf{R}_+^*$ .

Question 3.b. Le sens le plus difficile est de montrer l'implication  $j_K(x) < 1$  entraîne  $x$  intérieur à  $K$ . Cette assertion était plus aisée à comprendre grâce à un dessin, que les bonnes copies ont donné.

Question 4.a. Un certain nombre de réflexes sont attendus des candidats. Ici par exemple il est apprécié de remarquer que les objets étudiés sont bien des corps convexes compacts symétriques. Il est à noter ici que la question relative à  $K^*$  se pose effectivement et qu'une lecture du problème permettait de s'assurer que  $K^*$  a bien les propriétés attendues si  $K$  les a. Nous en profitons pour conseiller à tous les candidats de lire le sujet en entier avant d'en entamer la résolution ou, au moins, chaque partie dans son ensemble.

Le cas du disque et du carré sont très élémentaires. Il fallait les traiter avec sobriété mais aussi avec complétude ! Le cas du parallélogramme était donné sans l'indication qu'il faisait référence à la question I.2 et a, de ce fait, stoppé de nombreux candidats. Il s'agissait de voir que les notions étudiées sont affines et non euclidiennes. Ce détail est important pour évaluer la compréhension de la géométrie élémentaire.

Par ailleurs les étudiants rapides ont trop souvent affirmé, à la lumière du carré, que  $K^*$  est le parallélogramme des milieux, montrant de la sorte qu'ils n'ont guère accordé plus d'une minute de réflexion à cette question. Une fois encore les exemples sont là pour prouver qu'une notion est effectivement maîtrisée en profondeur et ne doivent donc pas être traités à la légère.

Question 4.b. À ce stade du problème les candidats doivent être familiers avec les calculs montrant que  $K^*$  est un corps convexe borné ayant  $O$  en son intérieur. Il reste cependant des questions de topologie à surmonter.

Il faut aussi expliquer pourquoi la quantité  $\max\{\langle x, y \rangle \mid x \in K\}$  est bien définie. Ce n'est pas parce que l'énoncé y fait référence que l'existence de ce maximum n'est pas à démontrer. Quand on autorise à omettre une démonstration, cela est souligné dans le texte.

Question 4.c. Cette question est là surtout pour vérifier que les candidats savent se souvenir de leur cours au moment opportun.

Certains ont cherché à ne traiter que le cas de  $K^*$ . L'inégalité triangulaire était en effet plus facile à obtenir. Néanmoins il ne fallait pas oublier de souligner le caractère symétrique de  $K^*$ .

Il y a eu très peu de réponses satisfaisantes à la question ouverte, la plupart des candidats se bornant à rappeler que toutes les normes sont équivalentes sur  $\mathbf{R}^n$ . Il fallait tout de même s'arrêter quelques minutes pour faire le point, chercher à

comprendre la notation  $K^*$  et méditer sur la formule obtenue pour  $j_{K^*}$ . On insistera une fois encore sur l'aspect bénéfique de la lecture complète de l'énoncé. En effet la question suivante était commentée : "un résultat de dualité" et l'on montrait peu après  $(K^*)^* = K$ .

Question 5.a. Il s'agit dans cette question de retrouver un résultat assez classique de projection sur un convexe compact non vide. Cela a certainement été déjà vu en cours, notamment comme préliminaire au théorème de Hahn-Banach (qui n'est pas explicitement au programme mais qui, à en juger par les développements d'oral, est très largement traité au sein des préparations). Le problème ne voulant pas favoriser des connaissances hors-programme, la formulation avait été étudiée pour ne pas permettre d'appliquer directement ce théorème.

Néanmoins de nombreux candidats connaissent bien la propriété de la projection sur un convexe et savent l'utiliser pour montrer que  $H$  sépare  $a$  et  $K$  au sens large. La phase subtile du calcul a, par contre, souvent été occultée. Un dessin aurait pu aider.

Question 5.b. À ce niveau du problème la seule difficulté, mineure, est de démontrer que  $(K^*)^*$  est inclus dans  $K$ .

Question 6. Cette question était plus facile que les précédentes et a été bien réussie par ceux qui l'ont abordée. Néanmoins nous insistons sur la nécessité de lire l'énoncé, et notamment l'introduction. Dans cette question il faut rappeler qu'une application ne saurait être convexe sans que son domaine de définition ne le soit et donc vérifier que  $pr_H(K)$  est convexe.

### 1.1.3. Deuxième partie: Géométrie des formes quadratiques.

Question 1. Cette première question permet de se mettre dans le bain afin d'envisager la seconde partie.

Comme on n'a pas demandé l'unicité de  $B$ , il n'y a aucune difficulté sur cette question qui est essentiellement du cours. On est pourtant surpris sur l'énoncé des théorèmes de réduction ainsi que du peu d'aisance dans les calculs. Il est arrivé fréquemment que la réponse à la seconde partie de la question soit  $A^{-1}B^{-1}$  ou encore  $A^{-1}BA$ , ce qui est à chaque fois la même chose que  $B$ . Enfin, comme toujours dans les questions relativement élémentaires, les étudiants trop rapides négligent la précision du calcul et obtiennent  $B^{-1}$  au lieu de  $B$ .

Question 2. Ici il faut souligner la convexité du domaine de définition de l'application étudiée.

Question 3. C'est une question difficile puisque non guidée. Elle a souvent amené des affirmations péremptoires très pénalisantes pour les candidats. Il est important pour un agrégatif de savoir discerner les questions faciles (qu'il doit traiter de façon concise mais complète), les questions fondamentales (sur lesquels il doit s'attarder afin de prouver sa maîtrise) et les questions difficiles (qu'il vaut mieux ne pas traiter comme des questions triviales).

Ici de nombreuses copies ont affirmé la continuité de la fonction volume sans jamais se poser la question ni de l'espace source (ce qui est très gênant dans ce cas précis), ni de la topologie sur cet espace et en se préoccupant encore moins de donner une

démonstration, ou des éléments de démonstration, de cette assertion. Nous tenons à insister sur le fait qu'une telle attitude pénalise le candidat. Cela a tout simplement pour effet de discréditer les assertions implicites qui ont pu jaloner la copie, faisant passer leur statut de "probablement compris, donc correct" à "certainement non compris, donc faux". Comme par ailleurs la rédaction est rarement parfaite (certes en raison du stress de l'épreuve et du temps limité, mais aussi probablement du manque d'insistance sur ce point au cours des études), cela peut amener une sévère révision à la baisse de la copie.

Question 4. Il faut ici relier tous les résultats précédents. Le jury attend donc une compréhension et, sur cette question non élémentaire, apprécie que soient données au moins des idées. L'étude des cas particuliers est toujours importante et il faut ici ne pas être stoppé par une description affine malgré le mot "isométrie".

#### 1.1.4. *Troisième partie: Théorème de Brunn-Minkowski.*

Question 1.a. Cette première question permet de se mettre dans le bain afin d'envisager la troisième partie. Elle repose sur des inégalités qui doivent avoir été acquises au cours du cursus. Néanmoins peu de copies ont osé aller jusque là. Pourtant les étudiants préférant l'analyse à l'algèbre et à la géométrie auraient pu valoriser leurs aptitudes en choisissant cette partie plutôt que la précédente.

Question 1.b. La question est guidée, mais il ne faut pas avoir peur de manier des indices.

Question 1.c. C'est ici une grosse récurrence et on est en droit d'attendre de la précision et une rédaction propre. Avec la fatigue, une telle rédaction n'est possible que si elle est du domaine du réflexe et a donc été travaillée lors de la préparation. Sur les rares copies qui ont essayé de traiter cette question, cette rigueur n'a jamais été de mise, et c'est dommage.

Question 2. Cette question est bien entendu très délicate et n'a pas été traitée de façon significative. L'important est de se rendre compte qu'on doit approximer les compacts par l'extérieur et appliquer un théorème de type convergence dominée.

#### 1.1.5. *Quatrième partie: Étude de la quantité $\text{vol}(K)\text{vol}(K^*)$ .*

Cette partie n'a pas été traitée de façon significative. Seules les questions 1.b et 2.a ont été abordées. Dans l'ensemble elles le furent avec succès.

La question 1.a était formulée, il faut le reconnaître, de façon brutale. Cela était totalement délibéré, pour deux raisons. La première pour ne pas inciter les candidats stoppés sur une partie précédente à aller flâner sur la quatrième partie : l'essentiel des questions présentes ici sont d'un niveau bien supérieur aux précédentes. La seconde, liée à la première, était d'éviter le fort désagréable grapillage. En tout cas il n'y a pas d'astuce lumineuse pour abrégé les calculs de la question 1.a et elle nécessitait simplement d'avoir l'assurance d'aboutir avec des calculs élémentaires et la capacité de les mener à bien.

## 1.2. Analyse et Probabilités.

L'énoncé faisait découvrir deux méthodes très différentes de résolution pour une équation aux dérivées partielles (plus précisément intégrro-différentielle) intervenant en particulier en Astrophysique dans l'étude des atmosphères stellaires.

La première méthode consistait à transformer le problème en une équation intégrale que l'on peut résoudre par la méthode de Wiener-Hopf.

La seconde méthode consistait à utiliser sur la formulation du problème en équation aux dérivées partielles les estimations a priori dites "d'énergie".

L'énoncé était présenté de façon extrêmement progressive:

- la première partie faisait étudier certaines intégrales à paramètres définissant le symbole de l'équation de Wiener-Hopf étudiée par la suite;
- la seconde partie rappelait quelques notions de base sur la convolution (inégalité de Young pour  $L^1$  et  $L^2$ ) et sur la transformation de Fourier;
- la troisième partie faisait découvrir en détail la méthode de Wiener-Hopf et le problème de Riemann-Hilbert scalaire qui lui est associé;
- la quatrième partie faisait étudier le problème aux dérivées partielles par la méthode d'énergie et établir le lien avec l'équation intégrale de Wiener-Hopf étudiée dans la troisième partie;
- enfin la cinquième partie montrait comment un argument de dualité permettait de représenter la limite à l'infini de la solution du problème de la quatrième partie au moyen d'une fonction (dite fonction  $H$  de Chandrasekhar) calculable par la méthode de la troisième partie.

*Partie I.* La première partie ne faisait appel qu'aux notions les plus élémentaires (étude de la convergence, convergence uniforme ou normale, dérivation sous le signe somme) sur les intégrales à paramètres. Ce qui a peut-être le plus gêné les candidats était que l'on faisait étudier ces intégrales à paramètres dans le plan complexe et qu'ils devaient à plusieurs reprises dans le problème justifier que les fonctions ainsi définies étaient holomorphes dans des domaines très simples (comme par exemples des bandes, ou des demi-plans). Peu de candidats ont énoncé un résultat précis montrant l'holomorphie de telles intégrales, se contentant par exemple de prouver que l'intégrande était holomorphe par rapport au paramètre. Ainsi, dans la question I.2.b), il était essentiel de vérifier que la convergence est normale sur la bande  $|Im z| < 1 - \varepsilon$  ce que la majorité des candidats ne fait pas.

Dans la question I.2.c), beaucoup ne reconnaissent pas la transformation de Fourier.

Dans des démonstrations très simples (par exemple les intégrations par parties itérées au I.1.b), les quelques étapes intermédiaires ne sont souvent pas mentionnées, ce qui réduit parfois la réponse à la question à une réécriture de son énoncé ; même si le principe de preuve est simple, quelques mots d'explication se justifient ; leur absence peut pénaliser le candidat. Cela se révèle vrai pour toutes les questions "faciles". Mentionner des faits très simples, mais pourtant capitaux, tels que

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{|t^2 + z^2|^2} > 0$$

au I.3.b) est une chose qui manque fréquemment. Il convient également de vérifier soigneusement les hypothèses requises, telle la décroissance de  $\alpha \mapsto \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2 + \alpha}$ .

Cette première partie, tout à fait abordable par un candidat s'étant préparé sérieusement au concours, a été assez largement traitée dans l'ensemble.

*Partie 2.* La deuxième partie faisait appel aux notions de base de la théorie de l'intégration: théorème de Fubini (rappelé dans l'énoncé), transformation de Fourier sur  $L^1$  et  $L^2$ , convolution...

Les justifications accompagnant l'application du théorème de Fubini montrent que de nombreux candidats ont du mal à maîtriser la mesurabilité dans  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ . Au début de cette partie, le qualificatif de "borélien" semble avoir perturbé les candidats ; se ramener au contexte du théorème de Fubini rappelé dans les préliminaires leur a manifestement posé problème. On attend au II.2.b) (question pratiquement de cours) un raisonnement parfait et en tout cas autre que formel.

La question II.3 est traitée dans les cours de théorie de l'intégration, et a été assez bien traitée par les candidats qui l'ont abordée. La notion de singularité isolée éliminable pour une fonction holomorphe (II.3.a) n'est pas évoquée. Souvent d'ailleurs, on sent des réticences à manier la variable complexe plutôt que la variable réelle – par exemple au I.3.a), pour lire  $1 - \hat{K}(z) \sim z^2/3$  en complexe et non en réel.

Bien souvent à la question II.4, les candidats n'ont pas perçu de différence entre le cas  $f \in L^1$  et le cas  $f \in L^2$  ; le cas particulier de la formule d'inversion de Fourier ( $f \in L^1$  et  $\hat{f} \equiv 0$  impliquent  $f = 0$  presque partout) n'est souvent pas mentionné ; le cas  $f \in L^2$  est traité comme  $f \in L^1$  par le biais d'une formule d'inversion plus formelle que mathématiquement justifiée. Il est clair (cela se verra aussi à l'oral) que la compréhension de la transformation de Fourier de  $L^2$  dans  $L^2$  pose problème aux candidats. Pour montrer  $L^1 * L^2 \subset L^2$  au II.3.a), certains candidats ont utilisé avec succès des méthodes originales (dédoublément des variables par exemple) plutôt que l'indication de l'énoncé.

Cette partie, sans difficulté insurmontable pour les candidats sérieux, a également été assez largement abordée. Cependant, peu de candidats ont abordé les questions 4 et 5.

*Partie 3.* La troisième partie commençait par des questions de prolongement holomorphe de transformées de Fourier qui ne présentaient pas plus de difficultés à cet égard que la première partie. Toutefois on arrivait assez rapidement à des questions plus techniques de calcul de résidus et de déformation de contours qui ont été assez sélectives: seuls les meilleurs candidats ont brillé dans cet exercice.

Le recours à la formule de Cauchy sur les rectangles dans la partie III (III.4.c) n'a pratiquement été abordé (et encore de manière très rapide et peu soignée) que dans les très bonnes copies. La question III.7.a), tournant de la partie III au niveau des difficultés puisqu'il y était nécessaire de reprendre avec soin l'estimation de

$$\left| \int_{-\infty+i\alpha}^{+\infty+i\alpha} \frac{\ln A(t)}{t - \xi - i\beta} dt \right|$$

moins grossièrement qu'au III.6.b), a constitué pour tous les candidats, y compris les meilleurs, la pierre d'achoppement de cette partie III.

*Partie 4.* Les premières questions de la quatrième partie ont été abordées – avec assez peu de succès – par un assez grand nombre de candidats. Malheureusement, la majorité d’entre eux ne maîtrisaient absolument pas les techniques les plus élémentaires (par exemple de dérivation sous le signe d’intégrale). Par ailleurs, les questions posées dans l’énoncé débouchaient assez vite sur des raisonnements demandant un peu d’astuce, qui ont échappé à la très grande majorité des candidats mais ont permis aux meilleurs d’entre eux de se mettre en valeur.

Au IV.1.a), même sous l’hypothèse “ $u$  bornée”, la question était le plus souvent mal traitée (juste de manière formelle). Le recours à un argument formel, sans que le théorème de dérivation sous le signe somme soit convenablement cité, est très fréquent chez les candidats qui ont traité les questions 1 et 2. Les théorèmes classiques de la théorie de Lebesgue (Fatou, convergence monotone, convergence dominée) ne sont le plus souvent pas invoqués alors qu’ils le devraient.

*Partie 5.* La cinquième partie n’a presque pas été abordée.

*Conclusion.* L’impression générale se dégageant de la correction des copies est qu’une grande majorité des candidats est mal à l’aise avec les raisonnements les plus simples portant sur les fonctions holomorphes. Les notions usuelles d’intégration et plus généralement d’analyse réelle semblent mieux maîtrisées.

Dans ce problème long, il fallait se garder de deux excès inverses. Soit se limiter aux deux premières parties en ignorant complètement la suite du problème. Soit vouloir absolument grappiller des points un peu partout. La façon lucide de travailler consiste à avoir une vision d’ensemble du problème en le lisant d’abord complètement, puis de répartir son temps sur les trois ou quatre premières parties car elles peuvent être abordées indépendamment.

## 2. EPREUVES ORALES

**2.1. Généralités.** Les candidats doivent éviter les “impasses” ou une attitude qui pousse à écarter ou à méconnaître certaines leçons ou certains éléments du programme. Ce dernier, qui a subi des allègements successifs et plusieurs remises en forme dans le passé récent est intégralement exigible, aussi bien aux épreuves orales qu’écrites. La liste de libellés de leçons, fournie dans le rapport du jury est une indication de la manière dont le jury a décidé de s’assurer de la maîtrise du programme lors d’une session donnée: elle ne tient pas lieu de programme, et n’en limite pas la portée.

Nous rappelons ci-dessous plusieurs domaines ou méthodes d’approche qui n’ont pas vocation à disparaître ni à tomber en désuétude, en raison de leur importance ou de leur intérêt pédagogique. Ceci conduit le jury à prendre des mesures pénalisant les candidats qui présentent des insuffisances sur ces points. Ces mesures, qui pourront être renouvelées et intensifiées dans les sessions 2002 et au delà, comprennent: augmentation de la fréquence d’apparition, constitution de couplages, interrogation dès que le libellé de leçon le permet, utilisation dans les épreuves écrites. Les domaines concernés sont:

- la géométrie, qu’elle intervienne dans les libellés de leçons ou comme application de résultats plus généraux,

- les notions de probabilités figurant au programme d' "Analyse et Probabilités" des épreuves écrites,
- la combinatoire
- la dualité en algèbre linéaire

Le jury déplore que les candidats pratiquent un cloisonnement excessif entre les disciplines et les épreuves. Ceci conduit à des insuffisances et à l'ignorance de points de vue importants. Par exemple, certains candidats manquent de vision algorithmique sur des thèmes d'algèbre linéaire et polynômiale, d'autres arrivés à l'oral de modélisation, ne paraissent plus dominer des questions élémentaires d'algèbre et d'analyse.

Trop de candidats, qui arrivent avec un plan de bonne qualité et un développement appris, s'avèrent ne pas avoir assimilé les connaissances qu'ils exposent. Le jury est extrêmement vigilant à la maîtrise effective des leçons exposées: l'objectif est de recruter des enseignants qui maîtrisent leur domaine et qui deviendront vite capables d'une démarche pédagogique, de répondre aux questions des élèves, de s'adapter aux besoins de leurs classes.

Le jury a détecté de nombreuses situations dans lesquelles les candidats ont été pénalisés pour avoir reproduit des erreurs ou inexactitudes que l'on retrouve dans les ouvrages qu'ils utilisent. Ces ouvrages peuvent être apportés par les candidats ou présents dans la bibliothèque de l'agrégation. *Il rappelle que l'utilisation des ouvrages se fait sous la responsabilité des seuls candidats, que la présence d'un livre dans la bibliothèque de l'agrégation n'indique pas une quelconque recommandation ou garantie du jury. L'interdiction des livres est pratiquée dans le seul but d'éviter des situations où certains candidats sont avantagés par le fait de disposer d'une information non généralement disponible ou d'un "corrigé" prêt à l'emploi.*

**2.2. Algèbre.** Nos remarques sont centrées autour de "mots clés" et de libellés de leçons pour faciliter la lecture du rapport. L'ordre de la présentation des points ci-dessous n'est pas significatif.

**Géométrie:** Les candidats ne sont pas attirés par la géométrie à laquelle ils semblent préférer des points qui relèvent directement de l'algèbre de base. Parmi les objets de désaffection les plus marqués:

- Coniques
- Utilisation des angles en géométrie
- Exemples de propriétés projectives
- Applications géométriques des déterminants (volume, orientation,...)

Ceci conduit à des insuffisances nombreuses, prive souvent les candidats d'exemples permettant de motiver et d'illustrer la portée de leurs connaissances plus abstraites. Le jury estime que de futurs enseignants en mathématiques doivent mieux connaître la géométrie.

**Groupes:** Les leçons sur ce sujet montrent une meilleure maîtrise que les années passées.

**Corps finis, congruences, nombres premiers:**

**Généralités:** trop de leçons se limitent à un plan type, recopié et mal assimilé. Des questions élémentaires font ressortir des déficiences.

**Applications:** Beaucoup de candidats savent citer la cryptographie à clefs publique R.S.A. Ils pourraient aussi exploiter le domaine des codes correcteurs qui permet d'illustrer une grande partie de l'algèbre linéaire.

**Idéaux:** Certains candidats se croient obligés d'utiliser un plan qu'ils ne dominent pas et qui passe par des considérations sur les anneaux noethériens pour déboucher sur le théorème des zéros de Hilbert. Ceci n'est nullement nécessaire et il est possible de faire de bons exposés en se concentrant sur les exemples d'anneaux cités au programme. Par contre, il conviendrait que les liens entre idéaux et divisibilité ne soient pas ignorés.

**Matrices et Algèbre Linéaire:**

- La leçon "opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes" paraît mieux traitée que les années précédentes. Certains candidats paraissent encore avoir une vue trop cloisonnée du programme pour exploiter leurs connaissances sur ce point dans le cadre de l'épreuve de modélisation (Méthode de Gauss, résolution effective de systèmes,...).
- L'existence d'une épreuve séparée de modélisation ne doit pas conduire les candidats à ignorer les applications et aspects algorithmiques de l'algèbre et de la géométrie. Ainsi, les candidats doivent savoir trouver un système d'équations linéaires décrivant un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^n$  engendré par un nombre fini de vecteurs donnés explicitement, et ce de manière algorithmique.
- La leçon "sous-espaces stables" est distincte de la leçon "réduction en dimension finie".

**Formes Quadratiques:** Le sujet est souvent mal assimilé. Les sources de difficultés les plus fréquentes sont:

- L'articulation entre les résultats généraux et ceux spécifiques à  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{C}$ ,
- Le lien entre formes quadratiques et homomorphismes symétriques sur  $\mathbf{R}$ .

**Polynômes:** Très peu de candidats ont compris la différence entre irréductibilité sur  $\mathbf{Z}[X]$  et  $\mathbf{Q}[X]$ . Lors de la leçon sur les racines des polynômes, les problèmes de localisation dans  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$  sont trop rarement évoqués. Il en va de même de la dépendance continue des racines par rapport aux coefficients.

**Fractions Rationnelles:** Certains candidats se croient, à tort, obligés de parler du Théorème de Lüroth qu'ils ne dominent pas et qui dépasse largement le cadre du programme. Par contre, il est bon de connaître des algorithmes de décomposition en éléments simples sur  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{C}$ , de savoir trouver la primitive d'une fraction rationnelle réelle,...

### 2.3. Analyse.

**Probabilités:** Encore cette année, trop de candidats évitent soigneusement les leçons de probabilité. Ce n'est pas nécessairement un bon calcul: les candidats qui se lancent dans ces leçons moins 'prisées' obtiennent en moyenne de meilleurs résultats. Le jury rappelle que les questions de probabilités figurant au programme d'Analyse et Probabilités des épreuves écrites et orales n'ont pas vocation à tomber en désuétude. Ces matières ne sont plus considérées comme "nouvelles" dans le programme du concours et sont donc susceptibles d'intervenir aussi bien à l'écrit qu'à l'oral.

**L'intitulé:** de la leçon est parfois mal cerné par le candidat qui a alors tendance à se lancer dans un dédale encyclopédique : ceci est révélateur par exemple à propos des deux leçons centrées l'une autour de la notion d'analyticité, l'autre autour de la notion d'holomorphie (et méromorphie) ; le jury s'attendrait ici à deux présentations différentes, ce qui n'est pas toujours le cas.

**Vue d'ensemble:** Une présentation éclairée historiquement voire la confrontation (au niveau élémentaire) de certaines approches historiques bien senties, un recul du candidat vis-à-vis de l'évolution de la notion abordée, la mise en valeur de son interaction d'une notion avec d'autres branches des mathématiques peut se révéler payante et passionner le jury.

**Applications, Utilisation:** La présentation de l'analyse "en situation", les exemples d'applications, placés dans une démarche pédagogique où les utilisations servent à motiver des concepts plus abstraits, est particulièrement appréciée.

Plusieurs leçons pourraient être l'occasion pour le candidat de présenter certaines techniques simples et algorithmiques aux confins de l'analyse numérique et de l'analyse. Le caractère vivant et moins scolaire de la leçon s'en trouverait considérablement enrichi.

Bien souvent, des théorèmes dont la puissance se révèle face à des questions relevant des mathématiques appliquées sont présentés de manière théorique et sans que le candidat n'essaye de prendre le recul pour les illustrer.

Comme les années précédentes, les théorèmes fondamentaux d'analyse fonctionnelle ont souvent été proposés (théorème de de Hahn-Banach, de Banach-Steinhaus, de l'application ouverte); il est alors recommandé de donner des applications significatives.

**Du bon usage de l'exemple:** Dans l'intitulé de toutes les leçons, il est explicitement demandé de présenter des applications et des exemples. Il est donc impératif, d'illustrer toutes les notions que l'on aborde par des exemples judicieux: la démarche qui consiste à confronter l'analyse au champ de ses applications potentielles peut changer complètement la présentation d'une leçon.

Il convient cependant de prendre un peu de recul avec ces exemples, en sachant expliquer les limites du cadre où ils s'appliquent, en évitant les exemples par trop artificiels, et en faisant clairement ressortir les théorèmes qu'ils illustrent. Il faut absolument éviter les leçons 'catalogues', que ce soit des catalogues de notions, ou des catalogues d'exemples.

**Excès:** On assiste parfois dans certaines leçons à des développements de niveau très supérieur aux exigences du programme dont le fond n'est pas vraiment maîtrisé ; qu'un candidat se lance dans la recherche de développements asymptotiques via la transformation de Mellin et son inversion et ne puisse énoncer correctement la formule d'inversion de Fourier n'a pas de sens. La dynamique (et en particulier l'étude des ensembles de Julia) peut aussi se révéler un terrain très glissant si l'on ne maîtrise pas tant le sujet que les liens qui en justifient la relation avec le cadre de la leçon proposée. Les meilleures leçons ne sont pas toujours celles où le point choisi par le candidat requiert soit la plus grande dextérité, soit les connaissances les plus encyclopédiques.

#### **Géométrie:**

**Espaces vectoriels:** Le théorème de Hahn-Banach (qui n'est pas au programme) est très souvent présenté, mais plus rarement sous l'angle géométrique ;

lorsque l'on place le candidat dans la situation hilbertienne, il est parfois démuné pour y transcrire plus simplement son résultat. Le fait que Pythagore, les formules du parallélogramme ou de la médiane, soient les outils pour faire de la "géométrie" dans les Hilbert (et l'illustrer avec des diagrammes simples) n'est pas en général bien mis en valeur.

**Inversion locale:** L'importance du théorème des fonctions implicites ou du théorème d'inversion locale du point de vue géométrique ne saurait apparaître si l'on se noie dans le formalisme analytique... conduisant à un théorème du rang assez méconnaissable en tout cas par un géomètre ! Cela s'est révélé souvent un piège pour les candidats ayant choisi la leçon centrée autour des applications de ces théorèmes ; une étude illustrée par des figures en dimension 2 ou 3 aurait été autrement plus adéquate ; comment évoquer les concepts géométriques sans figures ? Certains candidats font une démonstration correcte du théorème des fonctions implicites mais ne peuvent déterminer la tangente à une courbe plane d'équation  $f(x,y)=0$ . De même, si on parle du théorème des multiplicateurs de Lagrange, il faudrait savoir l'appliquer dans les cas simples, par exemple ceux où on cherche les extremums d'une fonction sur une courbe ou une surface.

**Courbes et surfaces:** La seule leçon de géométrie "étude locale de courbes et surfaces" a souvent profité aux candidats qui l'ont choisie ; on peut vraiment regretter qu'elle soit en général dédaignée ; que l'on reste au niveau du programme des classes préparatoires, ou que l'on intègre certaines idées de géométrie différentielle relevant plus d'un cours de maîtrise (orientation, triangulation, formes différentielles, caractéristique d'Euler-Poincaré, même modélisation), on peut en faire une leçon à la fois riche et facile.

**Equations différentielles:** Dans les leçons sur les équations différentielles, l'aspect qualitatif passe souvent à la trappe ; on s'attendrait à voir le candidat dresser des portraits de phase, s'exercer à pister les courbes intégrales, à les piéger dans les "entonnoirs", à les situer par rapport à des "barrières", et ce sur des exemples simples (du type Liouville  $y' = x + y^2$  par exemple) ; le théorème des bouts est souvent mal compris du point de vue pratique. Le jury a apprécié certaines études qualitatives d'équations différentielles (linéaires ou non) et encourage donc les candidats à aller dans ce sens.

Dans ce genre de leçons, il faut d'autre part garder un bon équilibre entre les exemples théoriques et les exercices de calcul.

**Suites et Séries:** Les leçons sur les suites et les séries sont par nature plus élémentaires. Il importe de bien réfléchir à la structure logique du plan et de choisir exemples et contre-exemples en conséquence. Quand le candidat mentionne qu'une suite réelle est convergente si et seulement si elle est de Cauchy, il doit pouvoir préciser au jury laquelle des implications utilise la complétude de  $\mathbf{R}$ .

**Intégration:**

**Intégrales et primitives:** La leçon "Intégrale d'une fonction d'une variable réelle, suites de fonctions intégrables" a parfois été mal traitée : dans cette leçon, il faut insister sur l'aspect "variable réelle" et non faire un cours de théorie générale de la mesure ; il est par exemple anormal que ne soient pas du tout mentionnés dans cette leçon les liens entre

intégrales et primitives et leurs conséquences. Les leçons "Exemples de calculs d'intégrales" et "Exemples de fonctions définies par une intégrale" ont été mieux réussies en général. Insistons cependant sur le nécessité de diversifier les exemples donnés : il faut que dans ces leçons un grand nombre d'idées différentes soient illustrées par les exemples traités. Ces remarques sont également valables pour d'autres leçons d'exemples.

**Espaces  $L^p$ :** Le théorème de Fischer-Riesz sur la complétude de  $L^p$  a souvent été proposé : le jury a constaté que peu de candidats en maîtrisent bien les finesses, et en particulier la façon dont le théorème de convergence monotone intervient. Sur ce point, il est souhaitable que les futurs candidats soient mieux préparés.

**Fourier:** Les leçons consacrées à Fourier ou à la convolution sont valorisées par un candidat qui sait souligner l'utilisation technique de ces outils (boîtes noires, filtrage) ou envisage des ponts avec les probabilités (loi d'une somme de variables indépendantes, fonctions génératrices ou caractéristiques).

**Analyse fonctionnelle:** Dans les leçons d'analyse fonctionnelle, on est surpris des lacunes de certains candidats : par exemple, beaucoup ont du mal à voir que l'espace des fonctions continues de  $[0,1]$  dans  $\mathbf{R}$  n'est pas complet si on le munit de la norme de la convergence en moyenne et ne savent pas à quoi ressemble son complété; on peu aussi souhaiter que les candidats sachent distinguer parmi les espaces fonctionnels usuels ceux qui sont séparables de ceux qui ne le sont pas. Ces lacunes sont d'autant plus regrettables que le jury a pu constater par ailleurs qu'une leçon comme "Espaces fonctionnels, exemples et applications" offre à un candidat bien préparé de larges possibilités de montrer ses qualités et d'obtenir une excellente note.

**2.4. Modélisation.** Le jury constate que les travers signalés dans le rapport de l'an dernier sont moins fréquents cette année. Les remarques faites dans le rapport de la session 2000 ne seront pas répétées ici, bien qu'elles restent d'actualité. Par ailleurs, le niveau des présentations informatiques s'est bien amélioré en moyenne.

**Cloisonnement:** On constate durant l'oral de modélisation des manques surprenants, sans doute dus à une vision trop cloisonnée du domaine. Nous insistons sur ce point, car il requiert aussi bien un travail thématique en algèbre et analyse, qu'un entraînement à mobiliser ses connaissances en dehors de cadres bien délimités.

**Modélisation:** Le jury apprécie que les candidats soient capables d'interpréter les modèles introduits et les résultats obtenus sur ces modèles en termes autres que mathématiques. C'est notamment vrai pour les textes, lesquels se rattachent parfois à des situations que l'on peut rencontrer dans la vie courante et pour lesquels la confrontation du modèle avec le phénomène réel n'est pas hors de portée.

**Esprit critique:** L'esprit critique est une bonne chose et doit être encouragé chez les candidats, il leur est par contre inutile d'adopter une attitude systématiquement critique vis-à-vis des textes. Celle-ci ne se justifie en général pas, même s'il est vrai que certains points de certains textes peuvent donner lieu à discussion ou requièrent une interprétation. Les candidats devraient profiter des ouvertures dans les textes, et les exploiter. Lorsqu'ils emploient la phrase "ils disent dans le texte", en général en pensant avoir trouvé une

faible ou un point obscur, qu'ils pensent que l'auteur est peut être sur le banc du jury.

**Méthodes Numériques:** Ce n'est pas parce que la formule de Black et Scholes provient d'une modélisation stochastique que la meilleure méthode pour évaluer l'intégrale est la méthode de Monte-Carlo. La comparaison entre méthode numérique classique et méthode de Monte-Carlo est appréciée à chaque fois que le sujet d'y prête.

**Méthodes classiques:** Il est souhaitable que les candidats qui résolvent une équation aux dérivées partielles par séparation des variables ne soient plus désarçonnés quand on leur fait remarquer que la fonction inconnue par laquelle ils divisent possède de nombreux zéros. Il est tout-à-fait possible de présenter un raisonnement par séparation des variables correct.

**Vecteur aléatoire:** A propos d'une leçon sur la "simulation d'une variable ou d'un vecteur aléatoire", le jury aimerait que la partie relative aux vecteurs soit plus souvent traitée. En particulier ceci contient le cas de vecteurs aléatoires gaussiens de moyenne et de matrice de variance-covariance donnée. Il peut être utile d'envisager le cas où cette matrice n'est pas de rang maximal.

**Modèles:** Les candidats devraient savoir expliquer la relation entre le contexte gaussien et le méthode des moindres carrés et le modèle linéaire.

**Lois:** On aimerait que les candidats sachent expliquer l'emploi des lois exponentielle et de Poisson. On peut souhaiter qu'ils puissent par exemple réagir devant des questions comme:

Pourquoi la durée de vie d'une lampe à incandescence habituelle peut être approximativement représentée par une loi exponentielle? Comment faire si le filament de la lampe s'évaporerait peu à peu lorsque la lampe est allumée?

#### Monte-Carlo:

- Le calcul du volume de la boule unité de  $\mathbf{R}^d$  n'a guère d'intérêt, la formule explicite étant connue. Le volume d'un convexe décrit par la solution d'un problème de "Programmation Linéaire" en dimension supérieure à 4 serait plus intéressant à calculer. Les méthodes de Monte-Carlo permettent également d'approcher un tel convexe par essais et erreurs.
- En ce qui concerne le calcul des intégrales, il serait bon qu'on s'intéresse également à des intégrales du type:

$$\int_{[0,1]^d} f(x_1, \dots, x_d) g(x_1, \dots, x_d) dx_1 \dots dx_n$$

dans lesquelles  $g$  est une densité de probabilité sur  $\mathbf{R}^d$ .

- Dans toutes les applications des méthodes de Monte-Carlo, on souhaite la détermination d'un intervalle de confiance, la visualisation des fluctuations des résultats obtenus par des tirages indépendants. L'intervalle de confiance est l'analogue de la majoration d'erreur recherchée dans les méthodes d'intégration numérique non probabiliste. Lorsque le contexte s'y prête, il est souhaitable que les candidats sachent comparer l'efficacité des méthodes numériques non probabilistes avec celles de Monte-Carlo.

**Théorème de la Limite Centrale:** Il serait bon que les candidats aient des idées sur ce qui se produit lorsque les variables aléatoires n'admettent pas de moment d'ordre 2. L'exemple des lois de Cauchy est particulièrement

instructif. Cela peut faire l'objet de simulations et de représentations. La question analogue se pose pour les chaînes de Markov.

**Tests d'hypothèses:** Lorsqu'on ne connaît pas d'expression utilisable pour la loi de la statistique de tests sous  $H_0^1$ , on peut la simuler. Ceci est également vrai lorsqu'on dispose de la loi limite sous  $H_0$  quand la taille de l'échantillon tend vers l'infini, mais que l'échantillon dont on dispose est de petite taille.

**Générateur pseudo-aléatoire:** La question du test d'un générateur pseudo-aléatoire est intéressante. Il faudrait savoir différencier une suite de nombres pseudo-aléatoires, par exemple équirépartis sur  $[0, 1]$ , d'une suite de variables aléatoires uniformes sur  $[0, 1]$ .

# ANNEXES

## **Problème de Mathématiques Générales**

- Énoncé
- Corrigé

## **Problème d'Analyse et Probabilités**

- Énoncé
- Corrigé

## **Oral d'Algèbre et Géométrie**

- Liste des Leçons

## **Oral d'Analyse et Probabilités**

- Liste des Leçons

## **Oral de Modélisation - Option Calcul Scientifique**

- Liste des Leçons
- Liste des Textes

## **Oral de Modélisation - Option Probabilités**

- Liste des Leçons
- Liste des Textes

## **Bibliothèque de l'Agrégation**

## **Ouvrages non autorisés pour l'Oral (Session 2000)**



# Composition de Mathématiques Générales

**Durée : 6 heures**

*Calculatrice électronique de poche, y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique, à fonctionnement autonome, non imprimante autorisée conformément à la circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999.*

*L'usage de tout document et de tout autre matériel électronique est interdit.*

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies.



## Prolégomènes

Dans tout le problème  $n$  désigne un entier naturel strictement positif,  $\mathbf{R}$  le corps des nombres réels et  $\mathbf{R}^n$  l'espace vectoriel réel euclidien canonique de dimension  $n$ .  $\mathbf{R}^n$  est également canoniquement muni d'une structure d'espace affine. On choisit pour origine, notée  $O$ , le vecteur nul de l'espace vectoriel.

On note  $\langle x, y \rangle$  le produit scalaire de deux vecteurs  $x$  et  $y$  de  $\mathbf{R}^n$  et  $\|x\|$  la norme euclidienne de  $x$ .

On note  $GL_n(\mathbf{R})$  le groupe des matrices carrées de dimension  $n$  inversibles et on note  $\det(A)$  le déterminant de la matrice carrée  $A$ . Si  $E$  est une partie de  $\mathbf{R}^n$  et  $A$  une matrice dans  $GL_n(\mathbf{R})$ , on note  $A(E)$  l'image de  $E$  par l'endomorphisme de  $\mathbf{R}^n$  canoniquement associé à  $A$ .

Si  $E$  est une partie de  $\mathbf{R}^n$ , on appelle figure polaire de  $E$ , notée  $E^*$ , la partie de  $\mathbf{R}^n$  formée des points  $y$  tels que  $\langle x, y \rangle$  est inférieur à 1 pour tout  $x$  dans  $E$  :

$$E^* = \{y \in \mathbf{R}^n \mid \forall x \in E, \langle x, y \rangle \leq 1\}.$$

On rappelle qu'une partie de  $\mathbf{R}^n$  est convexe si, pour tout couple  $(A, B)$  de ses points, elle contient le segment  $[A, B]$ . Une fonction  $f$  d'une partie  $E$  de  $\mathbf{R}^n$  à valeurs dans  $\mathbf{R}$  est dite convexe si  $E$  est convexe et si

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

(i.e. le graphe de  $f$  est sous ses cordes). On dit que  $f$  est strictement convexe si elle est convexe et si l'inégalité précédente n'est une égalité que si  $x = y$  ou  $\lambda \in \{0, 1\}$ . Enfin  $f$  est dite (strictement) concave si  $-f$  est (strictement) convexe.

Une partie  $E$  de  $\mathbf{R}^n$  est dite  $O$ -symétrique si elle est globalement invariante par la symétrie centrale (affine) de centre  $O$ . Si  $\lambda$  est un scalaire, on note  $\lambda E$  l'image de  $E$  par l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $\lambda$ .

On dit qu'une partie  $E$  de  $\mathbf{R}^n$  est un corps convexe si elle est convexe et d'intérieur non vide. On remarquera qu'un corps convexe  $O$ -symétrique contient toujours  $O$  dans son intérieur (car si  $x$  est intérieur, il en est de même de  $-x$  par symétrie et aussi de  $(x + (-x))/2$  par convexité).

Enfin si  $E$  est une partie Lebesgue-mesurable de  $\mathbf{R}^n$  on note  $\text{vol}(E)$  son volume.

Les deuxième et troisième parties sont indépendantes l'une de l'autre. Il est rappelé que la présentation, la rédaction et la précision sont des éléments importants d'appréciation des copies.

## Partie I — Généralités

Soit  $K$  un corps convexe et compact de  $\mathbf{R}^n$  contenant  $O$  dans son intérieur.

### Question 1

Soit  $K_0$  et  $K_1$  des parties convexes de  $\mathbf{R}^n$  et  $\theta$  un réel dans  $[0, 1]$ ; montrer que  $K_\theta$  est convexe, où on a noté

$$K_\theta = (1 - \theta)K_0 + \theta K_1 = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \exists (x_0, x_1) \in K_0 \times K_1, x = (1 - \theta)x_0 + \theta x_1\}.$$

### Question 2

Soit  $A$  une matrice dans  $GL_n(\mathbf{R})$ . Montrer  $(A(K))^* = {}^t A^{-1}(K^*)$ .

### Question 3

Soit  $x$  dans  $\mathbf{R}^n$ , on pose  $I_x = \{\lambda \in \mathbf{R}_+ \mid x \in \lambda K\}$ .

3.a Montrer que  $I_x$  est un intervalle fermé non majoré de  $\mathbf{R}_+$ .

3.b On peut donc poser  $j_K(x) = \inf I_x$ ; c'est un réel positif. Soit  $\partial K$  la frontière de  $K$ . Montrer

$$x \in K \Leftrightarrow j_K(x) \leq 1 \quad \text{et} \quad x \in \partial K \Leftrightarrow j_K(x) = 1.$$

### Question 4 (Étude d'exemples)

4.a Expliciter  $K^*$ ,  $j_K$  et  $j_{K^*}$  dans les trois cas suivants :

1.  $K$  est le disque unité (euclidien) de  $\mathbf{R}^2$ ,
2.  $K$  est le carré  $K = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid -1 \leq x_1, x_2 \leq 1\}$ ,
3.  $K$  est un parallélogramme, dans  $\mathbf{R}^2$ , de centre  $O$ .

4.b Montrer que  $K^*$  est un corps convexe, compact, contenant  $O$  dans son intérieur et

$$\forall y \in \mathbf{R}^n \quad j_{K^*}(y) = \max\{\langle x, y \rangle \mid x \in K\}.$$

4.c On suppose que  $K$  est  $O$ -symétrique. Montrer que  $j_K$  et  $j_{K^*}$  sont des normes. Que dire de  $(\mathbf{R}^n, j_K)$  et  $(\mathbf{R}^n, j_{K^*})$ ?

**Question 5** (Un résultat de dualité)

On note  $p_K$  la projection sur le convexe compact  $K$ .

5.a Soit  $a$  n'appartenant pas à  $K$  et  $H$  l'hyperplan passant par  $p_K(a)$  et orthogonal à la droite passant par  $a$  et  $p_K(a)$ . Montrer qu'il existe une équation de  $H$  de la forme

$$H = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \langle x, u \rangle = 1\}$$

pour un certain vecteur  $u$  de  $\mathbf{R}^n$ , telle que  $\langle a, u \rangle > 1$  et, pour tout point  $x$  de  $K$ ,  $\langle x, u \rangle \leq 1$ .

5.b Montrer  $(K^*)^* = K$ .

**Question 6** (Projection d'un convexe)

Soit  $pr_H$  une projection (affine) de  $\mathbf{R}^n$  d'image un hyperplan affine  $H$  et de direction quelconque  $D$  (une droite affine) non parallèle à  $H$ . On munit l'espace affine d'un repère (non nécessairement orthogonal) tel que  $H$  soit l'hyperplan d'équation  $x_n = 0$  et  $D$  la droite d'équation  $x_1 = \dots = x_{n-1} = 0$ .

Montrer qu'il existe  $\varphi_K$  et  $\varphi^K$  des applications de  $pr_H(K)$  dans  $\mathbf{R}$  respectivement convexe et concave telles que  $K$  soit l'ensemble des  $x = (x_1, \dots, x_n)$  tels que  $(x_1, \dots, x_{n-1})$  appartient à  $pr_H(K)$  et

$$\varphi_K(x_1, \dots, x_{n-1}) \leq x_n \leq \varphi^K(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

## Partie II — Géométrie des formes quadratiques

On appelle ellipsoïde (sous-entendu centré en  $O$ ) la boule unité pour une forme quadratique définie positive sur  $\mathbf{R}^n$ . Il revient au même de se donner une matrice symétrique définie positive  $A$  et de considérer le sous-ensemble  $E(A)$  de  $\mathbf{R}^n$  des  $x$  tels que  $\langle x, Ax \rangle \leq 1$ . On note  $\mathcal{E}$  l'ensemble des ellipsoïdes. En identifiant l'ellipsoïde  $E(A)$  aux coefficients  $a_{i,j}$  de  $A$  avec  $i \leq j$ , on considère  $\mathcal{E}$  comme une partie de  $\mathbf{R}^{n(n+1)/2}$  et on le munit de la topologie induite.

**Question 1** (Ellipsoïdes et boules unités)

Soit  $A$  une matrice symétrique définie positive. Montrer qu'il existe une matrice symétrique définie positive telle que  $B^2 = A^{-1}$ . En déduire qu'un ellipsoïde est l'image de la boule unité (euclidienne) par une application linéaire.

**Question 2** (Ellipsoïdes et convexité)

Montrer que l'application  $A \mapsto (\det A)^{-1/2}$  de l'ensemble des matrices  $n \times n$  symétriques définies positives dans  $\mathbf{R}_+^*$  est strictement convexe. (On pourra songer à considérer le logarithme.)

**Question 3** (Ellipsoïde maximal)

Soit  $K$  un corps convexe compact  $O$ -symétrique de  $\mathbf{R}^n$ .

3.a Soit  $v$  un réel strictement positif. Montrer que l'ensemble  $\mathcal{E}_{K,v}$  des ellipsoïdes de  $\mathbf{R}^n$  ayant un volume supérieur à  $v$  et inclus dans  $K$  est une partie compacte de  $\mathcal{E}$ .

3.b En déduire qu'il existe un unique ellipsoïde  $E_K$  de  $\mathbf{R}^n$  inclus dans  $K$  et de volume maximal pour cette propriété.

**Question 4** (Formes quadratiques et corps convexes)

4.a Soit  $K$  un corps convexe compact  $O$ -symétrique de  $\mathbf{R}^n$ . On note  $\text{Is}_K$  le groupe des automorphismes linéaires  $u$  de  $\mathbf{R}^n$  tels que  $u(K) = K$ . Montrer qu'il existe une forme quadratique  $q_K$  définie positive invariante par  $\text{Is}_K$ , i.e.

$$\forall u \in \text{Is}_K, \forall x \in \mathbf{R}^n \quad q_K(u(x)) = q_K(x).$$

4.b Donner  $E_K$  et une forme  $q_K$  possible dans chacun des exemples de I.4.a.

## Partie III — Théorème de Brunn-Minkowski

Soit  $K_0$  et  $K_1$  deux parties compactes de  $\mathbf{R}^n$  non nécessairement convexes. On note

$$K_0 + K_1 = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \exists (k_0, k_1) \in K_0 \times K_1 \quad x = k_0 + k_1\}.$$

Le but de cette partie est de démontrer l'inégalité suivante (théorème de Brunn-Minkowski) :

$$\text{vol}(K_0)^{1/n} + \text{vol}(K_1)^{1/n} \leq \text{vol}(K_0 + K_1)^{1/n}. \quad (1)$$

On **admettra** pour la suite la précision suivante. L'égalité ne se produit que dans les cas suivants : soit  $\text{vol}(K_0) = \text{vol}(K_1) = 0$ , soit l'un des compacts est réduit à un point, soit  $K_0$  et  $K_1$  sont images l'un de l'autre par une homothétie affine ou une translation.

### Question 1

Si  $a = (a_1, \dots, a_n)$  et  $b = (b_1, \dots, b_n)$  sont deux  $n$ -uplets de réels, on note  $P(a, b)$  le parallélépipède rectangle donné par

$$P(a, b) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid \forall i \in [1; n] \quad a_i \leq x_i \leq b_i\}.$$

On appelle standard un parallélépipède qui est de cette forme et est d'intérieur non vide.

On suppose que  $K_0$  et  $K_1$  sont chacun réunions finies de parallélépipèdes standard d'intérieurs disjoints :

$$K_0 = \bigcup_{i=1}^{n_0} P(a^{(i)}, b^{(i)}) \quad K_1 = \bigcup_{i=1}^{n_1} P(c^{(i)}, d^{(i)}).$$

On va montrer par récurrence sur  $n_0 + n_1$  que l'inégalité (1) est valable pour  $K_0$  et  $K_1$ .

**1.a** Établir l'inégalité (1) dans le cas où  $K_0$  et  $K_1$  sont des parallélépipèdes standard (i.e.  $n_0 = n_1 = 1$ ) en précisant le cas d'égalité (on pourra commencer par diviser par  $\text{vol}(K_0 + K_1)^{1/n}$ ).

**1.b** Pour  $n_0$  et  $n_1$  quelconques avec  $n_0$  supérieur ou égal à 2, trouver un entier  $k$  entre 1 et  $n$  ainsi que deux réels  $t$  et  $u$  de sorte que chacun des demi-espaces  $x_k \geq t$  et  $x_k \leq u$  contienne l'un des parallélépipèdes constituant  $K_0$  et que l'hyperplan  $x_k = u$  partage  $K_1$  suivant les mêmes proportions que ne le fait  $x_k = t$  avec  $K_0$  :

$$\frac{\text{vol}(K_0 \cap \{x_k \leq t\})}{\text{vol}(K_0 \cap \{x_k \geq t\})} = \frac{\text{vol}(K_1 \cap \{x_k \leq u\})}{\text{vol}(K_1 \cap \{x_k \geq u\})}.$$

**1.c** Établir l'inégalité (1) dans le cas où  $K_0$  et  $K_1$  sont des réunions finies de parallélépipèdes standard d'intérieurs disjoints.

### Question 2

En déduire le théorème de Brunn-Minkowski.

## Partie IV — Étude de la quantité $\text{vol}(K)\text{vol}(K^*)$

Soit  $K$  un corps convexe compact  $O$ -symétrique et  $E_K$  l'ellipsoïde de volume maximal inclus dans  $K$  (cf. partie II).

### Question 1 (Minoration de $\text{vol}(K)\text{vol}(K^*)$ )

**1.a** On suppose ici que  $E_K$  est la boule unité (euclidienne) de  $\mathbf{R}^n$ , notée  $B_n$ . Soit  $x$  un réel. Montrer que, si le point de coordonnées  $(x, 0, \dots, 0)$  appartient à  $K$ , alors  $|x| \leq \sqrt{n}$ .

**1.b** On se replace dans le cas général où  $E_K$  est quelconque. Montrer  $E_K \subset K \subset \sqrt{n}E_K$  et

$$\text{vol}(K)\text{vol}(K^*) \geq n^{-n/2} \text{vol}(B_n)^2.$$

**Question 2 (Étude du cas maximal)**

On suppose ici que  $K$  maximise la quantité  $\text{vol}(K)\text{vol}(K^*)$  parmi les corps convexes compacts  $O$ -symétriques.

Soit  $H$  un hyperplan vectoriel de  $\mathbf{R}^n$ . La décomposition orthogonale  $\mathbf{R}^n = H \oplus H^\perp$  et le choix d'une base de  $H^\perp$  permettent d'identifier les points de  $\mathbf{R}^n$  à des couples  $(x, t)$  avec  $x$  dans  $H$  et  $t$  dans  $\mathbf{R}$ . On note, pour  $t$  réel,

$$K_t = \{x \in H \mid (x, t) \in K\}.$$

L'ensemble  $I$  des réels  $t$  tels que  $K_t$  est non vide est donc un intervalle symétrique, d'intérieur non vide et compact de  $\mathbf{R}$  (ces faits n'ont pas à être démontrés).

**2.a** Soit  $\xi$  dans  $H$ , on note  $\varphi_\xi^K$  la fonction convexe de  $I$  dans  $\mathbf{R}$

$$\varphi_\xi^K(t) = 1 - \sup_{x \in K_t} \langle \xi, x \rangle.$$

Montrer qu'un couple  $(\xi, \lambda)$  de  $H \times \mathbf{R}$  appartient à  $K^*$  si et seulement si

$$\xi \in (K_0)^* \quad \text{et} \quad -\inf_{t>0} \frac{\varphi_\xi^K(-t)}{t} \leq \lambda \leq \inf_{t>0} \frac{\varphi_\xi^K(t)}{t}.$$

**Définition.** On définit un ensemble  $K'$  ainsi :  $(x, t)$  appartient à  $K'$  si et seulement si  $t$  et  $x$  appartiennent respectivement à  $I$  et à  $\frac{1}{2}(K_t + K_{-t})$  (ce qui est la même chose que  $\frac{1}{2}(K_t - K_t)$ ). Autrement dit  $x$  est le milieu d'un point de  $K_t$  et d'un point de  $K_{-t} = -K_t$ . Remarquons que  $K_t$  et  $K_{-t}$  sont convexes ou vides et que  $K'$  est un corps convexe, compact et  $O$ -symétrique. (On ne demande pas de démontrer ces faits.)

**2.b** Montrer que  $K'$  a un plus grand volume que  $K$  et qu'il n'y a égalité que si pour  $t$  intérieur à  $I$  les  $K_t$  admettent un centre de symétrie, i.e. il existe  $\mu_t$  dans  $H$  tel que  $K_t = 2\mu_t - K_t$  (la symétrie de centre  $\mu_t$  laisse  $K_t$  globalement invariant).

**2.c** Dédire de la question 2.a que  $(K')^*$  a un plus grand volume que  $K^*$  et donc que  $K_t$  admet un centre de symétrie (noté  $\mu_t$ ) pour tout  $t$  dans l'intérieur de  $I$ .

**2.d** Soit  $\xi$  dans  $H$ ; montrer qu'il existe un réel  $\mu_\xi$  tel que, pour tout  $t$  intérieur à  $I$  et strictement positif,

$$\varphi_\xi^K(-t) - \varphi_\xi^K(t) = \mu_\xi t.$$

**2.e** En déduire qu'il existe  $\mu$  dans  $H$  tel que, pour tout  $t$  dans  $I$ ,  $K_t$  admet  $t\mu$  comme centre de symétrie et donc qu'il existe une symétrie (non nécessairement orthogonale)  $s$  par rapport à  $H$  qui laisse  $K$  globalement invariant et qui est une isométrie de  $\mathbf{R}^n$  pour la norme  $j_K$  introduite en première partie.

**2.f** En déduire que  $K$  est un ellipsoïde et que  $\text{vol}(K)\text{vol}(K^*) = \text{vol}(B_n)^2$ . (On rappelle que  $B_n$  désigne la boule unité euclidienne de  $\mathbf{R}^n$ .)

**Question 3 (Conclusion)**

Soit  $\mathcal{C}$  l'ensemble des corps convexes compacts  $O$ -symétriques de  $\mathbf{R}^n$ . Pour  $K_0$  et  $K_1$  dans  $\mathcal{C}$ , on pose

$$d(K_0, K_1) = \inf\{\lambda \in \mathbf{R}_+ \mid e^{-\lambda}K_1 \subset K_0 \subset e^\lambda K_1\}.$$

On admettra que  $(\mathcal{C}, d)$  est un espace métrique et que, pour tout  $K$  dans  $\mathcal{C}$  et tout couple de réels  $(a, b)$  avec  $a \leq b$ , l'ensemble

$$\{K' \in \mathcal{C} \mid aK \subset K' \subset bK\}$$

est compact.

Montrer que pour tout corps convexe compact et  $O$ -symétrique  $K$  de  $\mathbf{R}^n$ , on a

$$\frac{\text{vol}(B_n)^2}{n^{n/2}} \leq \text{vol}(K)\text{vol}(K^*) \leq \text{vol}(B_n)^2.$$

# Épreuve écrite de Mathématiques Générales

## Corrigé

14 octobre 2001

### Partie I — Généralités

#### Question 1

Soit  $x$  et  $y$  deux points de  $K_\theta$ . Il existe donc  $x_0$  et  $y_0$  dans  $K_0$  et  $x_1$  et  $y_1$  dans  $K_1$  tels que  $x = (1 - \theta)x_0 + \theta x_1$  et  $y = (1 - \theta)y_0 + \theta y_1$ . Pour  $\lambda$  dans  $[0; 1]$ , on a

$$\lambda x + (1 - \lambda)y = (1 - \theta)(\lambda x_0 + (1 - \lambda)y_0) + \theta(\lambda x_1 + (1 - \lambda)y_1)$$

et donc  $\lambda x + (1 - \lambda)y$  appartient à  $K_\theta$  par convexité de  $K_0$  et de  $K_1$  :  $K_\theta$  est donc bien convexe.

#### Question 2

Soit  $y$  dans  $\mathbf{R}^n$ . On a

$$y \in (A(K))^* \Leftrightarrow \forall x \in K, \langle y, A(x) \rangle \leq 1 \Leftrightarrow \forall x \in K, \langle {}^t A(y), x \rangle \leq 1 \Leftrightarrow {}^t A(y) \in K^* \Leftrightarrow y \in {}^t A^{-1}(K^*).$$

D'où  $(A(K))^* = {}^t A^{-1}(K^*)$ .

#### Question 3

**3.a** Comme  $O$  est intérieur à  $K$ ,  $K$  contient une boule fermée centrée en  $O$  et de rayon  $r$  strictement positif et donc, si  $x$  est non nul,  $rx/\|x\|$  appartient à  $K$  et  $\|x\|/r$  appartient à  $I_x$ . C'est encore vrai si  $x$  est nul et donc  $I_x$  n'est pas vide.

Soit  $\lambda$  et  $\mu$  deux réels positifs avec  $\mu > \lambda$ . Pour tout  $x$  dans  $K$  le segment  $[0; \mu x]$  contient le segment  $[0; \lambda x]$ . Comme  $K$  contient  $O$  et est convexe,  $\mu K$  a également ces propriétés (car il en serait de même pour l'image de  $K$  par une application affine quelconque préservant  $O$ ) et, par conséquent,  $\mu K$  contient  $\lambda K$ . Il en résulte  $\lambda \in I_x \Rightarrow \mu \in I_x$  et donc  $I_x$  est un intervalle non majoré.

Enfin soit  $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite de points de  $I_x$  convergente vers un certain  $\lambda$  dans  $\mathbf{R}$ . Par définition on peut trouver une suite  $(k_n)_{n \in \mathbf{N}}$  de points de  $K$  telle que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $x = \lambda_n k_n$ . Comme  $K$  est compact, la suite  $(k_n)_{n \in \mathbf{N}}$  possède au moins une valeur d'adhérence dans  $K$ , disons  $k$ . Et donc  $\lambda k$  est valeur d'adhérence de la suite  $(\lambda_n k_n)_{n \in \mathbf{N}}$ , i.e.  $x = \lambda k$ , et donc  $\lambda$  appartient à  $I_x$ . Il en résulte que  $I_x$  est fermé.

*Remarque :* on peut préciser la démonstration de  $\lambda K \subset \mu K$ . Soit  $x$  dans  $\lambda K$ . Prenons  $y$  dans  $K$  tel que  $x = \lambda y$ . Par convexité de  $K$  le segment  $[0, y]$  est inclus dans  $K$  et, en particulier,  $\lambda y/\mu$  appartient à  $K$ . Il en résulte que  $\lambda y$  appartient à  $\mu K$ , i.e.  $x$  appartient à  $\mu K$ .

**3.b** D'après la question précédente  $I_x = ]j_K(x); +\infty[$ ; on a donc

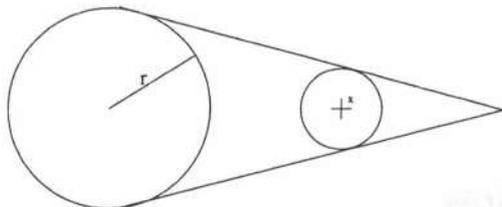
$$\forall \lambda \in \mathbf{R}_+ \quad \lambda \in I_x \Leftrightarrow \lambda \geq j_K(x)$$

et, en particulier,

$$x \in K \Leftrightarrow 1 \in I_x \Leftrightarrow 1 \geq j_K(x).$$

Si  $j_K(x) = 1$ , alors  $x$  appartient à  $K$  et, pour tout  $\lambda$  réel strictement entre 0 et 1, on a  $x \notin \lambda K$ , i.e.  $x/\lambda$  n'appartient pas à  $K$ . Ceci exhibe  $x$  comme point limite de points du complémentaire de  $K$  et donc de la frontière de  $K$ .

Pour conclure, il faut (et il suffit de) montrer que si  $j_K(x) < 1$ , alors  $x$  est intérieur à  $K$ . Soit, pour  $\varepsilon$  strictement positif,  $x_\varepsilon = (1 + \varepsilon)x$  et  $h_\varepsilon$  l'homothétie de centre  $x_\varepsilon$  et de rapport  $\varepsilon/(1 + \varepsilon)$ .



Si  $x_\varepsilon$  appartient à  $K$ , il en est de même pour l'image de  $K$  par  $h_\varepsilon$ , par convexité de  $K$  et parce que le rapport de  $h_\varepsilon$  est compris entre 0 et 1. Une homothétie (de rapport non nul) est un homéomorphisme, aussi l'image de l'intérieur de  $K$  par  $h_\varepsilon$  est un ouvert contenant  $h_\varepsilon(O)$ , i.e.  $x$ . Par conséquent  $x$  est intérieur à  $K$ . En particulier, si  $j_K(x) < 1$ ,  $x_\varepsilon$  appartient à  $K$  pour  $\varepsilon$  suffisamment petit et donc  $x$  est intérieur à  $K$ .

*Remarque : on peut expliciter l'argument. Soit  $u$  dans  $E$  et  $x_\varepsilon$  comme précédemment. Si  $x_\varepsilon$  et  $u$  appartiennent à  $K$ , il en est de même pour*

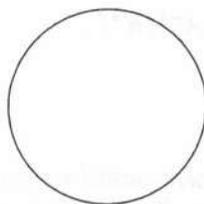
$$x + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}u = \frac{1}{1 + \varepsilon}x_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}u$$

par convexité de  $K$ .

#### Question 4

4.a Remarquons que  $K$  est bien, dans chaque cas, une partie convexe compacte et  $O$ -symétrique de  $\mathbf{R}^2$ . De plus  $O$  appartient toujours à  $K^*$ . Dans la suite on note  $y$  un point non nul de  $K^*$ .

##### 1. La boule unité.



Comme  $x = y/\|y\|$  appartient à  $K$ , on a nécessairement  $\|y\| = \langle x, y \rangle \leq 1$ . Soit maintenant  $z$  de norme inférieure à 1. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a, pour tout  $x$  dans  $K$ ,

$$\langle x, z \rangle \leq \|x\| \cdot \|z\| \leq 1$$

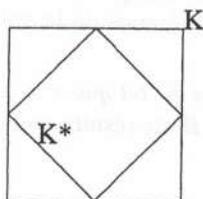
et donc  $K^* = K$  est la boule unité. En particulier  $K^*$  est un corps convexe compact  $O$ -symétrique de  $\mathbf{R}^2$ .

Soit  $\lambda$  un scalaire strictement positif;  $\lambda K$  est la boule fermée de centre  $O$  et de rayon  $\lambda$  et donc, pour tout  $x$  dans  $\mathbf{R}^2$ , on a

$$x \in \lambda K \Leftrightarrow \|x\| \leq \lambda \quad \text{ou encore} \quad \lambda \in I_x \Leftrightarrow \lambda \geq \|x\| \quad \text{et donc} \quad j_K(x) = \inf I_x = \|x\|.$$

Il en résulte que  $j_K$  et  $j_{K^*}$  sont toutes les deux la norme euclidienne.

##### 2. Le carré.



Pour  $x = (x_1, x_2)$  dans  $\mathbf{R}^2$ , on note  $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$  et  $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ . On s'intéresse donc au carré défini par  $\|x\|_\infty \leq 1$ . Soit  $x$  le point de  $K$  dont toutes les coordonnées sont soit 1 soit  $-1$  selon que la coordonnée correspondante de  $y$  est positive ou non. On a

$$\langle x, y \rangle = \|y\|_1$$

et donc  $y$  appartient au losange (carré) défini par  $\|y\|_1 \leq 1$ . Si maintenant  $z$  est un point du losange, on a, pour tout  $x$  dans  $K$ ,

$$\langle x, z \rangle \leq \|x\|_\infty \cdot \|z\|_1 \leq 1$$

et donc  $K^*$  est le losange  $\|y\|_1 \leq 1$ .

En particulier  $K^*$  est un corps convexe compact  $O$ -symétrique de  $\mathbf{R}^2$ . Comme  $K$  et  $K^*$  sont définis grâce à ces normes, le calcul effectué en 1. montre que  $j_K$  est la norme  $\|\cdot\|_\infty$  et  $j_{K^*}$  est la norme  $\|\cdot\|_1$ .

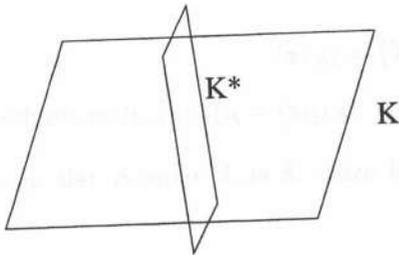
**3. Le parallélogramme.** Soit  $M$  et  $N$  deux sommets consécutifs de  $K$ . Le parallélogramme  $K$  est donc celui de sommets  $M, N, -M$  et  $-N$ . Soit  $P = (1, 1)$  et  $Q = (1, -1)$ . Comme  $(O, P, Q)$  et  $(O, M, N)$  sont des repères affines, il existe (un unique)  $A$  dans  $GL_2(\mathbf{R})$  envoyant le point  $P$  sur  $M$  et le point  $Q$  sur  $N$ . De plus  $A$  envoie le carré de la question précédente sur  $K$  par préservation du barycentre puisque le carré et le parallélogramme sont définis comme les lieux des barycentres à coefficients positifs de  $P$  et  $Q$  (respectivement de  $M$  et  $N$ ) et de leurs symétriques par rapport à  $O$ . Ainsi, pour  $x$  dans  $\mathbf{R}^2$ , on a

$$x \in K \Leftrightarrow \|A^{-1}x\|_\infty \leq 1.$$

Il en résulte, grâce à la question 2, que  $K^*$  est l'image par  ${}^t(A^{-1})^{-1} = {}^tA$  du losange précédent, i.e.

$$K^* = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid \|{}^tAx\|_1 \leq 1\}$$

et en particulier  $K^*$  est un corps convexe compact  $O$ -symétrique de  $\mathbf{R}^2$ .



Or donc, si  $M$  et  $N$  admettent  $(a, b)$  et  $(a', b')$  comme coordonnées respectives, alors

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a + a' & a - a' \\ b + b' & b - b' \end{pmatrix}$$

et  $K^* = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid |x_1(a + a') + x_2(b + b')| + |x_1(a - a') + x_2(b - b')| \leq 2\}$ .  
C'est donc le parallélogramme de sommets

$$M' = \left( \frac{b - b'}{ab' - a'b}, \frac{a' - a}{ab' - a'b} \right) \quad \text{et} \quad N' = \left( \frac{b + b'}{ab' - a'b}, -\frac{a + a'}{ab' - a'b} \right)$$

ainsi que leurs symétriques.

Si  $u$  est un isomorphisme linéaire de  $\mathbf{R}^n$ ,  $x$  un point de  $\mathbf{R}^n$  et  $K'$  un corps convexe compact, on a

$$\forall \lambda \in \mathbf{R}_+ \quad u(x) \in \lambda u(K') \Leftrightarrow x \in \lambda K'$$

et donc  $j_{u(K')}(u(x)) = j_{K'}(x)$  ou encore  $j_{u(K')} = j_{K'} \circ u^{-1}$ . Il en résulte  $j_K(x) = \|A^{-1}x\|_\infty$  et  $j_{K^*}(x) = \|{}^tAx\|_1$ . De façon explicite on a

$$j_K(x) = 2 \max \left( \frac{(a' - a)x_2 - (b' - b)x_1}{a'b - ab'}, \frac{(a + a')x_2 - (b + b')x_1}{a'b - ab'} \right)$$

et

$$j_{K^*}(x) = \frac{1}{2} (|(a + a')x_1 + (b + b')x_2| + |(a - a')x_1 + (b - b')x_2|).$$

**4.b**  $K^*$  est convexe fermé en tant qu'intersection de tels ensembles (c'est l'intersection de demi-espaces fermés).

Si  $K$  est contenu dans la boule de centre  $O$  et de rayon  $R$  (avec  $R$  strictement positif),  $K^*$  contient la boule de centre  $O$  et de rayon  $1/R$ . En effet soit  $x$  dans  $K$  et  $y$  de norme inférieure à  $1/R$ , on a, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\| \leq 1$$

et donc  $y$  appartient bien à  $K^*$ . Donc ce dernier est bien un corps convexe contenant  $O$  dans son intérieur.

Comme  $K$  contient  $O$  dans son intérieur, il contient une boule de centre  $O$  et de rayon  $r$ , avec  $r$  strictement positif. Il en résulte que  $K^*$  est inclus dans la boule de centre  $O$  et de rayon  $1/r$ . En effet soit  $y$  non nul dans  $K^*$  et  $x = ry/\|y\|$ . Comme la norme de  $x$  est  $r$ , il appartient à  $K$  et donc

$$r\|y\| = \langle x, y \rangle \leq 1.$$

Ainsi  $K^*$  est borné et donc compact puisqu'à la fois fermé et borné dans  $\mathbf{R}^n$ . On a bien démontré que  $K^*$  est un corps convexe compact contenant  $O$  dans son intérieur.

Soit  $y$  dans  $\mathbf{R}^n$ , par compacité de  $K$  et continuité du produit scalaire, la quantité  $j(y) = \max\{\langle x, y \rangle \mid x \in K\}$  est bien définie.

Soit  $\lambda$  un réel. Si  $0 < \lambda < j(y)$ , il existe  $x$  dans  $K$  tel que  $\langle x, y \rangle > \lambda$  et donc  $\langle x, y/\lambda \rangle > 1$ , i.e.  $y$  n'appartient pas à  $\lambda K^*$ . Il en résulte  $j_{K^*}(y) \geq j(y)$ . Mais, par le même calcul,  $y$  appartient à  $j(y)K^*$  et donc  $j_{K^*}(y) = j(y)$ .

*Remarque : on pourrait montrer comme en I.4.a.1 que la figure polaire de  $B(O, r)$  est  $B(O, 1/r)$  puis que, si  $K$  contient  $K'$ , alors  $K^*$  est contenu dans  $K'^*$  et ainsi démontrer*

$$B(O, r) \subset K \subset B(O, R) \Rightarrow B(O, \frac{1}{R}) \subset K^* \subset B(O, \frac{1}{r}).$$

4.c Soit  $x$  et  $y$  dans  $E$  et  $\lambda$  dans  $\mathbf{R}$ . On a

$$j_K(x) = 0 \Leftrightarrow 0 \in I_x \Leftrightarrow x \in 0.K \Leftrightarrow x = 0$$

et, par  $O$ -symétrie de  $K$ ,

$$j_K(-x) = \inf\{\mu \in \mathbf{R}_+ \mid -\mu x \in K\} = \inf\{\mu \in \mathbf{R}_+ \mid \mu x \in K\} = j_K(x).$$

Avec les notations de I.3, pour  $\mu$  réel et strictement positif, on a  $I_{\mu x} = \mu I_x$  et donc  $j_K(\mu x) = \mu j_K(x)$ . Il en résulte  $j_K(\lambda x) = j_K(|\lambda|x) = |\lambda|j_K(x)$ .

Enfin  $x$  et  $y$  appartiennent respectivement à  $j_K(x)K$  et  $j_K(y)K$  et donc, il existe  $k$  et  $k'$  dans  $K$  tels que  $x = j_K(x)k$  et  $y = j_K(y)k'$ . Par convexité de  $K$ , on a, si  $j_K(x) + j_K(y) \neq 0$ ,

$$x + y = (j_K(x) + j_K(y)) \left( \frac{j_K(x)}{j_K(x) + j_K(y)} k + \frac{j_K(y)}{j_K(x) + j_K(y)} k' \right) \in (j_K(x) + j_K(y)) K$$

et, si  $j_K(x) + j_K(y) = 0$ ,  $x = y = 0$  et donc, dans tous les cas

$$x + y \in (j_K(x) + j_K(y)) K$$

et

$$j_K(x + y) \leq j_K(x) + j_K(y).$$

Par conséquent  $j_K$  est une norme sur  $E$ .

Il en est de même pour  $j_{K^*}$  pour peu que l'on démontre que  $K^*$  a les mêmes propriétés que  $K$ . D'après I.4.b, il nous suffit de remarquer que  $K^*$  est  $O$ -symétrique. Or  $K$  l'est et donc, d'après I.2 appliqué à  $-Id$ ,

$$K^* = (-K)^* = -K^*,$$

i.e.  $K^*$  est  $O$ -symétrique.

Soit  $u$  une forme linéaire sur  $\mathbf{R}^n$  identifiée à un vecteur  $y$  de  $\mathbf{R}^n$ ; par définition de la norme  $N$  sur le dual de  $(\mathbf{R}^n, j_K)$ , on a

$$N(u) = \sup_{j_K(x) \leq 1} u(x) = \sup_{x \in K} \langle x, y \rangle = j_{K^*}(y).$$

Par conséquent  $(\mathbf{R}^n, j_K)^*$  et  $(\mathbf{R}^n, j_{K^*})$  sont isomorphes.

*Remarque : on peut très bien démontrer que  $j_{K^*}$  est une norme à partir de la formule donnée en I.4.b. Néanmoins le seul point délicat est équivalent à la  $O$ -symétrie de  $K^*$ .*

## Question 5

5.a Par définition  $H$  est l'hyperplan d'équation

$$\langle x - p_K(a), a - p_K(a) \rangle = 0.$$

Démontrons l'inégalité caractérisant la projection sur un convexe. Soit  $x$  dans  $K$ , pour tout réel  $\lambda$  dans  $[0; 1]$ , le point  $(1 - \lambda)p_K(a) + \lambda x$  est dans  $K$  et est plus éloigné de  $a$  que ne l'est  $p_K(a)$ , i.e.

$$\|a - (1 - \lambda)p_K(a) - \lambda x\|^2 \geq \|a - p_K(a)\|^2$$

et donc

$$\lambda^2 \|x - p_K(a)\|^2 + 2\lambda \langle a - p_K(a), p_K(a) - x \rangle \geq 0.$$

Il en résulte, pour tout  $\lambda$  dans  $]0; 1[$

$$\langle a - p_K(a), x - p_K(a) \rangle \leq \frac{\lambda}{2} \|x - p_K(a)\|^2$$

et donc

$$\langle a - p_K(a), x - p_K(a) \rangle \leq 0.$$

C'est-à-dire que  $K$  est inclus dans le demi-espace fermé défini par l'inéquation précédente.

En particulier l'intérieur de  $K$  est inclus dans l'intérieur de ce demi-espace, qui n'est autre que l'ensemble des points  $x$  de  $\mathbf{R}^n$  tels que  $\langle a - p_K(a), x - p_K(a) \rangle < 0$  et donc, puisque  $O$  est intérieur à  $K$ ,

$$\langle a - p_K(a), p_K(a) \rangle > 0.$$

Soit donc  $u$  le vecteur

$$u = \frac{1}{\langle a - p_K(a), p_K(a) \rangle} (a - p_K(a)).$$

L'hyperplan  $H$  est défini par l'équation  $\langle x, u \rangle = 1$  et  $K$  est contenu dans le demi-espace  $\langle x, u \rangle \leq 1$  d'après ce qui précède. De plus  $a$  n'appartenant pas à  $K$ ,  $\|a - p_K(a)\|^2$  est strictement positif et donc  $\langle a, u \rangle$  est strictement supérieur à 1. Il en résulte que  $u$  satisfait les propriétés requises.

**5.b**  $(K^*)^*$  est un corps convexe compact contenant  $O$  dans son intérieur d'après la question 4.b. Si  $a$  appartient à  $K$  alors, pour tout  $y$  dans  $K^*$ ,  $\langle a, y \rangle \leq 1$  par définition de  $K^*$ , et donc  $a$  appartient à  $(K^*)^*$ .

Réciproquement, soit  $a$  n'appartenant pas à  $K$ . D'après ce qui précède on peut trouver  $u$  dans  $\mathbf{R}^n$  tel que, pour tout  $x$  dans  $K$ ,  $\langle x, u \rangle$  soit inférieur à 1 (i.e.  $u$  appartient à  $K^*$ ) mais  $\langle u, a \rangle$  soit strictement supérieur à 1. Par conséquent  $a$  n'appartient pas à  $(K^*)^*$ .

En conclusion on a bien montré l'équivalence désirée et donc  $(K^*)^* = K$ .

### Question 6

Notons  $K' = pr_H(K)$ . Puisque la projection  $pr_H$  est une application affine, elle préserve le barycentre et donc  $K'$  est convexe. Soit  $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$  un point de  $K'$  et  $I$  l'ensemble

$$I = \{x_n \in \mathbf{R} \mid (x_1, \dots, x_n) \in K\}.$$

Par définition de  $K'$ ,  $I$  est non vide; par convexité de  $K$ , il est convexe (i.e. est un intervalle); par compacité de  $K$  et continuité des projections  $K'$  et  $I$  sont compacts.  $I$  est donc un segment. Par conséquent

$$\varphi^{K'} = \sup I \quad \text{et} \quad \varphi_K = \inf I$$

sont des quantités finies et on a

$$(x_1, \dots, x_n) \in K \Leftrightarrow \varphi_K(x') \leq x_n \leq \varphi^{K'}(x').$$

Il nous reste donc à démontrer la convexité et la concavité respectives de  $\varphi_K$  et  $\varphi^{K'}$ .

Soit  $x' = (x'_1, \dots, x'_{n-1})$  et  $y' = (y'_1, \dots, y'_{n-1})$  deux points de  $K'$  et  $\lambda$  un réel compris entre 0 et 1.

Comme  $(x'_1, \dots, x'_{n-1}, \varphi_K(x'))$  et  $(y'_1, \dots, y'_{n-1}, \varphi_K(y'))$  sont dans  $K$ , il en est de même leurs barycentres à coefficients positifs et donc

$$\varphi_K(\lambda x' + (1 - \lambda)y') \leq \lambda \varphi_K(x') + (1 - \lambda) \varphi_K(y').$$

De même  $(x'_1, \dots, x'_{n-1}, \varphi^K(x'))$  et  $(y'_1, \dots, y'_{n-1}, \varphi^K(y'))$  sont dans  $K$  et

$$\varphi^K(\lambda x' + (1 - \lambda)y') \geq \lambda \varphi^K(x') + (1 - \lambda)\varphi^K(y').$$

Les fonctions  $\varphi_K$  et  $\varphi^K$  sont donc bien respectivement convexe et concave.

## Partie II — Géométrie des formes quadratiques

### Question 1

Soit  $A$  une matrice symétrique définie positive. De par son caractère symétrique, elle est orthogonalement diagonalisable et, ainsi, on peut trouver  $P$  orthogonale et  $S$  diagonale à diagonale strictement positive telles que  $A$  soit égale à  $P^{-1}SP$ . Par positivité des coefficients diagonaux de  $S$ , on peut trouver une matrice diagonale  $T$  à diagonale strictement positive telle que  $T^2 = S^{-1}$  et donc  $B = P^{-1}TP$  convient.

De plus, pour  $x$  dans  $\mathbf{R}^n$ , on a

$$\langle Ax, x \rangle = \|B^{-1}x\|^2$$

et donc  $x$  appartient à  $E(A)$  si et seulement si  $B^{-1}x$  appartient à la boule unité euclidienne  $B_n$ , i.e. si et seulement si  $x$  appartient à l'image par  $B$  de cette boule. Par conséquent  $E(A)$  est l'image par  $B$  de  $B_n$ .

### Question 2

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices symétriques définies positives et  $\lambda$  un réel compris entre 0 et 1. Par linéarité de la transposition  $\lambda A + (1 - \lambda)B$  est symétrique. De plus, on a

$$\forall X \in E \quad {}^tX(\lambda A + (1 - \lambda)B)X = \lambda {}^tXAX + (1 - \lambda){}^tXBX.$$

La matrice  $\lambda A + (1 - \lambda)B$  est donc symétrique définie positive et, par suite, l'ensemble des matrices symétriques définies positives est une partie convexe de l'espace vectoriel  $M_n(\mathbf{R})$ .

On peut donc se poser la question de la convexité de la fonction  $\det^{-1/2}$  sur cette partie. Comme la log-convexité entraîne la convexité, il suffit de montrer que  $\log(\det)$  est strictement concave.

Soit  $A$ ,  $B$  et  $\lambda$  comme précédemment, avec  $A$  distinct de  $B$  et  $\lambda$  de 0 et 1. D'après le théorème de réduction simultanée, on peut trouver  $P$  dans  $GL_n(\mathbf{R})$  et une matrice  $D$  de  $M_n(\mathbf{R})$  diagonale tels que

$$A = {}^tP.P \quad \text{et} \quad B = {}^tP.D.P.$$

Remarquons que  $D$  n'est pas l'identité, puisque  $A$  et  $B$  ont été choisies distinctes. L'inégalité de concavité (à démontrer) pour  $\log(\det)$  s'écrit alors

$$\lambda \log((\det P)^2) + (1 - \lambda) \log(\det D (\det(P)^2)) > \log(\det(\lambda I_n + (1 - \lambda)D) (\det(P)^2))$$

où  $I_n$  désigne la matrice identité d'ordre  $n$ . Autrement dit on veut montrer

$$(1 - \lambda) \log(\det D) > \log(\det(\lambda I_n + (1 - \lambda)D)).$$

Désignons par  $(d_i)_{1 \leq i \leq n}$  les coefficients diagonaux de  $D$ ; ce sont des réels strictement positifs dont l'un au moins est distinct de 1. L'inégalité cherchée peut se récrire

$$(1 - \lambda) \sum_{i=1}^n \log(d_i) > \sum_{i=1}^n \log(\lambda + (1 - \lambda)d_i).$$

Or la concavité du logarithme entre 1 et un réel strictement positif  $x$  entraîne

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^* \quad (1 - \lambda) \log x > \log(\lambda + (1 - \lambda)x)$$

dès que  $x$  est distinct de 1 et  $\lambda$  de 0 et 1. L'assertion en résulte.

### Question 3

**3.a** Soit  $A$  une matrice symétrique définie positive. Notons  $q_A$  la forme quadratique associée et  $B$  une matrice symétrique définie positive telle que  $B^2 = A^{-1}$ . On a donc  $E(A) = B(B_n)$ .

Si  $u$  est une application linéaire et  $K$  un corps convexe compact, on a  $j_{u(K)} = j_K \circ u^{-1}$  (comme on l'a déjà vu en I.4.a) et donc, pour  $x$  dans  $\mathbf{R}^n$ ,  $j_{E(A)} = \|B^{-1}x\|$  ou encore  $j_{E(A)}(x)^2 = q_A(x)$ .

De plus si  $K$  et  $K'$  sont deux corps convexes compacts, on a  $K \subset K'$  si et seulement si  $j_K \geq j_{K'}$ . Par conséquent  $E(A)$  est inclus dans  $K$  si et seulement si  $q_A \geq j_K^2$ .

Or, à  $x$  fixé, la condition  $\langle x, Ax \rangle \geq j_K(x)^2$  définit un fermé de  $M_n(\mathbf{R})$  par continuité du produit scalaire. Il en est donc de même pour l'intersection de ces fermés pour  $x$  variant dans  $\mathbf{R}^n$ . C'est-à-dire que la condition  $q_A \geq j_K^2$ , ou encore  $E(A) \subset K$ , définit un fermé de  $M_n(\mathbf{R})$ .

Puisque  $E(A) = B(B_n)$ , le volume de  $E(A)$  est celui de  $B_n$  divisé par  $\det(A)^{1/2}$ . En particulier une minoration du volume de  $E(A)$  équivaut à une majoration de  $\det(A)$ . Par continuité du déterminant, cette condition définit un fermé de  $M_n(\mathbf{R})$  et donc, au final,  $\mathcal{E}_{K,v}$  est un fermé.

Remarquons que,  $K$  étant compact, il est inclus dans une boule fermée de centre  $O$  et de rayon  $R$  pour un certain  $R$  strictement positif. Par conséquent, si  $E(A)$  est inclus dans  $K$ ,  $B(B_n)$  est inclus dans cette boule et toutes les valeurs propres de  $B$  sont donc inférieures à  $R$ . Autrement dit toutes les valeurs propres de  $A$  sont supérieures à  $1/R^2$ .

Aussi, pour  $E(A)$  dans  $\mathcal{E}_{K,v}$ , le déterminant de  $A$  est majoré. Soit  $\Delta$  un tel majorant. Une valeur propre de  $A$  est donc majorée par  $\Delta$  divisé par le produit de  $n-1$  minorants des valeurs propres de  $A$ , i.e. par  $\Delta R^{2n-2}$ . Ainsi ces valeurs propres appartiennent au compact  $C = [R^{-2}; \Delta R^{2n-2}]$  de  $\mathbf{R}_+^*$ .

Comme le groupe des matrices orthogonales est compact, il en est de même de l'ensemble des matrices de la forme  ${}^t P.D.P$  avec  $P$  orthogonale et  $D$  diagonale dont les coefficients diagonaux sont tous dans  $C$ . Par conséquent  $\mathcal{E}_{K,v}$  est inclus dans un compact et, étant fermé, il est lui-même compact.

*Remarque : on a vraiment besoin de minorer et de majorer les valeurs propres de  $A$  (ou celles de  $B$ ) car on travaille dans un ensemble non fermé. L'ensemble des matrices symétriques positives est fermé, mais pas celui des matrices symétriques définies positives, qui est l'intersection du fermé précédent et de l'ouvert  $GL_n$ .*

*Cependant on peut aussi montrer la compacité de  $\mathcal{E}_{K,v}$  en tant que sous-ensemble de  $M_n(\mathbf{R})$  et montrer qu'il est inclus dans  $GL_n(\mathbf{R})$ . En effet le déterminant est continu sur  $M_n(\mathbf{R})$  et donc la condition  $\det(B) \geq v/\text{vol}(B_n)$  définit un fermé de  $M_n(\mathbf{R})$ . De plus la condition  $B(B_n) \subset K$  signifie que  $B$  appartient à la boule unité de l'ensemble des applications linéaires de  $(\mathbf{R}^n, \|\cdot\|)$  dans  $(\mathbf{R}^n, j_K)$  et définit donc un ensemble compact (la boule unité d'un espace vectoriel normé de dimension finie est compacte). Il en résulte que*

$$\left\{ B \in \text{Sym}^+(\mathbf{R}^n) \mid \det(B) \geq \frac{v}{\text{vol}(B_n)} \text{ et } B(B_n) \subset K \right\}$$

*est compact dans  $M_n(\mathbf{R})$ . La condition sur le déterminant assure d'une part que c'est un sous-ensemble de  $GL_n(\mathbf{R})$  et d'autre part que c'est un ensemble formé de matrices symétriques définies positives (et non seulement positives). Or  $\mathcal{E}_{K,v}$  est l'image de ce compact par l'application  $B \mapsto B^{-2}$  de  $GL_n(\mathbf{R})$  dans lui-même et est donc compact.*

**3.b** Comme la fonction déterminant est continue sur  $M_n(\mathbf{R})$ , la fonction volume est continue sur  $\mathcal{E}$ . Puisque  $K$  contient un voisinage de  $O$ , il contient un ellipsoïde. Soit  $v$  le volume de cet ellipsoïde. Le maximum de la fonction volume sur l'ensemble des ellipsoïdes inclus dans  $K$  est donc atteint sur  $\mathcal{E}_{K,v}$ . Par continuité de la fonction volume et compacité de  $\mathcal{E}_{K,v}$ , l'existence d'un ellipsoïde de volume maximal inclus dans  $K$  est acquise.

Pour obtenir l'unicité on peut penser à travailler avec une fonction strictement concave. C'est le cas du déterminant sur l'ensemble (convexe) des matrices symétriques définies positives, d'après II.2. En effet  $\det$  en est fait strictement log-concave sur cet ensemble.

Notons  $\mathcal{B}_{K,v}$  l'ensemble des matrices symétriques positives telles que  $B^{-2}$  appartient à  $\mathcal{E}_{K,v}$  ou encore telles que  $B(B_n) \subset K$  et  $\det(B) \geq v/\text{vol}(B_n)$ . Par convexité de  $K$  la condition  $B(B_n) \subset K$  définit un convexe; par concavité du déterminant sur l'ensemble des matrices symétriques définies positives, la condition  $\det(B) \geq v/\text{vol}(B_n)$  définit aussi un convexe de cet ensemble. Par conséquent  $\mathcal{B}_{K,v}$  est l'intersection de ces deux convexes et est lui aussi convexe. La fonction déterminant y atteint donc un unique maximum. Comme  $\text{vol}(E(B^{-2})) = \det(B)\text{vol}(B_n)$ , on en déduit

que  $B \mapsto \text{vol}(E(B^{-2}))$  atteint un unique maximum sur  $\mathcal{B}_{K,v}$ , i.e.  $A \mapsto \text{vol}(E(A))$  atteint un unique maximum sur  $\mathcal{E}_{K,v}$ .

#### Question 4

4.a Soit  $u$  un automorphisme linéaire, de matrice associée  $U$  relativement à la base canonique de  $\mathbf{R}^n$  et  $E(A)$  un ellipsoïde. On a

$$E(A) \subset K \Leftrightarrow u(E(A)) \subset u(K) \Leftrightarrow E({}^tU^{-1}AU^{-1}) \subset u(K)$$

et donc l'ensemble des ellipsoïdes inclus dans  $u(K)$  est tout simplement l'image par  $u$  de l'ensemble des ellipsoïdes inclus dans  $K$ . De plus  $\text{vol}(u(E(A))) = \det(u)\text{vol}(E(A))$  et ainsi, par unicité de l'ellipsoïde de volume maximal, il vient  $E_{u(K)} = u(E_K)$ .

Par conséquent si  $u$  est un automorphisme linéaire préservant  $K$ ,  $E_K = u(E_K)$ . Notons  $q_K$  la forme quadratique associée à  $E_K$ . L'assertion précédente est équivalente à  $q_K \circ u = q_K$ . Par conséquent  $q_K$  est une forme quadratique définie positive invariante par  $Is_K$ .

#### 4.b

1. **La boule unité.**  $E_K$  est égal à  $K$  et  $A$  est l'identité. Par conséquent la forme quadratique euclidienne standard convient.

2. **Le carré.** Comme le carré admet des symétries, il en est de même pour  $E_K$ . En particulier  $E_K$  admet les axes de coordonnées et les bissectrices comme axes de symétrie. Ceci force  $E_K$  à être la boule unité. Il en résulte que la forme quadratique euclidienne standard convient. On pourrait aussi procéder en donnant  $Is_K \simeq D_8$  à condition de l'énoncer d'un point de vue **affine** : en effet  $Is_K$  n'est absolument pas une notion euclidienne.

3. **Le parallélogramme.** On écrit  $K$  comme l'image par une application linéaire  $u$  du carré précédent.  $E_K$  est donc l'image par  $u$  de la boule unité et  $q_K$  peut être définie par  $q_K(x) = \|u^{-1}(x)\|^2$ .

## Partie III — Théorème de Brunn-Minkowski

#### Question 1

1.a Remarquons qu'un parallélépipède standard est un produit d'intervalles  $I_i$  de  $\mathbf{R}$  pour  $i$  entier variant entre 1 et  $n$ .

Notons  $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$  les longueurs des intervalles intervenant dans les parallélépipèdes  $K_0$  et  $K_1$  respectivement. Remarquons que ces nombres sont des réels strictement positifs. Il s'agit de démontrer

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n u_i} + \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n v_i} \leq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n (u_i + v_i)}$$

ou encore, en posant  $t_i = u_i/(u_i + v_i)$  pour  $i$  entier entre 1 et  $n$ ,

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n t_i} + \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n (1 - t_i)} \leq 1.$$

Cette dernière égalité résulte de l'inégalité entre moyennes arithmétique et géométrique.

Le cas d'égalité est obtenu lorsque tous les  $t_i$  (et donc tous les  $1 - t_i$ ) sont égaux, autrement dit lorsque tous les rapports  $u_i/v_i$  sont égaux. Ceci correspond à des parallélépipèdes homothétiques ou translatés.

1.b Remarquons que si  $P$  et  $Q$  sont deux parallélépipèdes standard produits respectivement d'intervalles  $I_i$  et  $J_i$ , alors  $P \cap Q$  contient le produit des intersections  $I_i \cap J_i$ . Par conséquent si  $P$  et  $Q$  sont d'intérieurs disjoints il existe un indice  $i$  tel que  $I_i$  et  $J_i$  le soient également.

Soit donc  $P$  et  $Q$  deux parallélépipèdes standard intervenant dans  $K_0$ . Notons  $k$  un indice obtenu par les considérations précédentes et  $t$  un réel séparant les deux intervalles d'intérieurs disjoints  $I_k$  et  $J_k$  de  $\mathbf{R}$ . L'hyperplan d'équation  $x_k = t$  sépare donc  $K_0$  en deux de telle sorte que chacun des demi-espaces qu'il délimite contienne l'un au moins de ses constituants.

De plus, pour un parallélépipède standard  $P$  l'application qui à  $u$  associe le volume de  $P \cap \{x_k \leq u\}$  est continue (et même affine par morceaux). De sorte que  $\text{vol}(K_1 \cap \{x_k \leq u\})$  et  $\text{vol}(K_1 \cap \{x_k \geq u\})$  le sont aussi. Le rapport de ces deux quantités variant de 0 à l'infini lorsque  $u$  décrit  $\mathbf{R}$ , l'existence d'un  $u$  satisfaisant aux conditions de la question est donc démontrée.

1.c Pour  $m$  entier naturel supérieur ou égal à 2, soit  $H_m$  la propriété : pour tout couple  $(K_0, K_1)$  de compacts réunions de  $n_0$  et  $n_1$  parallélépipèdes standard d'intérieurs disjoints respectivement, avec  $n_0 + n_1 \leq m$ , on a  $\text{vol}(K_0)^{1/n} + \text{vol}(K_1)^{1/n} \leq \text{vol}(K_0 + K_1)^{1/n}$ .

La propriété  $H_2$  est vraie d'après III.1.a.

Pour  $m$  quelconque strictement supérieur à 2, par symétrie du problème, on peut supposer  $n_0 \geq 2$  et par conséquent la question précédente nous permet d'écrire  $K_0$  et  $K_1$  comme réunions disjointes :  $K_0^+ \cup K_0^-$  et  $K_1^+ \cup K_1^-$  où chacun des ensembles intervenant sont des réunions de parallélépipèdes standard en nombres  $n_0^+, n_0^-, n_1^+$  et  $n_1^-$  respectivement avec les conditions  $n_0^+ < n_0, n_0^- < n_0, n_1^+ \leq n_1, n_1^- \leq n_1$  et l'existence d'un scalaire  $\lambda$  tel que

$$\frac{\text{vol}(K_0^+)}{\text{vol}(K_0^-)} = \frac{\text{vol}(K_1^+)}{\text{vol}(K_1^-)} = \lambda.$$

De plus  $K_0^+ + K_1^+$  et  $K_0^- + K_1^-$  sont d'intérieurs disjoints puisqu'ils sont séparés par l'hyperplan  $x_k = t + u$  et donc

$$\text{vol}(K_0 + K_1) \geq \text{vol}(K_0^+ + K_1^+) + \text{vol}(K_0^- + K_1^-).$$

De plus

$$\begin{aligned} \left(\text{vol}(K_0)^{1/n} + \text{vol}(K_1)^{1/n}\right)^n &= \frac{\lambda}{1+\lambda} \left(\text{vol}(K_0)^{1/n} + \text{vol}(K_1)^{1/n}\right)^n + \frac{1}{1+\lambda} \left(\text{vol}(K_0)^{1/n} + \text{vol}(K_1)^{1/n}\right)^n \\ &= \left(\text{vol}(K_0^+)^{1/n} + \text{vol}(K_1^+)^{1/n}\right)^n + \left(\text{vol}(K_0^-)^{1/n} + \text{vol}(K_1^-)^{1/n}\right)^n \end{aligned}$$

et donc la propriété est héréditaire.

Le principe de récurrence permet donc de conclure.

### Question 2

Soit  $P$  l'hypercube  $[-1/2; 1/2]^n$  inclus dans  $\mathbf{R}^n$  et  $\varepsilon$  un réel strictement positif. Si  $x$  appartient à  $\mathbf{R}^n$  on note  $\tau_x$  la translation de vecteur  $x$ . Notons  $X_0$  et  $X_1$  les sous-ensembles de  $\mathbf{Z}^n$  tels que  $\varepsilon\tau_x(P)$  rencontre  $K_0$  ou  $K_1$  respectivement. Par compacité de  $K_0$  et  $K_1$ ,  $X_0$  et  $X_1$  sont finis. Notons  $K_0^\varepsilon$  et  $K_1^\varepsilon$  les compacts obtenus par réunion finie des parallélépipèdes standard d'intérieurs disjoints  $\varepsilon\tau_x(P)$  pour  $x$  dans  $X_0$  ou  $X_1$  respectivement.

On a ainsi

$$K_0 \subset K_0^\varepsilon \subset K_0 + 2\varepsilon P \quad \text{et} \quad K_1 \subset K_1^\varepsilon \subset K_1 + 2\varepsilon P.$$

Puisque tout compact est mesurable, les deux inégalités de gauche entraînent

$$\text{vol}(K_0) \leq \text{vol}(K_0^\varepsilon) \quad \text{et} \quad \text{vol}(K_1) \leq \text{vol}(K_1^\varepsilon).$$

Il en résulte, grâce à la question précédente,

$$\left(\text{vol}(K_0)^{1/n} + \text{vol}(K_1)^{1/n}\right)^n \leq \left(\text{vol}(K_0^\varepsilon)^{1/n} + \text{vol}(K_1^\varepsilon)^{1/n}\right)^n \leq \text{vol}(K_0^\varepsilon + K_1^\varepsilon).$$

De plus, en sommant les deux doubles inégalités ensemblistes précédentes, on obtient

$$K_0 + K_1 \subset K_0^\varepsilon + K_1^\varepsilon \subset K_0 + K_1 + 4\varepsilon P$$

et, par conséquent,

$$\text{vol}(K_0 + K_1) \leq \text{vol}(K_0^\varepsilon + K_1^\varepsilon) \leq \text{vol}(K_0 + K_1 + 4\varepsilon P).$$

Faisons maintenant varier  $\varepsilon$ . Le théorème de convergence dominée (ou de convergence monotone) entraîne

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{vol}(K_0 + K_1 + 4\varepsilon P) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{vol}(K_0^\varepsilon + K_1^\varepsilon) = \text{vol}(K_0 + K_1)$$

et le théorème de Brunn-Minkowski résulte donc de l'inégalité

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^* \quad \left( \text{vol}(K_0)^{1/n} + \text{vol}(K_1)^{1/n} \right)^n \leq \text{vol}(K_0^\varepsilon + K_1^\varepsilon).$$

## Partie IV — Étude de la quantité $\text{vol}(K)\text{vol}(K^*)$

### Question 1

1.a Soit  $M$  le point de coordonnées  $(x, 0, \dots, 0)$ . Si  $|x| \leq 1$ ,  $M$  appartient à  $B_n$  et donc à  $K$ . Par symétrie,  $M$  est dans  $K$  si et seulement si  $-M$  l'est. Pour étudier l'appartenance de  $M$  à  $K$ , on peut donc supposer  $x$  supérieur à 1. En particulier il existe  $u$  entre 0 et  $\pi/2$  tel que  $x = 1/\cos(u)$ .

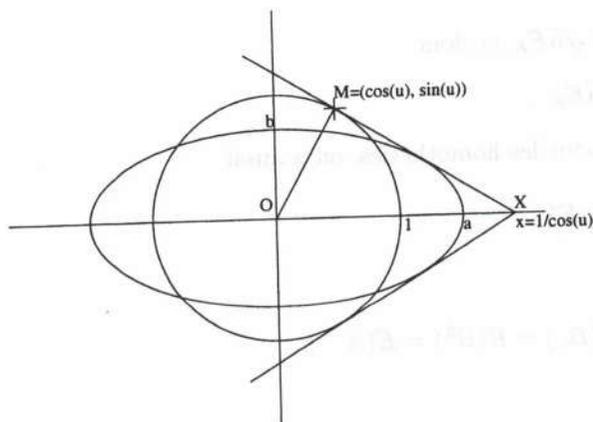
Si  $K$  contient  $B_n$  et  $M$ , il contient l'enveloppe convexe  $K_x$  de  $B_n$  et du point  $M$  par convexité. Soit  $E_{a,b}$  l'ellipsoïde d'équation

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2 + \dots + x_n^2}{b^2} = 1$$

avec  $a$  et  $b$  des réels strictement positifs. Son volume est  $ab^{n-1}$  fois celui de  $B_n$ .

On va montrer que  $x$  est inférieur à  $\sqrt{n}$  en montrant que, sinon, on peut trouver  $E_{a,b}$  de sorte que  $E_{a,b}$  soit inclus dans  $K_x$  (et donc a fortiori dans  $K$ ) mais tel que  $ab^{n-1}$  soit supérieur à 1.

Fixons  $a$  et  $b$ , avec  $x \geq a \geq 1 \geq b > 0$ . Par invariance par symétrie de centre  $O$  ainsi que par les isométries qui préservent l'axe  $(Ox_1)$ ,  $E_{a,b}$  est inclus dans  $K_x$  si et seulement ses points de coordonnées  $(x_1, x_2, 0, \dots, 0)$  le sont, pour  $x_1$  et  $x_2$  positifs. Autrement dit on peut étudier l'inclusion de  $E_{a,b}$  dans  $K_x$  en se restreignant à la dimension 2 et en se limitant au premier quadrant. Pour la suite du calcul, on se place donc dans ce cas.



Notons  $X$  le point de coordonnées  $(x, 0)$ . Par définition de la notion de (co)sécante, les tangentes au cercle passant par  $X$  ont pour équation

$$x_1 \cos(u) \pm x_2 \sin(u) = 1.$$

On le vérifie facilement puisque la distance de  $O$  à ces droites est 1 et qu'elles passent par  $X$ . Les points de tangences ont respectivement pour coordonnées  $(\cos(u), \pm \sin(u))$ .

Notons  $M$  le point de coordonnées  $(\cos(u), \sin(u))$ . L'intersection de  $K_x$  avec le premier quadrant contient donc le secteur angulaire compris entre  $(OM)$  et l'axe des ordonnées ainsi que le triangle  $(OMX)$ .

Remarquons maintenant que, si la droite  $(MX)$  est tangente à  $E_{a,b}$ , alors, par convexité de l'ellipse,  $E_{a,b}$  est sous la droite  $(MX)$ . Or la tangente en  $(X_1, Y_1)$  à  $E_{a,b}$  admet pour équation  $x_1 X_1/a^2 + x_2 Y_1/b^2 = 1$  et c'est donc  $(MX)$  si et seulement si  $X_1 = a^2 \cos(u)$  et  $X_2 = b^2 \sin(u)$ . Par conséquent  $(MX)$  est tangente à  $E_{a,b}$  si et seulement si  $a^2 \cos^2(u) + b^2 \sin^2(u) = 1$  ou encore

$$a^2 = x^2 - b^2(x^2 - 1) = b^2 + x^2(1 - b^2) = 1 + (x^2 - 1)(1 - b^2).$$

Si on choisit  $b$  quelconque strictement entre 0 et 1 et  $a$  défini par la formule précédente, on a  $a > 1$  d'après le quatrième membre et  $a < x$  d'après le second. Par la suite on supposera un tel choix fait.

Prenons maintenant un point  $P$  quelconque de  $E_{a,b}$  appartenant au premier quadrant. On peut le prendre de coordonnées  $(a \cos(v), b \sin(v))$  avec  $v$  entre 0 et  $\pi/2$ . Si  $v$  est inférieur à  $u$ , alors  $P$  appartient au triangle  $(OMX)$  d'après ce qui précède. Si  $v$  est supérieur à  $u$  alors, d'après le troisième membre des égalités définissant  $a^2$ ,

$$a^2 \cos^2(v) + b^2 \sin^2(v) = (a^2 - b^2) \cos^2(v) + b^2 \leq (a^2 - b^2) \cos^2(u) + b^2 = \frac{a^2 - b^2}{x^2} + b^2 = 1$$

et donc  $P$  appartient au disque unité. Donc, si  $a^2 = b^2 + x^2(1 - b^2)$ , alors  $E_{a,b}$  est inclus dans  $K_x$ .

En revenant à notre étude en dimension quelconque, on a, avec le choix de  $a$  précédent,

$$\text{vol}(E_{a,b}) \leq \text{vol}(B_n) \Leftrightarrow 1 \geq (ab^{n-1})^2 = b^{2n} + x^2(b^{2(n-1)} - b^{2n})$$

pour tout  $b$  entre 0 et 1, et donc

$$\text{vol}(E_{a,b}) \leq \text{vol}(B_n) \Leftrightarrow x^2 \leq \frac{1 - b^{2n}}{b^{2(n-1)} - b^{2n}} = \frac{b^{-2n} - 1}{b^{-2} - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} b^{-2k}.$$

Par conséquent si  $B_n$  est l'ellipsoïde maximal inclus dans  $K$ , alors  $x \leq \sqrt{n}$ , ce qui est l'assertion demandée.

**1.b** Par unicité de  $E_K$ , si  $P$  appartient à  $GL_n(\mathbf{R})$ , alors  $E_{P(K)} = P(E_K)$ . Comme  $E_K$  est un ellipsoïde, on a  $E_K = E(A)$  pour une certaine matrice définie positive  $A$ . Si  $B$  est l'unique matrice symétrique définie positive telle que  $B^2 = A^{-1}$ , on a donc  $E_K = B(B_n)$ .

Soit maintenant  $x$  dans  $K$  et  $u$  une isométrie telle que  $u(B^{-1}x)$  appartient à l'axe  $(Ox_1)$ . Comme  $B_n$  est invariante par isométrie, on a  $E_K = B \circ u^{-1}(B_n)$  et donc  $E_{u \circ B^{-1}(K)} = B_n$ . D'après ce qui précède, on a donc  $\|u(B^{-1}x)\| \leq \sqrt{n}$ . Or

$$\begin{aligned} \|u(B^{-1}x)\|^2 &= \|B^{-1}x\|^2 \\ &= {}^t(B^{-1}x) \cdot B^{-1}x \\ &= {}^t x B^{-2} x \\ &= {}^t x A x \end{aligned}$$

et donc  $x/\sqrt{n}$  appartient à  $E(A) = E_K$ , i.e.  $K$  est inclus dans  $\sqrt{n}E_K$  et donc

$$E_K \subset K \subset \sqrt{n}E_K.$$

Comme la polarité renverse les inclusions, en utilisant I.2 pour les homothéties, on a aussi

$$\frac{1}{\sqrt{n}}E_K^* \subset K^* \subset E_K^*.$$

De plus, toujours par I.2,

$$E_K^* = (B(B_n))^* = B^{-1}(B_n^*) = B^{-1}(B_n) = E(B^2) = E(A^{-1}).$$

Par conséquent

$$\text{vol}(K)\text{vol}(K^*) \geq \frac{\text{vol}(E(A))\text{vol}(E(A^{-1}))}{(\sqrt{n})^n} = \frac{\det(A)^{-1/2} \det(A)^{1/2} \text{vol}(B_n)^2}{n^{n/2}} = \frac{\text{vol}(B_n)^2}{n^{n/2}}.$$

## Question 2

**2.a** Soit  $(\xi, \lambda)$  dans  $H \times \mathbf{R}$ . On a

$$\begin{aligned} (\xi, \lambda) \in K^* &\Leftrightarrow \forall t \in I \quad \forall x \in K_t \quad (\xi, x) + \lambda t \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \forall t \in I \quad \lambda t \leq \varphi_\xi^K(t) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \varphi_\xi^K(0) \\ \forall t \in I \cap \mathbf{R}_+^* & \lambda \leq \varphi_\xi^K(t)/t \\ \forall t \in I \cap \mathbf{R}_-^* & \lambda \geq \varphi_\xi^K(t)/t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \xi \in (K_0)^* \\ \lambda \leq \inf_{t>0} \varphi_\xi^K(t)/t \\ \lambda \geq \sup_{t>0} \varphi_\xi^K(-t)/(-t) \end{cases} \end{aligned}$$

et donc

$$(\xi, \lambda) \in K^* \Leftrightarrow \left( \xi \in (K_0)^* \quad \text{et} \quad - \inf_{t>0} \frac{\varphi_\xi^K(-t)}{t} \leq \lambda \leq \inf_{t>0} \frac{\varphi_\xi^K(t)}{t} \right).$$

2.b D'après le théorème de Fubini, par mesurabilité des compacts, on a

$$\text{vol}(K') = \int_{\mathbf{R}} \text{vol}(K'_t) dt.$$

De plus le théorème de Brunn-Minkowski entraîne

$$\text{vol}(K'_t)^{1/(n-1)} \geq \frac{1}{2} \left( \text{vol}(K_t)^{1/(n-1)} + \text{vol}(-K_t)^{1/(n-1)} \right) = \text{vol}(K_t)^{1/(n-1)}$$

et donc

$$\text{vol}(K') \geq \int_{\mathbf{R}} \text{vol}(K_t) dt = \text{vol}(K).$$

Remarquons que la fonction qui à  $t$  associe  $\text{vol}(K_t)^{1/(n-1)}$  est concave sur  $I$ ; en effet si  $t$  et  $t'$  appartiennent à  $I$  et si  $\lambda$  est un réel compris entre 0 et 1, par convexité de  $K$ ,  $K_{\lambda t + (1-\lambda)t'}$  contient  $\lambda K_t + (1-\lambda)K_{t'}$  et l'assertion résulte du théorème de Brunn-Minkowski. Par conséquent cette fonction est continue sur l'intérieur de  $I$  et on ne peut donc avoir l'égalité  $\text{vol}(K') = \text{vol}(K)$  que si, pour tout  $t$  intérieur à  $I$ ,  $K_t$  et  $-K_t$  sont images l'un de l'autre par une translation ou par une homothétie (de rapport positif, c'était sous-entendu en partie III). Comme  $K_t$  et  $K_{-t}$  ont même volume, ceci est équivalent au fait qu'ils soient translatés l'un de l'autre. Si on note  $2\mu_t$  le vecteur tel que  $K_t = 2\mu_t - K_t$ ,  $\mu_t$  est le centre de symétrie cherché.

2.c La fonction  $t \mapsto \sup \left( 0, \inf_{t>0} \frac{\varphi_{\xi}^K(t)}{t} + \inf_{t>0} \frac{\varphi_{\xi}^K(-t)}{t} \right)$  représente la longueur de l'intervalle  $\{\lambda \in \mathbf{R} \mid (\xi, \lambda) \in K\}$  et est donc une fonction concave d'après I.6. Aussi est-ce une fonction mesurable et il en résulte

$$\text{vol}(K^*) = \int_{K_0^*} \sup \left( 0, \inf_{t>0} \frac{\varphi_{\xi}^K(t)}{t} + \inf_{t>0} \frac{\varphi_{\xi}^K(-t)}{t} \right) d\xi.$$

Appliquons ce qui précède à  $K'$ . On a  $K'_0 = (K_0 + K_0)/2 = K_0$  et donc  $(K'_0)^* = K_0^*$ . Il s'en suit

$$(\xi, \lambda) \in (K')^* \Leftrightarrow \left( \xi \in (K'_0)^* \text{ et } -\inf_{t>0} \frac{\varphi_{\xi}^{K'}(-t)}{t} \leq \lambda \leq \inf_{t>0} \frac{\varphi_{\xi}^{K'}(t)}{t} \right)$$

et, par symétrie de  $K'$ ,

$$\text{vol}((K')^*) = \int_{K_0^*} \sup \left( 0, \inf_{t>0} \frac{\varphi_{\xi}^{K'}(t)}{t} + \inf_{t>0} \frac{\varphi_{\xi}^{K'}(-t)}{t} \right) d\xi = 2 \int_{K_0^*} \sup \left( 0, \inf_{t>0} \frac{\varphi_{\xi}^{K'}(t)}{t} \right) d\xi.$$

Soit  $t$  dans  $I$ . Par construction de  $K'_t$ , on a

$$\varphi_{\xi}^{K'}(t) = \frac{1}{2} (\varphi_{\xi}^K(t) + \varphi_{\xi}^K(-t))$$

et donc

$$2 \inf_{t>0} \frac{\varphi_{\xi}^{K'}(t)}{t} \geq \inf_{t>0} \frac{\varphi_{\xi}^K(t)}{t} + \inf_{t>0} \frac{\varphi_{\xi}^K(-t)}{t}.$$

En intégrant l'inégalité précédente sur  $K_0^*$ , on obtient

$$\text{vol}((K')^*) \geq \text{vol}(K^*).$$

Par conséquent

$$\text{vol}((K')^*) \text{vol}(K') \geq \text{vol}(K^*) \text{vol}(K).$$

Par maximalité de  $\text{vol}(K)\text{vol}(K^*)$ , on a donc  $\text{vol}(K) = \text{vol}(K')$  et  $\text{vol}(K^*) = \text{vol}((K')^*)$ . En particulier  $K_t$  admet un centre de symétrie pour tout  $t$  dans l'intérieur de  $I$ , d'après la question précédente.

**2.d** Indiquons tout d'abord l'idée de la démonstration (précisant l'argument de Jean Saint-Raymond). Par égalité dans l'inégalité entre les intégrales donnant  $\text{vol}(K^*)$  et  $\text{vol}((K')^*)$ , les intégrands coïncident. Ceci impose que les infima des fonctions  $t \mapsto \varphi_\xi^K(t)/t$  et  $t \mapsto \varphi_{-\xi}^K(t)/t$  sont atteints en même temps. En faisant varier  $\xi$  dans un segment (intersection d'une droite avec  $K$ ), cela impose que la différence de ces deux fonctions a une dérivée à gauche et à droite nulle en tout point (dans l'intérieur de  $I$ ). Autrement dit  $\varphi_\xi$  et  $\varphi_{-\xi}$  diffèrent d'une fonction linéaire.

Munissons  $E$  de la norme  $j_K$ . La boule unité de  $E$  est alors  $K$ , d'après I.3, et son intersection avec  $H$  est donc  $K_0$ . Si  $\xi$  appartient à  $K_0^*$ , c'est une forme linéaire sur  $H$  de norme inférieure à 1. Le théorème de Hahn-Banach assure donc qu'on peut la prolonger en une forme linéaire sur  $E$  de norme inférieure à 1, i.e. il existe un réel  $\lambda$  tel que  $(\xi, \lambda)$  appartienne à  $K^*$ .

Par conséquent on peut se passer du sup dans la formule précédente :

$$\text{vol}(K^*) = \int_{K_0^*} \left( \inf_{t>0} \frac{\varphi_\xi^K(t)}{t} + \inf_{t>0} \frac{\varphi_\xi^K(-t)}{t} \right) d\xi.$$

En appliquant ce qui précède à  $K'$ , on a

$$\text{vol}((K')^*) = 2 \int_{K_0^*} \inf_{t>0} \frac{\varphi_\xi^{K'}(t)}{t} d\xi.$$

Par maximalité de  $\text{vol}(K)\text{vol}(K^*)$ , on déduit des deux questions précédentes  $\text{vol}(K^*) = \text{vol}((K')^*)$ . Les intégrands étant des fonctions concaves (ainsi qu'il a été dit dans la question précédente), ils sont continus sur l'intérieur de leur ensemble de définition, aussi  $\text{vol}(K^*) = \text{vol}((K')^*)$  si et seulement si

$$\forall \xi \in H \quad j_{K_0^*}(\xi) < 1 \Rightarrow \inf_{t>0} \frac{\varphi_\xi^K(t)}{t} + \inf_{t>0} \frac{\varphi_\xi^K(-t)}{t} = 2 \inf_{t>0} \frac{\varphi_\xi^{K'}(t)}{t}.$$

Pour  $\xi$  dans  $H$  posons  $\alpha_\xi = 1 - \varphi_\xi^K$  et  $\beta_\xi = 1 - \varphi_\xi^{K'}$ . On a donc

$$\forall t \in I \quad \alpha_\xi(t) = \sup_{x \in K_t} \langle \xi, x \rangle \quad \text{et} \quad \beta_\xi(t) = \frac{\alpha_\xi(t) + \alpha_\xi(-t)}{2}.$$

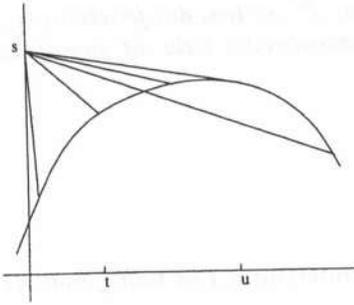
Les fonctions  $\alpha_\xi$  et  $\beta_\xi$  sont concaves et on a

$$\forall \xi \in H \quad j_{K_0^*}(x) < 1 \Rightarrow \sup_{t>0} \frac{\alpha_\xi(t) - 1}{t} + \sup_{t>0} \frac{\alpha_\xi(-t) - 1}{t} = 2 \sup_{t>0} \frac{\beta_\xi(t) - 1}{t}.$$

Soit  $\xi$  dans  $H$  et  $s$  un réel strictement positif. On a  $\alpha_\xi/s = (\alpha_\xi)/s$  et  $j_{K_0^*}(\xi/s) = j_{K_0^*}(\xi)/s = \alpha_\xi(0)/s$ . On en déduit

$$\forall \xi \in H \quad \forall s > \alpha_\xi(0) \quad \sup_{t>0} \frac{\alpha_\xi(t) - s}{t} + \sup_{t>0} \frac{\alpha_\xi(-t) - s}{t} = 2 \sup_{t>0} \frac{\beta_\xi(t) - s}{t}.$$

Par concavité, pour  $s = \alpha_\xi(0)$ , les deux membres sont égaux à  $(\alpha_\xi)'_d(0) - (\alpha_\xi)'_g(0)$  (ce qui est la même chose que  $2(\beta_\xi)'_d(0)$ , par définition de  $\beta_\xi$ ) et on peut donc remplacer l'inégalité stricte  $s > \alpha_\xi(0)$  par une inégalité large. De plus la fonction dont on prend le supremum dans le second membre est la somme des deux fonctions apparaissant dans le premier. Aussi, si elle atteint son maximum en un point  $u$ , alors les deux termes du premier membre aussi.



Soit  $\gamma$  une fonction concave sur un intervalle réel  $X$ . Elle est dérivable à droite et à gauche en tout point intérieur de  $X$ . Si  $s$  est un réel et  $u$  est dans  $X$ , on a

$$\sup_{t \in X} \frac{\gamma(t) - s}{t} = \frac{\gamma(u) - s}{u} \Leftrightarrow \gamma'_d(u) \leq \frac{\gamma(u) - s}{u} \leq \gamma'_g(u)$$

puisque  $(\gamma(t) - s)/t$  représente la pente de la droite joignant  $(0, s)$  à  $(t, \gamma(t))$ . Notons que, si  $u$  est une borne de  $X$ , la double inégalité doit se lire :  $\gamma$  est dérivable à gauche ou à droite (selon la borne) en  $u$  et l'inégalité concernant cette dérivée est vérifiée.

Soit  $\xi$  dans  $H$ ,  $t$  dans l'intérieur de  $I \cap \mathbf{R}_+$  et  $\lambda \in \mathbf{R}$  tel que  $(\beta_\xi)'_d(t) \leq \lambda \leq (\beta_\xi)'_g(t)$ . Posons  $s = \beta_\xi(t) - \lambda t$ , alors la fonction

$$u \mapsto \frac{\beta_\xi(u) - s}{u}$$

atteint son maximum en  $t$ . De plus on a  $\alpha_\xi(0) = \beta_\xi(0)$  et donc  $s - \alpha_\xi(0) = \beta_\xi(t) - \beta_\xi(0) - \lambda t$ . Par concavité de  $\beta_\xi$ , il vient  $s \geq \alpha_\xi(0)$ . On en déduit que

$$u \mapsto \frac{\alpha_\xi(u) - s}{u}$$

atteint aussi son maximum en  $t$  et donc

$$(\alpha_\xi)'_d(t) \leq \frac{\alpha_\xi(t) - s}{t} \leq (\alpha_\xi)'_g(t).$$

Il vient

$$t((\alpha_\xi)'_d(t) - \lambda) \leq \alpha_\xi(t) - \beta_\xi(t) \leq t((\alpha_\xi)'_g(t) - \lambda)$$

et donc

$$t(\alpha_\xi - \beta_\xi)'_d(t) \leq (\alpha_\xi - \beta_\xi)(t) \leq t(\alpha_\xi - \beta_\xi)'_g(t).$$

Soit enfin  $\gamma$  l'application définie sur  $I$  par

$$\gamma(t) = \frac{\alpha_\xi(t) - \beta_\xi(t)}{t} = \frac{\alpha_\xi(t) - \alpha_\xi(-t)}{2t} = \frac{\varphi_\xi^K(-t) - \varphi_\xi^K(t)}{2t}.$$

L'encadrement précédent entraîne  $\gamma'_d \leq 0 \leq \gamma'_g$  sur l'intérieur de  $I \cap \mathbf{R}_+$  et donc, par le théorème des accroissements finis,  $\gamma$  y est constante. Autrement dit il existe un réel  $\mu_\xi$  tel que, pour tout  $t$  intérieur à  $I \cap \mathbf{R}_+$ , on ait

$$\varphi_\xi^K(-t) - \varphi_\xi^K(t) = \mu_\xi t.$$

*Remarques :*

1. On peut se passer du théorème de Hahn-Banach en raisonnant directement sur les fonctions convexes : si  $\xi$  appartient à  $K_0^*$ , alors  $\varphi_\xi^K(0) \geq 0$ . Et on a donc, pour  $t$  dans  $I \cap \mathbf{R}_+^*$  et par dérivabilité à gauche et à droite des fonctions convexes,

$$\frac{\varphi_\xi^K(t)}{t} \geq \frac{\varphi_\xi^K(t) - \varphi_\xi^K(0)}{t} \geq (\varphi_\xi^K)'_d(0)$$

par convexité de  $\varphi_\xi^K$ . De même, toujours pour  $t$  dans  $I \cap \mathbf{R}_+^*$ ,

$$\frac{\varphi_\xi^K(-t)}{t} \geq -\frac{\varphi_\xi^K(-t) - \varphi_\xi^K(0)}{-t} \geq -(\varphi_\xi^K)'_g(0).$$

Par conséquent, pour  $\xi$  dans  $K_0^*$ , toujours par convexité,

$$\inf_{t>0} \frac{\varphi_\xi^K(t)}{t} + \inf_{t>0} \frac{\varphi_\xi^K(-t)}{t} \geq (\varphi_\xi^K)'_d(0) - (\varphi_\xi^K)'_g(0) \geq 0.$$

2. On peut raisonner, ainsi qu'il est naturel à partir de l'énoncé, directement sur  $\varphi_\xi^K$  au lieu des fonctions  $\alpha_\xi$  et  $\beta_\xi$  introduites ici. L'avantage de ces dernières est de vérifier une certaine homogénéité. Cela dit pour  $\xi$  dans  $H^*$ ,  $\lambda$  réel strictement positif et  $t$  dans  $I$ , on a

$$\varphi_{\xi/\lambda}^K(t) = \frac{1}{\lambda} (\varphi_\xi^K(t) + \lambda - 1)$$

et cela permet de mener les mêmes calculs.

2.e Puisque, pour  $t$  intérieur  $I$ , on a  $K_t = 2\mu_t + K_{-t}$ , il en résulte que, pour tout  $t$  intérieur à  $I$  et tout  $\xi$  dans  $H^*$ , on a

$$\varphi_\xi^K(t) = -2\langle \xi, \mu_t \rangle + \varphi_\xi^K(-t)$$

et, si  $t$  est de plus strictement positif,

$$\langle \xi, \frac{\mu_t}{t} \rangle = \frac{1}{2} \mu_\xi$$

est indépendant de  $t$ .

Il en résulte qu'il existe  $\mu$  dans  $H$  tel que  $\mu_t = t\mu$  pour tout  $t$  dans l'intérieur de  $I$ , strictement positif.  $K_0$  étant  $O$ -symétrique, cette égalité est encore valable pour  $t$  strictement négatif et pour  $t$  nul.

Soit  $s$  l'application de  $\mathbf{R}^n$  dans lui-même définie par  $s(x, t) = -(2t\mu - x, t) = (x - 2t\mu, -t)$ . C'est un endomorphisme involutif. De plus, si  $t$  est intérieur à  $I$  et si  $x$  appartient à  $K_t$ , alors  $x$  est dans  $2t\mu - K_t$ , i.e.  $-(2t\mu - x)$  appartient à  $-K_t = K_{-t}$  et donc  $s(x, t)$  appartient à  $K$ .

Comme  $s$  est bi-continue, cela entraîne que  $s$  laisse l'intérieur de  $K$  globalement invariant. Par régularité des convexes non vides (i.e.  $K$  est l'adhérence de son intérieur) et par bi-continuité de  $s$ , cette dernière laisse  $K$  globalement invariant. De plus les restrictions de  $s$  à  $H$  et  $\mathbf{R}(\mu, 1)$  étant l'identité et moins l'identité,  $s$  est bien une symétrie par rapport à  $H$ .

Enfin pour tout scalaire strictement positif  $\lambda$ , par linéarité de  $s$ ,  $s$  laisse  $\lambda K$  globalement invariant et donc, par définition de  $j_K$ ,  $j_K(s(x, t)) = j_K(x, t)$ , i.e.  $s$  est une isométrie pour  $j_K$ .

*Remarque : on peut se passer de la régularité des convexes en se restreignant à la dimension 1. Si  $u$  est une borne de  $I$  et  $x$  un point de  $H$ , par convexité et compacité de  $K$ ,  $x$  appartient à  $K_u$  si et seulement si l'intervalle  $[0; x[$  est inclus dans  $K$ . En particulier  $x$  appartient à  $K_u$  si et seulement si  $2u\mu - x$  y appartient, par symétrie des  $K_t$  pour  $t$  entre 0 et  $u$ . Finalement  $K_t$  admet  $t\mu$  comme centre de symétrie pour tout  $t$  dans  $I$ .*

2.f Soit  $u$  un isomorphisme linéaire;  $K$  a les propriétés demandées si et seulement si  $u(K)$  les a. On peut donc supposer que  $E_K$  est la sphère unité et donc que la norme euclidienne est invariante par le groupe des  $j_K$ -isométries, autrement dit le groupe des  $j_K$ -isométries est inclus dans le groupes des isométries (euclidiennes).

Soit  $a$  et  $x$  dans  $\mathbf{R}^n$  distincts mais de même norme et  $H$  l'hyperplan médiateur de  $a$  et  $x$ . D'après ce qui précède, il existe une symétrie  $s$  par rapport à  $H$  et  $j_K$  isométrique. C'est donc aussi une isométrie, i.e. une symétrie orthogonale, et donc  $s(a) = x$ . D'où  $j_K(x) = j_K(s(a)) = j_K(a)$ .

Par multiplicativité il en résulte que  $x \mapsto j_K(x)/\|x\|$  est constante sur  $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ . Autrement dit  $j_K$  est proportionnel à la norme, a priori sur  $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$  mais donc sur  $\mathbf{R}^n$  tout entier.

Par conséquent  $K$ , la boule unité de  $j_K$ , est une sphère (c'est donc la sphère unité, par hypothèse sur  $E_K$ ) et on a

$$\text{vol}(K)\text{vol}(K^*) = \text{vol}(B_n)^2.$$

*Remarque : on peut très bien raisonner directement en introduisant une forme quadratique  $q$  invariante par le groupe des  $j_K$ -isométries et en travaillant avec  $O(q)$ , le groupe  $q$ -orthogonal.*

### Question 3

Pour obtenir l'inégalité demandée, en tenant compte de 1.b et de 2.f, il suffit de montrer que la fonction  $v$ , définie pour  $K$  dans  $\mathcal{C}$  par  $v(K) = \text{vol}(K)\text{vol}(K^*)$ , atteint son maximum.

On va tout d'abord montrer qu'elle est continue. Soit  $K$  dans  $\mathcal{C}$ . Un voisinage de  $K$  est donné, pour tout  $\varepsilon$  strictement positif, par

$$V_\varepsilon = \{K' \in \mathcal{C} \mid (1 + \varepsilon)^{-1}K \subset K' \subset (1 + \varepsilon)K\}.$$

Or, pour  $K'$  dans ce voisinage, on a

$$(1 + \varepsilon)^{-1}K^* \subset (K')^* \subset (1 + \varepsilon)K^*$$

et donc

$$(1 + \varepsilon)^{-2n} \text{vol}(K) \text{vol}(K^*) \leq \text{vol}(K') \text{vol}((K')^*) \leq (1 + \varepsilon)^{2n} \text{vol}(K) \text{vol}(K^*).$$

Par conséquent  $v$  est continue.

On va maintenant montrer qu'on peut restreindre l'étude à un compact de  $\mathcal{C}$ . Soit donc

$$\mathcal{C} = \{K \in \mathcal{C} \mid B_n \subset K \subset \sqrt{n}B_n\}.$$

Par définition de la topologie sur  $\mathcal{C}$ , c'est bien un compact. De plus si on se donne  $K$  dans  $\mathcal{C}$  et  $A$  un automorphisme de  $\mathbf{R}^n$  qui envoie  $E_K$  sur  $B_n$ , alors  $A(K)$  appartient à  $\mathcal{C}$  et on a  $v(A(K)) = v(K)$ . Il en résulte  $\sup_{\mathcal{C}} v = \sup_{\mathcal{C}} v = \max_{\mathcal{C}} v = \max_{\mathcal{C}} v$ , i.e.  $v$  atteint son maximum.

Finalement, pour tout corps convexe compact  $K$ , on a

$$\frac{\text{vol}(B_n)^2}{n^{n/2}} \leq \text{vol}(K) \text{vol}(K^*) \leq \text{vol}(B_n)^2.$$

*Remarque :* l'application  $K \mapsto \log(j_K)$  envoie  $\mathcal{C}$  dans l'espace  $X$  des fonctions continues de la sphère unité de  $\mathbf{R}^n$  dans  $\mathbf{R}$ . Si on munit  $X$  de la norme infinie (ce qui est licite par compacité de la sphère unité), on obtient un espace métrique et  $d$  est la distance sur  $\mathcal{C}$  obtenue par image réciproque.  $(\mathcal{C}, d)$  est donc bien un espace métrique, isomorphe à un sous-espace de  $X$ .

Pour démontrer la compacité du voisinage de  $K$  introduit dans l'énoncé, il suffit de le voir dans  $X$ . On utilise pour cela le théorème d'Ascoli. En effet l'ensemble des fonctions  $\log(j_{K'})$ , pour  $K'$  tel que  $aK \subset K' \subset bK$ , est équicontinu et fermé, et donc compact.



## Composition d'Analyse et Probabilités

**Durée : 6 heures**

*Calculatrice électronique de poche, y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique, à fonctionnement autonome, non imprimante autorisée conformément à la circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999*

*L'usage de tout document et de tout autre matériel électronique est interdit.*

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies.

Le but de ce problème est l'étude d'une équation intégral-différentielle, le problème de Milne-Schwarzschild (MSa-b) ci-dessous, qui intervient en Astrophysique pour décrire la diffusion de la lumière dans les atmosphères stellaires. Parallèlement, le problème fait étudier une méthode de résolution, due à Wiener et Hopf, pour une classe d'équations intégrales reliées au problème de Milne-Schwarzschild, dont l'exemple typique est le problème (WH) ci-dessous.

La partie II peut être résolue sans faire appel aux résultats de la partie I, mais en utilisant la définition de la fonction  $K$  donnée avant la question I 2] a), définition qui fait elle-même appel à la fonction  $Ei$  du I 1] a). De même les questions IV 1] à IV 6] incluses peuvent être résolues sans faire appel aux questions précédentes. Enfin les questions V 1] à V 2] b) incluses ne font appel qu'aux résultats des questions IV 1] à IV 6] incluses.

### Notations et rappels.

Sauf mention explicite du contraire, toutes les fonctions considérées dans ce problème sont à valeurs dans  $\mathbf{C}$ .

- 1) Pour tout  $z \in \mathbf{C}$ , on note  $\operatorname{Re} z$  sa partie réelle et  $\operatorname{Im} z$  sa partie imaginaire.
- 2) Pour tout  $f \in L^1(\mathbf{R})$ , on note  $\hat{f}$  sa transformée de Fourier, définie pour tout  $\xi \in \mathbf{R}$  par

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx.$$

On notera également  $\hat{g}$  la transformée de Fourier d'un élément  $g$  de  $L^2(\mathbf{R})$ , définie par prolongement continu de la transformée de Fourier sur  $L^1 \cap L^2(\mathbf{R})$ . On rappelle que l'objet  $\hat{g}$  ainsi défini est un élément de  $L^2(\mathbf{R})$ ; en particulier  $\hat{g}$  s'identifie à une fonction Lebesgue-mesurable définie presque partout.

- 3) Pour tout  $r > 0$ , on notera

$$S(r) = \{z \in \mathbf{C} \text{ t.q. } |\operatorname{Im} z| < r\}, \quad \bar{S}(r) = \{z \in \mathbf{C} \text{ t.q. } |\operatorname{Im} z| \leq r\}.$$

On notera également, pour tout  $r \in \mathbf{R}$ ,

$$\mathcal{P}_r^+ = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > r\}, \quad \mathcal{P}_r^- = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z < r\},$$

et

$$\bar{\mathcal{P}}_r^+ = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z \geq r\}, \quad \bar{\mathcal{P}}_r^- = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z \leq r\}.$$

- 4) On notera  $L_{loc}^1(\mathbf{R})$  l'ensemble des fonctions  $f$  définies presque partout sur  $\mathbf{R}$  et Lebesgue-mesurables telles que, pour tout  $R > 0$ ,

$$\int_{-R}^R |f(x)| dx \text{ soit finie.}$$

- 5) On notera  $\ln$  la détermination principale du logarithme népérien, c'est-à-dire l'unique fonction holomorphe sur  $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$  prolongeant la fonction logarithme népérien définie sur  $\mathbf{R}_+$ .

6) Etant donnés deux points  $z_1$  et  $z_2$  du plan complexe et une fonction  $f$  intégrable sur le segment  $[z_1, z_2]$ , la notation

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz \text{ désigne le nombre } (z_2 - z_1) \int_0^1 f((1-t)z_1 + tz_2)dt.$$

7) Etant donnés  $a \in \mathbf{R}$  et une fonction  $f$  localement intégrable sur la droite d'équation  $\text{Im } z = a$ , la notation

$$\int_{-\infty+ia}^{+\infty+ia} f(z)dz \text{ désigne } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t+ia)dt,$$

lorsque cette dernière intégrale impropre converge.

8) On rappelle un énoncé du *théorème de Fubini*: soit  $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$  une fonction borélienne sur  $\mathbf{R}^2$ . Alors,

- pour tout  $x \in \mathbf{R}$  (resp. pour tout  $y \in \mathbf{R}$ ) la fonction  $f(x, \cdot) : y \mapsto f(x, y)$  (resp.  $f(\cdot, y) : x \mapsto f(x, y)$ ) est borélienne;
- les fonctions définies sur  $\mathbf{R}$  à valeurs dans  $[0, +\infty]$

$$x \mapsto \int_{\mathbf{R}} |f(x, y)|dy \quad \text{et} \quad y \mapsto \int_{\mathbf{R}} |f(x, y)|dx$$

sont boréliennes.

De plus, si

$$\int_{\mathbf{R}} \left( \int_{\mathbf{R}} |f(x, y)|dy \right) dx < +\infty,$$

ou bien si

$$\int_{\mathbf{R}} \left( \int_{\mathbf{R}} |f(x, y)|dx \right) dy < +\infty,$$

alors  $f$  définit un élément de  $L^1(\mathbf{R}^2)$ , les fonctions définies p.p. sur  $\mathbf{R}$

$$x \mapsto \int_{\mathbf{R}} f(x, y)dy \quad \text{et} \quad y \mapsto \int_{\mathbf{R}} f(x, y)dx$$

définissent des éléments de  $L^1(\mathbf{R})$  et l'on a

$$\int_{\mathbf{R}} \left( \int_{\mathbf{R}} f(x, y)dy \right) dx = \int_{\mathbf{R}} \left( \int_{\mathbf{R}} f(x, y)dx \right) dy = \iint_{\mathbf{R}^2} f(x, y)dx dy.$$

I

1] a) Montrer que, pour tout  $x \in \mathbf{R}_+^*$ , les intégrales

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t} dt$$

convergent et sont égales. Dans la suite du problème, on notera  $\text{Ei}(x)$  la quantité ainsi définie.

1] b) Montrer que l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt$$

converge. Montrer que, lorsque  $x \rightarrow 0^+$ ,  $\text{Ei}(x) + \ln x$  converge vers une limite finie que l'on calculera en fonction de  $I$  et  $\text{Ei}(1)$ . (On pourra exprimer  $\ln x$  sous la forme d'une intégrale).

1] c) Montrer que, pour tout  $x \in \mathbf{R}_+^*$ ,  $0 < \text{Ei}(x) < \frac{e^{-x}}{x}$ .

1] d) Montrer qu'il existe une suite de nombres réels  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  que l'on demande de calculer telle que, pour tout  $N \in \mathbf{N}$ ,

$$\text{Ei}(x) = \sum_{n=0}^N a_n \frac{e^{-x}}{x^{n+1}} + O\left(\frac{e^{-x}}{x^{N+2}}\right),$$

pour  $x \rightarrow +\infty$ . (On pourra intégrer par parties).

1] e) Dédurre de ce qui précède que  $\text{Ei} \in L^p(\mathbf{R}_+^*)$  pour tout  $p \in [1, +\infty[$ .

On note dans la suite du problème  $K$  l'application définie sur  $\mathbf{R}^*$  par

$$x \mapsto K(x) = \frac{1}{2} \text{Ei}(|x|)$$

et  $\hat{K}$  la transformée de Fourier de  $K$ .

2] a) Justifier que la fonction  $\hat{K}$  est une fonction continue sur  $\mathbf{R}$ , appartenant à  $L^2(\mathbf{R})$ . Déterminer  $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \hat{K}(\xi)$ .

2] b) Montrer que la fonction  $\hat{K}$  se prolonge en une fonction holomorphe sur  $S(1)$  (encore notée  $\hat{K}$  dans la suite du problème).

2] c) Montrer que, pour tout  $\eta \in ]-1, 1[$ , l'application  $\xi \mapsto \hat{K}(\xi + i\eta)$  appartient à  $L^2(\mathbf{R})$ .

2] d) Montrer que pour tout  $\xi \in \mathbf{R}^*$ ,  $\hat{K}(\xi) = \frac{C}{\xi} \text{Arctan} \xi$  où  $C$  est une constante que l'on demande de calculer. Calculer également  $\hat{K}(0)$ .

3] a) Donner un équivalent de  $1 - \hat{K}(z)$  pour  $z \rightarrow 0$ .

3] b) Montrer que, pour tout  $z \in S(1)$ , l'on a

$$\hat{K}(z) - \overline{\hat{K}(z)} = \int_1^{+\infty} \frac{\bar{z}^2 - z^2}{|t^2 + z^2|^2} dt$$

(On pourra considérer l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + z^2}$  pour tout  $z \in S(1)$ ).

En déduire que  $\hat{K}(z)$  est réel si et seulement si  $z$  est soit réel, soit imaginaire pur de module strictement inférieur à 1.

3] c) Montrer que 0 est le seul zéro de  $1 - \hat{K}$  dans  $S(1)$ . (On pourra commencer par étudier le sens de variation sur  $] -1, +\infty[$  de la fonction  $\alpha \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + \alpha}$ .)

## II

On considère dans cette partie l'équation intégrale d'inconnue  $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$ :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y)f(y)dy, \quad \text{p.p. en } x \in \mathbf{R}, \quad (EI)$$

où  $f$  est une fonction telle que, pour presque tout  $x \in \mathbf{R}$ ,  $y \mapsto K(x-y)f(y)$  définit un élément de  $L^1(\mathbf{R})$ .

1] Montrer que toute fonction affine sur  $\mathbf{R}$  est solution de (EI).

2] a) Soient  $F$  et  $G$  deux éléments de  $L^1(\mathbf{R})$ . Montrer que la fonction  $\phi$  définie pour presque tout  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$  par  $\phi(x, y) = F(x-y)G(y)$  appartient à  $L^1(\mathbf{R}^2)$ ; en déduire que l'expression

$$F \star G(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x-y)G(y)dy$$

existe pour presque tout  $x \in \mathbf{R}$  et définit un élément  $F \star G$  de  $L^1(\mathbf{R})$ . Montrer enfin que

$$\|F \star G\|_{L^1(\mathbf{R})} \leq \|F\|_{L^1(\mathbf{R})} \|G\|_{L^1(\mathbf{R})}.$$

2] b) Montrer que, pour tout  $\xi \in \mathbf{R}$ , l'on a  $\widehat{F \star G}(\xi) = \hat{F}(\xi)\hat{G}(\xi)$ .

3] a) Soient  $F \in L^1(\mathbf{R})$  et  $G \in L^2(\mathbf{R})$ . Montrer que l'expression

$$F \star G(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x-y)G(y)dy$$

existe pour presque tout  $x \in \mathbf{R}$  et définit un élément  $F \star G$  de  $L^2(\mathbf{R})$ . Montrer que

$$\|F \star G\|_{L^2(\mathbf{R})} \leq \|F\|_{L^1(\mathbf{R})} \|G\|_{L^2(\mathbf{R})}.$$

(On pourra chercher à appliquer le résultat de la question II 2] a) aux fonctions  $|F|$  et  $|G|^2$ ).

3] b) Montrer que, pour presque tout  $\xi \in \mathbf{R}$ , l'on a  $\widehat{F \star G}(\xi) = \hat{F}(\xi)\hat{G}(\xi)$ . Cette relation a-t-elle lieu pour tout  $\xi \in \mathbf{R}$ ?

4] Trouver toutes les solutions de (EI) appartenant à  $L^1(\mathbf{R})$ .

5] Trouver toutes les solutions de (EI) appartenant à  $L^2(\mathbf{R})$ .

### III

On considère dans cette partie le problème suivant

“Trouver toutes les fonctions  $f$  continues sur  $\mathbf{R}_+$  telles que, pour tout  $a \in \mathbf{R}_+$ ,  $f(x) = O(e^{ax})$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$  et

$$f(x) = \int_0^{+\infty} K(x-y)f(y)dy, \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}_+.” \quad (WH)$$

Dans toute cette partie, on suppose que le problème (WH) admet au moins une solution non identiquement nulle, que l'on note  $f$ . On raisonne dans toute cette partie par conditions nécessaires sur  $f$ ; l'existence d'une telle solution sera vérifiée plus loin (partie IV).

1] a) Pour tout  $\beta \in \mathbf{R}$ , on définit les fonctions  $F_\beta$ ,  $G_\beta$  et  $K_\beta$  par

$$F_\beta(x) = e^{-\beta x} f(x) \text{ si } x \geq 0, \quad F_\beta(x) = 0 \text{ si } x < 0,$$

$$G_\beta(x) = 0 \text{ si } x \geq 0, \quad G_\beta(x) = -e^{-\beta x} \int_0^{+\infty} K(x-y)f(y)dy \text{ si } x < 0,$$

$$K_\beta(x) = e^{-\beta x} K(x), \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}^*.$$

Montrer que  $G_0(x) = O(e^{-|x|})$  lorsque  $x \rightarrow -\infty$ .

1] b) Montrer que, pour tout  $\beta \in ]0, 1[$ ,  $F_\beta$ ,  $G_\beta$  et  $K_\beta \in L^1(\mathbf{R})$ , et que  $F_\beta - K_\beta \star F_\beta = G_\beta$ .

2] a) Montrer que l'intégrale  $\phi(z) = \int_0^{+\infty} e^{-izx} f(x)dx$  converge pour tout  $z \in \mathcal{P}_0^-$  et définit une fonction holomorphe sur  $\mathcal{P}_0^-$ .

2] b) Expliciter une relation entre  $\hat{F}_\beta$  et  $\phi$ , pour tout  $\beta \in ]0, 1[$ .

2] c) Montrer que  $\hat{G}_0$  se prolonge en une fonction holomorphe sur  $\mathcal{P}_{-1}^+$  (encore notée  $\hat{G}_0$ ).

2] d) Montrer que, pour tout  $z \in \mathcal{P}_{-1}^+ \cap \mathcal{P}_0^-$ , l'on a  $\phi(z)(1 - \hat{K}(z)) = \hat{G}_0(z)$ .

3] a) On pose, pour tout  $z \in S(1) \setminus \{0\}$ ,  $A(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2} (1 - \hat{K}(z))$ . Montrer que  $A$  se prolonge en une fonction holomorphe sans zéros sur  $S(1)$ , encore notée  $A$  dans la suite du problème et que, lorsque  $|z| \rightarrow +\infty$  avec  $|\text{Im } z| < 1$ , l'on a  $|A(z) - 1| = O\left(\frac{1}{|z|}\right)$ .

3] b) Déterminer l'image par  $A$  de l'axe réel. (On pourra se ramener à étudier le sens de variation d'une fonction).

3] c) Montrer qu'il existe  $\alpha \in ]0, 1[$  tel que

$$A(\overline{S}(\alpha)) \subset \{z \in \mathbf{C} \text{ t.q. } \operatorname{Re} z > \frac{1}{6}\}.$$

On gardera cette valeur de  $\alpha$  jusqu'à la fin de la partie III.

4] a) Montrer que, pour tout  $z \in \mathbf{C}$ ,

$$\int_{R-i\alpha}^{R+i\alpha} \frac{\ln A(t)}{t-z} dt \rightarrow 0, \text{ et que } \int_{-R-i\alpha}^{-R+i\alpha} \frac{\ln A(t)}{t-z} dt \rightarrow 0$$

lorsque  $R \rightarrow +\infty$ .

4] b) Montrer que les fonctions  $A_+$  et  $A_-$  définies par les formules

$$A_+(z) = \exp \left( \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty-i\alpha}^{+\infty-i\alpha} \frac{\ln A(t)}{t-z} dt \right)$$

et

$$A_-(z) = \exp \left( \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty+i\alpha}^{+\infty+i\alpha} \frac{\ln A(t)}{t-z} dt \right)$$

sont holomorphes sur  $\mathcal{P}_{-\alpha}^+$  et  $\mathcal{P}_{\alpha}^-$  respectivement. Déterminer les zéros de  $A_+$  et  $A_-$ .

4] c) Montrer que, pour tout  $z \in S(\alpha)$ , l'on a  $A(z) = \frac{A_+(z)}{A_-(z)}$ .

5] Soit  $N \in \mathbf{N}^*$  et soit  $\Phi$  une fonction holomorphe sur  $\mathbf{C}$  telle que  $|\Phi(z)| = o(|z|^{N+1})$  lorsque  $|z| \rightarrow +\infty$ . Montrer que  $\Phi$  est un polynôme de degré au plus  $N$ .

Soit donc  $f$  solution du problème (WH),  $\phi$  et  $G_0$  étant les fonctions qui lui sont associées par les questions III 1] a) et III 2] a).

6] a) Montrer que, pour tout  $z \in \mathcal{P}_{-\alpha}^+ \cap \mathcal{P}_0^-$ ,

$$\frac{(z+i)\hat{G}_0(z)}{A_+(z)} = \frac{z^2\phi(z)}{(z-i)A_-(z)}.$$

6] b) Montrer qu'il existe une constante  $C$  telle que, pour tout  $z \in \mathcal{P}_0^-$ , l'on ait

$$\phi(z) = C \frac{z-i}{z^2} A_-(z).$$

(On pourra commencer par montrer que la fonction définie par  $H(z) = \frac{z^2\phi(z)}{(z-i)A_-(z)}$  se prolonge en une fonction holomorphe sur  $\mathbf{C}$  telle que  $|H(z)| = O(|z|)$  pour  $|z| \rightarrow +\infty$ ).

7] a) Soit  $f$  solution du problème (WH) et soit  $\phi$  la fonction qui lui est associée par la question III 2] a). Montrer que, pour tout  $\beta \in ]0, 1[$  et tout  $x > 0$

$$f(x) = \int_{-\infty - i\beta}^{+\infty - i\beta} \phi(z) e^{izx} \frac{dz}{2\pi}.$$

7] b) Montrer que pour tout  $\alpha' \in ]0, \alpha[$

$$\int_{-\infty + i\alpha'}^{+\infty + i\alpha'} e^{izx} \frac{z - i}{z^2} A_-(z) dz = O(e^{-\alpha'x})$$

lorsque  $x \rightarrow +\infty$ .

7] c) Soit  $C$  la constante associée à  $\phi$  par le III 6] b). Soit  $\alpha' \in ]0, \alpha[$ . Montrer que, pour tout  $x > 0$ ,

$$f(x) - C \int_{-\infty + i\alpha'}^{+\infty + i\alpha'} e^{izx} \frac{z - i}{z^2} A_-(z) \frac{dz}{2\pi} = C(ax + b)$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes que l'on exprimera en fonction de  $A_-(0)$  et  $A'_-(0)$ .

7] d) Soit  $r \in ]0, \alpha[$  et  $\mathcal{C}^+(0, r)$  le demi-cercle orienté négativement centré en l'origine et de rayon  $r$  inclus dans  $\mathcal{P}_0^+$ . Montrer que

$$A_-(0) = \exp \left( \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}^+(0, r)} \ln A(t) \frac{dt}{t} \right).$$

En déduire la valeur numérique de  $A_-(0)$ .

7] e) Déduire de ce qui précède que le problème (WH) admet au plus une solution  $f$  telle que  $f(x) \sim x$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$ , ainsi que la formule exprimant  $f(x)$ .

On vérifiera dans la partie IV l'existence d'une fonction  $f$  vérifiant (WH) et la condition  $f(x) \sim x$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$ .

#### IV

Dans la suite du problème, on note  $B = \mathbf{R}_+ \times ([-1, 1] \setminus \{0\})$  et on pose

$$\mathcal{E} = \{u : B \rightarrow \mathbf{R} \mid \forall \mu \in [-1, 1] \setminus \{0\}, u(\cdot, \mu) \in C^1(\mathbf{R}_+) \text{ et } u \in L^\infty(B)\}.$$

Pour toute fonction  $u \in \mathcal{E}$ , on notera, pour tout  $x \in \mathbf{R}_+$ ,

$$\langle u \rangle (x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u(x, \mu) d\mu.$$

Soit enfin  $h : ]0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  appartenant à  $L^\infty([0, 1])$ . On considère alors le problème

“Trouver toutes les fonctions  $u \in \mathcal{E}$  telles que

$$\mu \frac{\partial u}{\partial x}(x, \mu) + u(x, \mu) - \langle u \rangle(x) = 0, \quad x > 0, \quad 0 < |\mu| \leq 1; \quad (MSa)$$

$$u(0, \mu) = h(\mu), \quad 0 < \mu \leq 1. \quad (MSb)$$

Soit  $u \in \mathcal{E}$  solution de (MSa-b).

1] a) Montrer que l'application  $\mathcal{F}_u$  définie sur  $\mathbf{R}_+$  par

$$x \mapsto \mathcal{F}_u(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mu u(x, \mu) d\mu$$

est constante sur  $\mathbf{R}_+$ . (On notera désormais  $\mathcal{F}_u$  cette constante).

1] b) On note  $\mathcal{G}_u$  l'application définie sur  $\mathbf{R}_+$  par

$$x \mapsto \mathcal{G}_u(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mu^2 u(x, \mu) d\mu.$$

Calculer, pour tout  $x \geq 0$ ,  $\mathcal{G}_u(x)$  en fonction de  $\mathcal{G}_u(0)$  et  $\mathcal{F}_u$ .

1] c) Montrer que la constante  $\mathcal{F}_u$  est nulle et que l'application  $\mathcal{G}_u$  est constante sur  $\mathbf{R}_+$ . (On notera désormais  $\mathcal{G}_u$  cette constante).

2] a) On note  $\mathcal{H}_u$  l'application définie sur  $\mathbf{R}_+$  par

$$x \mapsto \mathcal{H}_u(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mu u(x, \mu)^2 d\mu.$$

Montrer que l'application  $\mathcal{H}_u$  est décroissante sur  $\mathbf{R}_+$ .

2] b) Montrer que l'application  $(x, \mu) \mapsto u(x, \mu) - \langle u \rangle(x)$  définit un élément de  $L^2(B)$ .

2] c) Montrer que, pour tout  $x \in \mathbf{R}_+$ ,

$$\mathcal{H}_u(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mu |u(x, \mu) - \langle u \rangle(x)|^2 d\mu.$$

2] d) Montrer que  $\mathcal{H}_u(x) \rightarrow 0$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$ .

2] e) Montrer que

$$\|u - \langle u \rangle\|_{L^2(B)}^2 \leq C_1 \int_0^1 \mu h(\mu)^2 d\mu,$$

où  $C_1$  est une constante que l'on précisera.

3] Montrer que le problème (MSa-b) admet au plus une solution dans  $\mathcal{E}$  qui soit continue sur  $B$ .

4] a) Montrer que, pour tout  $x \geq 0$ ,

$$u(x, \mu) = e^{-x/\mu} h(\mu) + \int_0^x e^{-(x-y)/\mu} \frac{1}{\mu} \langle u \rangle (y) dy, \quad 0 < \mu \leq 1; \quad (1a)$$

$$u(x, \mu) = \int_x^{+\infty} e^{-(y-x)/|\mu|} \frac{1}{|\mu|} \langle u \rangle (y) dy, \quad -1 \leq \mu < 0. \quad (1b)$$

4] b) Soit  $v \in \mathcal{E}$ . Montrer que l'application  $x \mapsto \langle v \rangle (x)$  est continue sur  $\mathbf{R}_+$ .

4] c) Montrer que le problème (MSa-b) admet au plus une solution dans  $\mathcal{E}$ .

On suppose dans les questions IV 5] a) à c) incluses que  $h(\mu) \geq 0$  pour tout  $\mu \in ]0, 1]$ .

5] a) On définit une suite de fonctions  $u_n : B \rightarrow \mathbf{R}$  par les relations de récurrence, valables pour tout  $n \in \mathbf{N}$ :

$$u_{n+1}(x, \mu) = e^{-x/\mu} h(\mu) + \int_0^x e^{-(x-y)/\mu} \frac{1}{\mu} \langle u_n \rangle (y) dy, \quad 0 < \mu \leq 1,$$

$$u_{n+1}(x, \mu) = \int_x^{+\infty} e^{-(y-x)/|\mu|} \frac{1}{|\mu|} \langle u_n \rangle (y) dy, \quad -1 \leq \mu < 0,$$

et que l'on initialise en prenant pour  $u_0$  la fonction nulle. Montrer que, pour tout  $(x, \mu) \in B$ ,

$$0 \leq u_0(x, \mu) \leq u_1(x, \mu) \leq \dots \leq u_n(x, \mu) \leq u_{n+1}(x, \mu) \leq \dots \leq \|h\|_{L^\infty([0,1])}.$$

5] b) Montrer que, lorsque  $n \rightarrow +\infty$ ,  $u_n(x, \mu)$  converge simplement sur  $B$  vers  $u \in L^\infty(B)$  vérifiant les relations (1a-b).

5] c) Montrer que  $u \in \mathcal{E}$  et que  $u$  est solution de (MSa-b).

On abandonne désormais l'hypothèse selon laquelle  $h(\mu) \geq 0$  pour tout  $\mu \in ]0, 1]$ .

5] d) Montrer que, pour toute fonction  $h : ]0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  satisfaisant  $h \in L^\infty([0, 1])$ , le problème (MSa-b) admet une unique solution  $u$  appartenant à  $\mathcal{E}$ .

6] a) Déterminer les fonctions  $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  appartenant à  $L^\infty([-1, 1])$  et telles que la fonction  $v : (x, \mu) \mapsto x + g(\mu)$  vérifie

$$\mu \frac{\partial v}{\partial x}(x, \mu) + v(x, \mu) - \langle v \rangle (x) = 0, \quad x > 0, \quad 0 < |\mu| \leq 1.$$

6] b) Montrer qu'il existe une unique fonction  $w : B \rightarrow \mathbf{R}$  solution du problème suivant:

$$\mu \frac{\partial w}{\partial x}(x, \mu) + w(x, \mu) - \langle w \rangle (x) = 0, \quad x > 0, \quad 0 < |\mu| \leq 1; \quad (2a)$$

$$w(0, \mu) = 0, \quad 0 < \mu \leq 1. \quad (2b)$$

$$\text{l'application } (x, \mu) \mapsto w(x, \mu) - x \text{ définit un élément de } \mathcal{E}. \quad (2c)$$

6] c) Calculer, pour tout  $x \in \mathbf{R}_+$ , l'intégrale  $\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mu w(x, \mu) d\mu$ .

7] a) Soit  $w$  la fonction définie au IV 6] b). Montrer que l'application  $x \mapsto \langle w \rangle (x)$  est l'unique solution du problème (WH) qui satisfasse en outre la condition  $\langle w \rangle (x) \sim x$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$ .

7] b) Calculer, à l'aide de la fonction  $A$  du III,  $w(0, -\mu)$  pour tout  $\mu \in ]0, 1]$ . Dans toute la suite, on notera  $W(\mu)$  cette quantité.

## V

Soit  $h : ]0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  appartenant à  $L^\infty([0, 1])$ , et soit  $u$  la solution du problème (MSa-b).

1] Montrer que, pour tout  $\gamma \in [0, 1[$

$$\int_0^{+\infty} \int_{-1}^1 |u(x, \mu) - \langle u \rangle(x)|^2 e^{2\gamma x} dx d\mu \leq \frac{C_2}{(1-\gamma)} \int_0^1 \mu h(\mu)^2 d\mu,$$

où  $C_2$  est une constante que l'on déterminera.

2] a) Soit  $l = 3 \langle \mu^2 u \rangle$ . Montrer que, pour tout  $x \geq 0$ ,

$$|\langle u \rangle(x) - l|^2 \leq C_3 \int_{-1}^1 |u(x, \mu) - \langle u \rangle(x)|^2 d\mu,$$

où  $C_3$  est une constante que l'on déterminera.

2] b) Montrer que, pour tout  $\gamma \in [0, 1[$ ,

$$\int_0^{+\infty} \int_{-1}^1 |u(x, \mu) - l|^2 e^{2\gamma x} dx d\mu \leq \frac{C_4}{(1-\gamma)} \int_0^1 \mu h(\mu)^2 d\mu,$$

où  $C_4$  est une constante que l'on déterminera.

3] Exprimer  $l$  en fonction de  $W$  et de  $h$ . (On pourra considérer la fonction

$$x \mapsto \int_{-1}^1 \mu w(x, -\mu) u(x, \mu) d\mu$$

où  $w$  la solution du problème (2a-c) introduit au IV 6] b.)

**FIN**



## CORRIGE DU PROBLEME D'ANALYSE ET PROBABILITES

### I

1] a) Pour tout  $x > 0$ , la fonction  $t \mapsto e^{-xt}/t$  est continue sur  $\mathbf{R}_+^*$  et  $O(1/t^2)$  pour  $t \rightarrow +\infty$ , d'où la convergence des deux intégrales. L'égalité s'obtient par le changement de variable  $\theta = xt$ .

1] b) L'intégrande de  $I$  se prolonge par continuité en  $t = 0$ , d'où la convergence de  $I$ . Puis

$$Ei(x) + \ln x = Ei(1) - \int_1^x \frac{e^{-t} - 1}{t} dt \rightarrow Ei(1) - I$$

quand  $x \rightarrow 0^+$ .

1] c) Il suffit d'intégrer en  $t$  sur  $]x, +\infty[$  (qui est de mesure strictement positive) les inégalités strictes

$$\forall t \in ]x, +\infty[, \quad 0 < \frac{e^{-t}}{t} < \frac{e^{-t}}{x}.$$

1] d) Pour tout  $t > 0$ , un calcul simple montre que

$$\left( \sum_{n=0}^N (-1)^n n! \frac{e^{-t}}{t^{n+1}} \right)' = -\frac{e^{-t}}{t} + (-1)^{N+1} (N+1)! \frac{e^{-t}}{t^{N+2}}.$$

En intégrant cette relation en  $t \in ]x, +\infty[$  et en observant, par un raisonnement analogue au I 1] c), que, pour tout  $x > 0$ ,

$$0 < \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{N+2}} dt < \frac{1}{x^{N+2}} \int_x^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{e^{-x}}{x^{N+2}},$$

on trouve la relation voulue avec  $a_n = (-1)^n n!$ .

1] e) La première forme de  $Ei(x)$  donnée dans I 1] a) montre que  $Ei$  est continue sur  $\mathbf{R}_+^*$  puisque  $t \mapsto e^{-t}/t$  appartient à  $L^1(]a, +\infty[)$  pour tout  $a > 0$ ; en particulier,  $Ei \in L_{loc}^p(\mathbf{R}_+^*)$  pour tout  $p \in [1, +\infty[$ . Les comportements asymptotiques de  $Ei$  en  $0^+$  (cf. I 1] b)) et en  $+\infty$  (cf. I 1] c)) montrent alors que  $Ei \in L^p(\mathbf{R}_+^*)$  pour tout  $p \in [1, +\infty[$ .

2] a) D'après le I 1] e),  $K \in L^1(\mathbf{R})$ , ce qui entraîne que

$$\hat{K} \in C(\mathbf{R}) \quad \text{et que} \quad \lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \hat{K}(\xi) = 0$$

grâce au théorème de convergence dominée et au lemme de Riemann-Lebesgue. Toujours d'après le I 1] e),  $K$  appartient en outre à  $L^2(\mathbf{R})$ , ce qui entraîne que  $\hat{K} \in L^2(\mathbf{R})$  grâce à l'égalité de Plancherel.

2] b) Pour tout  $\epsilon \in ]0, 1[$ , l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-izx} K(x) dx$$

est normalement convergente pour  $|\Im z| \leq 1 - \epsilon$  puisque

$$|e^{-izx} K(x)| \leq e^{(1-\epsilon)|x|} Ei(|x|) \quad \text{pour tout } (x, z) \in \mathbf{R} \times \overline{S}(1 - \epsilon) \quad \text{et que} \quad \int_{\mathbf{R}} e^{(1-\epsilon)|x|} Ei(|x|) dx < +\infty$$

d'après les I 1] b) et c). D'autre part, l'intégrande  $(x, z) \mapsto e^{-izx} K(x)$  est une fonction holomorphe entière de  $z$  pour tout  $x \in \mathbf{R}^*$ . Cette intégrale définit donc une fonction holomorphe de  $z$  sur  $S(1 - \epsilon)$  pour tout  $\epsilon \in ]0, 1[$  et donc sur  $S(1)$ , fonction holomorphe qui prolonge  $\hat{K}$  par construction.

2] c) La fonction  $\xi \mapsto \hat{K}(\xi + i\eta)$  est la transformée de Fourier de  $x \mapsto e^{\eta x} K(x)$  qui définit un élément de  $L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$  pour tout  $\eta \in ]-1, 1[$  d'après les I 1] b) et c). Le résultat demandé découle alors de l'égalité de Plancherel.

2] d) Soit  $\xi \in \mathbf{R}$ . La fonction  $\Theta : (x, t) \mapsto e^{-i\xi x - |x|t}/t$  est continue (et donc borélienne) sur  $\mathbf{R} \times ]1, +\infty[$ . D'après le I 1] e) (avec  $p = 1$ )

$$\int_{\mathbf{R}} \left( \int_1^{+\infty} |\Theta(x, t)| dt \right) dx = \int_{\mathbf{R}} \left( \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t|x|}}{t} dt \right) dx = \int_{\mathbf{R}} Ei(|x|) dx < +\infty.$$

Le théorème de Fubini implique alors que  $F \in L^1(\mathbf{R} \times ]1, +\infty[)$  et que

$$\begin{aligned} \hat{K}(\xi) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} \left( \int_1^{+\infty} \Theta(x, t) dt \right) dx = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \left( \int_{\mathbf{R}} e^{-i\xi x - |x|t} dx \right) \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \left( \frac{1}{t + i\xi} + \frac{1}{t - i\xi} \right) \frac{dt}{t} \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + \xi^2}. \end{aligned}$$

Cette dernière intégrale donne

$$\hat{K}(\xi) = \frac{\arctan \xi}{\xi} \text{ si } \xi \neq 0, \quad \text{et } \hat{K}(0) = 1.$$

3] a) Le développement limité de la fonction arctan en  $\xi = 0$  et la formule pour  $\hat{K}(\xi)$  donnée au I 2] d) montrent que

$$\hat{K}(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{3} + O(\xi^4) \text{ et donc que } 1 - \hat{K}(\xi) \sim \frac{\xi^2}{3} \text{ pour } \xi \rightarrow 0.$$

On en déduit que 0 est un zéro de multiplicité 2 de  $1 - \hat{K}$ .

3] b) Pour tout  $\epsilon \in ]0, 1[$ , l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + z^2}$$

converge normalement pour  $|\Im z| \leq 1 - \epsilon$ , puisque

$$\frac{1}{|t^2 + z^2|} \leq \frac{1}{t^2 - (1 - \epsilon)^2} \text{ pour tout } (t, x) \in [1, +\infty[ \times \overline{S}(1 - \epsilon) \text{ et que } \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2 - (1 - \epsilon)^2} < +\infty,$$

et son intégrande  $(t, z) \mapsto \frac{1}{t^2 + z^2}$  est une fonction holomorphe de  $z$  sur  $S(1)$  pour tout  $t \in [1, +\infty[$ . Cette intégrale définit donc une fonction holomorphe sur  $S(1)$  qui coïncide avec  $\hat{K}$  sur l'axe réel, et donc

$$\hat{K}(z) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + z^2} \quad (1)$$

sur tout le domaine (ouvert connexe)  $S(1)$  par le principe des zéros isolés.

Par conséquent, pour tout  $z \in S(1)$ ,

$$\hat{K}(z) - \overline{\hat{K}(z)} = \int_1^{+\infty} \left( \frac{1}{t^2 + z^2} - \frac{1}{t^2 + \bar{z}^2} \right) dt = (\bar{z}^2 - z^2) \int_1^{+\infty} \frac{dt}{|t^2 + z^2|^2}. \quad (*)$$

Cette relation montre que si  $\hat{K}(z) \in \mathbf{R}$ ,  $\bar{z}^2 - z^2 = 0$  car

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{|t^2 + z^2|^2} > 0$$

comme étant l'intégrale de la fonction strictement positive  $t \mapsto \frac{1}{|t^2 + z^2|^2}$  sur l'intervalle  $[1, +\infty[$  qui est de mesure strictement positive.

Autrement dit, si  $z \in S(1)$  et  $\hat{K}(z) \in \mathbf{R}$ ,  $z^2 \in \mathbf{R}$ , la réciproque découle trivialement de la relation (\*). Enfin, pour  $z \in S(1)$ , que  $z^2$  soit réel équivaut au fait que  $z$  est soit réel, soit imaginaire pur de module strictement inférieur à 1.

3] c) La fonction

$$k : \alpha \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + \alpha}$$

est évidemment définie sur  $] -1, +\infty[$ ; elle y est strictement décroissante et donc injective, car son intégrande est une fonction strictement décroissante de  $\alpha$  pour tout  $t > 1$ . Soit donc  $z \in S(1)$ , un zéro de  $1 - \hat{K}$ . D'après le I 3] b),  $z^2 \in ] -1, +\infty[$  et  $1 - \hat{K}(z) = 1 - k(z^2)$  d'après la formule (1) ci-dessus. Donc  $1 - k(0) = 0$  et l'injectivité de  $k$  implique que si  $z \in S(1)$  annule  $1 - \hat{K}$  alors  $z^2 = 0$ , c.q.f.d..

## II

1] D'après le I 1] e) et 1] c), pour tout  $x \in \mathbf{R}$  on a d'abord

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y)dy < +\infty, \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y)|y|dy < +\infty.$$

Ensuite, pour tout  $a$  et  $b \in \mathbf{R}$ , si  $f(x) = ax + b$  alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y)f(y)dy = (ax+b) \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y)dy - a \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y)(x-y)dy.$$

Comme  $K$  est paire par définition,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y)(x-y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} K(z)zdz = 0;$$

D'après le I 2] d),

$$\hat{K}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y)dy = 1.$$

Donc, pour  $f(x) = ax + b$ , on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y)f(y)dy = (ax+b) = f(x).$$

2] a) Question de cours. Soient  $f$  et  $g$  boréliennes respectivement égales à  $F$  et  $G$  pp. sur  $\mathbf{R}$ . Posons  $\Phi : (x, y) \mapsto f(x-y)g(y)$ ; c'est une fonction borélienne sur  $\mathbf{R}^2$  comme composée de la fonction borélienne  $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$  et de l'application linéaire (donc continue, donc borélienne)  $A : (x, y) \mapsto (x-y, y)$ .

Appliquons le théorème de Fubini rappelé dans l'énoncé: on a

$$\int_{\mathbf{R}} \left( \int_{\mathbf{R}} |\Phi(x, y)| dx \right) dy = \int_{\mathbf{R}} \left( \int_{\mathbf{R}} |f(x-y)| dx \right) |g(y)| dy = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} < +\infty.$$

Par construction  $\Phi$  est une fonction borélienne égale à  $\phi$  pp. sur  $\mathbf{R}^2$  car l'isomorphisme linéaire  $A$  et son inverse  $A^{-1}$  envoient tout ensemble de mesure nulle sur un ensemble de mesure nulle, de sorte que l'inégalité ci-dessus montre que l'on a  $\phi \in L^1(\mathbf{R}^2)$ .

Toujours d'après le théorème de Fubini, la fonction

$$f * g : x \mapsto \int_{\mathbf{R}} \Phi(x, y) dy = \int_{\mathbf{R}} f(x-y)g(y) dy$$

est définie pp. sur  $\mathbf{R}$  et sa classe (modulo la relation d'égalité pp. sur  $\mathbf{R}$ ) est un élément de  $L^1(\mathbf{R})$ . Puis

$$\|f \star g\|_{L^1} = \int_{\mathbf{R}} \left| \int_{\mathbf{R}} f(x-y)g(y)dy \right| dx \leq \int_{\mathbf{R}} \left( \int_{\mathbf{R}} |\Phi(x,y)|dy \right) dx = \int_{\mathbf{R}} \left( \int_{\mathbf{R}} |\Phi(x,y)|dx \right) dy = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1},$$

en appliquant à nouveau le théorème de Fubini.

Enfin, notons que si  $f' = f$  et  $g' = g$  pp. sur  $\mathbf{R}$ , pour tout  $x \in \mathbf{R}$  l'on a  $f'(x-y)g'(y) = f(x-y)g(y)$  pp. en  $y \in \mathbf{R}$  d'où  $f \star g(x) = f' \star g'(x)$ . Ainsi l'élément  $F \star G$  de  $L^1(\mathbf{R})$  ne dépend pas du choix des représentants  $f$  et  $g$  fait ci-dessus.

2] b) Gardons les notations du II 2] b). Pour tout  $\xi \in \mathbf{R}$ , la fonction  $(x,y) \mapsto e^{i\xi x} \Phi(x,y)$  est borélienne sur  $\mathbf{R}^2$  (comme produit de la fonction borélienne  $\phi$  par la fonction continue (donc borélienne)  $x \mapsto e^{i\xi x}$ ; elle définit un élément de  $L^1(\mathbf{R}^2)$  car  $\Phi \in L^1(\mathbf{R}^2)$  et  $|e^{i\xi x}| = 1$  pour tout  $\xi$  et  $x$  dans  $\mathbf{R}$ . Appliquons le théorème de Fubini: pour tout  $\xi \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} \widehat{f \star g}(x) &= \int_{\mathbf{R}} \left( \int_{\mathbf{R}} e^{i\xi x} \Phi(x,y)dy \right) dx = \int_{\mathbf{R}} \left( \int_{\mathbf{R}} e^{i\xi(x-y)} e^{i\xi y} \Phi(x,y)dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbf{R}} \left( \int_{\mathbf{R}} e^{i\xi(x-y)} e^{i\xi y} \Phi(x,y)dx \right) dy = \int_{\mathbf{R}} \left( \int_{\mathbf{R}} e^{i\xi(x-y)} f(x-y)dx \right) e^{i\xi y} g(y)dy = \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi). \end{aligned}$$

3] a) Soient  $f$  et  $g$  boréliennes respectivement égales à  $F$  et  $G$  pp. sur  $\mathbf{R}$ . Posons  $\Phi : (x,y) \mapsto f(x-y)g(y)$ ; on montre comme au II 2] a) que c'est une fonction borélienne sur  $\mathbf{R}^2$ . On déduit du théorème de Fubini que la fonction

$$x \mapsto \int_{\mathbf{R}} |\Phi(x,y)|dy \text{ est borélienne sur } \mathbf{R}.$$

Estimons sa norme  $L^2$ :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} \left( \int_{\mathbf{R}} |\Phi(x,y)|dy \right)^2 dx &= \int_{\mathbf{R}} \left( \int_{\mathbf{R}} |f(x-y)|^{1/2} |f(x-y)|^{1/2} |g(y)|dy \right)^2 dx \\ &\leq \int_{\mathbf{R}} \left( \int_{\mathbf{R}} |f(x-y)|dy \right) \left( \int_{\mathbf{R}} |f(x-y)| |g(y)|^2 dy \right) dx \quad (*) \\ &= \|f\|_{L^1} \int_{\mathbf{R}} \left( \int_{\mathbf{R}} |f(x-y)| |g(y)|^2 dy \right) dx \\ &= \|f\|_{L^1} \| |f| \star |g|^2 \|_{L^1} = \|f\|_{L^1}^2 \| |g|^2 \|_{L^1} = \|f\|_{L^1}^2 \|g\|_{L^2}^2 < +\infty, \end{aligned}$$

où la première inégalité ci-dessus découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Donc la fonction

$$x \mapsto \int_{\mathbf{R}} |\Phi(x,y)|dy \text{ définit un élément de } L^2(\mathbf{R}).$$

En particulier

$$\int_{\mathbf{R}} |\Phi(x,y)|dy < +\infty \text{ pour presque tout } x \in \mathbf{R}.$$

Posons, pour tout  $n \geq 1$ ,  $g_n = g \mathbf{1}_{[-n,n]}$  et définissons  $\Phi_n(x,y) = f(x-y)g_n(y)$ : il résulte de la dernière inégalité et du théorème de convergence dominée que

$$\int_{\mathbf{R}} \Phi_n(x,y)dy \rightarrow \int_{\mathbf{R}} \Phi(x,y)dy \text{ pour presque tout } x \in \mathbf{R}.$$

Comme pour tout  $n \geq 1$  la fonction  $g_n$  définit un élément de  $L^1(\mathbf{R})$  (ce qui découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz), il résulte du II 2] a) que  $f \star g_n$  définit un élément de  $L^1(\mathbf{R})$ ; ainsi l'application

$$x \mapsto \int_{\mathbf{R}} \Phi(x,y)dy$$

est Lebesgue-mesurable comme limite presque partout de la suite de fonctions Lebesgue-mesurables  $f \star g_n$ . Enfin, pour presque tout  $x \in \mathbf{R}$ , il résulte de (\*) que

$$\int_{\mathbf{R}} \left| \int_{\mathbf{R}} f(x-y)g(y)dy \right|^2 dx \leq \int_{\mathbf{R}} \left( \int_{\mathbf{R}} |f(x-y)g(y)|dy \right)^2 dx \leq \|f\|_{L^1}^2 \|g\|_{L^2}^2$$

ce qui montre que  $f \star g \in L^2(\mathbf{R})$  et que  $\|f \star g\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^2}$ . Comme au II 2] a), on montre que ce résultat est indépendant du choix des représentants  $f$  et  $g$  des classes (modulo l'égalité pp.)  $F$  et  $G$  que l'on a choisis.

3] b) D'après le II 2] b),  $f \star \widehat{g_n} = \widehat{f g_n}$ . D'après le II 3] a) et l'égalité de Plancherel

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\widehat{f \star g} - \widehat{f \star g_n}\|_{L^2} = \|f \star g - f \star g_n\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^1} \|g - g_n\|_{L^2} \rightarrow 0.$$

D'autre part

$$\|\widehat{f g} - \widehat{f g_n}\|_{L^2} \leq \|\widehat{f}\|_{L^\infty} \|\widehat{g} - \widehat{g_n}\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|g - g_n\|_{L^2},$$

en utilisant l'égalité de Plancherel. D'où la relation annoncée qui a lieu pour presque tout  $\xi \in \mathbf{R}$ , et pas pour tout  $\xi \in \mathbf{R}$  en général (rappel:  $\widehat{G}$  est un élément de  $L^2(\mathbf{R})$ ; c'est donc une fonction définie seulement presque partout).

4] D'après II 2] b) et I 1] e):  $(1 - \widehat{K})\widehat{f} = 0$ . Ceci et le I 3] c) impliquent que  $\widehat{f} = 0$  sur  $\mathbf{R}^*$ . Comme d'autre part  $\widehat{f}$  est continue (en tant que transformée de Fourier de  $f \in L^1(\mathbf{R})$ ) cela implique que  $\widehat{f} = 0$  sur  $\mathbf{R}$ . Par inversion de Fourier (on a  $f \in L^1(\mathbf{R})$  et  $\widehat{f} = 0 \in L^1(\mathbf{R})$ ), on trouve  $f = 0$  p.p.

5] D'après II 3] b) et I 1] e):  $(1 - \widehat{K})\widehat{f} = 0$ . Donc  $\widehat{f} = 0$  p.p. sur  $\mathbf{R}^*$  par I 3] c), et donc  $\widehat{f} = 0$  p.p. sur  $\mathbf{R}$ . D'après le théorème de Plancherel,  $f = 0$  en tant qu'élément de  $L^2(\mathbf{R})$ , c'est à dire que  $f(x) = 0$  p.p. en  $x \in \mathbf{R}$ .

### III

1] a) D'après le I 1] c), pour tout  $x < 0$

$$|G_0(x)| = \left| \int_0^{+\infty} K(|x+y)f(y)dy \right| \leq \frac{e^{-|x|}}{|x|} \int_0^{+\infty} e^{-y}|f(y)|dy.$$

Or, comme par hypothèse  $f(x) = O(e^{x/2})$  pour  $x \rightarrow +\infty$  (en prenant  $a = 1/2$ ),

$$\int_0^{+\infty} e^{-y}|f(y)|dy < +\infty$$

d'où le résultat voulu.

1] b) D'après l'hypothèse faite sur  $f$  dans l'énoncé de (WH),  $F_\beta$  définit un élément de  $L^1(\mathbf{R})$  pour tout  $\beta \in ]0, 1[$ .

D'après le III 1] a)  $G_\beta$  définit un élément de  $L^1(\mathbf{R})$  pour tout  $\beta \in ]0, 1[$ .

D'après les I 1] c) et e)  $K_\beta$  définit un élément de  $L^1(\mathbf{R})$  pour tout  $\beta \in ]0, 1[$ .

Pour tout  $x > 0$

$$K_\beta \star F_\beta(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\beta(x-y)} K(x-y) e^{-\beta y} f(y) dy = e^{-\beta x} \int_0^{+\infty} K(x-y) f(y) dy = e^{-\beta x} f(x)$$

d'après (WH); puis, pour tout  $x < 0$

$$F_\beta(x) - K_\beta \star F_\beta(x) = 0 - \int_0^{+\infty} e^{-\beta(x-y)} K(x-y) e^{-\beta y} f(y) dy = -e^{-\beta x} \int_0^{+\infty} K(x-y) f(y) dy = G_\beta(x).$$

Ainsi,  $F_\beta(x) - K_\beta \star F_\beta(x) = G_\beta(x)$  pour  $x \neq 0$  (donc en particulier pp.) sur  $\mathbf{R}$ .

2] a) L'intégrale  $\phi(z)$  converge normalement pour  $\Im z \leq -\epsilon$  pour tout  $\epsilon > 0$  car, en faisant  $a = \epsilon/2$  dans l'hypothèse sur la croissance de  $f$  en  $+\infty$ ,

$$|e^{-izx} f(x)| = e^{x\Im(z)} |f(x)| \leq e^{-\epsilon x} |f(x)| = O(e^{-\epsilon x/2}).$$

Son intégrande  $y$  est une fonction holomorphe de  $z$  pour tout  $x \in \mathbf{R}$ . Elle définit donc une fonction holomorphe sur  $\mathcal{P}_0^-$ .

2] b) La relation  $\hat{F}_\beta(\xi) = \phi(\xi - i\beta)$  est évidente.

2] c) Considérer

$$\int_{-\infty}^0 e^{-ixz} G_0(x) dx$$

Le même raisonnement qu'au III 2] a) montre que cette intégrale est une fonction holomorphe de  $z$  sur  $\mathcal{P}_{-1}^+$ . Elle  $y$  prolonge  $\hat{G}_0$  par construction.

2] d) D'après III 1] b) et II 2] b), l'on a, pour tout  $\xi \in \mathbf{R}$  et tout  $\beta \in ]0, 1[$ , la relation  $\hat{F}_\beta(\xi)(1 - \hat{K}_\beta(\xi)) = \hat{G}_\beta(\xi)$ . Or  $\hat{F}_\beta(\xi) = \phi(\xi - i\beta)$  d'après le III 2] c); de même,  $\hat{K}_\beta(\xi) = \hat{K}(\xi - i\beta)$  et  $\hat{G}_\beta(\xi) = \hat{G}_0(\xi - i\beta)$ . Donc on trouve que

$$\phi(\xi - i\beta)(1 - \hat{K}(\xi - i\beta)) = \hat{G}_0(\xi - i\beta)$$

pour tout  $\xi \in \mathbf{R}$  et tout  $\beta \in ]0, 1[$ , c.q.f.d..

3] a) Que  $A$  se prolonge en une fonction holomorphe sans zéro sur  $S(1)$  découle des I 2] b), I 3] a) et c). Puis, pour  $z \in S(1) \setminus \{0\}$ , (cf. correction du I 3] b))

$$\hat{K}(z) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + z^2} = \frac{1}{z} \int_0^z \frac{du}{1 + u^2}$$

grâce au changement de variables  $u = z/t$ . Ainsi

$$\hat{K}(z) \sim \frac{\pm 1}{z} \text{ lorsque } \Re z \rightarrow \pm\infty \text{ avec } z \in S(1).$$

Comme pour tout  $z \in S(1) \setminus \{0\}$

$$A(z) = \left(1 + \frac{1}{z^2}\right) (1 - \hat{K}(z))$$

le comportement asymptotique de  $\hat{K}$  établi ci-dessus implique que

$$|A(z) - 1| = O\left(\frac{1}{|z|}\right) \text{ lorsque } |z| \rightarrow +\infty \text{ avec } z \in S(1).$$

3] b) Un calcul simple montre que, pour tout  $x \in \mathbf{R}^*$ ,

$$A'(x) = \frac{x^2 + 3}{x^4} \left( \arctan x - \frac{3x}{x^2 + 3} \right).$$

On étudie alors la fonction définie par le terme entre parenthèses. Cela détermine le signe de  $A'$ , qui est positif sur  $\mathbf{R}_+$  et on en déduit que  $A$  croît sur  $\mathbf{R}_+$  de sa limite en  $0^+$ , soit  $\frac{1}{3}$  à sa limite en  $+\infty$  soit 1. Et  $A$  est une fonction paire: donc  $A(\mathbf{R}) = [\frac{1}{3}, 1[$ .

3] c) Le résultat de la question précédente III 3] b) montre donc que

$$V = \{z \in \mathbf{C} \mid \Re z > \frac{1}{6}\}$$

est un voisinage ouvert de  $A(\mathbf{R})$ . Par continuité de  $A$  sur  $S(1)$ ,  $A^{-1}(V)$  est un voisinage ouvert de  $\mathbf{R}$  dans  $S(1)$ . Comme  $A$  tend vers  $1 \in V$  à l'infini (cf. III 3] a)), il existe  $R > 0$  et  $\alpha' \in ]0, 1[$  t.q.

$$A([-R, R]^c + i[-\alpha', \alpha']) \subset V.$$

Comme  $A^{-1}(V)$  est un voisinage  $\mathbf{R}$  dans  $S(1)$ , il contient  $[-R, R] + i[-\alpha'', \alpha'']$  pour un  $\alpha'' \in ]0, 1[$ . On conclut en posant  $\alpha = \inf(\alpha', \alpha'')$ .

4] a) D'après le III 3] a), il existe  $C > 0$  tel que, pour tout  $t$  satisfaisant  $|t| \geq R$ , l'on ait

$$|\ln A(t)| \leq \frac{C}{|t|}.$$

Il en résulte alors immédiatement que

$$\left| \int_{\pm R - i\alpha}^{\pm R + i\alpha} \frac{\ln A(t)}{t - z} dt \right| \leq \frac{2C\alpha}{R(R - |z|)}.$$

4] b) D'après III 3] a), il existe  $C_\eta > 0$  tel que

$$|\ln A(z)| \leq \frac{C}{1 + |z|}, \text{ pour tout } z \in \bar{S}(\alpha).$$

Soit  $\epsilon > 0$ , soit  $z \in \mathbf{C}$  t.q.  $\Im z \geq -\alpha + \epsilon$  et  $|\Re z| \leq 1/\epsilon$ . Alors

$$\left| \frac{\ln A(t - i\alpha)}{t - i\alpha - z} \right| \leq \frac{2C}{(1 - \alpha + |t|)(\epsilon + (t - 1/\epsilon)_+)}$$

qui est une fonction intégrable de  $t$ . Donc l'intégrale

$$\int_{-\infty - i\alpha}^{+\infty - i\alpha} \frac{\ln A(t)}{t - z} dt$$

est normalement convergente pour  $\Im z \geq -\alpha + \epsilon$  et  $|\Re z| \leq 1/\epsilon$ , et son intégrande  $y$  est une fonction holomorphe de  $z$ , pour tout  $t$  t.q.  $\Im t = -\alpha$ . Cette intégrale, et donc  $A_+$ , sont donc deux fonctions holomorphes de  $z$  sur  $\mathcal{P}_{-\alpha}^+$ . La fonction  $A_+$  n'a pas de zéro: rappelons en effet que l'on a  $\exp(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^*$ . On procède de même pour  $A_-$ .

4] c) D'après III 3] a) et III 3] c), la fonction  $\ln A$  est holomorphe sur un voisinage ouvert de  $\bar{S}(\alpha)$ . Soit  $z \in S(\alpha)$ . En appliquant la formule de Cauchy à la fonction  $\ln A$  sur le contour  $\partial([-R, R] + i[-\alpha, \alpha])$  orienté positivement (cf. figure 1), on trouve que

$$\begin{aligned} \ln A(z) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{-R - i\alpha}^{R - i\alpha} \frac{\ln A(t)}{t - z} dt - \frac{1}{2i\pi} \int_{-R + i\alpha}^{R + i\alpha} \frac{\ln A(t)}{t - z} dt \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{R - i\alpha}^{R + i\alpha} \frac{\ln A(t)}{t - z} dt - \frac{1}{2i\pi} \int_{-R - i\alpha}^{-R + i\alpha} \frac{\ln A(t)}{t - z} dt. \end{aligned}$$

On fait ensuite tendre  $R$  vers  $+\infty$ : grâce au III 4] a), les deux dernières intégrales convergent vers 0, et l'on aboutit à

$$\ln A(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty - i\alpha}^{+\infty - i\alpha} \frac{\ln A(t)}{t - z} dt - \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty + i\alpha}^{+\infty + i\alpha} \frac{\ln A(t)}{t - z} dt.$$

(On notera que la convergence de ces deux intégrales est déjà établie par les arguments du III 4] b)). On conclut alors en passant aux exponentielles dans cette dernière relation.

5] Il s'agit d'une variante classique du théorème de Liouville. Les inégalités de Cauchy appliquées à la fonction  $\Phi$  sur le disque de centre 0 et de rayon  $R$  montrent que, pour tout  $M \in \mathbf{N}$

$$|\Phi^{(M)}(0)| \leq \frac{\sup_{|z|=R} |\Phi(z)|}{R^M} = o(R^{N+1-M})$$

pour  $R \rightarrow +\infty$ . Donc  $\Phi^{(M)}(0) = 0$  pour  $M > N$ . La série de Taylor de  $\Phi$  en  $z = 0$  est donc

$$\sum_{n=0}^N a_n z^n, \quad \text{avec } a_n = \frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!}.$$

Comme elle coïncide avec  $\Phi$  sur son disque ouvert de convergence (ici égal à  $\mathbf{C}$ ), on en déduit que  $\Phi$  est un polynôme de degré au plus  $N$ .

6] a) D'après III 2] d), pour tout  $z \in \mathcal{P}_{-1}^+ \cap \mathcal{P}_0^-$  l'on a

$$\phi(z)A(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2} \phi(z)(1 - \hat{K}(z)) = \frac{z^2 + 1}{z^2} \hat{G}_0(z).$$

Notons que  $(z - i)A_+(z) \neq 0$  pour tout  $z$  t.q.  $-\alpha < \Im z < 0$  d'après le III 4] b)). Multipliant alors la relation précédente par  $z^2/[(z - i)A_+(z)]$ , pour  $z$  t.q.  $-\alpha < \Im z < 0$ , on aboutit au résultat voulu.

6] b) La question précédente permet de définir une application  $H : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  par

$$H(z) = \frac{z^2 \phi(z)}{(z - i)A_-(z)} \quad \text{si } \Im z > -\alpha,$$

et

$$H(z) = \frac{(z + i)\hat{G}_0(z)}{A_+(z)} \quad \text{si } \Im z < 0,$$

les deux expressions se recollant pour  $-\alpha < \Im z < 0$  grâce au III 6] a). La fonction  $H$  est holomorphe sur  $\mathbf{C}$  (cf. III 2] a) et c) ainsi que III 4] b)).

**Majoration auxiliaire.** Soient  $X, Y$  deux réels positifs,  $Z$  un réel, et soit

$$F(X, Y, Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(X + |t|)(Y + |t - Z|)}.$$

Alors  $F(X, Y, Z) = O(1/\sqrt{|Z|})$  pour  $|Z| \rightarrow +\infty$ .

*Preuve.* Soit  $r$  tel que  $0 < r < |Z|$ . On a

$$I_1 = \int_{|t| \leq r} \frac{dt}{(X + |t|)(Y + |t - Z|)} \leq \frac{2r}{X(Y + Z - r)}$$

et

$$I_2 = \int_{|t - Z| \leq r} \frac{dt}{(X + |t|)(Y + |t - Z|)} \leq \frac{2r}{Y(X + Z - r)}.$$

Puis

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{|t - Z| > r \text{ et } |t| > r} \frac{dt}{(X + |t|)(Y + |t - Z|)} \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{|t - Z| > r \text{ et } |t| > r} \frac{dt}{(X + |t|)^2} + \frac{1}{2} \int_{|t - Z| > r \text{ et } |t| > r} \frac{dt}{(Y + |t - Z|)^2} \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{|t| > r} \frac{dt}{(X + |t|)^2} + \frac{1}{2} \int_{|t - Z| > r} \frac{dt}{(Y + |t - Z|)^2} \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{X+r} + \frac{1}{Y+r}.$$

Comme  $F(X, Y, Z) = I_1 + I_2 + I_3$ , on conclut en prenant  $|Z| > 1$  et en posant  $r = \sqrt{|Z|}$ . //  
D'après III 3] a) et c), il existe  $C > 0$  tel que, pour tout  $z \in \overline{S}(\alpha)$ ,

$$|\ln A(z)| \leq \frac{C}{1+|z|}.$$

Donc, pour tout  $\epsilon \in ]0, \alpha[$ , pour tout  $z \in \mathbf{C}$  tel que  $\Im z \geq -\alpha + \epsilon$ , on a

$$\int_{-\infty - i\alpha}^{+\infty - i\alpha} \left| \frac{\ln A(t)}{t-z} \right| dt \leq F(1, \epsilon, \Re(z))$$

ce qui montre que,

$$A_+(z) = 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{|z|}}\right), \quad |z| \rightarrow +\infty, \quad \Im z > -\alpha + \epsilon. \quad (2)$$

On montre de même que

$$A_-(z) = 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{|z|}}\right), \quad |z| \rightarrow +\infty, \quad \Im z < \alpha - \epsilon. \quad (3)$$

Etudions alors le comportement de  $H(z)$  pour  $|z| \rightarrow +\infty$ . D'abord,  $\phi$  est bornée sur  $\mathcal{P}_{-\alpha/4}^-$ :

$$|\phi(z)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x/4} |f(x)| dx, \quad z \in \mathcal{P}_{-\alpha/4}^-;$$

de même

$$|\hat{G}_0(z)| \leq \int_{-\infty}^0 e^{3\alpha x/4} |G_0(x)| dx < +\infty, \quad z \in \mathcal{P}_{-3\alpha/4}^+,$$

la convergence de l'intégrale découlant du III 1] a).

On déduit de ces estimations et de la définition de  $H$  que

$$|H(z)| = O(|z|), \quad |z| \rightarrow +\infty.$$

Comme  $H$  est entière, on déduit du III 5] que  $H$  est un polynôme de degré au plus 1.

Supposons  $H$  exactement de degré 1. Cela implique que  $\phi(z)$  converge vers une constante non nulle à l'infini. Mais cela est impossible car, d'après III 1] b) et III 2] b),  $\xi \rightarrow \phi(\xi - i\beta)$  est, pour tout  $\beta \in ]0, 1[$ , la transformée de Fourier de la fonction  $F_\beta \in L^1(\mathbf{R})$ . La fonction  $H$  est donc une constante, que l'on note  $C$ .

On en déduit donc que, pour tout  $z \in \mathcal{P}_0^-$ , l'on a

$$\phi(z) = C \frac{z-i}{z^2} A_-(z).$$

7] a) D'après les estimations (2) et (3) du III 6] b), pour tout  $\beta \in ]-\alpha, \alpha[$  la fonction

$$\psi_\beta : t \mapsto \frac{t-i\beta-i}{(t-i\beta)^2} A_-(t-i\beta) - \frac{1}{t-i\beta}$$

définit un élément de  $L^1(\mathbf{R})$ . Ensuite, une intégration par parties montre que l'intégrale impropre

$$\int_{-\infty - i\beta}^{+\infty - i\beta} \frac{e^{izx} dz}{z} = \frac{e^{\beta x}}{x} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx} dt}{(t-i\beta)^2}.$$

qui est une intégrale normalement convergente sur tout compact de  $\mathbf{R}_+^*$ . On déduit alors du III 6] b) que

$$\int_{-\infty-i\beta}^{+\infty-i\beta} e^{izx} \phi(z) dz = C \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t-i\beta)x} \psi_\beta(t) dt + C \frac{e^{\beta x}}{x} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx} dt}{(t-i\beta)^2}$$

converge pour tout  $x > 0$  et définit une fonction continue de  $x$  sur  $\mathbf{R}_+^*$ .

Par ailleurs, comme  $F_\beta \in L^2(\mathbf{R})$ , (même preuve qu'au III 1] b)) il existe une suite  $R_n \rightarrow +\infty$  telle que

$$\int_{-R_n}^{R_n} \phi(\xi - i\beta) e^{i\xi x} \frac{d\xi}{2\pi} \rightarrow F_\beta(x)$$

p.p. en  $x \in \mathbf{R}$  pour  $n \rightarrow +\infty$ .

Ainsi l'égalité demandée a lieu p.p. en  $x > 0$ ; comme les deux membres de cette égalité sont des fonctions continues sur  $\mathbf{R}_+^*$ , l'égalité a lieu pour tout  $x > 0$ .

7] b) En utilisant la fonction  $\psi_{\alpha'}$  introduite dans la question précédente III 7] a), on voit que

$$\int_{-\infty+i\alpha'}^{+\infty+i\alpha'} e^{izx} \frac{(z-i)A_-(z) dz}{z^2} = \int_{-\infty+i\alpha'}^{+\infty+i\alpha'} \frac{e^{izx} dz}{z} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t-i\beta)x} \psi_{\alpha'}(t) dt.$$

La seconde intégrale est majorée par  $I_2 e^{-\alpha' x}$  où

$$I_2 = \int_{-\infty+i\alpha'}^{+\infty+i\alpha'} \left| \frac{z-i}{z^2} A_-(z) - \frac{1}{z} \right| dz < +\infty$$

qui converge d'après l'estimation (2) du III 6] b). La première vaut

$$\frac{e^{-\alpha' x}}{x} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx} dt}{t-i\beta}$$

Comme on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{|t-i\beta|^2} < +\infty,$$

on en déduit que

$$\int_{-\infty+i\alpha'}^{+\infty+i\alpha'} e^{izx} \frac{(z-i)A_-(z) dz}{z^2} = O(e^{-\alpha' x}).$$

7] c) On applique la formule des résidus à la fonction méromorphe  $g(z) = e^{izx} \frac{z-i}{z^2} A_-(z)$  sur le bord  $\Gamma = \partial([-R, R] + i[-\beta, \alpha'])$  orienté positivement (cf. figure 2):

$$\int_{\Gamma} e^{izx} \frac{z-i}{z^2} A_-(z) dz = 2i\pi \text{ Rés}(g, 0) = 2i\pi [A_-(0) - iA'_-(0) + A_-(0)x].$$

Comme au III 4] a), lorsque  $R \rightarrow +\infty$

$$\left| \int_{\pm R-i\beta}^{\pm R+i\alpha'} g(z) dz \right| \leq (\alpha' + \beta) e^{x \sup(\alpha', \beta)} O\left(\frac{1}{R}\right).$$

(A la place de l'estimation III 3] a) sur  $A$  que l'on utilisait au III 4] a), on fait ici appel à l'estimation (3) du III 6] b)).

Alors, en faisant  $R \rightarrow +\infty$  et en tenant compte du III 7] a), on trouve la formule demandée avec  $a = iA_-(0)$  et  $b = iA_-(0) + A'_-(0)$ .

7] d) On note dans cette question  $\hat{+}$  l'addition des contours. Soit  $\Gamma_r = ]-\infty, -r] \hat{+} C^+(0, r) \hat{+} [r, +\infty[$ . En utilisant une estimation analogue au III 4] a) et le fait que le seul pôle de la fonction méromorphe  $\ln A(t)/t$  dans  $\bar{S}(\alpha)$  est  $t = 0$ , on trouve que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty+i\alpha}^{+\infty+i\alpha} \frac{\ln A(t)}{t} dt = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_r} \frac{\ln A(z)}{z} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{C^+(0, r)} \frac{\ln A(z)}{z} dz$$

par parité de  $A$  (cf. figure 3 pour le contour  $C^+(0, r)$  proposé par l'énoncé). On fait ensuite tendre  $r$  vers 0 en rappelant que  $A(0) = \frac{1}{3}$ , ce qui donne

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty+i\alpha}^{+\infty+i\alpha} \frac{\ln A(t)}{t} dt = -\frac{1}{2}(-\ln \frac{1}{3}) = \ln \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

En passant aux exponentielles, on trouve finalement que

$$A_-(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

7] e) D'après le III 7] c),  $f(x) = C(ax + b) + O(e^{-\alpha'x})$  pour  $x \rightarrow +\infty$ , et  $C \neq 0$ : sinon  $\phi = 0$  d'après III 6] b) et donc  $f = 0$  d'après III 7] a). Or on a supposé  $f$  non identiquement nulle.

On aura  $f(x) \sim x$  pour  $x \rightarrow +\infty$  ssi  $Ca = iC/\sqrt{3} = 1$ : ceci fixe  $C = -i\sqrt{3}$  et donc détermine  $\phi$  et par conséquent  $f$  de manière unique.

La formule donnant  $f$  est alors

$$f(x) = -i\sqrt{3} \int_{-\infty-i\beta}^{+\infty-i\beta} \exp\left(izx + \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty+i\alpha}^{+\infty+i\alpha} \ln\left(\frac{(t^2+1)(t-\arctant t)}{t^3}\right) \frac{dt}{t-z}\right) \frac{z-i}{z^2} dz,$$

qui vaut pour tout  $x > 0$  et tout  $\beta \in ]0, 1[$ .

#### IV

**Notation:**  $[-1, 1]^* = [-1, 1] \setminus \{0\}$ .

Il y avait une inexactitude dans l'énoncé: si l'on suppose seulement que les fonctions de  $\mathcal{E}$  sont des éléments de  $L^\infty(B)$ , les relations des questions IV 4] et 5] n'ont lieu que pp. et non partout. Aussi l'unicité de la question IV 4] c) correspond à l'égalité pp. sur  $B$  de deux solutions correspondant au même élément  $h$  qui prescrit la valeur de  $u(0, \mu)$  pour presque tout  $\mu \in ]0, 1[$ . Autrement dit l'énoncé devient correct à condition de considérer la plupart des égalités des IV et V comme portant sur des éléments de  $L^\infty(B)$  c'est à dire ayant lieu pp.. Toutefois ceci est source de difficultés techniques non négligeables. Pour simplifier cette correction, nous nous bornerons à traiter le cas où  $h$  est bornée sur  $]0, 1[$  et pas seulement élément de  $L^\infty([0, 1])$ , ainsi qu'à redéfinir

$$\mathcal{E} = \{u : B \rightarrow \mathbf{R} \mid \forall \mu \in [-1, 1]^*, u(\cdot, \mu) \in C^1(\mathbf{R}_+), u \text{ bornée sur } B\}.$$

1] a) Comme  $u \in \mathcal{E}$ , pour tout  $\mu \in [-1, 1]^*$ , la fonction  $\mu u(\cdot, \mu)$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbf{R}_+$ ; de plus, l'équation (MSa) nous apprend que

$$\frac{\partial}{\partial x} \mu u(x, \mu) = \langle u \rangle(x) - u(x, \mu) \text{ est bornée sur } \mathbf{R}_+ \times [-1, 1].$$

Donc il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \mu u(x, \mu) \right| \leq C, \text{ pour tout } \mu \in [-1, 1]^* \text{ et tout } x \in \mathbf{R}_+.$$

Comme la constante  $C$  définit un élément de  $L^1([-1, 1])$ , le théorème de dérivation sous le signe somme — voir par exemple Airault-Malliavin *Intégration, analyse de Fourier, probabilités, analyse gaussienne* proposition 7.8.4, ou refaire la démonstration en appliquant le théorème de convergence dominée pour calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{F}_u(x + \epsilon_n) - \mathcal{F}_u(x)}{\epsilon_n} \text{ où } x \in \mathbf{R}_+^* \text{ et } \epsilon_n \text{ est une suite arbitraire convergeant vers } 0$$

— implique donc que l'application  $\mathcal{F}_u$  est dérivable sur  $\mathbf{R}_+$  et que, pour tout  $x > 0$ ,

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mu u(x, \mu) d\mu = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 [u(x, \mu) - \langle u \rangle(x)] d\mu = 0.$$

Ceci implique en particulier que l'application  $\mathcal{F}_u$  est constante.

1] b) En utilisant le théorème de dérivation sous le signe somme comme dans la question précédente, on voit que  $\mathcal{G}_u$  est dérivable sur  $\mathbf{R}_+$  et que, pour tout  $x > 0$ ,

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mu^2 u(x, \mu) d\mu = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mu [u(x, \mu) - \langle u \rangle(x)] d\mu = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mu u(x, \mu) d\mu = -\mathcal{F}_u.$$

On en déduit en particulier que

$$\mathcal{G}_u(x) = \mathcal{G}_u(0) + \mathcal{F}_u x.$$

1] c) Comme la fonction  $u$  est bornée sur  $\mathbf{R}_+ \times [-1, 1]^*$ , on a

$$|\mathcal{G}_u(x)| \leq \|u\|_{L^\infty} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mu^2 d\mu = \frac{1}{3} \|u\|_{L^\infty} < +\infty;$$

ainsi  $\mathcal{G}_u$  est une fonction affine sur  $\mathbf{R}_+$  (cf. IV 1] b)) et bornée. Elle y est donc constante, ce qui implique que  $\mathcal{F}_u = 0$ .

2] a) Pour tout  $\mu \neq 0$ ,  $\mu u(\cdot, \mu)^2 \in C^1(\mathbf{R}_+)$  et on a

$$\frac{\partial}{\partial x} \mu u(x, \mu)^2 = -2u(x, \mu)[u(x, \mu) - \langle u \rangle(x)] \text{ qui est bornée sur } \mathbf{R}_+ \times [-1, 1]^*.$$

En utilisant le théorème de dérivation sous le signe somme comme au IV 1] a), on trouve que la fonction  $\mathcal{H}_u$  est dérivable sur  $\mathbf{R}_+$  et que, pour tout  $x > 0$ ,

$$\frac{d}{dx} \mathcal{H}_u(x) = - \int_{-1}^1 u(x, \mu)[u(x, \mu) - \langle u \rangle(x)] d\mu = - \int_{-1}^1 [u(x, \mu) - \langle u \rangle(x)]^2 d\mu \leq 0,$$

ce qui montre que  $\mathcal{H}_u$  est décroissante sur  $\mathbf{R}_+$ .

2] b) Pour tout  $\mu \in [-1, 1]^*$ ,  $u(\cdot, \mu)$  est continue sur  $\mathbf{R}_+$  (car de classe  $C^1$ ); de plus  $u$  est bornée sur  $\mathbf{R}_+ \times [-1, 1]^*$ : il existe donc une constante  $C > 0$  telle que  $|u(x, \mu)| \leq C$  pour tout  $(x, \mu) \in \mathbf{R}_+ \times [-1, 1]^*$ . Comme la constante  $C$  définit un élément de  $L^1([-1, 1])$ , le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre — cf. Airault-Malliavin loc. cit. proposition 7.8.3, ou voir dans IV 4] b) la démonstration basée sur le théorème de convergence dominée pour calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle u \rangle(x + \epsilon_n) \text{ où } x \in \mathbf{R}_+^* \text{ et } \epsilon_n \text{ est une suite arbitraire convergeant vers } 0$$

— l'application  $\langle u \rangle$  est donc continue sur  $\mathbf{R}_+$ , de même que

$$x \mapsto - \int_{-1}^1 [u(x, \mu) - \langle u \rangle(x)]^2 d\mu = \frac{d}{dx} \mathcal{H}_u(x).$$

Alors, pour tout  $x > 0$ , on a

$$\int_0^x \int_{-1}^1 [u(z, \mu) - \langle u \rangle(z)]^2 d\mu dz = \mathcal{H}_u(0) - \mathcal{H}_u(x).$$

De plus,  $u$  étant bornée sur  $\mathbf{R}_+ \times [-1, 1]^*$ , pour tout  $x \geq 0$  on a

$$|\mathcal{H}_u(x)| \leq \|u\|_{L^\infty}^2 \frac{1}{2} \int_{-1}^1 |\mu| d\mu = \frac{1}{2} \|u\|_{L^\infty}^2.$$

Par conséquent

$$\sup_{x>0} \int_0^x \int_{-1}^1 [u(z, \mu) - \langle u \rangle(z)]^2 d\mu dz \leq \|u\|_{L^\infty}^2 < +\infty.$$

Ceci implique que

$$\int_0^{+\infty} \int_{-1}^1 [u(z, \mu) - \langle u \rangle(z)]^2 d\mu dz < +\infty, \quad \text{c.q.f.d.}$$

2] c) On a, pour tout  $x \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_u(x) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mu u(x, \mu)^2 d\mu \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mu [u(x, \mu) - \langle u(x) \rangle]^2 d\mu + \langle u(x) \rangle \int_{-1}^1 \mu [u(x, \mu) - \langle u(x) \rangle] d\mu + \frac{1}{2} \langle u(x) \rangle^2 \int_{-1}^1 \mu d\mu. \end{aligned}$$

La dernière intégrale est évidemment nulle; d'autre part

$$\int_{-1}^1 \mu [u(x, \mu) - \langle u(x) \rangle] d\mu = \mathcal{F}_u - \langle u(x) \rangle \int_{-1}^1 \mu d\mu = \mathcal{F}_u = 0$$

d'après IV 1] c). Donc

$$\mathcal{H}_u(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mu [u(x, \mu) - \langle u(x) \rangle]^2 d\mu, \quad \text{c.q.f.d.}$$

2] d) D'après le IV 2] b),

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \left| \int_{-1}^1 \mu [u(x, \mu) - \langle u(x) \rangle]^2 d\mu \right| dx &\leq \int_0^{+\infty} \int_{-1}^1 |\mu| [u(x, \mu) - \langle u(x) \rangle]^2 d\mu dx \\ &\leq \int_0^{+\infty} \int_{-1}^1 [u(x, \mu) - \langle u(x) \rangle]^2 d\mu dx < +\infty. \end{aligned}$$

Ceci montre que l'application

$$\mathcal{H}_u : x \mapsto \int_{-1}^1 \mu [u(x, \mu) - \langle u(x) \rangle]^2 d\mu$$

définit un élément de  $L^1(\mathbf{R}_+)$ . Il existe donc une suite de  $\mathbf{R}_+$ , soit  $x_n \rightarrow +\infty$  telle que  $\mathcal{H}_u(x_n) \rightarrow 0$ . Comme on sait que  $\mathcal{H}_u$  est décroissante sur  $\mathbf{R}_+$ , on en déduit que  $\mathcal{H}_u(x) \rightarrow 0$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$ .

2] e) D'après le IV 2] b), pour tout  $x \geq 0$ , on a

$$\mathcal{H}_u(x) + \int_0^x \int_{-1}^1 [u(z, \mu) - \langle u(z) \rangle]^2 d\mu dz = \mathcal{H}_u(0) \leq \frac{1}{2} \int_0^1 \mu h(\mu)^2 d\mu.$$

Comme  $\mathcal{H}_u$  est une fonction décroissante sur  $\mathbf{R}_+$  convergeant vers 0 pour  $x \rightarrow +\infty$ , elle est à valeurs positives. En particulier, l'inégalité ci-dessus implique que

$$\int_0^x \int_{-1}^1 [u(z, \mu) - \langle u(z) \rangle]^2 d\mu dz \leq \frac{1}{2} \int_0^1 \mu h(\mu)^2 d\mu$$

ce qui est le résultat voulu avec  $C_1 = \frac{1}{2}$ .

3] Soient  $u_1$  et  $u_2$  deux solutions de (MSa)-(MSb) dans  $\mathcal{E}$ , continues sur  $B$ ; leur différence  $u = u_1 - u_2$  appartient à  $\mathcal{E}$  est et également continue sur  $B$ . Elle vérifie en outre (MSa), avec la condition aux limites

$$u(0, \mu) = 0, \quad \mu > 0. \quad (MSb')$$

On applique à  $u$  le résultat de la question IV 2] e):

$$\|u - \langle u \rangle\|_{L^2(B)} = 0. \quad (4)$$

Or comme  $u$  appartient à  $\mathcal{E}$ , elle est bornée sur  $B$  et de plus  $u(\cdot, \mu)$  est continue sur  $\mathbf{R}_+$  pour tout  $\mu \in [-1, 1]^*$ . De plus  $\langle u \rangle$  est continue sur  $\mathbf{R}$  (cf. IV 4] b) ci-dessous). Ainsi la fonction  $(x, \mu) \mapsto u(x, \mu) - \langle u \rangle(x)$  est continue sur  $B$ . D'après (4), cette fonction est nulle p.p. sur  $B$ , et donc identiquement nulle car elle est continue. Comme

$$\mu \frac{\partial u}{\partial x} = -(u - \langle u \rangle) = 0, \quad x > 0, \quad \mu \in [-1, 1]^*,$$

on en déduit en outre que  $u(x, \mu) = u(0, \mu) = 0$  pour tout  $\mu \in ]0, 1]$ . Ceci, joint à la relation  $u - \langle u \rangle = 0$  sur  $B$ , implique que  $u = 0$ , c'est à dire  $u_1 = u_2$ .

4] a) Pour tout  $(x, \mu) \in B$ , on remarque que la relation (MSa) se met sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial x} [u(x, \mu)e^{x/\mu}] = \frac{1}{\mu} \langle u \rangle(x)e^{x/\mu}.$$

Intégrons cette relation entre  $x$  et  $y$  appartenant à  $\mathbf{R}_+$ :

$$u(x, \mu)e^{x/\mu} = u(y, \mu)e^{y/\mu} + \int_y^x \frac{1}{\mu} \langle u \rangle(z)e^{z/\mu} dz. \quad (5)$$

Dans la relation (5), on prend  $\mu > 0$ ,  $y = 0$  et  $x > 0$ , et on divise chaque membre de (5) par  $e^{x/\mu}$  ce qui fournit la relation (1a) de l'énoncé.

Puis on prend  $\mu < 0$  et on fait  $x \rightarrow +\infty$  dans (5). Comme  $u \in \mathcal{E}$ , le membre de gauche de (5) tend vers 0, tandis que le membre de droite tend vers

$$u(y, \mu)e^{y/\mu} + \int_y^{+\infty} \frac{1}{\mu} \langle u \rangle(z)e^{z/\mu} dz = 0.$$

En divisant chaque membre de cette relation par  $e^{x/\mu}$ , on aboutit à

$$u(y, \mu) = - \int_y^{+\infty} \frac{1}{\mu} \langle u \rangle(z)e^{(z-y)/\mu} dz = \int_y^{+\infty} \frac{1}{|\mu|} \langle u \rangle(z)e^{-(z-y)/|\mu|} dz$$

qui est justement la relation (1b) de l'énoncé.

4] b) Ce résultat a déjà été évoqué à plusieurs reprises. Il sert ici surtout d'indication pour la question suivante. Donnons en une preuve détaillée.

Soit donc  $v \in \mathcal{E}$ . Pour tout  $\mu \in [-1, 1]^*$ , la fonction  $u(\cdot, \mu)$  est continue. Soit donc  $x \in \mathbf{R}_+$  et soit  $x_n$  une suite de points de  $\mathbf{R}_+$  qui converge vers  $x$ : alors, pour tout  $\mu \in [-1, 1]^*$ ,  $u(x_n, \mu) \rightarrow u(x, \mu)$ . De plus, pour tout  $n$  et tout  $\mu \in [-1, 1]^*$  l'on a  $|u(x_n, \mu)| \leq \|u\|_{L^\infty(B)} < +\infty$  car  $u$ , appartenant à  $\mathcal{E}$ , est bornée sur  $\mathbf{R}_+ \times [-1, 1]^*$ . Enfin la fonction constante  $\mu \mapsto \|u\|_{L^\infty(B)}$  définit un élément de  $L^1([-1, 1])$ . D'après le théorème de convergence dominée,

$$\langle u \rangle(x_n) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u(x_n, \mu) d\mu \rightarrow \langle u \rangle(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u(x, \mu) d\mu$$

pour  $n \rightarrow +\infty$ . Comme ceci est vrai pour toute suite  $x_n$  convergeant vers  $x$ , on en déduit que  $\langle u \rangle$  est continue au point  $x$ , pour tout  $x \in \mathbf{R}_+$ , c.q.f.d..

4] c) Montrons par exemple que l'application

$$(x, \mu) \mapsto \int_0^x e^{y/\mu} \langle u \rangle (y) dy$$

est continue sur  $\mathbf{R}_+ \times ]0, 1]$ . Considérons l'application définie sur  $\mathbf{R}_+ \times ]0, 1]$  par

$$(z, \mu) \mapsto F(z, \mu) = \int_0^z e^t \langle u \rangle (\mu t) dt.$$

Soit  $(z_n, \mu_n)$  suite de points de  $\mathbf{R}_+ \times ]0, 1]$  convergeant vers  $(z, \mu) \in \mathbf{R}_+ \times ]0, 1]$ . Alors

$$F(z_n, \mu_n) - F(z, \mu) = \int_{z_n}^z e^t \langle u \rangle (\mu_n t) dt + \int_0^{z_n} e^t [\langle u \rangle (\mu_n t) - \langle u \rangle (\mu t)] dt;$$

la première intégrale est majorée comme suit:

$$\left| \int_{z_n}^z e^t \langle u \rangle (\mu_n t) dt \right| \leq \left| \int_{z_n}^z e^t |\langle u \rangle (\mu_n t)| dt \right| \leq \|u\|_{L^\infty(B)} e^{\sup_n z_n} |z_n - z|. \quad (6)$$

Pour la seconde, on applique le théorème de convergence dominée:

- $e^t [\langle u \rangle (\mu_n t) - \langle u \rangle (\mu t)] \rightarrow 0$  pour tout  $t \in [0, z]$  car la fonction  $\langle u \rangle$  est continue, d'après la question IV 4] c);
  - $|e^t [\langle u \rangle (\mu_n t) - \langle u \rangle (\mu t)]| \leq 2e^z \|u\|_{L^\infty(B)}$  pour tout  $t \in [0, z]$  et tout  $n \geq 0$ .
- Donc, lorsque  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$\int_0^z e^t [\langle u \rangle (\mu_n t) - \langle u \rangle (\mu t)] dt \rightarrow 0. \quad (7)$$

En regroupant (6) et (7), on trouve que

$$F(z_n, \mu_n) \rightarrow F(z, \mu).$$

Comme ceci est vrai pour tout  $(z, \mu) \in \mathbf{R}_+ \times ]0, 1]$  et toute suite  $(z_n, \mu_n)$  de  $\mathbf{R}_+ \times ]0, 1]$  convergeant vers  $(z, \mu)$ , on en déduit que  $F$  est continue sur  $\mathbf{R}_+ \times ]0, 1]$ .

Ensuite, on remarque que, grâce au changement de variables  $t = y/\mu$ , l'on a

$$\int_0^x e^{y/\mu} \langle u \rangle (y) dy = \mu F\left(\frac{x}{\mu}, \mu\right)$$

d'où l'on déduit que l'application

$$(x, \mu) \mapsto \int_0^x e^{y/\mu} \langle u \rangle (y) dy$$

est continue sur  $\mathbf{R}_+ \times ]0, 1]$ . On montrerait de même que l'application

$$(x, \mu) \mapsto \int_x^{+\infty} e^{-y/|\mu|} \langle u \rangle (y) dy$$

est continue sur  $\mathbf{R}_+ \times [-1, 0[$ . De ces deux continuités et des formules (1a)-(1b) de l'énoncé, on déduit facilement que toute solution  $u$  de (MSa)-(MSb) est en fait continue sur  $B$ , dès que  $h$  est continue sur  $]0, 1]$ .

Soient donc deux solutions  $u_1$  et  $u_2$  de (MSa)-(MSb) dans  $\mathcal{E}$ . D'après ce qui précède,  $u = u_1 - u_2$  est continue sur  $B$ , car c'est une solution de (MSa)-(MSb) avec  $h = 0$ . D'après le IV 3],  $u_1 = u_2$ .

5] a) Montrons par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$0 \leq u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_n \leq \|h\|_{L^\infty([0,1])}, \quad \text{sur } B'. \quad (\text{P}(n))$$

La propriété  $\text{P}(0)$  est évidemment vraie car  $u_0$  est la fonction nulle. Supposons que  $\text{P}(n)$  est vraie et montrons que

$$u_n \leq u_{n+1} \leq \|h\|_{L^\infty([0,1])}$$

ce qui implique  $\text{P}(n+1)$ .

Or, comme par hypothèse  $u_{n-1} \leq u_n$ , pour  $\mu \in ]0, 1[$ ,

$$\begin{aligned} u_n(x, \mu) &= e^{-x/\mu} h(\mu) + \int_0^x e^{-\frac{(x-y)}{\mu}} \frac{1}{\mu} \langle u_{n-1} \rangle (y) dy \\ &\leq e^{-x/\mu} h(\mu) + \int_0^x e^{-\frac{(x-y)}{\mu}} \frac{1}{\mu} \langle u_n \rangle (y) dy = u_{n+1}(x, \mu) \\ &\leq e^{-x/\mu} \|h\|_{L^\infty([0,1])} + \|h\|_{L^\infty(B)} \int_0^x e^{-\frac{(x-y)}{\mu}} \frac{1}{\mu} dy \\ &= e^{-x/\mu} \|h\|_{L^\infty([0,1])} + (1 - e^{-x/\mu}) \|h\|_{L^\infty(B)} = \|h\|_{L^\infty(B)}. \end{aligned}$$

De même, pour  $\mu \in [-1, 0[$ ,

$$\begin{aligned} u_n(x, \mu) &= \int_x^{+\infty} e^{-\frac{(y-x)}{|\mu|}} \frac{1}{|\mu|} \langle u_{n-1} \rangle (y) dy \\ &\leq \int_x^{+\infty} e^{-\frac{(y-x)}{|\mu|}} \frac{1}{|\mu|} \langle u_n \rangle (y) dy = u_{n+1}(x, \mu) \\ &\leq \|h\|_{L^\infty(B)} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{(y-x)}{|\mu|}} \frac{1}{|\mu|} dy = \|h\|_{L^\infty(B)}. \end{aligned}$$

Ceci montre donc que  $\text{P}(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , c.q.f.d..

5] b) D'après le IV 5] a), on voit que pour tout  $(x, \mu) \in B$  la suite  $u_n(x, \mu)$  est croissante et bornée par  $\|h\|_{L^\infty}$ . La suite  $u_n$  est donc simplement convergente sur  $B$  vers  $u$  qui y est bornée par  $\|h\|_{L^\infty}$ . Enfin la fonction  $u$  vérifie les relations (1a)-(1b) d'après le théorème de convergence monotone.

5] c) Commençons par montrer que  $u \in \mathcal{E}$ . Compte tenu du IV 5] b), il suffit montrer que pour  $\mu \in [-1, 1]^*$ , la fonction  $u(\cdot, \mu)$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbf{R}_+$ .

Pour cela, on met les formules (1a)-(1b) sous la forme

$$u(x, \mu) = e^{-x/\mu} h(\mu) + \frac{e^{-x/\mu}}{\mu} \int_0^x e^{y/\mu} \langle u \rangle (y) dy \quad (8a)$$

pour  $(x, \mu) \in \mathbf{R}_+ \times ]0, 1[$ , et

$$u(x, \mu) = \frac{e^{x/|\mu|}}{|\mu|} \int_x^{+\infty} e^{-y/|\mu|} \langle u \rangle (y) dy \quad (8b)$$

pour  $(x, \mu) \in \mathbf{R}_+ \times [-1, 0[$ .

Pour tout  $\mu \in [-1, 1]^*$ , les fonctions

$$x \mapsto \int_0^x e^{y/\mu} \langle u \rangle (y) dy, \quad x \mapsto \int_x^{+\infty} e^{-y/|\mu|} \langle u \rangle (y) dy \quad (9)$$

sont continues comme primitives de fonctions bornées. Donc, les formules ci-dessus montrent que, pour tout  $\mu \in [-1, 1]^*$ , la fonction  $u(\cdot, \mu)$  est continue. Comme  $u$  est de plus bornée sur  $B$ , le raisonnement utilisé pour la question IV 4] b) montre que la fonction  $\langle u \rangle$  est continue. Alors les fonctions (9) sont, pour tout

$\mu \in [-1, 1]^*$ , de classe  $C^1$  sur  $\mathbf{R}_+$  en tant que primitives de fonctions continues. On déduit alors des formules (8a)-(8b) que, pour tout  $\mu \in [-1, 1]^*$ , la fonction  $u(\cdot, \mu)$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbf{R}_+$ .

Calculons, pour tout  $\mu \in [-1, 1]^*$ , les dérivées des fonctions (9): elles sont données par

$$x \mapsto e^{x/\mu} \langle u \rangle (x), \quad x \mapsto e^{-x/|\mu|} \langle u \rangle (x) \quad (10)$$

et on en déduit, d'après la formule (8a),

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, \mu) = -\frac{1}{\mu} e^{-x/\mu} h(\mu) - \frac{e^{-x/\mu^2}}{\mu} \int_0^x e^{y/\mu} \langle u \rangle (y) dy + \frac{e^{-x/\mu}}{\mu} e^{x/\mu} \langle u \rangle (x)$$

soit

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, \mu) = -\frac{1}{\mu} u(x, \mu) + \frac{1}{\mu} \langle u \rangle (x),$$

pour tout  $(x, \mu) \in \mathbf{R}_+ \times ]0, 1]$ . En exploitant de même la formule (8b), on étend la validité de la relation ci-dessus à  $\mathbf{R}_+ \times [-1, 0[$ . Donc la fonction  $u \in \mathcal{E}$  construite dans le IV 5] b) vérifie (MSa). La relation (MSb), elle, découle trivialement de la relation (1a) de l'énoncé.

5] d) D'après les questions IV 5] a)-c), pour tout  $h : ]0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  à valeurs positives et bornée sur  $]0, 1]$ , il existe une solution  $u$  de (MSa)-(MSb) dans  $\mathcal{E}$ . D'après le IV 4] c), cette solution est unique.

Lorsque  $h$  n'est pas à valeurs positives, on la décompose en

$$h = h_+ - h_-, \quad h_+(\mu) = \sup(h(\mu), 0), \quad h_-(\mu) = \sup(-h(\mu), 0).$$

On appelle  $u_1$  (resp.  $u_2$ ) l'unique solution de (MSa)-(MSb) dans  $\mathcal{E}$  avec  $h$  remplacée par  $h_+$  (resp.  $h_-$ ). Alors  $u_1 - u_2$  est solution dans  $\mathcal{E}$  de (MSa)-(MSb). C'est la seule d'après IV 4] c).

6] a) Pour  $v(x, \mu) = x + g(\mu)$ , on a

$$\mu \frac{\partial v}{\partial x}(x, \mu) + v(x, \mu) - \langle v \rangle (x) = \mu + x + g(\mu) - (x + \langle g \rangle) = 0$$

si et seulement si

$$g - \langle g \rangle = -\mu.$$

Cette dernière équation a pour solutions toutes les fonctions de la forme

$$g(\mu) = -\mu + C, \quad C \in \mathbf{R}.$$

6] b) D'après la question précédente V 6] a), la fonction  $v(x, \mu) = x - \mu$  est solution de (MSa).

Soit  $w$  vérifiant (2a-c) de l'énoncé, et soit  $u = w - v$ . Comme les applications  $(x, \mu) \mapsto w(x, \mu) - x$  et  $(x, \mu) \mapsto \mu$  appartiennent à  $\mathcal{E}$ , la fonction  $u$  appartient à  $\mathcal{E}$  comme somme des deux précédentes applications dans l'espace vectoriel  $\mathcal{E}$ . Comme  $w$  vérifie (2a) et  $v$  vérifie (MSa), on en déduit que  $u$  vérifie (MSa). Puis la relation (2b) implique que  $u(0, \mu) = -\mu$  pour tout  $\mu \in ]0, 1]$ .

Ainsi,  $u$  est solution dans  $\mathcal{E}$  de (MSa-b) avec  $h(\mu) = -\mu$  pour  $\mu \in ]0, 1]$ . D'après IV 4] c), cela définit  $u$  de façon unique.

Réciproquement, définissons  $w : (x, \mu) \mapsto u(x, \mu) + x - \mu$ , où  $u$  est la solution dans  $\mathcal{E}$  de (MSa-b) avec  $h(\mu) = -\mu$  pour  $\mu \in ]0, 1]$ . On vérifie alors aisément que  $w$  vérifie les conditions (2a-c).

6] c) D'après la question IV 6] b), on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mu w(x, \mu) d\mu &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mu u(x, \mu) d\mu + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mu(x - \mu) d\mu \\ &= \mathcal{F}_u - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}, \end{aligned}$$

puisque  $\mathcal{F}_u = 0$  d'après le IV 1] c).

7] a) On applique à la fonction  $w$  le même raisonnement qu'au IV 4] a). Pour tout  $\mu \in [-1, 1]^*$ ,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( e^{x/\mu} w(x, \mu) \right) = \left( e^{x/\mu} \langle w \rangle (x) \right).$$

La fonction  $x \mapsto \langle w \rangle (x) = x + \langle u \rangle (x)$  est continue sur  $\mathbf{R}_+$  car  $u \in \mathcal{E}$ : voir IV 4] b). Par conséquent, pour tout  $\mu \in [-1, 1]^*$ , et tout  $x$  et  $y \in \mathbf{R}_+$ ,

$$e^{x/\mu} w(x, \mu) = e^{y/\mu} w(y, \mu) + \int_y^x e^{z/\mu} \frac{1}{\mu} \langle w \rangle (z) dz. \quad (11)$$

Compte tenu du fait que  $w(0, \mu) = 0$ , pour tout  $\mu \in ]0, 1]$  et tout  $x \in \mathbf{R}_+$ ,

$$w(x, \mu) = \int_0^x e^{-(x-z)/\mu} \frac{1}{\mu} \langle w \rangle (z) dz. \quad (12a)$$

Ensuite, d'après la condition (2c) de l'énoncé,  $w(x, \mu) = O(x)$  pour tout  $\mu \in [-1, 1]^*$ ; en faisant  $x \rightarrow +\infty$  dans (11) pour  $\mu \in [-1, 0[$ , on trouve que

$$w(y, \mu) + \int_y^{+\infty} e^{y-z/\mu} \frac{1}{\mu} \langle w \rangle (z) dz = 0$$

ce qui équivaut à

$$w(x, \mu) = \int_x^{+\infty} e^{-(z-x)/|\mu|} \frac{1}{|\mu|} \langle w \rangle (z) dz, \quad (12b)$$

pour tout  $x \in \mathbf{R}_+$  et  $\mu \in [-1, 0[$ .

Grâce au théorème de Fubini

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 w(x, \mu) d\mu &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^x e^{-(x-z)/\mu} \frac{1}{\mu} \langle w \rangle (z) dz d\mu \\ &= \frac{1}{2} \int_0^x \left( \int_0^1 \frac{e^{-(x-z)/\mu}}{\mu} d\mu \right) \langle w \rangle (z) dz. \end{aligned}$$

Le changement de variables  $t = 1/\mu$  montre que, pour tout  $z \in ]0, x[$

$$\int_0^1 \frac{e^{-(x-z)/\mu}}{\mu} d\mu = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-(x-z)t}}{t} dt = Ei(x-z).$$

Ainsi, on trouve finalement que, pour tout  $x > 0$ ,

$$\frac{1}{2} \int_0^1 w(x, \mu) d\mu = \frac{1}{2} \int_0^x Ei(x-z) \langle w \rangle (z) dz. \quad (13a)$$

Un calcul similaire montre que, pour tout  $x > 0$ ,

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^0 w(x, \mu) d\mu = \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} Ei(z-x) \langle w \rangle (z) dz. \quad (13b)$$

En additionnant (13a-b), on trouve que, pour tout  $x > 0$ ,

$$\langle w \rangle (x) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} Ei(|x-z|) \langle w \rangle (z) dz,$$

qui n'est autre que l'équation (WH), d'après la définition de  $K$ . Cette relation a encore lieu pour  $x = 0$ : en effet,  $\langle w \rangle$  est continue sur  $\mathbf{R}_+$ , comme rappelé ci-dessus. Il ne reste donc plus qu'à montrer que l'application

$$x \mapsto \int_0^{+\infty} E(|x-y|) \langle w \rangle (y) dy$$

est aussi continue sur  $\mathbf{R}_+$ . En fait, pour tout  $x \in \mathbf{R}_+$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} E(|x-y|) \langle w \rangle (y) dy &= \int_0^{+\infty} E(|x-y|) \langle u \rangle (y) dy + \int_0^{+\infty} E(|x-y|) y dy \\ &= 2K \star (\langle u \rangle \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+})(x) + \int_0^{+\infty} E(|x-y|) y dy. \end{aligned}$$

La fonction  $K \star (\langle u \rangle \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+})$  est continue sur  $\mathbf{R}_+$  comme produit de convolution de la fonction  $K \in L^1(\mathbf{R})$  (cf. I 1] e) et de la fonction bornée  $\langle u \rangle \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}$ . Ensuite,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} E(|x-y|) y dy &= \\ &= \int_x^{+\infty} E(z) z dz + x \int_0^{+\infty} E(z) dz + x \int_0^{+\infty} E(z) dz \end{aligned}$$

et les 3 termes du second membre de cette égalité sont continus car  $Ei \in L^1(\mathbf{R}_+)$ , d'après le I 1] e).

7] b) En raisonnant comme au IV 4] a) (en tenant compte en particulier de la croissance  $\langle w \rangle (y) \sim y$  pour  $y \rightarrow +\infty$ ) et en utilisant la formule pour  $f$  fournie au III 7] e), on trouve que

$$w(0, -\mu) = \frac{\sqrt{3}}{i\mu} \int_0^{+\infty} e^{-y/\mu} \left[ \int_{-\infty-i\beta}^{+\infty-i\beta} \exp\left(izy + \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty+i\alpha}^{+\infty+i\alpha} \frac{\ln A(t) dt}{t-z}\right) \frac{z-i}{z^2} dz \right] dy$$

pour tout  $\mu \in ]0, 1]$ , puisque  $\langle w \rangle = f$  d'après le résultat d'unicité de la question V 7] a).

## V

On rappelle que comme dans la question IV 2] a), l'on a

$$\frac{d}{dx} \mathcal{H}_u(x) + \int_{-1}^1 [u(x, \mu) - \langle u \rangle (x)]^2 d\mu = 0, \quad x > 0.$$

Soit  $\gamma \in [0, 1[$ : on a donc

$$\frac{d}{dx} (e^{2\gamma x} \mathcal{H}_u(x)) - 2\gamma e^{2\gamma x} \mathcal{H}_u(x) + e^{2\gamma x} \int_{-1}^1 [u(x, \mu) - \langle u \rangle (x)]^2 d\mu = 0, \quad x > 0.$$

Mais d'après le IV 2] c)

$$\begin{aligned} & e^{2\gamma x} \int_{-1}^1 [u(x, \mu) - \langle u \rangle (x)]^2 d\mu - 2\gamma e^{2\gamma x} \mathcal{H}_u(x) \\ &= e^{2\gamma x} \int_{-1}^1 [u(x, \mu) - \langle u \rangle (x)]^2 d\mu - \gamma e^{2\gamma x} \int_{-1}^1 \mu [u(x, \mu) - \langle u \rangle (x)]^2 d\mu \\ &\geq (1-\gamma) e^{2\gamma x} \int_{-1}^1 [u(x, \mu) - \langle u \rangle (x)]^2 d\mu, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\frac{d}{dx}(e^{2\gamma x} \mathcal{H}_u(x)) + (1 - \gamma)e^{2\gamma x} \int_{-1}^1 [u(x, \mu) - \langle u \rangle(x)]^2 d\mu \leq 0, \quad x > 0.$$

En intégrant pour  $x \in [0, X]$ , en notant que  $\mathcal{H}_u \geq 0$  sur  $\mathbf{R}_+$  grâce à IV 2] a) et d) et en faisant  $X \rightarrow +\infty$  on trouve que

$$\int_0^{+\infty} \int_{-1}^1 [u(x, \mu) - \langle u \rangle(x)]^2 e^{2\gamma x} d\mu dx \leq \frac{1}{1 - \gamma} \mathcal{H}_u(0).$$

Or

$$\mathcal{H}_u(0) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mu u(0, \mu)^2 d\mu \leq \frac{1}{2} \int_0^1 \mu u(0, \mu)^2 d\mu = \frac{1}{2} \int_0^1 \mu h(\mu)^2 d\mu$$

d'où le résultat avec  $C_2 = \frac{1}{2}$ .

2] a) Grâce au IV 1] b) et c), on écrit que, pour tout  $x \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= 3 \langle \mu^2 u \rangle(x) - l = 3 \langle \mu^2(u - \langle u \rangle) \rangle(x) + 3 \langle \mu^2 \langle u \rangle \rangle(x) - l \\ &= 3 \langle \mu^2(u - \langle u \rangle) \rangle(x) + 3 \langle \mu^2 \rangle \langle u \rangle(x) - l = 3 \langle \mu^2(u - \langle u \rangle) \rangle + \langle u \rangle(x) - l \end{aligned}$$

de sorte que, en utilisant l'intégralité de Cauchy-Schwarz

$$|\langle u \rangle(x) - l|^2 = \left| \frac{3}{2} \int_{-1}^1 \mu^2 [u(x, \mu) - \langle u \rangle(x)] d\mu \right|^2 \leq \frac{9}{4} \int_{-1}^1 \mu^4 d\mu \int_{-1}^1 [u(x, \mu) - \langle u \rangle(x)]^2 d\mu$$

ce qui donne le résultat annoncé avec  $C_3 = \frac{9}{20}$ .

2] b) Appliquons le théorème de Pythagore dans l'espace de Hilbert  $L^2(\mathbf{R}_+ \times [-1, 1]; e^{2\gamma x} dx d\mu)$ :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \int_{-1}^1 |u(x, \mu) - l|^2 e^{2\gamma x} dx d\mu &= \int_0^{+\infty} \int_{-1}^1 |[u(x, \mu) - \langle u \rangle(x)] + [\langle u \rangle(x) - l]|^2 e^{2\gamma x} dx d\mu \\ &= \int_0^{+\infty} \int_{-1}^1 |u(x, \mu) - \langle u \rangle(x)|^2 e^{2\gamma x} dx d\mu + \int_0^{+\infty} \int_{-1}^1 |\langle u \rangle(x) - l|^2 e^{2\gamma x} dx d\mu. \end{aligned}$$

D'après les questions V 1] et 2] a), on a

$$\int_0^{+\infty} \int_{-1}^1 |u(x, \mu) - l|^2 e^{2\gamma x} dx d\mu \leq \frac{C_2}{1 - \gamma} \int_0^1 \mu h(\mu)^2 d\mu + 2C_3 \frac{C_2}{1 - \gamma} \int_0^1 \mu h(\mu)^2 d\mu = \frac{C_4}{1 - \gamma} \int_0^1 \mu h(\mu)^2 d\mu$$

ce qui donne la majoration voulue avec  $C_4 = C_2(1 + 2C_3) = \frac{19}{20}$ .

V 3] La fonction  $(x, \mu) \mapsto w(x, \mu) - x$  appartient à  $\mathcal{E}$  d'après IV 6] b), ainsi que la fonction  $u$ . En particulier, la fonction  $x \mapsto w(x, \mu)$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbf{R}_+$  pour tout  $\mu \in [-1, 1]^*$  et, pour tout  $L > 0$ , la fonction  $w$  est bornée sur  $[0, L] \times [-1, 1]^*$ . Enfin

$$\frac{\partial}{\partial x} \mu u(x, \mu) w(x, -\mu) = -[u(x, \mu) - \langle u \rangle(x)] w(x, -\mu) + [w(x, -\mu) - \langle w \rangle(x)] u(x, \mu)$$

ce qui montre que, pour tout  $(x, \mu) \in ]0, L] \times [-1, 1]^*$

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \mu u(x, \mu) w(x, -\mu) \right| \leq 4 \|u\|_{L^\infty} \|w\|_{L^\infty([0, L] \times [-1, 1])}.$$

Le théorème de dérivation sous le signe somme cité à la question IV 1] a) montre alors que l'application

$$x \mapsto \int_{-1}^1 \mu u(x, \mu) w(x, -\mu) d\mu$$

est dérivable sur  $\mathbf{R}_+$  et que

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \int_{-1}^1 \mu u(x, \mu) w(x, -\mu) d\mu \\ &= - \int_{-1}^1 [u(x, \mu) - \langle u \rangle(x)] w(x, -\mu) d\mu + \int_{-1}^1 [w(x, -\mu) - \langle w \rangle(x)] u(x, \mu) d\mu \\ &= - \int_{-1}^1 [u(x, \mu) - \langle u \rangle(x)] [w(x, -\mu) - \langle w \rangle(x)] d\mu \\ &+ \int_{-1}^1 [w(x, -\mu) - \langle w \rangle(x)] [u(x, \mu) - \langle u \rangle(x)] d\mu = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent l'application

$$x \mapsto \int_{-1}^1 \mu u(x, \mu) w(x, -\mu) d\mu$$

est constante sur  $\mathbf{R}_+$ : pour tout  $x \in \mathbf{R}_+$ , on a

$$\int_{-1}^1 \mu u(x, \mu) w(x, -\mu) d\mu = \int_{-1}^1 \mu u(0, \mu) w(0, -\mu) d\mu = \int_0^1 \mu u(0, \mu) w(0, -\mu) d\mu = \int_0^1 \mu W(\mu) h(\mu) d\mu.$$

D'après la question IV 6] c)

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \mu u(x, \mu) w(x, -\mu) d\mu = \int_{-1}^1 \mu [u(x, \mu) - l] w(x, -\mu) d\mu + l \int_{-1}^1 \mu w(x, -\mu) d\mu \\ &= \int_{-1}^1 \mu [u(x, \mu) - l] w(x, -\mu) d\mu - l \int_{-1}^1 \mu w(x, \mu) d\mu = \int_{-1}^1 \mu [u(x, \mu) - l] w(x, -\mu) d\mu + \frac{2}{3} l. \end{aligned}$$

D'autre part, il existe d'après le V 2] b) une suite  $x_n \rightarrow +\infty$  telle que

$$\|u(x_n, \cdot) - l\|_{L^2([-1,1])} = o(e^{\gamma x_n}),$$

pour tout  $\gamma \in [0, 1[$ , alors que, lorsque  $n \rightarrow +\infty$

$$\|w(x_n, \cdot)\|_{L^2([-1,1])} = O(x_n).$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique donc que

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-1}^1 \mu u(x_n, \mu) w(x_n, -\mu) d\mu - \frac{2}{3} l \right| = \left| \int_{-1}^1 \mu [u(x_n, \mu) - l] w(x_n, -\mu) d\mu \right| \\ & \leq \int_{-1}^1 |u(x_n, \mu) - l| |w(x_n, -\mu)| d\mu \leq \|u(x_n, \cdot) - l\|_{L^2([-1,1])} \|w(x_n, \cdot)\|_{L^2([-1,1])} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Mais comme d'autre part on a montré que

$$\int_{-1}^1 \mu u(x_n, \mu) w(x_n, -\mu) d\mu = \int_0^1 \mu W(\mu) h(\mu) d\mu$$

on en déduit la relation

$$l = \frac{3}{2} \int_0^1 \mu W(\mu) h(\mu) d\mu$$

où  $W$  est définie par la question IV 7] b).

**FIN**

## Commentaires bibliographiques

Les parties I et II du problème étaient, pour l'essentiel des exercices classiques portant sur les intégrales fonctions d'un paramètre éventuellement complexe (partie I) et sur la convolution et ses liens avec la transformation de Fourier (partie II).

Les inégalités des questions II 2] a) et II 3] a) sont des cas particuliers de l'inégalité de Young: voir [L-L], pp. 90-97 pour des généralisations de ces énoncés.

Concernant l'optimalité de l'inégalité du II 3] a), l'exercice suivant est instructif: pour tout  $F \in L^1(\mathbf{R})$  définissons l'application linéaire continue sur  $L^2(\mathbf{R})$

$$L_F : L^2(\mathbf{R}) \ni G \mapsto F * G \in L^2(\mathbf{R}).$$

Trouver la norme de  $L_F$ .

Les parties III à V portaient sur le problème de Milne-Schwarzschild proprement dit.

La partie III est une mise en forme de l'article célèbre de N. Wiener et E. Hopf [W-H] sur la question. L'idée cruciale de cet article est évidemment de se ramener au problème de Riemann-Hilbert (à savoir la factorisation de  $A$  au III 4] c)). Lire l'article [W-H] demande une certaine connaissance de l'allemand; on pourra donc lui préférer le texte anglais plus détaillé [H] écrit par Hopf. Pour un aperçu plus concis du matériel contenu dans le III, on pourra aussi lire avec profit [D-McK] pp. 176-184 ou encore [D-L] pp. 571-577 (mais on ne trouvera presque aucune preuve dans ce dernier exposé qui permet toutefois de suivre les grandes lignes de la méthode utilisée dans le III).

Les parties IV et V sont consacrées à une approche différente du problème de Milne-Schwarzschild, due à Bardos-Santos-Sentis — cf. appendice de [BSS]. La preuve d'unicité des IV 3] et 4] est plus simple que la preuve originale de [BSS]: elle est basée sur une remarque non publiée de R. Sentis (pour l'équation de Boltzmann) — cf. appendice B de [GJL] pour l'adaptation de cette idée à une version discrétisée en  $\mu$  du problème de Milne-Schwarzschild.

La question V 3] est une réécriture d'une méthode de calcul fondamentale en astrophysique due à Chandrasekhar (voir dans [Ch], ce qui se rapporte à la fonction  $H$ ). Cette formulation nouvelle est traitée en exemple dans [Go] et utilisée dans l'appendice C de [GJL] pour établir quelques propriétés de la fonction  $W$  — le lien entre la fonction  $W$  de l'énoncé et la fonction  $H$  de Chandrasekhar est donné par

$$W(\mu) = \frac{2}{\sqrt{3}}H(\mu), \quad \mu \in ]0, 1].$$

Signalons pour conclure une autre approche du problème de Milne-Schwarzschild, due à Sentis [Se]. Le point crucial de cette approche est l'obtention de certaines propriétés de factorisation de la solution d'une équation de Riccati (à valeurs opératorielles). Plus précisément, l'opérateur  $R$  défini par

$$(Ru(x, \cdot))(\mu) = u(x, -\mu), \quad \mu \in ]0, 1],$$

opérateur dont on vérifie facilement qu'il ne dépend pas de  $x$  (il s'agit du "principe d'invariance" ou d'"invariant imbedding") se "factorise" à partir de la fonction  $H$ . Plus précisément, si on note  $r(\mu, \mu')$  le noyau intégral de  $R$ , on a

$$r(\mu, \mu') = \frac{1}{2} \frac{\mu H(\mu) H(\mu')}{\mu + \mu'}, \quad \mu, \mu' \in ]0, 1].$$

Enfin, concluons par quelques remarques sur les opérateurs de Toeplitz qui permettront au lecteur de se faire une idée de l'importance dans le reste des mathématiques des notions introduites par Wiener et Hopf.

Soit  $U$  le disque unité ouvert de  $\mathbf{C}$ ; considérons l'espace de Hilbert  $\mathcal{H} = L^2(\partial U)$  ainsi que son sous-espace  $H^2(\partial U)$  formé des éléments de  $\mathcal{H}$  qui admettent un prolongement holomorphe dans le disque unité; on notera  $P$  la projection orthogonale de  $\mathcal{H}$  sur  $H^2(\partial U)$ . On voit mieux la situation grâce aux séries de Fourier:  $\mathcal{H}$  s'identifie à  $l^2(\mathbf{Z})$  par  $f \mapsto (\hat{f}(k))_{k \in \mathbf{Z}}$  qui est une isométrie (à un facteur multiplicatif près par la relation de Parseval);  $H^2(\partial U)$  s'identifie à l'espace des suites  $(a_k)_{k \in \mathbf{Z}}$  telles que  $a_k = 0$  pour tout  $k < 0$ , tandis que la projection  $P$  est donnée par

$$(a_k)_{k \in \mathbf{Z}} \mapsto (\mathbf{1}_{k \geq 0} a_k)_{k \in \mathbf{Z}}.$$

Soit maintenant  $f \in C(\partial U)$ ; notons  $T_f$  l'opérateur défini par

$$T_f : H^2(\partial U) \ni \phi \mapsto P(f\phi) \in H^2(\partial U).$$

On appelle  $T_f$  "opérateur de Toeplitz de symbole  $f$ "; en effet sa représentation par les séries de Fourier est donnée par une "matrice infinie" de la forme

$$M_f = \begin{pmatrix} f_0 & f_{-1} & f_{-2} & \cdots \\ f_1 & f_0 & f_{-1} & \cdots \\ f_2 & f_1 & f_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{où } f_k \text{ désigne } \hat{f}(k) \text{ pour } k \in \mathbb{Z}.$$

qui est une matrice de Toeplitz (ce qui justifie le nom d'opérateur de Toeplitz donné à  $T_f$ ).

On montre alors que, si l'image par  $f$  du cercle unité  $\partial U$  ne contient pas l'origine 0, alors l'opérateur  $T_f$  est un opérateur de Fredholm dont l'indice est l'opposé du nombre de tours que le lacet image par  $f$  du cercle unité  $\partial U$  orienté positivement effectue autour de 0 (il s'agit d'un cas particulier d'un théorème de Gohberg-Krein, idée qui semble remonter à Max Noether). Ceci donne par exemple une méthode pour construire des opérateurs de Fredholm non triviaux d'indice arbitraire; une application possible en est la construction de l'élément de Bott en K-théorie.

Le lien avec l'équation intégrale (WH) de l'énoncé est évident: dans la représentation par les séries de Fourier

$$M_f \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

où

$$b_j = \sum_{k=0}^{+\infty} f_{j-k} a_k, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Cette formule est une version discrète de l'opérateur intégral intervenant dans (WH). Toutefois, le cas étudié dans l'énoncé ne ressortit pas au théorème de Gohberg-Krein car la fonction  $1 - \hat{K}(z)$  s'annule en  $z = 0$ .

### Bibliographie

- [BSS] C. Bardos, R. Santos, R. Sentis, Diffusion approximation and computation of the critical size, Trans. of the AMS, 284 (1984), 617–649.
- [Ch] S. Chandrasekhar, "Radiative Transfer" Dover, New York (1960).
- [D-McK] H. Dym, H. McKean, "Fourier series and integrals", Academic Press, New York London (1972).
- [D-L] R. Dautray, J.-L. Lions, "Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques", tome 2, chap. XI A, Masson, Paris (1985).
- [Go] F. Golse, Knudsen layers from the computational viewpoint, Transport Theory and Statist. Phys., 21 (1992), 211–236.
- [GJL] F. Golse, S. Jin, D. Levermore, The convergence of numerical transfer schemes in diffusive regimes I: discrete ordinate methods, SIAM J. of Numer. Anal., 36 (1999), 1333–1369.
- [H] E. Hopf, "Mathematical problems of radiative equilibrium" Cambridge Math. Tract no. 31, Cambridge University Press (1934).
- [L-L] E. Lieb, M. Loss, "Analysis", Graduate Studies in Math. 14, AMS Providence RI (1997).
- [Se] R. Sentis,
- [W-H] N. Wiener, E. Hopf, Über eine Klasse singularer Integralgleichungen, Sitzungsber. Deut. Akad. Wiss. Berlin (1931), pp. 696–706.

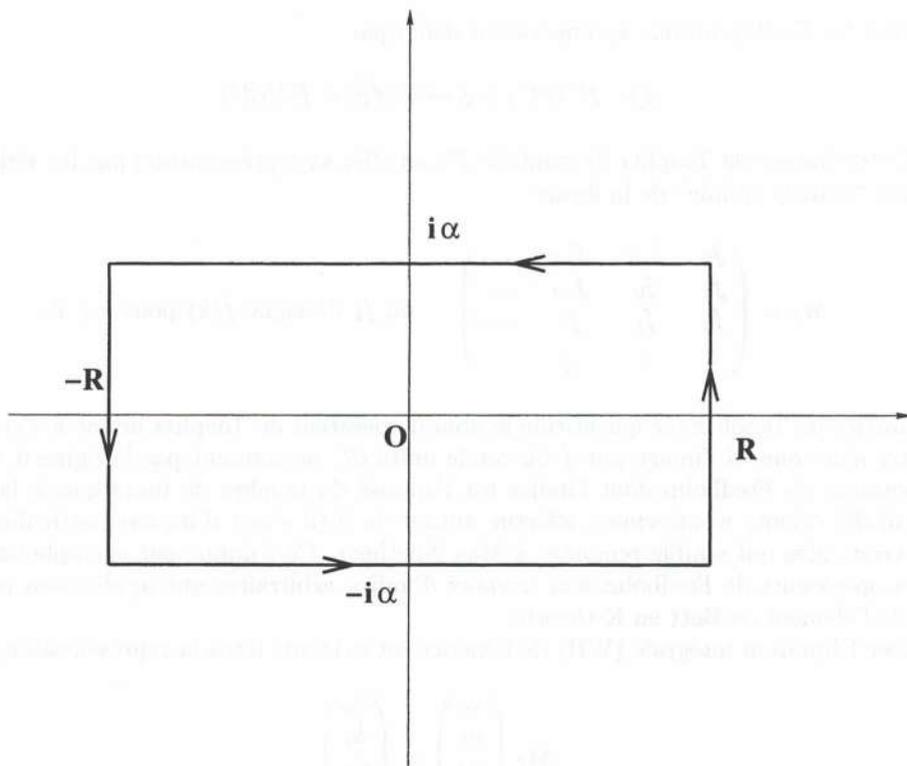


Figure 1: Contour d'intégration pour la question III 4] c)

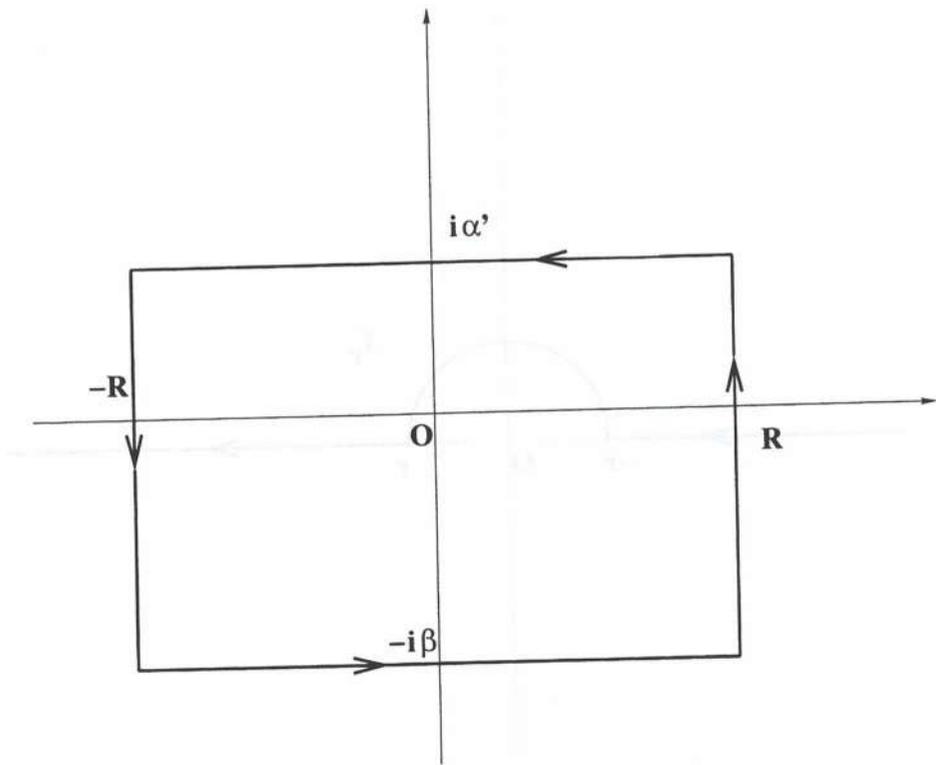


Figure 2: Contour d'intégration pour la question III 7] c)

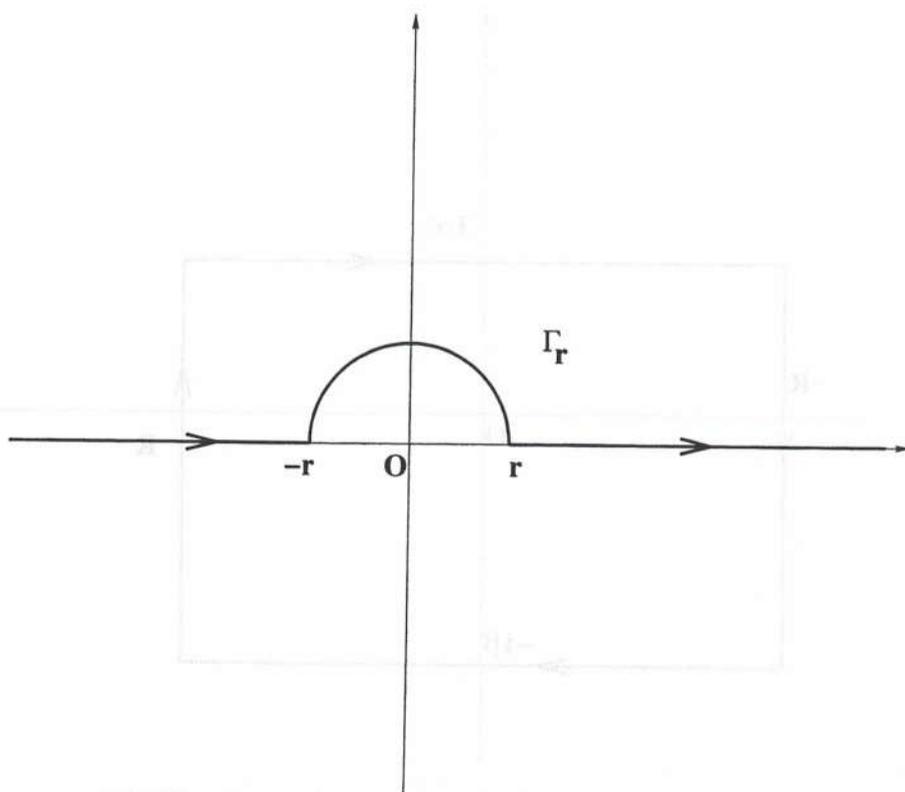


Figure 3: Contour d'intégration pour la question III 7] d)

## **Libellé des leçons et textes**

**Session 2001**

Leçons d'Algèbre

100	Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement. Séries génératrices.
101	Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
102	Sous-groupes discrets de $\mathbf{R}^n$ . Réseaux.
103	Sous-groupes distingués, groupes quotients. Exemples et applications.
104	Groupes finis. Exemples et applications.
105	Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.
106	Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie $E$ , sous-groupes de $GL(E)$ . Applications.
107	Sous-groupes finis de $O(2, \mathbf{R})$ , de $O(3, \mathbf{R})$ . Applications.
108	Congruences dans $\mathbf{Z}$ , anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ . Applications.
109	Nombres premiers. Applications.
110	Idéaux d'un anneau commutatif unitaire. Exemples et applications.
111	Corps finis. Applications.
112	Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.
113	Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.
114	Groupe des nombres complexes de module 1. Applications.
115	Algèbre des polynômes à $n$ indéterminées ( $n \geq 2$ ). Polynômes symétriques. Applications.
116	Racines des polynômes à une indéterminée. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme. Exemples et applications.
117	Équations diophantiennes du premier degré $ax + by = c$ . Exemples d'équations diophantiennes de degré supérieur.
118	Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.
119	Matrices équivalentes. Matrices semblables. Applications.
120	Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice. Résolution d'un système d'équations linéaires. Applications.
121	Déterminant. Applications.
122	Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
123	Sous-espaces stables d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.
124	Formes quadratiques. Applications.
125	Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien de dimension finie.
126	Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel hermitien de dimension finie.
127	Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Formes réduites. Applications.
128	Coniques.
129	Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie ; convexité. Applications.
130	Homographies de la droite complexe. Applications.
131	Applications des nombres complexes à la géométrie.
132	Utilisation des angles en géométrie.
133	Exemples de propriétés projectives et d'utilisation d'éléments à l'infini.
134	Constructions à la règle et au compas.
136	Formes linéaires sur un espace vectoriel de dimension finie. Espace dual, orthogonalité. Applications.

Le jury indique qu'il est probable que les énoncés supplémentaires suivants participent au tirage pour la session 2002. Cette liste n'est pas exhaustive et la liste définitive des énoncés de leçons sera établie par le jury 2002 lorsqu'il se réunira à cet effet avant les épreuves orales. Le jury ne s'engage pas à fournir des indications similaires dans l'avenir.

Leçons d'Algèbre	
Enoncés nouveaux	
	<p>Exemples de parties génératrices d'un groupe.            Endomorphismes diagonalisables.            Exponentielle de matrices. Applications.            Endomorphismes nilpotents.            Polynômes d'endomorphismes. Applications.            Exemples de décompositions remarquables dans le groupe linéaire. Applications.            Problèmes d'angles et de distances.            Utilisation des groupes en géométrie.            Polynômes orthogonaux.</p>

Leçons d'Analyse

200	Espaces de fonctions. Exemples et applications.
201	Exemples de parties denses et applications.
202	Utilisation de la notion de compacité.
203	Connexité : exemples et applications
204	Espaces complets. Exemples et applications.
205	Utilisation de théorèmes de point fixe.
206	Prolongement de fonctions. Applications.
207	Utilisation de la continuité uniforme en analyse.
208	Utilisation de la dénombrabilité en analyse et en probabilités.
209	Applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés : exemples et applications.
210	Utilisation de la dimension finie en analyse.
211	Méthodes hilbertiennes.
212	Bases hilbertiennes. Exemples et applications.
213	Applications du théorème d'inversion locale et du théorème des fonctions implicites.
214	Différentiabilité d'une application définie sur un ouvert de $R^n$ . Exemples et applications.
215	Étude locale de courbes et de surfaces.
216	Utilisation de la transformation de Fourier et des séries de Fourier pour la résolution d'équations aux dérivées partielles.
217	Applications des formules de Taylor et des développements limités.
218	Problèmes d'extremums.
219	Équations différentielles $y' = f(x, y)$ ; exemples d'études qualitatives des solutions.
220	Équations différentielles linéaires. Exemples.
221	Exemples d'équations différentielles. Solutions exactes ou approchées.
222	Suites de nombres réels ou complexes: convergence, théorèmes d'existence d'une limite. Exemples et applications.
223	Comportement asymptotique des suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.
224	Comportement d'une suite définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$ . Exemples.
225	Développement asymptotique d'une fonction d'une variable réelle.
226	Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.
227	Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.
228	Séries de nombres réels ou complexes: convergence, convergence absolue, comportement des restes ou des sommes partielles. Exemples.
229	Illustrer par des exemples et des contre-exemples la théorie des séries.
230	Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X)=0$ . Exemples.
231	Intégrale d'une fonction d'une variable réelle. Suites de fonctions intégrables.
232	Espaces $L^p$ , $1 \leq p \leq +\infty$
233	Interversion d'une limite et d'une intégrale. Exemples et applications.
234	Exemples de calculs d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.
235	Problèmes de convergence et de divergence d'une intégrale sur un intervalle de $R$ .
237	Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.
238	Transformation de Fourier et produit de convolution. Applications.
239	Suites et séries de fonctions: exemples et contre-exemples.
240	Exemples d'utilisation de fonctions définies par des séries.
241	Séries entières: convergence, propriétés de la somme. Exemples et applications.
242	Développement d'une fonction en série entière, fonctions analytiques. Exemples et applications.
243	Fonctions d'une variable complexe, holomorphie. Exemples et applications.
244	Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $C$ .
245	Développement d'une fonction périodique en série de Fourier. Exemples et applications.
246	Exemples de problèmes d'interversion de limites.
248	Le jeu de pile ou face (suites de variables de Bernoulli indépendantes).
249	Loi binomiale, loi de Poisson. Applications.
250	Indépendance d'événements et de variables aléatoires. Exemples.

Le jury indique qu'il est probable que les modifications suivantes interviennent dans le tirage de la session 2002. Cette liste n'est pas exhaustive et la liste définitive des énoncés de leçons sera établie par le jury 2002 lorsqu'il se réunira à cet effet avant les épreuves orales. Le jury ne s'engage pas à fournir des indications similaires dans l'avenir.

Leçons d'Analyse	
Énoncés nouveaux	
	Méthodes de calcul des valeurs approchées d'une intégrale. Approximation des fonctions numériques par des fonctions polynomiales ou polynomiales par morceaux. Exemples. Énoncés modifiés
217	Applications des formules de Taylor.
220	Équations différentielles linéaires, systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.
225	Développement limité, développement asymptotique d'une fonction d'une variable réelle.
234	Illustrer par des exemples quelques méthodes de calculs d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.

### Leçons de Calcul Scientifique

- |     |   |
|-----|---|
| 300 | Appliquer et comparer des méthodes numériques et/ou symboliques de réduction de matrices à partir des thèmes du programme.  |
| 301 | Appliquer et comparer des méthodes numériques et/ou symboliques de résolution exacte ou approchée de systèmes d'équations linéaires à partir des thèmes du programme. |
| 302 | Résultant et élimination effective dans les systèmes d'équations polynomiales. Application(s) issue(s) des thèmes du programme.                                       |
| 303 | Appliquer et comparer des méthodes de résolution exactes ou approchées d'équations ou de systèmes d'équations non linéaires à partir des thèmes du programme.         |
| 304 | Donner un résultat relatif à l'approximation ou à l'interpolation de fonctions. Application(s) issue(s) des thèmes du programme.                                      |
| 305 | Appliquer et comparer des méthodes de calcul d'intégrales à partir des thèmes du programme.   |
| •   | Appliquer et comparer des méthodes de résolution d'équations différentielles ou de systèmes d'équations différentielles à partir des thèmes du programme.             |
| 306 | Exemples de propriétés qualitatives d'une équation différentielle ou d'un système différentiel. Interprétation sur un modèle.   |
| 307 | Problème de factorisation de polynômes. Application(s) issues des thèmes du programme.  |
| 308 | Exemple de résolution exacte ou approchée d'une équation aux dérivées partielles. Application(s) issue(s) des thèmes du programme.                                    |
| 309 | Problèmes issus des thèmes du programme conduisant à des équations aux dérivées partielles. Etude qualitative.  |
| 310 | Appliquer des méthodes de résolution d'un problème de minimisation d'une fonctionnelle à partir des thèmes du programme.  |
| 311 | Transformation de Fourier: utilisation dans les thèmes du programme.  |
| 312 | Problème de dénombrement et de localisation des zéros d'un polynôme. Application(s) issue(s) des thèmes du programme.   |
| 313 | Problèmes liés à la représentation et au tracé des courbes.   |
| 314 | Problèmes liés à la représentation et au tracé des surfaces.  |
| 315 | Dépendance relativement à un paramètre d'une équation ou d'un système d'équations. Application(s) issue(s) des thèmes du programme.                                   |
| 316 | PGCD, PPCM: méthodes de calcul et applications dans les thèmes du programme.  |
| 317 | Applications des congruences ou des corps finis aux thèmes du programme.  |
| 318 | Application de la notion de convexité à des questions issues des thèmes du programme.   |

## Leçons de Probabilités

- |     |   |
|-----|---|
| 400 | Loi des grands nombres ; applications à l'estimation.   |
| 401 | Le théorème de la limite centrale ; application(s).   |
| 402 | Décrire une méthode probabiliste pour le calcul approché d'une intégrale.   |
| 403 | Espérance conditionnelle et applications (par exemple aux martingales).   |
| 404 | Exemples d'utilisation(s) de l'espérance conditionnelle en modélisation.  |
| 405 | Exemples d'utilisation(s) des martingales.  |
| 406 | Vecteurs aléatoires gaussiens, utilisation.   |
| 407 | Modèle linéaire gaussien en statistique.  |
| 408 | Test du Khi-deux.   |
| 409 | Tests statistiques : principes et exemples.   |
| 410 | Intervalles de confiance : principes et exemples.   |
| 411 | Applications de la transformation de Laplace (par exemple, à l'inégalité de Cramer-Chernoff, au problème de ruine du joueur, etc.).           |
| 412 | Usage de la fonction de répartition empirique en statistique.   |
| 413 | Utilisation de lois exponentielles (par exemple, pour l'étude d'une durée de vie, etc.).  |
| 414 | Simulation de variables et de vecteurs aléatoires ; applications.   |
| 415 | Sommes de variables aléatoires; applications (par exemple aux marches aléatoires, à la ruine du joueur etc.).                                 |
| 416 | Exemples de chaînes de Markov récurrentes ou transientes à espace d'états au plus dénombrable.  |
| 417 | Convergence d'une chaîne de Markov vers une loi stationnaire.   |
| 418 | Utilisations de la transformée de Laplace, de la fonction génératrice (par exemple, marches aléatoires, ruine du joueur, branchements, etc.). |
| 419 | Utilisations de la loi de Poisson en modélisation (par exemple, processus de comptage, etc.).   |

Textes de Calcul Scientifique

- |     |   |
|-----|---|
| 501 | Conditions aux limites absorbantes pour l'équation des ondes.         |
| 502 | Problème de la corde dite frappée et de la corde dite pincée.         |
| 503 | Propagation des ondes dans un guide optique en 2D.                    |
| 504 | Des rides sur l'onde.   |
| 505 | Localisation par GPS.   |
| 506 | Texte supprimé.   |
| 507 | La corde élastique.   |
| 508 | Etude de schémas numériques pour les équations hyperboliques simples. |
| 509 | Etude de l'évolution d'un trafic.                                     |
| 510 | Modèle simplifié de mélange liquide-gaz.                              |
| 511 | Phénomènes de propagation et circulation automobile.                  |
| 512 | Ondes de gravitation dans un liquide.                                 |
| 513 | Ondes acoustiques dans des fluides.                                   |
| 514 | Bande passante d'une fibre optique.                                   |
| 515 | Un problème inverse.  |
| 516 | Le problème de Monge-Kantorovitch.                                    |
| 517 | Un problème de tarification optimale.                                 |
| 518 | Fiabilité: rejet de perturbations.                                    |
| 519 | L'onde de Kelvin  |
| 520 | Trafic routier  |
| 521 | Contrats incitatifs.  |
| 522 | Courbes et surfaces en optique géométrique.                           |
| 523 | Approximation de courbes.   |
| 524 | Le polygône de Newton.  |
| 525 | Heptagone et hyperbole.   |
| 526 | Factorisation et cryptographie.                                       |
| 527 | Codes correcteurs.  |
| 528 | Logarithmes discrets et cryptographie.                                |
| 529 | Configuration centrale de quatre corps dans le plan.                  |
| 530 | Construction explicite de surfaces algébriques.                       |
| 531 | Chaînes triangulaires fermées de six cercles.                         |
| 532 | Programmation linéaire sous contraintes génériques.                   |
| 533 | pgcd approché.  |
| 534 | Calcul de pgcd  |
| 535 | Paramétrisation rationnelle de certaines surfaces cubiques réelles.   |

Textes de Probabilités

601	Un modèle d'actifs financiers à longue mémoire.
602	Le coussin financier
603	Convergence en loi des prix des actifs financiers.
604	Minimisation du risque quadratique en finance.
605	Instants de records.
606	Aversion au risque dans les choix économiques.
607	Processus ARMA et ARFIMA en finance.
608	Processus à volatilité stochastique.
609	Problème d'arrêt optimal et application aux options américaines.
610	Gestion optimale de portefeuilles dans un marché financier discret.
611	Modélisation ARCH
612	Modèle binomial
613	Rendement d'une ligne de transmission.
614	Files d'attente.
615	Indépendance conditionnelle et réseaux bayésiens.
616	Fonctions de Lyapounov et stabilité de réseaux de télécommunications.
617	Étude d'une liaison satellite avec erreurs aléatoires.
618	Modélisation d'un central téléphonique avec répétitions d'appels.
619	Réduction de dimension par analyse en composantes principales
620	Compression de données par quantification.
621	Modélisation du système ALOHA.
622	Codage et entropie.
623	Modélisation du trafic d'un réseau de communication.
624	Détection d'un signal en télécommunications
625	Indice de Pareto.
626	Modèle de Cox et statistique bayésienne en fiabilité.
627	Processus de Poisson et valeurs records.
628	Echantillonnage préférentiel dans les calculs de fiabilité.
629	Approximation exponentielle de la durée de vie d'un système fiable.
630	Analyse d'un système multicomposants.
631	Politique de remplacement à l'âge tau.
632	Inférence statistique pour les quantiles.



## Bibliothèque de l'Agrégation

La liste ci après indique l'état de la bibliothèque de l'agrégation durant les épreuves. Les candidats ont accès aux ouvrages durant leur temps de préparation, sans garantie que les ouvrages soient disponibles à tout moment puisqu'ils peuvent être déjà utilisés.

L'inscription dans cette liste ne constitue pas une garantie, et les candidats les utilisent sous leur entière responsabilité.

- ALAOUI Aziz el Kacini & QUEFFELEC H.** Quelques aspects des mathématiques actuelles [Ellipses]
- AHUÉS M. & CHATELIN F.** Exercices de valeurs propres de matrices [Masson]
- ANDLER M., BLOCH J.D et MAILLARD B.** Exercices corrigés de Mathématiques [Edition Marketing]
- 1.A Analyse : Topologie
  - 1.B Analyse : Fonctions numériques
  - 2 Analyse : Suites et Séries numériques
  - 3 Analyse : Analyse Fonctionnelle
  - 5 Algèbre générale, polynômes
  - 6 Algèbre linéaire 1<sup>ère</sup> partie
  - 7 Algèbre linéaire 2<sup>ème</sup> partie
- ANDREWS G.** Number Theory [Dover Publications]
- ARIBAUD F. & VAUTHIER J.** Mathématiques. Première année de DEUG. [ESKA]
- ARNAUDIES J-M., BERTIN J.** Groupes, algèbres et géométrie, tomes 1 et 2 [Ellipses]
- ARNAUDIES J-M., DELEZOIDE P. & FRAYSSE H.** Cours de Mathématiques [Dunod]
- 1. Algèbre
  - 2. Analyse
  - 3. Compléments d'analyse
  - 4. Algèbre bilinéaire et géométrie
- ARNAUDIES J-M. & FRAYSSE H.** Exercices résolus d'analyse [Dunod]
- ARNOLD V.** Equations différentielles ordinaires [MIR]
- ARNOLD V.** Chapitre supplémentaire de la théorie des équations différentielles ordinaires [MIR]
- ARTIN E.** Algèbre géométrique [Gauthier-Villars]
- ARTIN M.** Algebra [Prentice Hall]
- AUBIN J-P.** Analyse fonctionnelle appliquée [PUF]
- Tome 1
  - Tome 2

- AUDIN M.** De la licence à l'agrégation, Géométrie [Belin]
- AVANISSIAN V.** Initiation à l'analyse fonctionnelle [PUF]
- AVEZ A.** Calcul différentiel [Masson]
- BAKHVALOV N.** Méthodes numériques [MIR]
- BARANGER J.** Analyse numérique [Hermann]
- BASIL B. & PESKINE C.** Algèbre [Diderot, éditeur Arts et Sciences]
- BASS J.** Cours de Mathématiques [Masson]  
Tome 1  
Tome 2
- BENDER C. & ORSZAG S.** Advanced mathematical methods for scientists and engineers [Mac Graw Hill]
- BENEDIR M. et BARRET M.** Stabilité des filtres et des systèmes linéaires [Dunod]
- BONNANS F.** Optimisation numérique [Springer]
- BONNANS F, GILBERT J.C., LEMARECHAL C. et SAGASTIZABAL C.** Optimisation numérique [Springer]
- BERGER M.** Géométrie [Cédic/Nathan]  
1. Action de groupes, espaces affines et projectifs  
2. Espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères  
3. Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes  
4. Formes quadratiques, quadriques et coniques  
5. La sphère pour elle-même, géométrie hyperbolique, l'espace des sphères
- BERGER M., BERRY J-P., PANSU P. & SAINT RAYMOND X.** Problèmes de géométrie commentés et rédigés [Cédic/Nathan]
- BERGER M.** Géométrie tome 2 [Nathan]
- BERGER M. & GOSTIAUX B.** Géométrie différentielle [Armand Colin]
- BICKEL and DOKSUM.** Mathematical statistics [Prentice Hall]
- BIGGS NORMAN L.** Discrete mathematics [Oxford Science Publications]
- BLANCHARD A.** Les corps non commutatifs [PUF]
- BOAS R.** A primer of real functions [The mathematical association of America]
- BON Jean Louis .** Fiabilité des systèmes ; [Masson]
- BOURBAKI N.** Eléments de Mathématiques [Hermann]  
Fascicule VII. Livre II. Algèbre. - 1044  
Fascicule VIII. Livre III. Topologie générale. - 1045  
Fascicule IX. Livre IV. Fonctions d'une variable réelle. - 1074  
Fascicule X. Topologie générale. - 1084  
Fascicule XIII Intégration 1175

- BOUVIER A. & RICHARD D.** Groupes  
[Hermann] [Springer]
- BREMAUD P.** Introduction aux probabilités [Masson]
- BREZIS H.** Analyse fonctionnelle, théorie et applications [Armand Colin]
- BROUSSE P.** Mécanique MP - PC.- Spéciales A. A'. B. B'. [Cambridge]
- BRUCE J.W., GIBLIN P.J. & RIPPON P.J.** Microcomputers and Mathematics [Ellipses]
- CABANE R. & LEBOEUF C.** Algèbre linéaire  
1. Espaces vectoriels, Polynômes  
2. Matrices et réduction [Dunod]
- CABANNES H.** Cours de Mécanique générale [Masson]
- CAGNAC G. & THIBERGE L.** Géométrie. Classes terminales C et T [PUF]
- CALAIS J.** Éléments de théorie des groupes [Hermann]
- CARTAN H.** Formes différentielles [Hermann]
- CARTAN H.** Calcul différentiel [Hermann]
- CARTAN H.** Cours de calcul différentiel [Hermann]
- CARTAN H.** Théorie élémentaire des fonctions analytiques [Hermann]
- CASTELMAN K.R.** Digital Image Processing [Prentice Hall]
- CHAMBERT-LOIR A., FERMIGIER S. et MAILLOT V.** Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse tomes 1, 2, 3 [Masson]
- CHATELIN F.** Valeurs propres de matrices [Masson]
- CHEVALLARD Y.** Théorie des séries 1. Séries numériques [Cédic/Nathan]
- CHOQUET G.** L'enseignement de la géométrie [Hermann]
- CHOQUET G.** Cours d'Analyse, Tome 2 Topologie [Masson]
- CHILDS L.** A concrete introduction to Higher Algebra [Springer-Verlag]
- CHRISTOL G, PILIBOSSIAN Ph., et YAMMINE S.** [Ellipses]  
Algèbre I  
Algèbre II
- CIARLET P.G.** Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation [Masson]
- COHN P.M.** Algebra Volume 1 [John Wiley]
- COLLETT.** Modelling binary data [Chapman Hall]

- COMBROUZE A.** Probabilités et statistiques [PUF]\*
- COTTRELL M., GENON-CATALOT V., DUHAMEL C. et MEYRE T.**  
Exercices de probabilités, [Cassini]
- COURANT R. & HILBERT D.** Methods of Mathematical Physics [John Wiley]  
Volume 1  
Volume 2
- COUTY R. & EZRA J.** Analyse ; MP deuxième année et spéciales A A' [Armand Colin]  
Tome 1  
Tome 2
- COXETER H.S.M.** Introduction to Geometry [John Wiley]
- CROUZEIX M. & MIGNOT A.** Analyse numérique des équations différentielles [Masson]
- CVITANOVIC P.** Universality in Chaos [Institute of Physics Publishing]
- DACUNHA-CASTELLE D., REVUZ D. & SCHREIBER M.**  
Recueil de problèmes de calcul des probabilités [Masson]
- DACUNHA-CASTELLE D. & DUFLO M.** [Masson]  
Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe  
Exercices de Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe
- DEHEUVELS P.** L'intégrale [PUF]
- DEHEUVELS P.** L'intégrale [Que-sais-je? PUF]
- DEHEUVELS R.** Formes quadratiques et groupes classiques [PUF]
- DEHORNOY P.** Complexité et décidabilité [Springer]
- DEHORNOY P.** Mathématiques de l'informatique [Dunod]
- DELTHEIL R. & CAIRE D.** Géométrie et compléments [Jacques Gabay]
- DEMAILLY J.P.** Analyse numérique et équations différentielles [PU Grenoble]
- DEMAZURE M.** Catastrophes et bifurcations [Ellipses]
- DEMAZURE M.** Cours d'algèbre : primalité, divisibilité, codes [Cassini]
- DEMBO ZEITOUNI.** Large deviations. [Springer]
- DESCOMBES R.** Éléments de théorie des nombres [PUF]
- DIEUDONNE J.** Calcul infinitésimal [Hermann]
- DIEUDONNE J.** Sur les groupes classiques [Hermann]

- DIEUDONNE J.** Algèbre linéaire et géométrie élémentaire [Hermann]
- DIEUDONNE J.** Éléments d'Analyse. Fondements de l'analyse moderne [Gauthier-Villars]
- DIEUDONNE J.** Éléments d'Analyse. 2 [Gauthier-Villars]
- DIXMIER J.** Cours de Mathématiques du premier cycle [Gauthier-Villars]  
 Première année  
 Deuxième année
- DRAPER, SMITH.** Applied regression analysis [Wiley and Sons]
- DUBREIL P. & DUBREIL-JACOTIN M.L.** Leçons d'Algèbre moderne [Dunod]
- DUBUC S.** Géométrie plane [PUF]
- DYM H. & KEAN Mac H.P.** Fouriers series and integrals [Academics Press]
- EPISTEMON L. (OVAERT J.L. & VERLEY J.L.)** Exercices et problèmes [Cédic/Nathan]  
 Analyse. Volume 1  
 Algèbre.
- EXBRAYAT J.M. & MAZET P.** Notions modernes de mathématiques [Hatier]  
 Algèbre 1 : Notions fondamentales de la théorie des ensembles  
 Analyse 1 : Construction des espaces fondamentaux de l'analyse  
 Analyse 2 : Éléments de topologie générale
- FADDEEV D. & SOMINSKI I.** Recueil d'exercices d'Algèbre Supérieure [MIR]
- FARAUT J. & KHALILI E.** Arithmétique [Ellipses]  
 Cours, Exercices et Travaux Pratiques sur Micro-Ordinateur
- FAIRBANK X., BEEF C.** Pox [Ellipses]
- FELLER W.** An introduction to probability theory and its applications [John Wiley]  
 Volume 1  
 Volume 2
- FERRIER J.P.** Mathématiques pour la licence [Masson]
- FLORY G.** Topologie et analyse [Vuibert]  
 Tome 1 Topologie  
 Tome 2 Topologie  
 Tome 4 Exercices avec solutions
- FOATA D. & FUCHS A.** Calcul des probabilités [Masson]
- FRANCINO S. et GIANELLA H.** Exercices de mathématiques pour l'agrégation [Masson]
- FRANCHINI J. et JACQUENS J.C.** [Ellipses]  
 Algèbre  
 Analyse tomes 1 et 2
- FRENKEL J.** Géométrie pour l'élève et le professeur [Hermann]

- FRESNEL J.** Géométrie [IREM de Bordeaux]
- FRESNEL J.** Géométrie algébrique [UFR Maths Bordeaux]
- FRESNEL J.** Méthodes modernes en géométrie [Hermann]
- FUHRMANN P. A.** A polynomial approach to linear algebra [Springer]
- GANTMACHER F.R.** Théorie des matrices [Dunod]  
Tome 1  
Tome 2
- GENET J.** Mesure et intégration. Théorie élémentaire. Cours et exercices résolus [Vuibert]
- GOBLOT R.** Algèbre commutative [Masson]
- GOBLOT R.** Algèbre linéaire [Masson]
- GOBLOT R.** Thèmes de géométrie [Masson]
- GOLUB.** Matrix computations [John Hopkins University Press]
- GODEMENT R.** Cours d'Algèbre [Hermann]
- GODEMENT R.** Analyse Mathématique, tomes 1 et 2 [Springer]
- GONNORD S. & TOSEL N.** Thèmes d'Analyse pour l'agrégation [Ellipses]  
I Topologie et Analyse fonctionnelle
- GOSTIAUX B.,** Cours de Mathématiques Spéciales [PUF]  
1 Algèbre  
2 Topologie et Analyse Réelle  
4 Géométrie affine et métrique  
5 Géométrie : arcs et nappes
- GOURDON X.** Algèbre et Analyse [Ellipses]
- GRAMAIN A.** Géométrie élémentaire [Hermann]
- GRAMAIN A.** Intégration [Hermann]
- GREUB W.** Linear Algebra [Springer Verlag]
- GRIMETT, WELSH.** Probability : an introduction [Oxford Science Publications]
- GUICHARDET A.** Calcul intégral. Maitrise de Mathématiques C. 2 [Armand Colin]
- GHIDAGLIA J.M.** Petits problèmes d'analyse [Springer]
- GUJARATI D.N.** Basic Econometrics [Mc Graw Hill]
- HABSIEGER L. MARTEL V.** Exercices corrigés de mathématiques [Ellipses]  
Analyse 1, Tomes 1 et 3,  
Algèbre 1  
Algèbre Géométrie 2 Tomes 1 et 2

- HALMOS P.** Problèmes pour mathématiciens petits et grands [Cassini]
- HAMMAD P.** Cours de probabilités [Cujas]
- HAMMAD P. & TARANCO A.** Exercices de probabilités [Cujas]
- HAMMER R., HOCK M., KULISH U. & RATZ D.** [Springer]  
C++ Toolbox Basic Numerical Problems
- HARDY G.H. & WRIGH E.M.** An introduction to the theory of numbers [Oxford]
- HENNEQUIN P.L. & TORTRAT A.** Théorie des probabilités et quelques applications [Masson]
- HENRICI P.** Applied and computational analysis [Wiley]  
Tome I  
Tome II  
Tome III
- HERVE M.** Les fonctions analytiques [PUF]
- HIRSCH F. & LACOMBE G.** Eléments d'analyse fonctionnelle [Masson]
- HOUZEL C.** Analyse mathématique [Belin]
- HUBBARD J. et WEST B.** Equations différentielles et systèmes dynamiques [Cassini]
- KAHANE J.P. et al.** Leçons de mathématiques d'aujourd'hui [Cassini]
- KAHANE J.P. et GILLES P.** Séries de Fourier et ondelettes [Cassini]
- ITARD J.** Les nombres premiers [Que sais-je? PUF]
- IRELAND K. & ROSEN M.** A Classical Introduction to Modern Numbers Theory [Springer-Verlag]
- JACOBSON N.** Basic Algebra [Freeman and Co]  
Tome I  
Tome II
- KENNETH, CASTLEMAN.** Digital image processing [Prentice Hall]
- KERBRAT Y. & BRAEMER J-M.** Géométrie des courbes et des surfaces [Hermann]
- KNUTH D.E.** The art of computer programming [Addison-Wesley]  
Volume 2 : Seminumerical algorithms  
Volume 3 : Sorting and Searching
- KOLMOGOROV A. & FOMINE S.** [Ellipses]  
Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle
- De KONINCK J.M. et MERCIER A.** Introduction à la théorie des nombres [Modulo]

- KÖRNER T.W.** Fourier Analysis [Cambridge]
- KÖRNER T.W.** Exercises for Fourier Analysis [Cambridge]
- KREE P.** Introduction aux Mathématiques et à leurs applications fondamentales M.P.2 [Dunod]
- KRIVINE J.L.** Théorie axiomatique des ensembles [PUF]
- KRIVINE J.L.** Théorie des ensembles [Cassini]
- LAFONTAINE J.** Introduction aux variétés différentielles [Presses Universitaires de Grenoble]
- LANG S.** Algèbre linéaire [InterEditions]  
Tome 1  
Tome 2
- LANG S.** Linear Algebra [Addison-Wesley]
- LANG S.** Algebra [Addison-Wesley]
- LAX P.D.** Linear Algebra [Wiley]
- LEBOEUF C.** Exercices corrigés de probabilités [Ellipses]
- LEBORGNE D.** Calcul différentiel et géométrie [PUF]
- LEBOSSE S. & HEMERY C.** Géométrie. Classe de Mathématiques [Jacques Gabay]
- LE BRIS G.** Une initiation progressive à Maple [Cassini]
- LEHMANN D. & SACRE C.** Géométrie et topologie des surfaces [PUF]
- LEHNING H.** Mathématiques supérieures et spéciales [Masson]  
1 : Topologie  
3 : Intégration et sommation  
4 : Analyse en dimension finie  
5 : Analyse fonctionnelle
- LEHNING H. & JAKUBOWICZ D.** Mathématiques supérieures et spéciales [Masson]  
2 : Dérivation
- LELONG-FERRAND J.** Les fondements de la géométrie [PUF]
- LELONG-FERRAND J.** Géométrie différentielle [Masson]
- LELONG-FERRAND J. & ARNAUDIES J.M.** Cours de Mathématiques [Dunod]  
Tome 1 : Algèbre  
Tome 2 : Analyse  
Tome 3 : Géométrie et cinématique  
Tome 4 : Equations différentielles, intégrales multiples
- LESIEUR L. & LEFEBVRE J.** Mathématiques [Armand Colin]  
Tome 3 : Compléments d'analyse, statistiques et probabilités

- LESIEUR L., MEYER Y., JOULAIN C. & LEFEBVRE J.** [Armand Colin]  
Algèbre linéaire, géométrie
- Mac LANE S. & BIRKHOFF G.** Algèbre [Gauthier-Villars]  
1 : Structures fondamentales  
2 : Les grands théorèmes
- MACKI J. & STRAUSS A.** Introduction to Optimal Control Theory [Springer]
- MALLIAVIN P.** Géométrie différentielle intrinsèque [Hermann]
- MALLIAVIN M. P.** Les groupes finis & leurs représentations complexes [Masson]
- MALLIAVIN M. P. & WARUSFEL A.** Algèbre linéaire et géométrie classique [Masson]  
Exercices
- MARTIN P.** Applications de l'algèbre et de l'analyse à la géométrie [Armand Colin]
- MASCART H. et STOKA M.** Fonction d'une variable réelle, tome 2 [PUF]
- MAZET P.** Algèbre et géométrie pour le CAPES et l'Agrégation [Ellipses]
- MAWHIN J.** Analyse : fondements, technique, évolutions [De Boeck Université]
- MERKIN D.R.** Introduction to the Theory of Stability [Springer]
- MÉTIVIER M.** Notions fondamentales de la théorie des probabilités [Dunod]
- MÉTIVIER M.** Probabilités : dix leçons d'introduction . Ecole Polytechnique [Ellipses]
- MIGNOTTE M.** Mathématiques pour le calcul formel [PUF]
- MNEIMNÉ R. & TESTARD F.** Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques [Hermann]
- MNEIMNÉ R.** Eléments de géométrie, actions de groupes [Cassini]
- MONJALLON A.** Eléments de statistique mathématique [Vuibert]
- MOISAN J. et VERNOTTE A.** Topologie et séries [Ellipses]
- MOISAN J., VERNOTTE A. et TOSEL N.** Suites et séries de fonctions [Ellipses]
- MONIER J.M.** Analyse : tomes 1 - 4, cours et exercices corrigés
- MUTAFIAN C.** Le défi algébrique [Vuibert]  
Tome 1  
Tome 2
- MORLET C.** Algèbre & géométrie [Université de Nancy]  
Module AG2. Techniques de calcul en Algèbre linéaire 1ère partie  
Module AG2. Techniques de calcul en Algèbre linéaire 2ème partie  
Module AG3. Géométrie euclidienne 1ère partie
- NAUDIN P. & QUITTE C.** Algorithmique algébrique avec exercices corrigés [Masson]

- NEVEU J.** Base mathématique du calcul des probabilités [Masson]
- NIVEN I.** Irrational numbers [The Mathematical Association of America]
- NORRIS.** Markov chains [Cambridge University Press]
- OPREA J.** Differential Geometry [Prentice Hall]
- OUVRARD J.Y.** Probabilités I [Cassini]
- PAPINI O.** Algèbre discrète et codes correcteurs [Springer]
- PEDOE D.** Geometry- A comprehensive course [Dover Publications]
- PERKO L.** Differential equations and dynamical systems [Springer]
- PERRIN D.** Cours d'Algèbre [Ellipses]
- PERRIN-RIOU B.** Algèbre arithmétique et Maple [Cassini]
- PÓLYA G. & SZEGÖ G.** Problems and Theorems in Analysis [Springer-Verlag]  
 Volume I  
 Volume II
- POMMELLET A.** Agrégation de Mathématiques. Cours d'Analyse [Ellipses]
- RALSTON A. & RABINOWITCH P.** [International Student Edition]  
 A first course in numerical analysis
- RAMIS E., DESCHAMPS C. & ODOUX J.** Cours de Mathématiques spéciales [Masson]  
 1- Algèbre  
 2- Algèbre et applications à la géométrie  
 3- Topologie et éléments d'analyse  
 4- Séries et équations différentielles  
 5- Applications de l'analyse à la géométrie
- RAO.** Linear statistical inference and its applications. [Wiley]
- RIDEAU F.** Exercices de calcul différentiel [Hermann]
- RIESZ F. & NAGY SZ. B.** Leçons d'analyse fonctionnelle [Gauthier-Villars]
- RIO E.** Théorie asymptotique des processus aléatoires faiblement dépendants [Springer]
- ROLLAND R.** Théorie des séries [Cédic/Nathan]  
 2- Séries entières
- ROMBALDI** Thèmes pour l'agrégation de mathématiques [EDP Sciences]  
 Analyse matricielle [EDP Sciences]
- RUAUD J.F. et WARUSFEL A.** Exercices de maths pour l'agrégation, Algèbre 3 [Masson]
- RUDIN W.** Analyse réelle et complexe [Masson]
- RUDIN W.** Real and complex analysis [Mac Graw-Hill]

- RUDIN W.** Functional analysis [Mac Graw-Hill]
- SAKS S. & ZYGMUND A.** Fonctions analytiques [Masson]
- SAMUEL P.** Théorie algébrique des nombres [Hermann]
- SAMUEL P.** Géométrie projective [PUF]
- SAPORTA** Probabilités Analyse de données et statistiques [Editions Technip]
- SARMANT M. Cl., MERTIER T., PILIBOSSIAN P. et YAMMINI S.**  
Analyse 1 [Ellipses]
- SAUVAGEOT F.** Petits problèmes de géométrie et d'algèbre [Springer]
- SCHWARTZ L.** Cours d'Analyse [Hermann]
- SCHWARTZ L.** Analyse [Hermann]  
I Topologie générale et analyse fonctionnelle  
II Calcul différentiel et équations différentielles
- SCHWARTZ L.** Méthodes Mathématiques pour les sciences physiques [Hermann]
- SEGEWICK R.** Algorithms [Addison Wesley]
- SELBERHERR , STIPPEL.** Simulation of semi conductor Devices and Processes [Springer]
- SERRE J.P.** Cours d'arithmétique [PUF]
- SERVIEN C.** Analyse 3 [Ellipses]
- STANLEY R.P.** Enumerative combinatorics [The Waddworth and Brooks]  
Volume I
- STEWART I.** Galois theory [Chapman and Hall]
- TAUVEL P.** Mathématiques générales pour l'agrégation [Masson]
- TENENBAUM G.** Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres [Institut Elie Cartan]
- TENENBAUM G.** Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres T 1 [S. M. F.]
- TENENBAUM G.** Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres T 2 [S. M. F.]
- TENENBAUM G. et MENDES France M.** Les nombres premiers, Coll. Que Sais-je ? [PUF]
- TITCHMARSH E.C.** The theory of functions [Oxford]
- TORTRAT A.** Calcul des probabilités et introduction aux processus aléatoires [Masson]
- TRUFFAUT B.** Exercices de Géométrie élémentaire [IREM des Pays de la Loire]

- VALIRON G.** Cours d'analyse mathématique [Masson]  
 I Théorie des fonctions  
 II Equations fonctionnelles - Applications
- VAUQUOIS B.** Outils Mathématiques. Probabilités [Hermann]
- VAUTHIER J. et PRAT J-J.** Cours d'Analyse Mathématique de l'Agrégation [Masson]
- VEIGNAU S.** Approches impérative et fonctionnelle de l'algorithmique [Springer]
- WARUSFEL A.** Structures algébriques finies [Classiques Hachette]
- WHITTAKER E.T. & WATSON G.N.** A course of modern analysis [Cambridge]
- WILF H.** Generatingfunctionology [Academic Press]
- WILLIAMS.** Probability with martingales [Cambridge mathematical textbooks]
- YALE P.B.** Geometry and Symmetry [Dover Publications]
- YOUNG D.M. & GREGORY R.T.** A survey of numerical mathematics [Dover Publications]
- ZEMOS G.,** Cours de cryptographie [Cassini]
- ZUILY QUEFFELEC .** Analyse pour l'agrégation [Masson]

## Ouvrages non autorisés pour l'Oral

Les ouvrages indiqués ci-après n'ont pas été autorisés pendant les épreuves d'oral de la session 2001, et en particulier pendant le temps de préparation. Le fait que ces ouvrages ne soient pas autorisés ne constitue pas un jugement sur la qualité des ouvrages. Les interdictions sont décidées par le jury en particulier dans les situations suivantes:

- Ouvrages constituant une compilation artificielle de leçons d'agrégation "prêtes à l'emploi".
- Ouvrages dont la disponibilité générale est trop récente. Dans ce cas on se base en général sur les dates de dépôt légal, et on exige que ces dépôts soient intervenus 6 mois au moins avant le début des épreuves orales.

<b>AVEZ A.</b>	Analyse pour l'agrégation	[Masson]
<b>AVEZ A.</b>	La leçon d'analyse à l'oral de l'agrégation	[Masson]
<b>CHAMBERT-LOIR A.</b>	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Tome 1, 1ère édition	[Masson]
<b>DUMAS L.</b>	Modélisation à l'oral de l'agrégation - Calcul scientifique	[Ellipses]
<b>GUENARD F.</b>	Vademecum de l'oral d'analyse, agrégation de mathématiques	[Eska]
<b>MADERE K.</b>	Préparation à l'oral de l'agrégation de mathématiques Leçon d'algèbre Leçon d'analyse	[Ellipses]
<b>MADERE K.</b>	Développement pour leçon d'analyse, agrégation de mathématiques	[Ellipses]
<b>MEUNIER P.</b>	Exercices pour l'agrégation interne de mathématiques	[PUF]
<b>MEUNIER P.</b>	Préparation à l'agrégation interne, IREM de Montpellier	[PUF]
<b>TOULOUSE P.S.</b>	Thèmes de probabilités et statistiques, agrégation de mathématiques	[Dunod]

## Table des Matières

<i>Composition du Jury</i> .....	3
<i>Présentation du Concours</i> .....	7
Déroulement de la Session de 2001 .....	7
Le concours .....	7
Commentaire et observations du président .....	8
<i>Statistiques sur la Session de 2001</i> .....	9
Vue d'ensemble .....	9
Résultats par Académies .....	9
Résultats par catégorie socioprofessionnelle .....	10
Statistiques sur l'âge et le sexe des candidats .....	11
Notes recueillies aux épreuves .....	13
Épreuve de Modélisation .....	14
<i>Organisation des épreuves orales</i> .....	15
Épreuves orales d'Algèbre et Analyse .....	15
Épreuve orale de Modélisation .....	16
<i>Modalités applicables pour la session 2002</i> .....	17
Épreuves orales d'Algèbre et Analyse .....	18
Épreuve orale de Modélisation .....	19
<i>Sessions ultérieures</i> .....	20
<i>Commentaire détaillé sur les épreuves</i> .....	23

## ANNEXES

<i>Problème de Mathématiques Générales</i> .....	41
<i>Problème d'Analyse et Probabilités</i> .....	65
<i>Libellé des leçons et textes Session 2001</i> .....	103
<i>Bibliothèque de l'Agrégation</i> .....	113
<i>Ouvrages non autorisés pour l'Oral</i> .....	125
<i>Table des Matières</i> .....	126