MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

direction des personnels enseignants
des lycées et collèges

AGREGATION
MATHEMATIQUES

Rapport présenté par Monsieur NICOLAS
Professeur à l'université de Limoges
Président du jury

1986

1. PRESENTATION

COMPOSITION DU JURY

M. NICOLAS J. Louis	*Professeur à l'Université de LIMOGES, Président.*
M. DABLANC Jacques	*Inspecteur général de l'Education nationale, Vice Président.*
M. LEMAIRE J. Michel	*Professeur à l'Université de NICE, Vice Président.*
M. RENAULT Guy	*Professeur à l'Université de POITIERS, Vice Président.*
M. ATTALI Paul	*Professeur au lycée Buffon à PARIS.*
Mlle BOIGEY Françoise	*Maître de conférences à l'Université Pierre et Marie Curie à PARIS.*
M. BOREL J. Pierre	*Maître de conférences à l'Université de LIMOGES.*
M. BREZINSKI Claude	*Professeur à l'Université de LILLE I.*
M. CAMUS Jacques	*Professeur à l'Université de RENNES I.*
M. DEHEUVELS Paul	*Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie à PARIS.*
M. DEHORNOY Patrick	*Professeur à l'Université de CAEN.*
M. FERRIER J. Pierre	*Professeur à l'Université de NANCY I.*
M. FEVRIER Pierre	*Professeur au lycée de FONTAINEBLEAU.*
M. FLAJOLET Philippe	*Ingénieur INRIA.*
M. GONNORD Michel	*Professeur au lycée Pierre de Fermat à TOULOUSE.*
M. HENNIART Guy	*Professeur à l'Université de PARIS XI.*
M. HUMMEL Francis	*Professeur au lycée Thiers à MARSEILLE.*
M. JEULIN Thierry	*Professeur à l'Université de PARIS VII.*
M. LEPINGLE Dominique	*Professeur à l'Université d'ORLEANS.*
M. LODAY J. Louis	*Directeur de recherche au C.N.R.S.*
Mme LODAY-RICHAUD Michèle	*Maître de conférences à l'Université Louis Pasteur à STRASBOURG.*
M. MARLE Charles	*Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie à PARIS.*
M. MIGNOTTE Maurice	*Professeur à l'Université Louis Pasteur à STRASBOURG.*
Mlle MILLET Annie	*Maître de conférences à l'Université d'ANGERS.*
M. MOISAN Jacques	*Professeur au Prytanée militaire de LA FLECHE.*
M. PIN J. Eric	*Chargé de recherches au C.N.R.S.*
Mme POURCIN Geneviève	*Professeur d'Université à l'Université d'ANGERS.*
M. PREVOST Marc	*Professeur au lycée Branly à BOULOGNE S/MER.*
M. QUEVA J. Luc	*Assistant à l'Université de LILLE I.*
M. ROUVIERE François	*Professeur à l'Université de NICE.*
M. TISSIER Alain	*Professeur au lycée Albert Schweitzer au RAINCY.*
Mme VAN ISEGHEM Jeanne	*Assistante à l'Université de LILLE I.*
M. VIAL J. Pierre	*Professeur au lycée Charlemagne à PARIS.*

2. CALENDRIER DES EPREUVES

2.1. EPREUVES ECRITES

Elles ont eu lieu aux dates suivantes :

- Mathématiques générales : 1 avril 1986
- Analyse : 2 avril 1986
- Mathématiques appliquées : 3 avril 1986

La liste d'admissibilité a été affichée le 4 juin au lycée Montaigne et 34, rue de Châteaudun.

2.2. EPREUVES ORALES

Elles se sont déroulées du 12 juin au 9 juillet au lycée Montaigne à Paris.

La liste d'admission a été affichée le 10 juillet.

3. STATISTIQUES DIVERSES

3.1. RESULTATS GENERAUX

Postes mis au concours	:	180
Candidats inscrits	:	1 482
Candidats présents à la première épreuve	:	856
Candidats présents à la dernière épreuve	:	741
Admissibles	:	301
Admis	:	180
Proposés pour l'équivalence des épreuves théoriques du Capes	:	0

Moyenne sur 20 des points obtenus par :

Le premier admissible : 20
Le dernier admissible : 6
Le premier agrégé : 19
Le dernier agrégé : 7,4

3.2. REPARTITION DES NOTES D'ECRIT

Le tableau ci-dessous indique le nombre N(m) des candidats ayant obtenu aux épreuves écrites une moyenne, sur 20, supérieure (au sens large) à m.

m	20	18	16	14	12	10	9	8
N(m)	1	8	16	32	59	97	126	175

m	7	6	5	4	2
N(m)	239	301	371	442	626

3.3. REPARTITION ENTRE LES OPTIONS

	Informatique	Analyse numérique	Mécanique	Probabilités
Inscrits	186	565	153	578
Admissibles	35	105	36	125
Admis	18	58	22	82

3.4. SITUATION UNIVERSITAIRE DES CANDIDATS

Dans le tableau suivant, les notations U, J, C, F, T correspondent aux candidats des E.N.S., ULM, JOURDAN, ST CLOUD, FONTENAY et ENSET.

Les autres abréviations sont les suivantes :

E. : Etudiants.
C.P.R. : Stagiaires de C.P.R.
B.A. : Professeurs bi-admissibles.
P.C. : Certifiés ; certifiés stagiaires.
A. : Assistants.
CO. : Coopérants ou détachés.
S.N. : Professeurs au service militaire, en congé, en sursis, ou en disponibilité.
D. : A.E., P.E.G.C., Instituteurs, M.I.-S.E., divers.
M.A. : Maîtres auxiliaires.
P. : Enseignement privé.
I. : Ingénieurs.

CANDIDATS	U	J	C	F	T	E	C.P.R.	B.A.	PC
Inscrits	20	7	17	15	24	103	116	73	695
Admissibles	17	7	14	14	23	46	16	37	71
Admis	17	7	13	13	21	27	4	23	28

CANDIDATS	A	CO	S.N.	M.A.	P	D	I	TOTAL
Inscrits	20	38	63	53	133	104	1	1 482
Admissibles	6	4	21	6	11	7	1	301
Admis	2	1	13	5	5	2	0	180

3.5. REPARTITION ENTRE CANDIDATS ET CANDIDATES

	CANDIDATS	CANDIDATES
Inscrits	1 024	458
Admissibles	224	77
Admis	131	49

3.6. REPARTITION SUIVANT LES CENTRES D'ECRIT

CANDIDATS / CENTRES	INSCRITS	AYANT COMPOSE AUX TROIS EPREUVES	ADMISSIBLES	ADMIS
Ajaccio	2	0	0	0
Aix-Marseille	49	25	7	1
Amiens	47	18	6	1
Besançon	13	7	3	2
Bordeaux-Pau	39	16	8	3
Caen	29	15	1	1
Clermont	18	10	3	2
Dijon	17	9	2	1
Grenoble	45	20	12	6
Lille	121	65	12	8
Limoges	8	4	1	1
Lyon-St-Etienne	57	31	14	6
Montpellier	37	17	9	2
Nancy-Metz	69	41	10	5
Nantes	79	30	14	7
Nice	29	15	2	1
Orléans-Tours	55	20	2	1
Paris-Créteil-Versailles	400	232	150	116
Poitiers	22	15	9	3
Reims	34	9	2	1
Rennes-Brest	52	24	8	2
Rouen	54	19	5	2
Strasbourg-Mulhouse	36	20	8	3
Toulouse	34	16	4	1
Autres centres	136	65	9	4

MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

Durée : 6 heures

PRÉAMBULE

L'objet du problème est de déterminer les endomorphismes de l'espace vectoriel des matrices carrées con d'ordre n conservant certaines propriétés de ces matrices. La première partie étudie la conservation du rang 1 de l'inversibilité. Les deuxième et troisième parties, qui sont indépendantes de la première, préparent à : effectuée dans la quatrième partie, de la conservation du groupe unitaire et de celle de certaines normes.

Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2, $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes, semble des nombres complexes de module 1.

$M_{p,q}(\mathbb{C})$ étant l'espace vectoriel des matrices complexes à p lignes et q colonnes, dont l'élément nul est on pose :

- $\mathcal{E} = M_{n,n}(\mathbb{C})$ (ensemble des matrices carrées d'ordre n);
- $\mathcal{C} = M_{n,1}(\mathbb{C})$ (ensemble des matrices colonnes à n lignes);
- $\mathcal{L} = M_{1,n}(\mathbb{C})$ (ensemble des matrices lignes à n colonnes);
- $\mathcal{C}' = \mathcal{C}\backslash\{0\}$
- $\mathcal{L}' = \mathcal{L}\backslash\{0\}$

Le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{C})$, ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{E}$, sera noté $\mathcal{G}$.

Enfin, $\mathcal{R}_1$ désignera l'ensemble des matrices de rang 1 de $\mathcal{E}$ et $\overline{\mathcal{R}}_1$ l'ensemble des matrices de rang : ou égal à 1 de $\mathcal{E}$. On a donc $\overline{\mathcal{R}}_1 = \mathcal{R}_1 \cup \{0\}$.

PREMIÈRE PARTIE

Pour P et Q éléments de $\mathcal{G}$, on définit deux endomorphismes $T_{P,Q}$ et $T'_{P,Q}$ de $\mathcal{E}$ par :

$$\forall A \in \mathcal{E} \qquad T_{P,Q}(A) = PAQ \qquad T'_{P,Q}(A) = P\,{}^tAQ \qquad ({}^tA \text{ est la transposée de A})$$

et on désigne par γ (resp. γ') l'ensemble des endomorphismes $T_{P,Q}$ (resp. $T'_{P,Q}$) pour P et Q décrivant $\mathcal{G}$. $\Gamma = \gamma \cup \gamma'$.

γ et Γ sont, de manière immédiate, des sous-groupes du groupe linéaire GL ($\mathcal{E}$). On ne demande : démontrer.

A

On se propose d'établir ici que les endomorphismes T de $\mathcal{E}$ tels que $T(\mathcal{R}_1) \subset \mathcal{R}_1$ sont les éléments de Γ.

1° Montrer que si T appartient à Γ alors $T(\mathcal{R}_1) \subset \mathcal{R}_1$.

2° Établir que $\mathcal{R}_1$ est égal à l'ensemble $\mathcal{C}'\,\mathcal{L}'$ des produits XV d'un élément X de $\mathcal{C}'$ par un élément V de $\mathcal{L}'$.

3° Soient alors XV et X'V' deux éléments de $\mathcal{R}_1$. Montrer que si $XV + X'V'$ appartient à $\overline{\mathcal{R}}_1$, alors l'un au moins des deux couples (X, X') et (V, V') est lié.

4° On désigne par Σ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension n de $\mathcal{E}$ inclus dans $\overline{\mathcal{R}}_1$.

Montrer que Σ est exactement constitué des éléments de l'une des deux formes suivantes :

a. $X\mathcal{L}$ (ensemble des produits XV quand V décrit $\mathcal{L}$) avec X dans $\mathcal{C}'$.

b. $\mathcal{C}V$ (ensemble des produits XV quand X décrit $\mathcal{C}$) avec V dans $\mathcal{L}'$.

X et X' étant deux éléments de $\mathcal{C}'$, préciser $X\mathcal{L} \cap X'\mathcal{L}$.
X et V étant respectivement éléments de $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{L}'$, préciser $X\mathcal{L} \cap \mathcal{C}V$.

5° Dans cette question et les deux suivantes, T désigne un endomorphisme de $\mathcal{E}$ tel que $T(\mathcal{R}_1) \subset \mathcal{R}_1$.

Montrer que l'image par T d'un élément de Σ est un élément de Σ.

6° On suppose ici l'existence de deux éléments non colinéaires de $\mathcal{C}'$, X_1 et X_2, tels que $T(X_1\mathcal{L}) = Y_1\mathcal{L}$ et $T(X_2\mathcal{L}) = Y_2\mathcal{L}$ avec Y_1 et Y_2 dans $\mathcal{C}'$.

a. Prouver l'existence d'une matrice Q de $\mathcal{G}$ telle que :

$$\forall\, V \in \mathcal{L} \qquad T(X_1V) = Y_1VQ\,.$$

b. En déduire que $T(X_1\mathcal{L}) \neq T(X_2\mathcal{L})$.

c. Montrer que pour tout V appartenant à $\mathcal{L}'$, $T(\mathcal{C}V)$ est de la forme $\mathcal{C}U$ avec U dans $\mathcal{L}'$.
Que peut-on dire de $T(X\mathcal{L})$ pour X appartenant à $\mathcal{C}'$?

d. En déduire, pour tout X dans $\mathcal{C}'$, l'existence d'un élément Y dans $\mathcal{C}'$ tel que :
$\forall\, V \in \mathcal{L} \qquad T(XV) = YVQ$ où Q est la matrice obtenue au *a*.

e. Montrer que T appartient à γ.

7° Établir que si l'hypothèse du 6° n'est pas satisfaite, alors T appartient à γ'.

B

On se propose maintenant d'établir que les endomorphismes T de $\mathcal{E}$ tels que $T(\mathcal{G}) \subset \mathcal{G}$ sont les éléments de Γ.

1° Montrer que si T appartient à Γ alors $T(\mathcal{G}) \subset \mathcal{G}$.

2° Soit A une matrice non inversible de $\mathcal{E}$ et r son rang.

a. Montrer l'existence d'une matrice M de $\mathcal{G}$ telle que pour tout élément λ de $\mathbb{C}$, $M - \lambda A$ soit inversible.
(On pourra d'abord établir la propriété pour une matrice particulière A de rang r choisie de forme simple.)

b. Montrer de même l'existence d'une matrice N de $\mathcal{G}$ telle que $N - \lambda A$ soit non inversible pour exactement r valeurs distinctes de λ.

3° On considère dans cette question un endomorphisme T de $\mathcal{E}$ tel que $T(\mathcal{G}) \subset \mathcal{G}$.

Utiliser la question 2° pour établir, pour toute matrice A de $\mathcal{E}$:

a. Si A est non inversible alors T(A) est non inversible.

b. Le rang de T(A) est supérieur ou égal au rang de A.

Prouver alors que T conserve le rang et que T appartient à Γ.

DEUXIÈME PARTIE

On considère un espace hermitien E de dimension n, dont la norme est notée $x \longrightarrow \| x \|$ et le produit scalaire $(x, y) \longrightarrow (x \mid y)$; $\mathcal{L}(E)$ est l'algèbre de ses endomorphismes, $\mathcal{U}(E)$ son groupe unitaire. L'adjoint d'un élément u de $\mathcal{L}(E)$ est noté u^* ; u est dit hermitien si $u = u^*$, et hermitien positif si, de plus, ses valeurs propres sont des réels positifs ou nuls.

A

1° Vérifier que pour tout endomorphisme u de E, $u^* \circ u$ est hermitien positif, et de même rang que u.

Les n valeurs propres (distinctes ou non) de $u^* \circ u$ sont rangées en ordre décroissant $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots \geqslant \lambda_n$ et on pose, pour $i = 1, 2, \dots, n$, $\alpha_i = \sqrt{\lambda_i}$.

Ces nombres α_i sont appelés les valeurs singulières de l'endomorphisme u.

2° Montrer l'existence de deux bases orthonormales de E, $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ telles que pour tout $i = 1, 2, \dots, n$ $\quad u(e_i) = \alpha_i e'_i$. (On prendra pour (e_i) une base de vecteurs propres de $u^* \circ u$).

En déduire l'existence d'un endomorphisme hermitien h de valeurs propres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ et d'un endomorphisme unitaire w tels que $u = w \circ h$.

3° Quelles sont les valeurs singulières d'un endomorphisme hermitien?

4° Montrer que deux endomorphismes u et v de E ont les mêmes valeurs singulières si, et seulement si, il existe w et w' unitaires tels que $u = w \circ v \circ w'$.

On dira alors que u et v sont unitairement équivalents.

B

k étant un entier compris entre 1 et n, on définit $\varphi_k : \mathcal{L}(E) \to \mathbb{R}_+$ en posant, pour tout endomorphisme u de E, $\varphi_k(u) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$ où $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ sont les valeurs singulières de u rangées, on le rappelle, en ordre décroissant.

On définit également $\psi : \mathcal{L}(E) \to \mathbb{R}_+$ par

$$\psi(u) = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2)^{1/2} = (\mathrm{Tr}\,(u^* \circ u))^{1/2}. \quad \text{(Tr désigne la trace.)}$$

1° Montrer que ψ est une norme hermitienne sur $\mathcal{L}(E)$.

$\mathcal{F}_k$ désignant l'ensemble des familles orthonormales $(x_1, \dots, x_k)$ d'éléments de E, on se propose d'établir, pour tout endomorphisme u de E :

(1)
$$\varphi_k(u) = \sup_{\substack{(x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{F}_k \\ (y_1, \dots, y_k) \in \mathcal{F}_k}} \sum_{i=1}^{k} |(u(x_i) \mid y_i)|$$

2° Soit h hermitien positif et $(x_1, \ldots, x_k)$ un élément de $\mathcal{F}_k$.

Établir que $\sum_{i=1}^{k} (h(x_i) \mid x_i) \leqslant \varphi_k(h)$ (on pourra, par exemple, vérifier que le premier membre s'écrit $\operatorname{Tr}(p \circ h)$ où p est la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel engendré par $(x_1, \ldots, x_k)$ et exprimer cette trace dans une base convenable).

En déduire que
$$\varphi_k(h) = \sup_{(x_1, \ldots, x_k) \in \mathcal{F}_k} \sum_{i=1}^{k} (h(x_i) \mid x_i)$$

3° Établir l'égalité (1) pour un endomorphisme hermitien positif, puis pour tout endomorphisme u de E.

4° Montrer que φ_k est une norme sur $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

C

Soit F un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N, et S la sphère unité de F. Un élément x de F sera dit élément extrémal de S ou S-extrémal si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

i. $x \in \mathrm{S}$

ii. $\forall (y, z) \in \mathrm{S}^2 \quad x = \frac{1}{2}(y + z) \Rightarrow x = y = z$

Ceci équivaut à

i. $x \in \mathrm{S}$

ii. $\forall (y, z) \in \mathrm{S}^2, \forall \lambda \in]0, 1[\quad x = \lambda y + (1 - \lambda) z \Rightarrow x = y = z$

(On ne demande pas de vérifier cette équivalence.)

1° Montrer que si x est S-extrémal et si deux éléments y et z de F vérifient
$$x = \frac{1}{2}(y + z) \quad \text{et} \quad \mathrm{N}(y) + \mathrm{N}(z) = 2, \quad \text{alors} \quad y = \mathrm{N}(y)\, x \quad \text{et} \quad z = \mathrm{N}(z)\, x.$$

2° Établir que si N est hermitienne, tout élément de S est S-extrémal.

D

S_k désigne la sphère unité de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{L}(\mathrm{E}), \varphi_k)$.

1° On écrit u appartenant à $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ sous la forme $w \circ h$ obtenue au A 2°.
Montrer l'équivalence : u S_k-extrémal $\Leftrightarrow$ h S_k-extrémal.

2° Soit h un endomorphisme hermitien positif, autre qu'une homothétie, et de valeurs propres $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n$.

a. En utilisant une base orthonormale dans laquelle la matrice de h est diagonale, montrer que si h est S_k-extrémal alors :

(2) $$k \neq 1 \quad \text{et} \quad (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (1, 0, \ldots, 0).$$

b. Réciproquement, montrer que si (2) est vérifiée, h est S_k-extrémal. (On pourra d'abord montrer que si $h = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$ avec u_1 et u_2 dans S_k, alors $\psi(u_1) = \psi(u_2) = 1$.)

3° On suppose maintenant que h est l'homothétie de rapport $1/k$.

a. Montrer que si h est S_k-extrémal alors $k \neq n$.

b. Réciproquement, établir que si $k \neq n$, h est S_k-extrémal.

4° Quels sont les éléments extrémaux de S_k ?

TROISIÈME PARTIE

On conserve les notations de la deuxième partie; on considère un endomorphisme t de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ (donc t élément de $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$), tel que $t(\mathcal{U}(E)) \subset \mathcal{U}(E)$. On rappelle que $\mathcal{U}(E)$ est connexe.

On se propose de prouver que l'image par t d'un endomorphisme de rang 1 est un endomorphisme de rang 1.

1° Soient u et v deux endomorphismes de E tels que, pour tout λ dans U, $\lambda u + v$ soit unitaire.
Montrer que $u^* \circ v = 0$ et que $(u^* \circ u) + (v^* \circ v) = \mathrm{Id}_E$.

2° Soient $u_1, u_2, \ldots, u_p$ $(p \geqslant 2)$ des endomorphismes de E tels que pour tout $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \in U^p$, $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p$ soit unitaire.

a. Montrer que pour tout (i, j) avec $i \neq j$ $u_i^* \circ u_j = 0$, et que $\sum_{i=1}^{p} u_i^* \circ u_i = Id_E$.

En déduire que $\sum_{i=1}^{p} \mathrm{rg}(u_i) = n$. ($\mathrm{rg}(u)$ désigne le rang de u).

b. Montrer que, pour tout endomorphisme unitaire w, $\sum_{i=1}^{p} \mathrm{rg}(t(u_i \circ w)) = n$.

c. En déduire que, pour i donné, le rang de $t(u_i \circ w)$ reste constant lorsque w décrit $\mathcal{U}(E)$.

d. Montrer que, pour tout endomorphisme u unitairement équivalent à u_i, $\mathrm{rg}(t(u)) = \mathrm{rg}(t(u_i))$.

3° Vérifier que l'on peut trouver un entier p et des endomorphismes $u_1, \ldots, u_p$ de rang 1 tels que l'hypothèse du 2° soit satisfaite.

En déduire que l'image par t d'un endomorphisme de rang 1 est un endomorphisme de rang 1.

QUATRIÈME PARTIE

On reprend les notations de la première partie et on désigne par $\mathcal{U}$ le groupe unitaire d'ordre n, constitué des matrices A de $\mathcal{E}$ telles que $A^*A = I_n$ où A^* est l'adjointe de A.

Pour A dans $\mathcal{E}$ et k entier compris entre 1 et n, on pose :

$$\Phi_k(A) = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k,$$

$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n$ désignant les racines des valeurs propres, distinctes ou non, de la matrice hermitienne positive A^*A.

D'après la deuxième partie, Φ_k est une norme sur $\mathcal{E}$.

On désigne par γ_0 (resp. γ_0') l'ensemble des endomorphismes $T_{P,Q}$ (resp. $T'_{P,Q}$) obtenus pour P et Q décrivant $\mathcal{U}$; on pose $\Gamma_0 = \gamma_0 \cup \gamma_0'$.

1° Vérifier que si T appartient à Γ_0 alors T possède les propriétés suivantes :

$T(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$

Pour tout entier k compris entre 1 et n et toute matrice A de $\mathcal{E}$, $\Phi_k(T(A)) = \Phi_k(A)$.

2° En utilisant les différents résultats établis dans le problème, démontrer, pour T endomorphisme de $\mathcal{E}$, les réciproques des propriétés établies au 1°. On démontrera successivement :

a. Si $T(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$ alors T appartient à Γ_0 ;

b. Si pour toute matrice A de $\mathcal{E}$, $\Phi_1(T(A)) = \Phi_1(A)$, alors T est dans Γ_0 ;

c. Si pour toute matrice A de $\mathcal{E}$, $\Phi_n(T(A)) = \Phi_n(A)$, alors T est dans Γ_0 ;

d. Si pour toute matrice A de $\mathcal{E}$, $\Phi_k(T(A)) = \Phi_k(A)$ où $k \neq 1$ et $k \neq n$, alors T est dans Γ_0.

RAPPORT SUR L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES GENERALES

Le problème de mathématiques générales étudiait cette année les isométries de l'espace vectoriel des matrices carrées complexes d'ordre n pour certaines normes liées aux valeurs singulières de ces matrices. Les résultats étaient obtenus dans la quatrième partie, mais il était nécessaire de déterminer d'abord les endomorphismes conservant le rang 1 (première partie), puis ceux conservant le groupe unitaire (troisième partie). La seconde partie, quant à elle, définissait et étudiait les premières propriétés des normes envisagées.

Le problème était essentiellement inspiré des articles suivants, dans lesquels on trouvera d'autres approches de la question, ainsi que des références pour l'étude de la conservation d'autres quantités (déterminants, fonctions symétriques des valeurs propres, ...), ou pour certaines généralisations à la dimension infinie :

1) GRONE-MARCUS : Isometries of Matrix Algebras. Journal of Algebra 47 (1977)

2) RUSSO : Trace preserving mappings of matrix algebras Duke Math. Journal 36 (1969)

3) MARCUS : Transforms on tensor product spaces Pacific Journal of Math. (1959)

4) MARCUS : All linear operators leaving unitary group invariant Duke Math. Journal 26 (1959).

L'ensemble était relativement long, mais son niveau ne dépassait pas celui du premier cycle de l'enseignement supérieur, et l'indépendance des parties et un barème assez généreux auraient dû permettre à un candidat moyen d'obtenir une note convenable. Hélas, beaucoup de candidats, dominant mal les notions élémentaires d'algèbre linéaire, sont conduits, soit à des raisonnements inutilement longs, ce qui est un moindre mal, soit à des méthodes tout à fait incorrectes, où l'on procède par affirmations aléatoires.

En fin de compte, de nombreuses copies se résument à un survol des débuts des deux premières parties, avec quelques points obtenus ici ou là dans des questions trés faciles. Il va de soi que cela ne suffit pas.

Rappelons pour terminer ces généralités, que de futurs enseignants se doivent de soigner la présentation de leur copie (qu'exigeront-ilsde leurs élèves ?) et que, s'il faut savoir être concis, les raisonnements doivent être solidement justifiés (l'expression "il est clair que ...", souvent employée pour masquer une insuffisance, n'a jamais constitué une démonstration).

Première partie.

La notion de rang d'une matrice était au coeur de cette partie, et c'est souvent faute de bien la connaître et de bien savoir la traduire, que de nombreux candidats ont échoué dans ces questions. Une bonne compréhension des situations rencontrées est évidemment trés utile : elle évite, dans les cinq premières questions, des calculs aveugles (ainsi $X\mathcal{L}$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{E}$ dont toutes les colonnes sont colinéaires à X) ; elle permet d'adopter à l'occasion un point de vue vectoriel ; elle est indispensable dans la sixième question, la plus difficile de cette partie, dans laquelle de nombreuses interversions de quantificateurs et des calculs sans direction précise ont révélé que les candidats dominaient mal leur raisonnement.

Signalons quelques points :

- Si une matrice est de rang 1, ses vecteurs colonnes sont tous multiples de l'un d'entre eux, mais encore faut-il choisir ce dernier non nul.

- Sur les matrices carrées, il ne faut pas confondre l'équivalence et la similitude.
- Deux matrices de $\mathcal{E}$ sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang : cela permettait de résoudre facilement la question B2°/.
- Le résultat de la partie A est faux sur $\mathbb{R}$: la question 6°/b ne peut pas être traitée sans utiliser que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

Deuxième partie.

Le A de cette partie, qui demandait des démonstrations très classiques, est le mieux traité du problème. Il fallait cependant, au 2°/, commencer par déterminer les e'_i correspondant aux α_i non nuls, s'assurer qu'ils constituaient une famille orthonormale, et enfin compléter en une base orthonormale. On note aussi quelques maladresses pour justifier que h est hermitien : le plus simple était de souligner l'existence d'une base orthonormale dans laquelle sa matrice était diagonale et réelle.

Dans les questions 3°/ et 4°/, le raisonnement est incomplet si l'on ne considère pas la liste complète des n valeurs singulières, répétitions comprises.

La partie B contenait certaines des questions les plus difficiles du problème (les 2°/ et 3°/), mais quelle surprise de constater qu'une majorité de candidats ignore la définition d'une norme hermitienne ! Dans la plupart des copies, on tente de prouver directement qu'il s'agit d'une norme, et l'on bute inévitablement sur l'inégalité triangulaire, faute d'avoir cherché le produit scalaire hermitien associé.

La partie C a permis d'obtenir assez facilement quelques points supplémentaires. Le reste du problème n'a été que rarement abordé, et souvent de manière disparate et confuse.

Mathématiques générales - Répartition des notes

0 à 4	188
5 à 9	167
10 à 14	133
15 à 19	120
20 à 24	85
25 à 29	57
30 à 34	39
35 à 39	24
40 à 44	20
45 à 49	9
50 à 54	6
55 à 60	8

COMPOSITION D'ANALYSE

DURÉE : 6 heures

Dans tout le problème $\mathbf{R}^3$ est muni de la norme euclidienne $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

On rappelle que, en coordonnées sphériques :

$$x = r\cos\theta\cos\varphi \qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$y = r\cos\theta\sin\varphi$$
$$z = r\sin\theta$$

le laplacien s'écrit : $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial f}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} - \operatorname{tg}\theta\,\dfrac{\partial f}{\partial \theta} + \dfrac{1}{\cos^2\theta}\dfrac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\right]$

On note $\mathbf{R}^+$ (resp. $\mathbf{R}^{+*}$) l'ensemble des réels positifs (resp. strictement positifs).

On note $\mathbf{R}^{3*}$ l'espace $\mathbf{R}^3$ privé de 0. On note $\mathbf{S}$ la sphère unité de $\mathbf{R}^3$.

On note $\mathbf{C}$ le corps des complexes, $\mathbf{N}$ (resp. $\mathbf{Z}$) l'ensemble des entiers positifs (resp. relatifs).

Les intégrales dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{R}^3$ font référence à la mesure de Lebesgue standard ; les intégrales sur $\mathbf{S}$ à la mesure de surface usuelle, image de la mesure de Lebesgue sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \times \left[-\pi, \pi\right]$

par le paramétrage ci-dessus : $(\theta, \varphi) \longrightarrow \begin{cases} x(1, \theta, \varphi) \\ y(1, \theta, \varphi) \\ z(1, \theta) \end{cases}$

Suivant l'abus de langage habituel, on dira qu'un élément f de $\mathbf{L}^2$ est de classe $\mathscr{C}^2$ s'il existe une fonction deux fois continûment différentiable qui coïncide presque partout avec f.

On dit qu'une fonction f, définie sur $\mathbf{R}^{+*}$, à valeurs dans $\mathbf{C}$ est développable en série de Laurent si, et seulement si, il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ telle que la série $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ converge pour tout $x > 0$ et ait pour somme f.

(On dit qu'une telle série converge si et seulement si les deux séries $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k} x^{-k}$ convergent.)

La partie IV et l'essentiel de V sont indépendants de II et III.

II et III font appel essentiellement à du calcul différentiel et de l'intégration dans $\mathbf{R}^3$.

IV et V font appel essentiellement à de l'analyse à une variable réelle; elles comportent moins de calculs mais peut-être un peu plus de difficultés théoriques.

PREMIÈRE PARTIE

Ces questions introduisent soit des résultats utiles pour la suite du problème, soit des méthodes voisines de celles qui sont utilisées ultérieurement, mais présentées ici dans un contexte simplifié.

1° Quelle est la dimension de l'espace vectoriel sur **C** des polynômes à deux indéterminées, à coefficients complexes, de degré global inférieur ou égal à n ?

2° Calculer l'intégrale, étendue à la sphère S, de la fonction définie par $(x, y, z) \in \mathbf{S} \longrightarrow f(x, y, z) = 1 + z^2$.

3° Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} (1 - z^2)^p \left[\frac{d^{p+q}}{dz^{p+q}} (1 - z^2)^q\right] \left[\frac{d^{p+r}}{dz^{p+r}} (1 - z^2)^r\right] dz$ $\quad (0 \leqslant p \leqslant q \leqslant r\,;\, p,\, q,\, r$ entiers).

(On pourra faire des intégrations par parties judicieusement choisies, en étudiant à chaque fois les valeurs aux bornes de la « partie tout intégrée ».)

4° Déterminer les solutions de l'équation différentielle :

$$(1 - x^2)\, y'' - 2\, x\, y' + \lambda\,(\lambda + 1)\, y = 0 \qquad (\lambda \in \mathbf{R})$$

qui sont développables en série entière au voisinage de $x = 0$.

Quel est le rayon de convergence des séries obtenues?

Pour quelles valeurs de λ existe-t-il des solutions polynomiales non nulles?

5° Soit f une fonction continue positive sur $[1, +\infty[$ telle qu'il existe deux constantes positives a et b vérifiant :

$$\forall x \geqslant 1 \qquad f(x) \leqslant a \int_1^x \frac{f(t)}{t^2}\, \mathrm{d}t + b$$

Montrer que f est bornée.

DEUXIÈME PARTIE

1° On dit qu'une fonction complexe f définie sur S est polynomiale de degré inférieur ou égal à n si elle est la restriction à S d'une fonction polynomiale sur $\mathbf{R}^3$ de degré inférieur ou égal à n.

Montrer que toute fonction polynomiale sur S de degré inférieur ou égal à n peut être représentée par un polynôme de degré inférieur ou égal à n de la forme $\mathrm{P}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) + \mathrm{Z}\,\mathrm{Q}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$.

Déterminer la dimension de l'espace vectoriel sur **C** des fonctions polynomiales sur S de degré inférieur ou égal à n.

2° f étant une fonction de $\mathbf{R}^3$ dans **C** et r un réel positif, on définit la fonction f_r de S dans **C** par $f_r(\mathrm{M}) = f(r\,\mathrm{M})$.

Montrer que, si f appartient à $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^3)$, la fonction f_r appartient à $\mathbf{L}^2(\mathbf{S})$ pour presque tout r.

3° Soit $g \in \mathbf{L}^2(\mathbf{S})$, h une fonction de $\mathbf{R}^{+*}$ dans **C** et f la fonction de $\mathbf{R}^{3*}$ dans **C** définie par $f(r\mathrm{M}) = h(r)\, g(\mathrm{M})$. À quelles conditions (portant sur h) la fonction f est-elle dans $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^3)$?

4° Soit l un entier positif, m un entier tel que $|m| \leqslant l$.

On note $\mathrm{X}_{l,m}$ la restriction à S du polynôme de $\mathbf{R}^3$:

$$(x + i\,\varepsilon\, y)^{|m|} \frac{d^{l+|m|}}{dz^{l+|m|}} ((1 - z^2)^l) \qquad \text{où} \quad \left\{\begin{array}{l} (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \\ i^2 = -1 \\ \varepsilon = +1 \text{ si } m > 0, \\ \varepsilon = -1 \text{ si } m < 0 \end{array}\right.$$

On pose $\mathrm{X}_{0,0} = 1$, fonction constante.

Montrer que les $X_{l,m}$, $0 \leqslant |m| \leqslant l$, $m \in \mathbf{Z}$, $l \in \mathbf{N}$, forment un système orthogonal de $L^2(S)$.

On pose $Y_{l,m} = \dfrac{X_{l,m}}{\| X_{l,m} \|_{L^2}}$.

Montrer que les $Y_{l,m}$ forment une base hilbertienne de $L^2(S)$.

5° On note $\mathbf{H}_{l,m}$ le sous-espace de $L^2(\mathbf{R}^3)$ engendré par les fonctions de la forme $h(r)\, Y_{l,m}$, où h vérifie les conditions déterminées au 3° de la deuxième partie.

Montrer que $\mathbf{H}_{l,m}$ est fermé dans $L^2(\mathbf{R}^3)$. Déterminer la projection orthogonale d'une fonction f appartenant à $L^2(\mathbf{R}^3)$ sur $\mathbf{H}_{l,m}$.

Montrer que $L^2(\mathbf{R}^3)$ est la somme hilbertienne des $\mathbf{H}_{l,m}$ $(0 \leqslant |m| \leqslant l\,;\ l \geqslant 0)$, c'est-à-dire que les $\mathbf{H}_{l,m}$ sont deux à deux orthogonaux et que leur somme est dense dans $L^2(\mathbf{R}^3)$.

TROISIÈME PARTIE

1° Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}^{3*}$ appartenant à $L^2(\mathbf{R}^3)$, montrer que les projections orthogonales de f sur les $\mathbf{H}_{l,m}$ sont encore de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}^{3*}$.

2° Soit M le point de S de coordonnées sphériques $(1, \theta, \varphi)$.

On notera $Y_{l,m}(\theta, \varphi)$ la valeur de $Y_{l,m}$ au point M.

Montrer que $Y_{l,m}$ vérifie la relation :

$$\frac{\partial^2 Y_{l,m}}{\partial \theta^2} - \operatorname{tg}\theta \frac{\partial Y_{l,m}}{\partial \theta} + \frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial^2 Y_{l,m}}{\partial \varphi^2} + K\, Y_{l,m} = 0$$

où K est une constante qu'on déterminera.

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}^{3*}$ appartenant à $\mathbf{H}_{l,m}$, calculer Δf en un point de coordonnées sphériques (r, θ, φ) $(r > 0)$.

3° Pour une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}^{3*}$ on définit $H(f) = -\Delta f - \dfrac{1}{r} f$.

Montrer que si f est dans $L^2(\mathbf{R}^3)$ et vérifie $H(f) = Ef$ $(E \in \mathbf{R})$ toutes ses projections $f_{l,m}$ sur les $\mathbf{H}_{l,m}$ vérifient des relations similaires :

$$H(f_{l,m}) = E f_{l,m}$$

Si on note $a_{l,m}(r)\, Y_{l,m}(\theta, \varphi)$ la projection de f sur $\mathbf{H}_{l,m}$, quelle relation doit alors vérifier la fonction $a_{l,m}$?

On définit la fonction $b_{l,m}$ sur $\mathbf{R}^{+*}$ par $b_{l,m}(r) = r\, a_{l,m}(r)$.

Comment se traduisent pour $b_{l,m}$ les propriétés démontrées antérieurement pour $a_{l,m}$ (propriétés de type différentiel et propriétés de type intégral) ?

QUATRIÈME PARTIE

Soit l un entier strictement positif. L'objet de cette partie est de déterminer pour quelles valeurs du paramètre ω réel, strictement positif, il existe des solutions u de l'équation différentielle (E_ω) :

$$u''(x) - \left(\frac{l(l+1)}{x^2} - \frac{1}{x} + \omega^2\right) u(x) = 0$$

de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}^{+*}$, et appartenant à $L^2(\mathbf{R}^+)$.

1° On met les solutions sous la forme $u(x) = v(x) \exp(-\omega x)$.

Déterminer l'équation différentielle vérifiée par v.

Déterminer les solutions v de cette équation différentielle développables en série de Laurent. (Ne pas chercher à les exprimer à l'aide de fonctions élémentaires.)

Discuter la dimension de l'espace vectoriel des solutions ainsi obtenues.

2° Pour quelles valeurs de ω existe-t-il des solutions v polynomiales ? Montrer que les fonctions u associées sont dans $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+)$.

Montrer que, parmi les solutions v déterminées à la question précédente (quatrième partie, 1°), seules les fonctions v polynomiales définissent des solutions u non nulles de (E_ω) dans $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+)$.

3° Montrer que l'équation (E_ω) n'a pas d'autres solutions non nulles dans $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+)$ que celles qui ont été déterminées à la question précédente.

4° l étant fixé, montrer que les solutions obtenues pour deux valeurs distinctes de ω sont orthogonales dans $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+)$.

CINQUIÈME PARTIE

Soit l un entier positif ou nul, ω un réel strictement positif.

On étudie dans cette partie les solutions de l'équation différentielle :

$$u''(x) + \left(\omega^2 + \frac{1}{x} - \frac{l(l+1)}{x^2}\right) u(x) = 0 \qquad (E'_\omega)$$

où u est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}^{+*}$. On pose $h(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{l(l+1)}{x^2}$.

À toute solution u de (E'_ω) on associe la fonction F définie par :

$$F(x) = (\omega^2 + h(x))\, u^2(x) + u'^2(x)$$

1° En s'inspirant de la méthode utilisée aux 2° et 3° de la quatrième partie pour (E_ω), étudier le comportement au voisinage de zéro des solutions de (E'_ω).

2° Montrer que si une solution u de (E'_ω) est dans $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+)$ et si $l > 0$

$$\int_0^{+\infty} u(x)\, u''(x)\, dx = -\int_0^{+\infty} u'^2(x)\, dx$$

Que devient cette formule pour $l = 0$?

3° On suppose toujours que u, solution de (E'_ω), est dans $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+)$. Montrer que la fonction F associée à u est intégrable sur $[1, +\infty[$ et que, si u n'est pas la fonction nulle, $F(x)$ est strictement positif pour tout x assez grand.

Établir une inéquation différentielle vérifiée par F et en déduire que u est la fonction nulle.

4° Montrer que toute solution u de (E'_ω) sur $\mathbf{R}^{+*}$ est bornée sur toute demi-droite $[X, +\infty[$ où $X > 0$.

(On pourra utiliser la fonction F associée ou montrer que pour tout $A > 0$ il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout x supérieur à A, on ait :

$$u^2(x)(\omega^2 - |h(x)|) \leqslant \int_A^x |h'(t)|\, u^2(t)\, dt + C)$$

RAPPORT SUR L'EPREUVE D'ANALYSE.

Le problème porte sur l'étude du spectre discret de l'équation de Schrödinger pour l'atome d'hydrogène, dans un modèle simplifié ne tenant compte ni du spin, ni des champs extérieurs.

La question, venue au jour vers 1925-1927 dans les débuts de la mécanique quantique a été résolue immédiatement en ce qui concerne les valeurs propres négatives (partie IV du problème). En 1929 un contre exemple de Von-Neumann et Wigner a montré que l'absence de valeurs propres positives, considérée comme intuitive par les physiciens, n'allait pas de soi. La réponse n'est venue qu'en 1966 dans un article de Weidmann (on the continuous spectrum of Shrödinger operators, Comm. Pure. Appl. Math 19-1966, p. 107-110) dont la partie V est une adaptation très simplifiée.

Pour en savoir plus, on peut consulter le traité classique de Reed-Simon : Methods of Modern Mathematical Physics (Volume 4 en particulier) et les monographies plus spécialisée de Berthier (Pitnam Pub n°71) et de Eastham et Kalf (Pitman Pub n°65).

Pour maintenir le problème dans un cadre relativement élémentaire on n'a pas introduit d'espaces de Sobolev, ce qui n'a pas permis de faire figurer le terme "valeur propre " dans l'énoncé. On peut montrer que s'il existait des solutions faibles (ou au sens distributions) elles seraient en fait des solutions classiques (lemme de Weyl).

Dans le même but, on n'a pas cherché à étudier le spectre continu, et on a préféré laisser de côté le cas $l = 0$ au IV ainsi que le cas $E = 0$ (c'est à dire $\omega = 0$ en IV ou V).

Le problème est assez long mais avait été rédigé comme le signalait le préambule, de façon que les cadidats puissent, selon leurs connaissances, faire porter l'esentiel de leur effort soit sur les parties II et III , soit sur les parties IV et V qui faisaient appel à des domaines largement disjoints de l'analyse.

En fait, beaucoup de copies sont très fragmentaires et montrent plutôt une tendance au grappillage de questions faciles qu'une tentative d'approfondissement. Une telle attitude a ses avantages : accumuler les points des questions faciles, et ses inconvénients : ne pas aborder les questions plus délicates, qui sont aussi les mieux rémunérées par le barème de correction.

Notons enfin que de nombreuses copies sont rédigées de façon inacceptable chez de futurs enseignants. Les candidats doivent savoir que, même si la rédaction et la présentation ne sont pas cotées explicitement dans le barème, elles influent sensiblement sur la note finale : le correcteur ne fait pas l'exégèse des copies qui lui sont soumises, <u>il note ce qui est écrit</u> : si un raisonnement est trop confus ou insuffisamment justifié, il est considéré comme faux. Dans des cas extrêmes, il peut en aller de même pour des passages illisibles.

Remarquons sur quelques questions du problème :

I- 2) Beaucoup de candidats ont calculé, au lieu de l'intégrale de surface sur la sphère, une intégrale triple sur la boule. Beaucoup d'autres ont écrit une intégrale triple en coordonnées cartésiennes, fait le changement en coordonnées sphériques en calculant le jacobien tridimensionnel, puis escamoté sans explications la variable r pour obtenir une intégrale en θ et ϕ. Le résultat obtenu est alors exact (on pourrait justifier un raisonnement de ce type mais aucun candidat n'a tenté de le faire). Quelques condidats ont trouvé, sans s'en étonner, un résultat négatif.

3) La question, pourtant élémentaire, a été peu abordée. Les quelques candidats qui s'y sont attaqué n'ont en général pas vu qu'il suffisait d'étudier l'ordre de multiplicité des racines ± 1 dans le polynôme $(1 - z^2)^m$ et ses dérivées et ont fait des calculs assez lourds à l'aide de la formule de Leibniz.

4) Le calcul formel a en général été bien fait , mais le rayon de convergence très mal étudié, voir pas étudié du tout. Lorsque les solutions n'étaient pas polynomiales on trouvait facilement la limite de $|a_{n+2}/a_n|$. On ne peut obtenir ainsi , en principe, que le carré du rayon de convergence (ici, la limite étant 1, la confusion n'était pas visible sur le résultat).
Il suffisait pour conclure exactement de se demander si le terme général de la série est borné (lemme d'Abel).

Dans la recherche des solutions polynomiales, presque personne n'a remarqué que l'équation $n(n+1) = \lambda(\lambda+1)$ admet des racines $n = \lambda$ si λ est entier positif, mais aussi $n = -\lambda-1$ si λ est entier négatif (une erreur similaire se retrouve au IV). Le rôle de la parité a rarement été précisé.

5) Les candidats qui ont abordé cette question l'ont en général correctement traitée. Certains se sont limités au cas beaucoup plus simple où $a < 1$. Notons quand même quelques divisions d'inégalités par un nombre négatif et quelques surprenantes fautes de logique dans la négation de la propriété "f est bornée". On pouvait appeler $G(x)$ le second membre de l'inégalité, et remarquer que $x^2G'(x) \leq a\, G(x)$. En intégrant l'inéquation différentielle on obtenait $G(x) \leq A \exp(-a/x)$ ce qui prouve le résultat.

II- 1) Presque personne n'a vu que pour utiliser la décomposition proposée $P(X,Y) + Z\, Q(X,Y)$ il fallait en prouver l'unicité (cela pouvait se faire en étudiant, pour X et Y fixés, avec $X^2+Y^2 < 1$, la fonction affine $Z \to P(X,Y) + Z\, Q(X,Y)$ et en remarquant qu'une fonction affine nulle en deux points distincts est identiquement nulle.

Quelques candidats multiplient les dimensions de deux sous-espaces supplémentaires pour obtenir la dimension de l'espace !.

2-3 Assez mal traitées dans l'ensemble, peu d'allusions au théorème de Fubini, encore moins d'explications précises de son utilisation (qui était très différente dans les deux questions).

4) Parmi les candidats qui abordent cette question, certains oublient la conjugaison dans le produit scalaire hermitien, d'autres ne traitent pas tous les cas. Au total presque personne n'écrit correctement l'intégrale qui définit le produit scalaire, ce qui ôte toute valeur aux références plus ou moins vagues au I 3).

A part de rares exceptions, II 5) et III n'ont pas été abordées, ou seulement par de vagues allusions à la densité des polynômes, ou à des séries de Fourier, ou encore des distributions pour III, presque toujours en négligeant les vraies difficultés.

Donnons quelques indications :

La fin de II 5) utilise le théorème de Stone Weierstrass, en remarquant que le calcul de dimneison du II 1) montre que les Y_{lm} engendrent l'algèbre des fonctions polynomiales sur S, et que $\overline{Y_{lm}} = Y_{l,-m}$: l'algèbre est autoconjuguée.
La projection orthogonale sur H_{lm} est définie par

$$H_{l,m}(r) = \iint_S f(r\, M)\, \overline{Y_{l,m}}(M)\, d\sigma(M).$$

Au III, 1) résulte du théorème de dérivation sous le signe intégrale appliqué à la projection orthogonale. Un calcul, assez délicat, montre au 2) que $K = l(l+1)$. Le reste résulte d'intégrations par parties en coordonnées sphériques.

IV En général seul le calcul formel a été abordé, mais la relation de récurrence entre les coefficients n'a pas été exploitée de façon méthodique : trois valeurs de n jouent un rôle exceptionnel $n_1=1$; $n_2=-1-1$ et éventuellement $n_0 = 1/2\omega$. Faute de voir que $a_n=0$ si $n < -1-1$, on ne peut pas prouver la convergence de la série (beaucoup de candidats ont cru que la limite de a_{n+1}/a_n s'interprête de la même façon en $-\infty$ qu'en $+\infty$). L'étude de la dimension et des solutions polynomiales dépend de l'existence de n_0 et de sa position par rapport à n_2.

La fin du IV se traite par un développement asymptotique en 0 d'une solution obtenue par variation de la constante à partir d'une série entière. L'orthogonalité résulte, là encore, d'intégrations par parties.

V n'a pratiquement pas été abordée.

Répartition des notes :

0 à 4	5 à 9	10 à 14	15 à 19	20 à 24	25 à 29
182	155	95	125	69	50

30 à 34	35 à 39	40 à 44	45 à 49	50 à 54	55 à 60
27	38	24	11	7	7

DURÉE : 6 heures

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

ANALYSE NUMÉRIQUE

INTRODUCTION

Le problème traite de l'approximation d'une fonction analytique au voisinage de zéro, par des fractions rationnelles $\frac{P}{Q}$. La première partie présente les moyens classiques d'étude du problème. Dans les deuxième et troisième parties, on s'intéresse aux pôles de ces approximants, soit que l'on veuille connaître leur comportement quand on optimise l'ordre d'approximation, soit qu'on veuille étudier le comportement des approximants, quand l'ordre d'approximation est plus faible, mais les pôles fixés.

Dans la quatrième partie, on étudie les approximants de l'exponentielle, où des résultats explicites sont obtenus; enfin dans la dernière partie, la vitesse de convergence des approximants est comparée à celle des sommes partielles de la série, dans le cas d'une série de Stieltjes.

Les parties II, III, IV, V sont, dans une large mesure, indépendantes entre elles.

NOTATIONS

Une fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ est dite de type (p, q) si les degrés de P et Q vérifient : $d^\circ P \leqslant p$ et $d^\circ Q \leqslant q$.

Une fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ de type (p, q) est un approximant de type-Padé de f au voisinage de zéro (A.T.P.) si :

$$\left(f - \frac{P}{Q}\right)(z) = 0\,(z^{p+1})\,.$$

On écrira $\left(\frac{P}{Q}\right) = (p/q)_f$.

Une fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ de type (p, q) est un approximant de Padé de f au voisinage de zéro si :

$$\left(f - \frac{P}{Q}\right)(z) = 0\,(z^{p+q+1})\,.$$

On écrira $\frac{P}{Q} = [p/q]_f$.

Si P_n est un polynôme de degré n exactement, on définit $\tilde{P}_n$ par :

$$\tilde{P}_n\,(t) = t^n\, P_n\,(t^{-1})\,.$$

Un polynôme est dit unitaire si le coefficient du terme de plus haut degré est un.

La notation D_r désigne le disque ouvert, de centre O, de rayon r.

PREMIÈRE PARTIE

On considère une fonction f holomorphe dans un voisinage de zéro, développable à l'origine en série entière de rayon R :

$$f(x) = \sum_{i \geqslant 0} c_i \, x^i$$

Q.1. Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$, dont le bord $\partial \Omega$ est C^1 différentiable par morceaux. Soit $(x_i)_{i=1\ldots m}$, m points distincts de Ω, $(m_i)_{i=1\ldots m}$, m entiers $(m_i \geqslant 1)$, et h une fonction holomorphe dans un voisinage de $\overline{\Omega}$. Pour t dans Ω, on pose :

$$n = \sum_{i=1}^{m} m_i \,; \qquad V_n(t) = \prod_{i=1}^{m} (t - x_i)^{m_i} \,;$$

$$P(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{V_n(t) - V_n(u)}{t-u} \, \frac{h(u)}{V_n(u)} \, du \,.$$

Montrer que P est un polynôme de degré au plus $n-1$.

Montrer que les dérivées successives de $\dfrac{V_n(t)}{(t-u)}$, par rapport à t, sont nulles en $t = x_i$ jusqu'à l'ordre $m_i - 1$.

Montrer que P interpole, au sens d'Hermite, h en x_i à l'ordre m_i, pour $i = 1, \ldots, m$ (c'est-à-dire $P^{(j)}(x_i) = h^{(j)}(x_i)$ pour $i = 1, \ldots, m$ et $j = 0, \ldots, m_i - 1$).

Dans le cas où $m_i = 1$ pour tout i, calculer explicitement l'intégrale ci-dessus et montrer que l'on retrouve ainsi le polynôme d'interpolation de Lagrange.

Q.2. Pour tout α strictement inférieur à R, on note $\mathcal{H}_\alpha$ l'espace des fonctions holomorphes dans le disque de rayon $\dfrac{1}{\alpha}$. On définit sur $\mathcal{H}_\alpha$ la fonctionnelle linéaire c associée à f par :

$$c(g) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|t|=r} f(t) \cdot g\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \frac{dt}{t} \,.$$

Montrer que c est indépendant de r pourvu que $\alpha < r < R$.

Montrer que pour tout $i \geqslant 0$, $c(t^i) = c_i$.

Soit $g_x(t) = \dfrac{1}{1 - xt}$. Montrer que $c(g_x) = f(x)$ pour tout x tel que $|x| < R$.

Le premier membre $c(g_x)$ sera écrit dans toute la suite, soit pour désigner la série $\sum_{i \geqslant 0} c_i \, x^i$, soit un prolongement analytique de celle-ci.

Q.3. P_x désigne le polynôme, défini en Q.1., pour la fonction $h = g_x$. Soit W_n le polynôme associé à V_n, défi par :

$$W_n(x) = c\left(\frac{V_n(x) - V_n(t)}{x - t}\right), \qquad (c \text{ agissant sur } t).$$

On suppose que $f(0) \neq 0$. Montrer que W_n est un polynôme de degré $n - 1$.

Montrer que : $c(P_x) = \dfrac{\tilde{W}_n(x)}{\tilde{V}_n(x)}$

$$f(x) - c(P_x) = \frac{x^n}{\tilde{V}_n(x)}\, c\left(\frac{V_n(t)}{1 - xt}\right);$$

$$f(x) - c(P_x) = 0(x^n) \qquad \text{pour } x \text{ voisin de zéro.}$$

En déduire que $\dfrac{\tilde{W}_n}{\tilde{V}_n} = (n - 1/n)_f$.

Q.4. On suppose que $f(x) = x^k f_1(x)$ et $f_1(0) \neq 0$.

Soit $\dfrac{N}{D}$ un A.T.P. de f_1 de type (p, q).

Montrer que $x^k \dfrac{N(x)}{D(x)}$ est un A.T.P. de f de type $(p + k, q)$.

Q.5. Un polynôme D, tel que $D(0) \neq 0$, de degré q, étant fixé, montrer que l'A.T.P. de dénominateur D, de type (p, q) existe et est unique quel que soit p.

Donner l'expression des coefficients du numérateur en fonction des coefficients de D et de ceux de la série f.

Q.6. On pose $f_k(x) = \sum_{i \geq 0} c_{i+k}\, x^i \quad \begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ c_i = 0 \quad i < 0. \end{cases}$

Soit c^k la fonctionnelle associée à f_k.

V_n étant un polynôme arbitraire de degré n exactement, on appelle $(n - 1/n)_{f_k}$ l'A.T.P. de f_k de dénominateur $\tilde{V}_n$.

Soit $\dfrac{N_{n+k-1}}{\tilde{V}_n}(x) = \sum_{i=0}^{k-1} c_i\, x^i + x^k\, (n - 1/n)_{f_k}(x)$.

Montrer que $\dfrac{N_{n+k-1}}{\tilde{V}_n} = (n + k - 1/n)_f$

$$\left(f - \frac{N_{n+k-1}}{\tilde{V}_n}\right)(x) = \frac{x^{n+k}}{\tilde{V}_n(x)}\, c^k\left(\frac{V_n(t)}{1 - xt}\right).$$

Q.7. À quelle condition existe-t-il un unique polynôme unitaire V_n de la variable x tel que :

$$\frac{N_{n+k-1}}{\tilde{V}_n} = [n + k - 1/n]_f.$$

Écrire ce polynôme V_n, sous forme d'un rapport de deux déterminants, la dernière ligne du numérateur étant : $(1, x, \ldots, x^n)$.

DEUXIÈME PARTIE

Soit f une fonction méromorphe dans le disque D_ρ, de rayon ρ non nul, dont les pôles $\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu$ sont simples et non nuls.

On définit une suite de polynômes Q_k, pour $k = 0, \ldots, \nu$:

$$Q_0(z) = 1$$

$$Q_k(z) = \prod_1^k (z - \alpha_i).$$

Pour $n \geqslant 0$, soit $(a_k^n)_{k=1,\ldots,\nu}$ une suite arbitraire de nombres complexes.

On pose :

$$q_n(z) = \sum_{k=1}^{\nu} a_k^n \, Q_{k-1}(z) + Q_\nu(z).$$

Q.8. Écrire, sous forme intégrale sur un contour Γ à préciser, l'expression de Π_n, unique polynôme de degré inférieur ou égal à $n + \nu$, qui interpole $(q_n \cdot Q_\nu \cdot f)$ en 0 à l'ordre $n + \nu + 1$.

Q.9. Pour tout n, montrer que Π_n est divisible par Q_ν si et seulement si $(a_k^n)_{k=1,\ldots,\nu}$ vérifient un système linéaire :

$$\sum_{k=1}^{\nu} a_k^n \, c_{jk}^n = d_j^n \qquad j = 1, \ldots, \nu.$$

Préciser les c_{jk}^n (qui sont définis par des intégrales).

Étudier $\lim\limits_{n \to \infty} c_{jk}^n$, et le système linéaire limite quand $n \longrightarrow \infty$.

En déduire que, pour n assez grand, il existe $(a_k^n)_{k=1,\ldots,\nu}$ uniques tels que Π_n soit divisible par Q_ν.

Dans la suite de cette partie, les $(a_k^n)_{k=1,\ldots,\nu}$ sont ceux ainsi définis, n étant supposé assez grand.

Q.10. Montrer que $\lim\limits_{n \to \infty} a_k^n = 0, \qquad k = 1, \ldots, \nu.$

Montrer que, uniformément sur tout ensemble borné du plan :

$$\lim_{n \to \infty} q_n(z) = Q_\nu(z).$$

Q.11. Soit $R_n = \dfrac{\Pi_n}{q_n \cdot Q_\nu}$.

Montrer que R_n est l'approximant de Padé $[n/\nu]_f$ de f.

Q.12. Soit λ et σ vérifiant $\lambda < \sigma < \rho$ et tous les α_i, $i = 1, \ldots, \nu$, appartiennent à D_λ.

Soit K un compact contenu dans $D_\lambda - \{\alpha_i\}_{i=1,\ldots,\nu}$.

Montrer que $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \left(\sup\limits_{z \in K} |f(z) - R_n(z)|^{\frac{1}{n}} \right) < \dfrac{\lambda}{\sigma} < 1.$

En déduire que R_n converge vers f uniformément et géométriquement sur tout compact de $D_\rho - \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu\}$ quand n tend vers l'infini.

Q.13. Montrer que R_n est une fraction irréductible, et a effectivement ν pôles qui approchent les ν pôles de f quand n tend vers l'infini.

TROISIÈME PARTIE

On suppose dans cette partie que f est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, de pôles $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, distincts, en nombre fini ou non, non nuls, simples.

Les α_i sont supposés rangés en ordre de module croissant, on pose $u_i = \alpha_i^{-1}$, et on suppose de plus qu'il existe ν et σ tels que :

$$|\alpha_\nu| < \sigma < |\alpha_{\nu+1}| .$$

Q.14. Montrer que f peut se mettre sous la forme

$$f(z) = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{r_i}{z - \alpha_i} + g(z)$$

où g est une fonction holomorphe dans le disque D_σ.

Si $f(z) = \sum_{n \geqslant 0} c_n z^n$ et $g(z) = \sum_{n \geqslant 0} b_n z^n$, exprimer c_n en fonction des r_i, u_i, b_n.

Q.15. Soit $\tilde{V}_n$ le polynôme égal au déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{\nu} r_i u_i^{n+1}, & \ldots, & \sum_{i=1}^{\nu} r_i u_i^{n+\nu+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^{\nu} r_i u_i^{n+\nu}, & \ldots, & \sum_{i=1}^{\nu} r_i u_i^{n+2\nu} \\ 1 & \ldots, & z^\nu \end{vmatrix}$$

Calculer $\tilde{V}_n$, comparer à $\tilde{V}(z) = \prod_{i=1}^{\nu} (z - u_i)$.

Comparer les A.T.P. de f, de dénominateurs respectivement V_n et V.

Q.16. Soit H_ν^n le polynôme suivant :

$$H_\nu^n(z) = \begin{vmatrix} c_n & \ldots & c_{n+\nu} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n+\nu-1} & \ldots & c_{n+2\nu-1} \\ 1 & \ldots & z^\nu \end{vmatrix}$$

(Sous les hypothèses faites sur f, ce polynôme est effectivement de degré ν, pour n assez grand, ce que l'on admettra sans démonstration.)

On pose $D_{n\nu} = H_n^\nu - \tilde{V}_n$.

Montrer que pour tout ρ, vérifiant $|u_\nu| > \rho > |u_{\nu+1}|$, et uniformément par rapport à z dans tout compact contenu dans D_σ :

$$D_{n\nu} = 0(|u_1 \ldots u_{\nu-1}\rho|^n) \qquad n \longrightarrow +\infty.$$

En déduire que, quand n tend vers l'infini, il existe K_ν indépendant de n tel que :

$$H_\nu^n(z) = K_\nu(u_1 \quad \ldots \quad u_\nu)^n \left[\prod_{i=1}^{\nu}(z-u_i) + 0\left(\left(\frac{z}{|u_\nu|}\right)^n\right)\right]$$

Q.17. Montrer que si g est un polynôme de degré h :

$$(n+\nu/\nu)_f = [n+\nu/\nu]_f \qquad n \geqslant h.$$

où l'A.T.P. considéré est de dénominateur V.

Q.18. On définit les notations suivantes :

$$(n+\nu-1/\nu)_f = \frac{W_n}{V_n} \qquad (V_n f - W_n)(z) = \sum_{p \geqslant 0} \beta_p z^p;$$

$$[n+\nu-1/\nu]_f = \frac{P_n}{\tilde{H}_\nu^n} \qquad \left(\tilde{H}_\nu^n f - P_n\right) = \sum_{p \geqslant 0} a_p z^p.$$

Montrer que, quand n tend vers l'infini

$$\begin{array}{ll} \beta_p = a_p = 0 & p \leqslant n+\nu-1; \\ \beta_p = 0\,(\rho^{(\nu-1)n}) & n+\nu \leqslant p \leqslant n+2\nu-1; \\ \beta_p - a_p = 0\,(\rho^{(\nu-1)n}) & p \geqslant n+2\nu. \end{array}$$

Q.19. On suppose que les pôles α_i ne sont pas connus exactement, mais qu'on connaît pour chaque i, $i = 1, \ldots, \nu$, une suite $(y_{ik})_{k \geqslant 0}$: $\lim\limits_{k \to \infty} y_{ik} = \alpha_i$.

On appelle $\quad Q_k(z) = \prod\limits_{i=1}^{\nu}(z - y_{ik})$ et on pose :

$$\sum_{p \geqslant 0} \beta_p^k z^p = \tilde{Q}_k(z) \cdot f(z).$$

Soient x_i, $i = 1, \ldots, \nu$ les racines de H_ν^n, et $\mu_k = \sup\limits_{i=1,\ldots,\nu} |x_i - y_{ik}|$.

Montrer que $\quad \beta_p^k = a_p + 0(\mu_k) \qquad (k \longrightarrow +\infty)$.

QUATRIÈME PARTIE

Q.20. Soit $R(t)$ un polynôme de degré m et $\mathcal{F}(t)$ la fonction suivante :

$$\mathcal{F}(t) = \frac{R(t)}{z} + \frac{R'(t)}{z^2} + \ldots + \frac{R^{(m)}(t)}{z^m}.$$

Montrer que $\quad \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} e^{-zu} R(u)\,du = -\left[e^{-tz}\mathcal{F}(t)\right]_{t_0}^{t_1}.$

Soient $\Phi_0(z) = z^{m+1}\mathcal{F}(0)$ et $\Phi_1(z) = z^{m+1}\mathcal{F}(1)$, montrer que :

$$\Phi_0(z) \cdot e^z - \Phi_1(z) = z^{m+1} e^z \int_0^1 e^{-uz} R(u)\,du.$$

Q.21. Calculer R pour que

$$d^0\,\Phi_0 = q\,, \qquad d^0\,\Phi_1 = p$$

$$\frac{\Phi_0}{\Phi_1} = [p/q]_{\exp} \qquad \text{(approximant de Padé de } e^z = \exp(z)\text{)}.$$

Dans les questions 22, 23, 24, on suppose que $q \geqslant p$.

Q.22. Soit $\dfrac{P}{Q}$ une fraction de type $(p\,,\ q)$ vérifiant $Q(0) \neq 0$.

Montrer que $\dfrac{P}{Q}$ est un A.T.P. de l'exponentielle si, et seulement si, il existe un polynôme R unique, d degré q tel que :

$$P(z) = \sum_{k=0}^{p} R^{(q-k)}(1)\,.\,z^k\,;$$

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{q} R^{(q-k)}(0)\,.\,z^k\,.$$

R est appelé le C-polynôme de l'approximant.

Q.23. Montrer que si $\dfrac{P}{Q}$, de type $(p\,,\ q)$, vérifie :

$$e^z.Q(z) - P(z) = 0\,(z^{s+1}) \qquad s \geqslant p$$

alors le C-polynôme R vérifie :

a. $\quad p \leqslant s \leqslant q \qquad R^{(q-s)}(x) = (x-1)^{s-p}\,\widehat{R}_p(x) \quad d^0\,\widehat{R}_p = p$

b. $\quad s \geqslant q \qquad R(x) = \dfrac{d^{s-q}}{dx^{s-q}}\left[x^{s-q}\,(x-1)^{s-p}\,\widehat{R}_{p+q-s}(x)\right] \qquad d^0\,\widehat{R}_{p+q-s} = p+q-s$

Pour cette dernière démonstration, on pourra considérer la suite I_r :

$$I_0(x) = R(x) \qquad I_{r+1}(x) = \int_0^x I_r(u)\,du$$

et calculer I_r, $I_r(0)$, $I_r(1)$.

Q.24. Soit P_n un polynôme de degré n, z un paramètre et τ une constante.

On considère l'équation différentielle E_n :

$$-y'(x) + y(x) = \tau\, P_n\left(\frac{x}{z}\right).$$

On appelle $y_n(x, z)$ la solution polynôme de E_n et on calcule τ telle que $y_n(0, z) = 1$.

Calculer $y_n(x, z)$ en fonction des coefficients de P_n, et des sommes partielles S_i de l'exponentielle.

Montrer que $y_n(z, z)$ est un approximant de type Padé (n/n) de l'exponentielle. Précisez le C-polynôme de cet approximant.

Déterminer P_n unitaire tel que $y_n(z, z)$ soit l'approximant de Padé $[n/n]$ de l'exponentielle.

Q.25. Montrer que si $S_n(z)$ est la somme partielle de degré n de $\exp(z)$ et $U_n(z)$ la somme partielle de $\exp(-z)$, $\dfrac{1}{S_n}$ et U_n sont deux A.T.P. de $\exp(-z)$.

Déterminer les C-polynômes associés respectivement à ces approximants.

Q.26. On pose $\quad g_n(x) = \dfrac{1}{S_n(x)} - e^{-x} \quad x \in [0, \infty[$.

Montrer que g_n admet un maximum en un point ξ de $]0, \infty[$.

Montrer que $g_n(\xi) \leqslant \dfrac{1}{2} g_{n-1}(\xi)$.

En déduire que $\displaystyle\sup_{x \in [0, \infty[} \left| \frac{1}{S_n(x)} - e^{-x} \right| < \frac{1}{2^n}$.

CINQUIÈME PARTIE

Dans cette partie f est une fonction analytique dans $\mathbb{C} - [1, \infty[$, définie par une série de Stieltjes :

$$f(x) = \sum_{i \geqslant 0} c_i x^i \qquad c_i = \int_0^1 u^i w(u)\, du$$

où w est une fonction positive intégrable, telle que $\lim\limits_{n \to \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}$ existe et vaut 1.

Q.27. Montrer que si c est la fonctionnelle définie en Q.2. :

$$x \in \mathbb{C} - [1, \infty[\qquad f(x) = c\left(\frac{1}{1 - xt}\right) = \int_0^1 \frac{w(u)}{1 - xu}\, du.$$

En déduire que pour tout polynôme V_k, et pour tout x de $\mathbb{C} - [1, \infty[$

$$c\left(\frac{V_k(t)}{1 - xt}\right) = \int_0^1 \frac{V_k(u)}{1 - xu} w(u)\, du.$$

Q.28. Pour $n \in \mathbb{N}$, et pour toute détermination de la racine carrée, on pose

$$T_n(z) = \frac{1}{2}\left[\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)^n + \left(z - \sqrt{z^2 - 1}\right)^n \right].$$

Vérifier que : $\quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \ T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$.

Quelles sont les racines de T_n ?

Q.29. Soit $T_n^*(x) = T_n(2x - 1)$.

On considère le polynôme P_n, de degré $n - 1$, interpolant la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1 - xt}$ aux racines de T_n^*. Montrer qu'alors, on a, pour $x \in \mathbb{C} - [1, \infty[$: $|f(x) - c(P_n)| \leqslant M \dfrac{\rho^n}{1 - \rho^{2n}} k$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} M \text{ constante} \\ k = k(x) = \sup\limits_{u \in [0, 1]} \left| \dfrac{1}{1 - xu} \right| \\ \rho = \rho(x) = \inf\left[\left| A + \sqrt{A^2 - 1} \right|, \left| A - \sqrt{A^2 - 1} \right| \right], \quad A = 2x^{-1} - 1. \end{cases}$$

Montrer que $\rho < 1$.

En déduire que $c(P_n)$ converge vers f, quand n tend vers l'infini, pour tout x de $\mathbb{C} - [1, \infty[$.

Q.30. Soient S_n les sommes partielles de f, de degré n. Montrer que

$$x \in [0,\, 1[\qquad \lim_{n \to \infty} |f(x) - S_n(x)|^{\frac{1}{n}} = |x| .$$

Étendre ce résultat à tout x complexe de $\mathbb{C} - [1,\, \infty[$.

Q.31. Soit $\varphi(x) = A - \sqrt{A^2 - 1}$ et $A = 2x^{-1} - 1$, la détermination de la racine étant telle que $\sqrt{1 - x} \geqslant 0$ si $x \in [0,\, 1]$.

Montrer que $\varphi(x) = x^{-1}\left(1 - \sqrt{1 - x}\right)^2$; en déduire que pour tout x de D_1, $\rho(x) < |x|$.

En déduire que dans le disque unité, $c(P_n)$ converge vers f plus vite que S_n, c'est-à-dire que

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{c(P_n)(x) - f(x)}{S_n(x) - f(x)} \right| = 0 .$$

que

MÉCANIQUE GÉNÉRALE

PRÉLIMINAIRES

On indique ici les notations et conventions utilisées, ainsi que quelques résultats que les candidats pourront employer pour la résolution du problème, sans avoir à les démontrer.

1. Une application $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ d'un intervalle fermé $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{R}^m$, est dite *différentiable de classe* C^∞, si elle est la restriction à $[a, b]$ d'une application (pas nécessairement unique) $\tilde{\gamma}$, différentiable de classe C^∞, définie sur un intervalle ouvert contenant $[a, b]$. Pour tout entier $k \geqslant 1$, la dérivée d'ordre k de $\tilde{\gamma}$ au point a (resp. au point b), ne dépend que de γ, et non du choix de $\tilde{\gamma}$: c'est la dérivée d'ordre k *à droite* (resp. *à gauche*) de γ en a (resp. en b); (par convention, on l'appellera simplement dérivée d'ordre k de γ en a (resp. en b)).

2. Dans toute la suite, « différentiable » sous-entendra toujours « de classe C^∞ ».

3. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^{2m}$ (coordonnées $(x, \dot{x}) = (x^1, \dots, x^m, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^m)$), et $\mathcal{L} : U \to \mathbb{R}$ une application différentiable, qu'on notera $\mathcal{L}(x, \dot{x})$, ou $\mathcal{L}(x^1, \dots, x^m, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^m)$.

On désigne par Γ_U l'ensemble des applications différentiables $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$, définies sur un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, telles que pour tout $t \in [a, b]$, $\left(\gamma(t), \dot{\gamma}(t) = \dfrac{d\gamma}{dt}(t)\right)$ soit élément de U. À tout élément γ de Γ_U on associe l'intégrale :

$$I(\gamma) = \int_a^b \mathcal{L}\left(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\right) dt .$$

On dit que cette formule définit une fonctionnelle I sur Γ_U.

4. On aura à considérer dans la suite des familles, dépendant différentiablement d'un paramètre réel s, d'applications différentiables $\gamma_s : [a_s, b_s] \to \mathbb{R}^m$, éléments de Γ_U, l'intervalle $[a_s, b_s]$ pouvant lui-même dépendre de s. Une telle famille d'applications sera toujours supposée définie par les données suivantes :

— deux applications différentiables $s \longmapsto a(s) = a_s$, $s \longmapsto b(s) = b_s$, définies sur un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, vérifiant pour tout $s \in J$, $a(s) \leqslant b(s)$;

— une application différentiable $\hat{\gamma} : W \to \mathbb{R}^m$, définie sur un ouvert W de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, notée $(s, t) \longmapsto \hat{\gamma}(s, t)$, telle que pour tout $s \in J$ et tout $t \in [a_s, b_s]$, (s, t) soit élément de W, et que l'on ait :

$$\hat{\gamma}(s, t) = \gamma_s(t) .$$

On a donc, en dérivant par rapport à t :

$$\dot{\gamma}_s(t) = \frac{d\gamma_s}{dt}(t) = \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial t}(s, t) .$$

5. Avec les notations précisées ci-dessus, l'application de J dans $\mathbb{R}$: $s \longmapsto \mathrm{I}(\gamma_s)$ est différentiable, et sa dérivé est donnée par l'expression

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathrm{I}(\gamma_s) = \left[\mathcal{L}\left(\gamma_s(b_s), \dot{\gamma}_s(b_s)\right) - \sum_{i=1}^{m} \dot{\gamma}_s^i(b_s)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i}\left(\gamma_s(b_s), \dot{\gamma}_s(b_s)\right)\right]\frac{\mathrm{d}b_s}{\mathrm{d}s}$$

$$-\left[\mathcal{L}\left(\gamma_s(a_s), \dot{\gamma}_s(a_s)\right) - \sum_{i=1}^{m} \dot{\gamma}_s^i(a_s)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i}\left(\gamma_s(a_s), \dot{\gamma}_s(a_s)\right)\right]\frac{\mathrm{d}a_s}{\mathrm{d}s}$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i}\left(\gamma_s(b_s), \dot{\gamma}_s(b_s)\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\gamma_s^i(b_s)\right)$$

$$-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i}\left(\gamma_s(a_s), \dot{\gamma}_s(a_s)\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\gamma_s^i(a_s)\right)$$

$$+\int_{a(s)}^{b(s)}\left[\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i}\left(\gamma_s(t), \dot{\gamma}_s(t)\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i}\left(\gamma_s(t), \dot{\gamma}_s(t)\right)\right)\right)\frac{\partial \hat{\gamma}^i}{\partial s}(s, t)\right]\mathrm{d}t\,.$$

Dans l'expression ci-dessus, on a noté $\gamma_s^i(t)$, $\hat{\gamma}^i(s, t)$, $\dot{\gamma}_s^i(t)$, $(1 \leqslant i \leqslant m)$ les composantes, respectivement, de $\gamma_s(t)$, $\hat{\gamma}(s, t)$, $\dot{\gamma}_s(t) = \dfrac{\mathrm{d}\gamma_s}{\mathrm{d}t}(t)$.

Les symboles $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}$ et $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ désignent les dérivées totales, respectivement par rapport à s et à t. Ainsi par exemple :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\gamma_s^i(b_s)\right) = \frac{\partial \hat{\gamma}^i}{\partial s}(s, b_s) + \frac{\partial \hat{\gamma}^i}{\partial t}(s, b_s)\frac{\mathrm{d}b_s}{\mathrm{d}s};$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i}\left(\gamma_s(t), \dot{\gamma}_s(t)\right)\right) = \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^j \partial \dot{x}^i}\left(\gamma_s(t), \dot{\gamma}_s(t)\right)\dot{\gamma}_s^j(t) + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^i}\left(\gamma_s(t), \dot{\gamma}_s(t)\right)\ddot{\gamma}_s^j(t)\right),$$

avec :

$$\ddot{\gamma}_s^j(t) = \frac{\mathrm{d}^2\gamma_s^j(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\partial^2\hat{\gamma}^j}{\partial t^2}(s, t)\,.$$

6. Soit A un sous-ensemble de Γ_{U}. On dit qu'un élément γ de A est une *extrémale* de la fonctionnelle I *sur l'ensemble d'applications A* si, pour toute famille d'éléments γ_s de A dépendant différentiablement d'un paramètre réel s (au sens précisé au point 4 ci-dessus), et vérifiant $\gamma_{s_0} = \gamma$ (s_0 étant un élément particulier de l'intervalle de définition de s), on a :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathrm{I}(\gamma_s)\Big|_{s=s_0} = 0\,.$$

On remarquera que la propriété de γ, d'être une extrémale de I sur A, *dépend du choix de A*.

7. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, définie sur un intervalle fermé borné $[a, b]$. On suppose que pour toute fonction différentiable $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$, vérifiant $\varphi(a) = \varphi(b)$ et, pour tout entier $k \geqslant 1$, $\varphi^{(k)}(a) = \varphi^{(k)}(b)$, l'intégrale :

$$\int_a^b f(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

est nulle. Alors f est identiquement nulle.

On considère un système mécanique dont l'*état cinétique* (ensemble des positions et des vitesses des constituants du système) est repéré par un point $(q, p) = (q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ de $\mathbb{R}^{2n}$. L'ensemble des états cinétiques possibles, appelé *espace des phases* du système, est un ouvert P de $\mathbb{R}^{2n}$. Les coordonnées $q^1, \dots, q^n$, appelées *variables de position,* décrivent la position du système, et les coordonnées $p_1, \dots, p_n$, appelées *variables d'impulsion,* décrivent les vitesses des constituants du système (pour une position donnée, la répartition des masses des constituants du système étant supposée donnée).

Les propriétés dynamiques du système sont déterminées par la donnée d'une fonction différentiable $\mathrm{H} : \mathrm{P} \to \mathbb{R}$, de classe C^∞, appelée *hamiltonien* du système. Les équations du mouvement, appelées équations de Hamilton, ou équations canoniques, s'écrivent :

$$\text{(1)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i}, \\ \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q^i}, \end{aligned} \right. \qquad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

la variable t désignant le temps. Un *mouvement* du système est une courbe intégrale $t \longmapsto \big(q(t), p(t)\big)$ des équations canoniques (1), définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Un mouvement du système est dit périodique de période T (avec T réel, $\mathrm{T} > 0$), s'il est défini pour tout $t \in \mathbb{R}$ et vérifie :

$$q^i(t + \mathrm{T}) = q^i(t) \; ; \quad p_i(t + \mathrm{T}) = p_i(t) \; ; \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

PREMIÈRE PARTIE

Pour toute application différentiable $\gamma : [a, b] \to \mathrm{P}$ d'un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ dans P, on pose :

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{I}(\gamma) = \int_a^b \left[\sum_{i=1}^n p_i(t) \frac{\mathrm{d}q^i(t)}{\mathrm{d}t} - \mathrm{H}\big(\gamma(t)\big) \right] \mathrm{d}t,$$

$$\text{(3)} \qquad \mathrm{J}(\gamma) = \int_a^b \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(p_i(t) \frac{\mathrm{d}q^i(t)}{\mathrm{d}t} - q^i(t) \frac{\mathrm{d}p_i(t)}{\mathrm{d}t} \right) - \mathrm{H}\big(\gamma(t)\big) \right] \mathrm{d}t,$$

où on a écrit $p_i(t)$ pour $p_i\big(\gamma(t)\big)$, et $q^i(t)$ pour $q^i\big(\gamma(t)\big)$, afin d'alléger les notations.

1° Montrer qu'on a :

$$\mathrm{I}(\gamma) - \mathrm{J}(\gamma) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \big(p_i(b)\, q^i(b) - p_i(a)\, q^i(a)\big).$$

2° Soit un réel $T > 0$. Dans la présente question, le sous-ensemble A de Γ_U considéré au point 6 des Préliminaires est l'ensemble des applications différentiables de $[0, T]$ dans P, qui vérifient :

$$\gamma(0) = \gamma(T), \qquad \frac{d^k \gamma(0)}{d t^k} = \frac{d^k \gamma(T)}{d t^k} \quad \text{pour tout entier } k \geqslant 1 .$$

Montrer que A s'identifie à l'ensemble des applications différentiables γ de $\mathbb{R}$ entier dans P, périodiques de période T, c'est-à-dire vérifiant, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\gamma(t + T) = \gamma(t)$.

Montrer qu'une application différentiable $\gamma : \mathbb{R} \to P$, périodique de période T, est un mouvement du système mécanique étudié (c'est-à-dire est une courbe intégrale des équations canoniques (1)), si et seulement si sa restriction à $[0, T]$ est une extrémale de I (ou de J), sur l'ensemble d'applications A, au sens précisé au point 6 des Préliminaires.

3° On va appliquer le résultat ci-dessus au cas où le système mécanique considéré est un oscillateur harmonique à une dimension (point matériel M de masse $m > 0$, mobile sur une droite fixe, attiré par un point fixe O situé sur cette droite, la force attractive étant proportionnelle à la distance $|\overrightarrow{OM}|$). L'espace des phases est donc $\mathbb{R}^2$ (coordonnées q, p), et le hamiltonien H a pour expression :

$$H(q, p) = \frac{1}{2m} p^2 + k q^2 \qquad (k \text{ étant une constante } > 0).$$

a. Soit un réel $T > 0$, et $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une application différentiable, périodique de période T, de la forme :

$$q(t) = Q \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha\right), \qquad p(t) = P \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \beta\right),$$

où P, Q, α et β sont des constantes.

Calculer $I(\gamma)$ (l'intervalle $[a, b]$ étant, dans le cas présent, $[0, T]$).

b. En prenant P, Q, α et β pour paramètres, montrer que si γ est un mouvement du système, on a nécessairement :

— ou bien $P = 0$, $Q = 0$, T quelconque;

— ou bien $PQ \neq 0$, $T = \pi\sqrt{\dfrac{2m}{k}}$, et $p(t) = m \dfrac{d\, q(t)}{d t}$.

c. Vérifier que les conditions nécessaires pour que γ soit un mouvement du système, trouvées en *b* ci-dessus, sont aussi suffisantes.

DEUXIÈME PARTIE

On va appliquer le résultat de la question 2° de la première partie à la recherche de certaines solutions stationnaires du problème plan des trois corps. Le système mécanique considéré est constitué de trois points matériels M_1, M_2, M_3, de masses respectives m_1, m_2, m_3 strictement positives, librement mobiles dans le plan $\mathbb{R}^2$, s'attirant deux à deux suivant la loi de Newton $\left(\text{force exercée par } M_j \text{ sur } M_i \text{ parallèle au vecteur } \overrightarrow{M_iM_j}, \text{ de même sens, proportionnelle à } \dfrac{m_i m_j}{|\overrightarrow{M_iM_j}|^2}\right)$.

On note $\vec{q}_i = \overrightarrow{OM_i}$, et $\vec{p}_i$ le vecteur impulsion du point matériel M_i.

L'espace des phases P est l'ouvert de $\mathbb{R}^{12}$:

$$P = \left\{ (\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3, \vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) \mid \vec{q}_i \in \mathbb{R}^2, \vec{p}_i \in \mathbb{R}^2, \vec{q}_i \neq \vec{q}_j \text{ si } i \neq j, \ 1 \leqslant i, j \leqslant 3 \right\}.$$

Le hamiltonien H du système a pour expression (K étant une constante > 0) :

$$\mathrm{H}\left(\vec{q_i}, \vec{p_i}\right) = \sum_{i=1}^{3} \frac{|\vec{p_i}|^2}{2\, m_i} - \mathrm{K}\left(\frac{m_1 m_2}{|\vec{q_1} - \vec{q_2}|} + \frac{m_2 m_3}{|\vec{q_2} - \vec{q_3}|} + \frac{m_3 m_1}{|\vec{q_3} - \vec{q_1}|}\right).$$

On recherche les mouvements du système pour lesquels les vecteurs $\vec{q_i}$, $\vec{p_i}$, $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ sont de module constant, et tournent, dans le plan $\mathbb{R}^2$, à une vitesse angulaire constante ω (la même pour ces six vecteurs).

Pour effectuer les calculs, il pourra être commode d'identifier $\mathbb{R}^2$ au plan complexe $\mathbb{C}$, en associant à chaque $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ l'élément $x + iy$ de $\mathbb{C}$. Un vecteur de $\mathbb{R}^2$ de module constant, qui tourne à la vitesse angulaire ω constante, est alors représenté par une famille de complexes, dépendant du temps t, de la forme $(x_0 + iy_0)\, e^{i\omega t}$.

1° En identifiant $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ comme indiqué ci-dessus, on fait correspondre aux vecteurs $\vec{q_k}$ et $\vec{p_k}$ de $\mathbb{R}^2$, des éléments de $\mathbb{C}$, notés respectivement z_k et ξ_k, $(k = 1, 2, 3)$.

a. Exprimer le hamiltonien H au moyen des z_k, ξ_k, $(k = 1, 2, 3)$.

b. Exprimer la fonctionnelle $\mathrm{I}(\gamma)$ définie par la formule (2) au moyen des fonctions $t \longmapsto z_k(t)$, $t \longmapsto \xi_k(t)$, $(t \in [a, b]$, $k = 1, 2, 3)$.

2° Soit un réel $\mathrm{T} > 0$, et $\gamma : \mathbb{R} \to \mathrm{P}$ une application différentiable périodique de période T, définie par les formules :

(4) $$z_k(t) = \mathrm{Q}_k\, e^{i\omega t}\ ; \quad \xi_k(t) = \mathrm{P}_k(t)\, e^{i\omega t},$$

avec Q_k et $\mathrm{P}_k \in \mathbb{C}$, constantes $(k = 1, 2, 3)$, et $\omega = \dfrac{2\pi}{\mathrm{T}}$.

Calculer $\mathrm{I}(\gamma)$, l'intervalle $[a, b]$ étant, dans le cas présent, $[0, \mathrm{T}]$.

Dans les questions 3° à 6° ci-dessous, on suppose que l'application γ, définie par les formules (4), est un mouvement du système mécanique étudié. En utilisant le résultat obtenu dans la première partie, question 2°, on va établir diverses relations que doivent nécessairement vérifier Q_k et P_k $(k = 1, 2, 3)$.

3° Montrer qu'on a nécessairement :

(5) $$\mathrm{P}_k = i m_k\, \omega\, \mathrm{Q}_k, \qquad (k = 1, 2, 3);$$

(6) $$m_1\, \mathrm{Q}_1 + m_2\, \mathrm{Q}_2 + m_3\, \mathrm{Q}_3 = 0.$$

[Pour établir chacune de ces relations, on pourra supposer que les P_k et Q_k sont des fonctions différentiables d'un paramètre réel s, d'une forme que l'on précisera ; on pourra alors considérer γ comme dépendant différentiablement du paramètre s, et utiliser le résultat de la question 2° de la première partie.]

Quelles sont les significations mécaniques des relations (5) et (6) ?

4° On pose :

$$\mathrm{Q}_k = r_k\, e^{i\theta_k}, \quad r_k \geqslant 0, \qquad (k = 1, 2, 3);$$

$$|\mathrm{Q}_1 - \mathrm{Q}_2| = r_{12}\ ; \quad |\mathrm{Q}_2 - \mathrm{Q}_3| = r_{23}\ ; \quad |\mathrm{Q}_3 - \mathrm{Q}_1| = r_{31}.$$

a. Montrer qu'on a :

$$r_1\left(\frac{m_2 r_2}{r_{12}^3}\sin(\theta_1 - \theta_2) + \frac{m_3 r_3}{r_{31}^3}\sin(\theta_1 - \theta_3)\right) = 0,$$

ainsi que deux relations analogues, obtenues à partir de celle-ci par permutation circulaire des indices 1, 2 et 3. [On pourra considérer successivement chaque θ_k comme un paramètre dont dépend γ.]

b. Montrer qu'on a :

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{K}(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2)\left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{m_3 m_1}{r_{31}}\right)^{-1}.$$

[On pourra remplacer r_k par λr_k, $(k = 1, 2, 3)$, avec $\lambda > 0$, et considérer λ comme un paramètre dont dépend γ.]

5° On suppose les trois points matériels M_1, M_2, M_3 non alignés. Montrer que le triangle $M_1 M_2 M_3$ est équilatéral, c'est-à-dire qu'on a :

$$r_{12} = r_{23} = r_{31}.$$

On pose $r = r_{12} = r_{23} = r_{31}$. Exprimer la période T au moyen de K, r et $(m_1 + m_2 + m_3)$.

6° On suppose les trois points matériels M_1, M_2, M_3 alignés, et, par exemple, M_2 situé entre M_1 et M_3.

a. Montrer que l'origine O est située sur le segment de droite M_1M_3 (extrémités non comprises).

Dans la suite de cette question, on oriente la droite M_1M_3 de M_1 vers M_3, et on note x_1, x_2, x_3 les abscisses des points M_1, M_2, M_3 (à partir de l'origine O). On remarquera qu'avec les conventions faites, on a $x_1 < 0 < x_3$ et $x_1 < x_2 < x_3$.

b. Montrer qu'on a la double égalité :

$$\frac{4\pi^2 a^3}{KT^2(m_1 + m_2 + m_3)} = \left(\frac{m_2}{\lambda^2} + m_3\right)(m_2\lambda + m_3)^{-1} = \left(m_1 + \frac{m_2}{(1-\lambda)^2}\right)\left(m_1 + m_2(1-\lambda)\right)^{-1},$$

où on a posé :

$$x_3 - x_1 = a, \qquad x_2 - x_1 = \lambda a.$$

c. Les masses m_1, m_2, m_3, strictement positives, étant données, montrer qu'il existe un élément unique λ de l'intervalle ouvert $]0, 1[$ tel que la seconde égalité ci-dessus soit vérifiée.

7° On a établi ci-dessus (question 5° lorsque les trois points matériels ne sont pas alignés, et question 6° lorsque ces trois points sont alignés) des conditions nécessaires pour que γ soit un mouvement du système mécanique étudié. Vérifier que ces conditions sont suffisantes.

TROISIÈME PARTIE

On revient à l'étude d'un système mécanique général, dont l'évolution est régie par les équations de Hamilton (1). On considère une famille de mouvements périodiques γ_s du système, dépendant différentiablement du paramètre réel s ($s \in J$, intervalle ouvert de $\mathbb{R}$), au sens indiqué au point 4 des Préliminaires. La période $T(s) = b_s - a_s$ du mouvement périodique γ_s est une fonction différentiable de s. On rappelle que le hamiltonien H du système garde une valeur constante au cours de chaque mouvement (intégrale première de l'énergie); on notera $h(s)$ la valeur de H au cours du mouvement γ_s. On notera $I(\gamma_s)$ la valeur de la fonctionnelle I, donnée par la formule (2), pour $\gamma = \gamma_s$, $a = a_s$, $b = b_s$.

1° Soient s_1 et s_2 deux éléments de l'intervalle J, et Ω la partie du plan $\mathbb{R}^2$ (coordonnées s, t) définie par :

$$\Omega = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid s_1 \leqslant s \leqslant s_2,\; a_s \leqslant t \leqslant b_s\}.$$

En utilisant la formule de Stokes pour transformer une intégrale calculée sur le contour de Ω, en intégrale double dans Ω, montrer qu'on a :

$$I(\gamma_{s_2}) - I(\gamma_{s_1}) = -\int_{s_1}^{s_2} h(s)\frac{dT(s)}{ds}\,ds.$$

2° Retrouver ce résultat en utilisant la formule indiquée au point 5 des Préliminaires.

3° En déduire que si les mouvements périodiques γ_s ont tous même énergie (c'est-à-dire si $h(s)$ ne dépend pas de s), la valeur de la fonctionnelle :

$$\mathrm{K}(\gamma_s) = \int_{a_s}^{b_s} \left(\sum_{k=1}^{n} p_k \big(\gamma_s(t)\big) \frac{\mathrm{d}\, q^k}{\mathrm{d}\, t} \big(\gamma_s(t)\big) \right) \mathrm{d}\, t$$

$$= \mathrm{I}(\gamma_s) + h(s)\, \mathrm{T}(s)$$

ne dépend pas de s.

4° On suppose que tous les mouvements du système mécanique étudié sont périodiques, et qu'il existe une fonction différentiable T, appelée *fonction période*, définie sur l'espace des phases P et à valeurs strictement positives, telle que pour tout point (q_0, p_0) de P, $\mathrm{T}(q_0, p_0)$ soit une période du mouvement périodique défini par la donnée de Cauchy :

(7) $$(q, p) = (q_0, p_0) \qquad \text{pour } t = 0.$$

On définit sur P une fonction K en posant :

$$\mathrm{K}(q_0, p_0) = \int_0^{\mathrm{T}(q_0, p_0)} \left(\sum_{k=1}^{n} p_k(t) \frac{\mathrm{d}\, q^k(t)}{\mathrm{d}\, t} \right) \mathrm{d}\, t,$$

où $t \longmapsto \big(q(t), p(t)\big)$ est le mouvement périodique du système défini par la donnée de Cauchy (7).

a. Soit $s \longmapsto (q_{s0}, p_{s0})$ une application différentiable d'un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$ dans P. Pour tout $s \in \mathrm{J}$, on note $t \longmapsto \gamma_s(t) = \big(q_s(t), p_s(t)\big)$ le mouvement du système qui vérifie la donnée de Cauchy :

$$(q_s, p_s) = (q_{s0}, p_{s0}) \qquad \text{pour } t = 0.$$

On admettra que l'application de $\mathrm{J} \times \mathbb{R}$ dans P : $(s, t) \longmapsto \gamma_s(t)$, est différentiable.
En utilisant le résultat de la question précédente, montrer que la fonction $s \longmapsto \mathrm{K}(q_{s0}, p_{s0})$ est différentiable et a pour dérivée :

$$\frac{\mathrm{d}\, \mathrm{K}}{\mathrm{d}\, s}(q_{s0}, p_{s0}) = \mathrm{T}(q_{s0}, p_{s0}) \frac{\mathrm{d}\, \mathrm{H}}{\mathrm{d}\, s}(q_{s0}, p_{s0}).$$

b. En déduire que K est différentiable, et que sa différentielle vérifie :

$$\mathrm{d}\, \mathrm{K} = \mathrm{T}\, \mathrm{d}\, \mathrm{H}$$

c. On admettra que la relation ci-dessus implique que tout point de P où d H est non nulle possède un voisinage U sur lequel la fonction K peut s'exprimer sous la forme :

$$\mathrm{K} = \tilde{\mathrm{K}} \circ \mathrm{H},$$

où $\tilde{\mathrm{K}}$ est une fonction différentiable, définie sur un ouvert de $\mathbb{R}$. En d'autres termes, la valeur prise par K en un point de U n'est fonction que de la valeur h prise par H en ce point, et si on note $\tilde{\mathrm{K}}(h)$ cette valeur prise par K, la fonction $h \longmapsto \tilde{\mathrm{K}}(h)$ est différentiable. Montrer qu'on a sur U :

$$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{d}\, \tilde{\mathrm{K}}}{\mathrm{d}\, h} \circ \mathrm{H},$$

donc que la valeur prise par T en un point de U, n'est fonction que de la valeur prise par H en ce point.

5° Le système mécanique étudié dans cette question est l'oscillateur harmonique, considéré dans la première partie, question 3°. Vérifier que tous les mouvements sont périodiques. Déterminer les fonctions K et T, et vérifier les conclusions de la question 4°.

6° Traiter, comme dans la question précédente, le cas où le système mécanique considéré est le système de Képler (point matériel soumis à une force attractive dirigée vers l'origine, inversement proportionnelle au carré de la distance à l'origine). On restreindra l'espace des phases afin que tous les mouvements soient périodiques.

PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

COMMENTAIRES

Bien que les trois parties du problème puissent, pour l'essentiel, être traitées séparément, il est conseillé de les traiter dans l'ordre de l'énoncé.

NOTATIONS

Dans tout le problème, $P(\Theta)$ désigne la probabilité d'un événement Θ. Si (Ω, E, P) est un espace de probabilité, on dira que l'espace de probabilité (Ω', E', P') est un espace de probabilité *agrandi* à partir de (Ω, E, P), si $\Omega \subset \Omega'$, $E \subset E'$, et si la restriction $P'_{|E}$ de la probabilité P' à E coïncide avec P. On notera alors $P' = P$ par abus de langage.

On désignera respectivement par $E(X)$ et $V(X)$ l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X. La loi de probabilité (ou la distribution) de X sera désignée par $L(X)$.

Le logarithme népérien de x est noté $\ln x$. On pose de même $\ln \ln x = \ln (\ln x)$.

PREMIÈRE PARTIE

Soient U et V deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. On définit la *distance en variation* entre les lois $L(U)$ de U et $L(V)$ de V par :

$$d(L(U), L(V)) = \sup_{D \subset \mathbb{N}} |P(U \in D) - P(V \in D)|$$

On note A, B, C la partition de $\mathbb{N}$ définie par :

$$A = \{k : k \in \mathbb{N}, P(U = k) < P(V = k)\}$$
$$B = \{k : k \in \mathbb{N}, P(U = k) = P(V = k)\}$$
$$C = \{k : k \in \mathbb{N}, P(U = k) > P(V = k)\}$$

1° Établir les identités :

$$d(L(U), L(V)) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} |P(U = k) - P(V = k)| = 1 - \sum_{k=0}^{+\infty} \min\{P(U = k), P(V = k)\}$$

2° On suppose que U et V sont définies simultanément sur le même espace de probabilités. Montrer que :

$$d(L(U), L(V)) \leqslant P(U \neq V)$$

3° On pose :

$$p_{kk} = \min\{P(U = k), P(V = k)\}, \qquad k \in \mathbb{N},$$
$$p_{kl} = 0 \quad \text{si} \quad k \neq l, \quad \text{avec} \quad (k, l) \in (A \times \mathbb{N}) \cup (B \times \mathbb{N}) \cup (\mathbb{N} \times B) \cup (\mathbb{N} \times C)$$

a. Soient deux mesures de probabilités P′ sur $\Omega' = \{1, \ldots, I\}$, et P″ sur $\Omega'' = \{1, \ldots, J\}$. On pose :

$$P_i = P'(i), \quad Q_j = P''(j), \quad \text{et} \quad R_{ij} = P_i Q_j,$$
$$1 \leqslant i \leqslant I, \quad 1 \leqslant j \leqslant J.$$

Vérifier que $R(i, j) = R_{ij}$ définit une mesure de probabilité sur l'ensemble produit $\Omega' \times \Omega''$, de marg P′ et P″.

b. Montrer qu'il est possible de définir p_{kl} pour $k \neq l$ avec $(k, l) \in (C \times A)$, de manière que :

— pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} p_{kj} = P(U = k)$,

— pour tout $l \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} p_{il} = P(V = l)$,

— pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $l \in \mathbb{N}$, $p_{kl} \geqslant 0$.

c. En déduire qu'il existe toujours un espace de probabilité sur lequel U et V, de lois L (U) et L (V) données sont définies simultanément, de manière que :

$$d(L(U), L(V)) = P(U \neq V)$$

On dira d'une loi jointe de U et V satisfaisant l'égalité ci-dessus qu'elle définit un *couplage maximal de* U et V

4° On considère dans cette question le cas particulier où :

— la loi L (U) de U est une loi de Bernoulli :

$$P(U = 1) = 1 - P(U = 0) = p \in (0, 1)$$

où en général on désigne par (α, β) l'intervalle ouvert d'extrémités α et β.

— la loi L (V) de V est une loi de Poisson d'espérance $E(V) = p \in (0, 1)$:

$$P(V = r) = \frac{p^r}{r!} e^{-p}, \qquad r = 0, 1, 2, \ldots$$

a. Évaluer $d(L(U), L(V))$ en fonction de p. On exprimera le résultat par une expression ne faisant intervenir ni sommation infinie, ni valeur absolue, et exprimée en fonction de p et e^{-p}.

b. Montrer qu'il est possible de définir simultanément U et V sur le même espace de probabilités, jointement à une variable aléatoire W, de manière que U et W soient indépendants et que V = WU. Déterminer la loi de W et prouver qu'une telle construction établit un couplage maximal de U et V.

5° On considère maintenant une suite $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de variables aléatoires indépendantes de Bernoulli, telles que, pour $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = 0) = p_i \in (0, 1)$$

On pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

Parallèlement, on considère une suite $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ de variables aléatoires indépendantes de Poisson, telles que, pour $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$P(Y_i = r) = \frac{p_i^r}{r!} e^{-p_i}, \qquad r = 0, 1, 2, \ldots$$

On pose $T_n = Y_1 + \ldots + Y_n$.

a. Quelle est la distribution de T_n ?

b. Établir les inégalités (indication : on pourra utiliser la construction du 4°, *b*) :

$$d(\mathrm{L}(\mathrm{S}_n), \mathrm{L}(\mathrm{T}_n)) \leqslant 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - d(\mathrm{L}(\mathrm{X}_i), \mathrm{L}(\mathrm{Y}_i))) \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i^2 .$$

DEUXIÈME PARTIE

Dans toute cette partie, on considère une suite infinie de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots$, telles que :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_i = 1) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X}_i = 0) = \frac{1}{i}, \qquad i = 1, 2, \ldots$$

On notera $\iota = \sqrt{-1}$ le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On pose $\mathrm{S}_0 = 0$, $\mathrm{S}_n = \mathrm{X}_1 + \ldots + \mathrm{X}_n$, $\quad n = 1, 2, \ldots,$

$$\mathrm{N}(m, n) = \mathrm{S}_n - \mathrm{S}_m, \ 0 \leqslant m \leqslant n < \infty$$

On admettra que la limite :

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = \gamma$$

existe et est finie, ainsi que la formule :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

1° Montrer que :

$$\lim_{\mathrm{N} \to \infty} \left\{ \sup_{\mathrm{N} \leqslant m \leqslant n} \left| \mathrm{E}(\mathrm{N}(m, n)) - \ln \frac{n}{m} \right| \right\} = \lim_{\mathrm{N} \to \infty} \left\{ \sup_{\mathrm{N} \leqslant m \leqslant n} \left| \mathrm{V}(\mathrm{N}(m, n)) - \ln \frac{n}{m} \right| \right\} = 0$$

2° On désigne par $[u]$ la partie entière de u ($[u] \leqslant u < [u] + 1$).

On pose :

$$\mathrm{M}_\mathrm{T}(s, t) = \mathrm{N}([\mathrm{T}\, e^s], [\mathrm{T}\, e^t]), \ 0 \leqslant s \leqslant t, \ \ \mathrm{T} > 0$$

a. Évaluer la fonction caractéristique $\mathrm{E}(\exp(\iota\, u\, \mathrm{N}(m, n)))$ de $\mathrm{N}(m, n)$. En déduire :

$$\lim_{\mathrm{T} \to \infty} \mathrm{E}(\exp(\iota\, u\, \mathrm{M}_\mathrm{T}(s, t)))$$

b. Montrer que, pour tout k-uple $0 \leqslant s_1 < s_2 < \ldots < s_k$ fixé, la loi limite jointe de $\mathrm{M}_\mathrm{T}(s_1, s_2)$, $\mathrm{M}_\mathrm{T}(s_2, s_3)$, $\ldots$, $\mathrm{M}_\mathrm{T}(s_{k-1}, s_k)$ lorsque T tend vers l'infini est un produit de lois de Poisson indépendantes, dont on précisera les paramètres.

c. Montrer que (indication : on pourra utiliser les fonctions caractéristiques) :

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{S}_n - \ln n}{\sqrt{\ln n}} < t\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-v^2/2}\, dv$$

d. Évaluer :

$$\lim_{n\to\infty} \{ E(S_n) - \ln n \}, \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \{ V(S_n) - \ln n \}$$

3° *a.* Montrer, en se servant des résultats obtenus dans la première partie, qu'il existe une suite de variables aléatoires $Y_1, Y_2, \ldots$ construites sur le même espace de probabilité que $X_1, X_2, \ldots$, éventuellement agrandi, et telles que :

— pour tout $i = 1, 2, \ldots$, Y_i suit une loi de Poisson d'espérance $1/i$;

— pour tout $i = 1, 2, \ldots$, on a :

$$d(L(X_i), L(Y_i)) = P(X_i \neq Y_i) \leqslant \frac{1}{i^2}$$

b. On pose $T_n = Y_1 + \ldots + Y_n$. Quelle est la loi de T_n ?

Montrer que la limite :

$$\lim_{n\to\infty} \{ S_n - T_n \}$$

existe et est finie presque sûrement.

4° *a.* On considère trois variables aléatoires ξ, η et ζ, telles que :

— pour $r = 0, 1, 2, \ldots$, $P(\zeta = r) = \frac{\alpha^r}{r!} e^{-\alpha}$, où $\alpha > 0$ est un nombre fixé;

— on a $\xi \geqslant 0$, $\eta \geqslant 0$, $\xi + \eta = \zeta$, la loi conditionnelle de ξ et η sachant ζ étant donnée par :

$$P(\xi = m, \eta = r - m \mid \zeta = r) = \binom{r}{m} \theta^m (1-\theta)^{r-m}, \quad m = 0, 1, \ldots, r$$

où $\theta \in (0, 1)$ est un paramètre fixé.

Déterminer la loi jointe de ξ et η.

b. En déduire qu'il est possible de construire sur le même espace de probabilité les suites $X_1, X_2, \ldots$, et $Y_1, Y_2, \ldots$, ainsi qu'une suite de variables aléatoires indépendantes $Z_1, Z_2, \ldots$, de même loi de Poisson d'espérance 1, de telle manière que :

— pour tout $n = 1, 2, \ldots$, si $l(n) = \left[1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right]$, alors :

$$\sum_{i=1}^{l(n)} Z_i \leqslant T_n \leqslant \sum_{i=1}^{l(n)+1} Z_i$$

— pour tout $n = 1, 2, \ldots$, $T_n - \sum_{i=1}^{l(n)} Z_i$ suit une loi de Poisson d'espérance $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - l(n)$, et est une variable aléatoire indépendante de $Y_{n+1}, Y_{n+2}, \ldots$

c. Montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{\ln n} = 1 \quad \text{presque sûrement.}$$

TROISIÈME PARTIE

Dans cette partie, on considère une suite $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ de variables aléatoires indépendantes et uniformément distribuées sur l'intervalle $(0, 1)$.

1° Montrer qu'avec probabilité un, pour tout $n = 2, 3, \dots,$ $\omega_1, \dots, \omega_n$ sont distincts. En déduire que la statistique ordonnée :

$$\omega_{1,n} < \omega_{2,n} < \dots < \omega_{n,n}$$

obtenue en rangeant $\omega_1, \dots, \omega_n$ par ordre croissant, est définie de manière unique presque sûrement.

2° Soit $t \in (0, 1)$ fixé, et soit $D_n(t)$ le nombre de variables parmi $\omega_1, \dots, \omega_n$, inférieures ou égales à t.

a. Pour $i = 0, 1, \dots, n$, déterminer $P(D_n(t) = i)$.

b. En déduire, pour $i = 1, \dots, n$, $P(\omega_{i,n} \leqslant t)$.

c. Montrer que cette probabilité peut s'écrire sous la forme :

$$P(\omega_{i,n} \leqslant t) = \frac{1}{\beta(u, v)} \int_0^t x^{u-1}(1 - x)^{v-1}\, dx \qquad t \in (0, 1)$$

où :

$$\beta(u, v) = \int_0^1 x^{u-1}(1 - x)^{v-1}\, dx$$

et où u et v sont des paramètres dont on précisera les valeurs, en fonction de i et n. On admettra que, pour j, k entiers,

$$\beta(j, k) = (k - 1)!\,(j - 1)!\,/\,(k + j - 1)!.$$

3° *a.* Montrer que, pour tout $n = 1, 2, \dots,$ l'identité :

$$\omega_i = \omega_{r_{i,n}, n} \qquad , \qquad i = 1, \dots, n$$

définit presque sûrement une permutation $r = \{r_{1,n}, \dots, r_{n,n}\}$ de $\{1, \dots, n\}$.

b. Vérifier que, pour $r = \{r_{1,n}, \dots, r_{n,n}\}$ donné, la correspondance entre $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ et $\{\omega_{1,n}, \dots, \omega_{n,n}\}$ est biunivoque et de jacobien unité si $\omega_{1,n} < \dots < \omega_{n,n}$.

En déduire que la densité jointe de $\{\omega_{1,n}, \dots, \omega_{n,n}\}$ est $n!$ sur l'ensemble $\{(x_1, \dots, x_n) : 0 < x_1 < \dots < x_n < 1\}$.

c. En déduire que $r = \{r_{1,n}, \dots, r_{n,n}\}$ est indépendant de $\{\omega_{1,n}, \dots, \omega_{n,n}\}$ et équidistribué sur l'ensemble de toutes les permutations de $\{1, \dots, n\}$.

4° On pose désormais $R(n) = r_{n,n}$, c'est-à-dire $R(1) = 1$ et, pour $n \geqslant 2$:

$$R(n) = \left| \begin{array}{ll} 1 & \text{si } \omega_n < \omega_{1,n-1}, \\ i & \text{si } \omega_{i-1,n-1} < \omega_n < \omega_{i,n-1}, \qquad i = 2, 3, \dots, n-1, \\ n & \text{si } \omega_n > \omega_{n-1,n-1}. \end{array} \right.$$

a. Montrer que la suite $\{R(n), n \geqslant 1\}$ est définie presque sûrement.

b. Déterminer la probabilité conditionnelle $P(R(n) \leqslant i \mid \omega_{i,n-1} = t)$.

En déduire $P(R(n) \leqslant i)$, puis $P(R(n) = i)$, $i = 1, \dots, n$. Montrer que :

$$P(R(n) = n) = \frac{1}{n}, \qquad n = 1, 2, \dots$$

c. Montrer que la suite $\{ R(n), n \geqslant 1 \}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.

5° Pour $n = 2, 3, \ldots$, on pose $X_n = 1$ si $\omega_n \geqslant \max\{\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}\}$ et $X_n = 0$ autrement. On pose $X_1 =$:
Lorsque $X_n = 1$, on dit que ω_n est un *record* (sous-entendu de la suite $\omega_1, \omega_2, \ldots$), et que l'indice n correspor dant est un *temps de record.*

a. Soit $N(n, kn) = \sum_{i=n+1}^{kn} X_i$ le nombre de records observés dans l'intervalle $i \in \{n+1, \ldots, kn\}$. En se servan des résultats de la première et de la deuxième partie, évaluer la loi limite de $N(n, kn)$ lorsque n tend ver l'infini. En particulier, déterminer :

$$\lim_{n \to \infty} P(N(n, kn) = r), \qquad r = 0, 1, 2, \ldots$$

Nota Bene : k est ici un nombre entier fixé.

b. Établir les inégalités, pour $0 < \theta < N$,

$$\frac{\theta^N}{N!} e^{-\theta} \leqslant \sum_{r=N}^{+\infty} \frac{\theta^r}{r!} e^{-\theta} \leqslant \frac{\theta^N}{N!} e^{-\theta} \left\{ \frac{1}{1 - \frac{\theta}{N}} \right\}$$

c. En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe presque sûrement un indice n_ε tel que $n \geqslant n_\varepsilon$ implique (pour $k \geqslant 2$, fixé à l'avance) :

$$N(n, kn) \leqslant \frac{(1+\varepsilon) \ln n}{\ln \ln n} .$$

Indications : On rappelle la formule de Stirling :

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\,(1 + o(1)), \quad n \to \infty$$

On pourra faire usage des résultats du 3° de la deuxième partie.

6° On utilise dans cette question la suite $\{ Z_n, n \geqslant 1 \}$ construite au 4°, *b* de la deuxième partie, ainsi que les notations introduites dans cette question. On supposera par la suite que $k \geqslant 3$ est fixé.

a. On donne les évaluations numériques suivantes :

$$0{,}577 < \gamma < 0{,}578, \quad 1{,}098 < \ln 3 < 1{,}099, \quad 0{,}693 < \ln 2 < 0{,}694$$

Montrer que, pour tout $k \geqslant 3$,

$$1 \leqslant \liminf_{n \to \infty} \{ l(kn) - l(n) \} \leqslant \limsup_{n \to \infty} \{ l(kn) - l(n) \} \leqslant [\ln k] + 1$$

b. On pose, pour $K \geqslant 1$, $\tau_n = \sum_{i=n+1}^{n+K} Z_i$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Montrer que, indépendamment de $K \geqslant 1$ fixé,

$$\limsup_{n \to \infty} \left\{ \frac{\ln \ln n}{\ln n} \right\} \tau_n = 1 \text{ presque sûrement.}$$

c. En déduire que, pour tout $k \geqslant 3$ fixé,

$$\limsup_{n \to \infty} \left\{ \frac{\ln \ln n}{\ln n} \right\} N(n, kn) = 1 \text{ presque sûrement.}$$

d. Comment pourrait-on montrer que le résultat ci-dessus reste valable pour $k = 2$?

MATHÉMATIQUES DE L'INFORMATIQUE

PRÉLIMINAIRES

Les candidats sont priés de respecter les notations de l'énoncé et la numérotation des questions.

Le but du problème est d'étudier les ensembles de mots définis par certaines propriétés de leurs sous-mots. Dans la première partie, on établit quelques résultats élémentaires sur les monoïdes reconnaissant un langage. La deuxième partie décrit un algorithme pour construire un automate reconnaissant l'ensemble des sous-mots d'un mot donné. On caractérise les langages reconnus par un monoïde ordonné dans les parties III et IV et ceux reconnus par un p-groupe dans la partie V. La partie II est indépendante du reste du problème et la partie V est indépendante des parties III et IV.

RAPPELS ET DÉFINITIONS GÉNÉRALES

Relations.

On appelle *relation de préordre* une relation réflexive et transitive. Si $\leqslant$ est une relation de préordre, la relation $\sim$ définie par $x \sim y$ si et seulement si $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$ est une relation d'équivalence, appelée *relation d'équivalence associée à* $\leqslant$.

Monoïdes.

On appelle *monoïde* un ensemble M muni d'une loi de composition interne $(x , y) \dashrightarrow xy$, associative et admettant un élément neutre, noté 1. Soit x un élément de M. On pose $x^0 = 1$ et, pour tout entier $n \geqslant 0$, $x^{n+1} = x^n x$.

Soit M un monoïde. Un *sous-monoïde* de M est une partie N de M contenant 1 et telle que si $x , y \in$ N alors $xy \in$ N.

Soient M et N deux monoïdes. Une application φ de M dans N est un *morphisme de monoïdes* si $\varphi(1) = 1$ et si, pour tout x , y dans M, $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$. Si de plus φ est surjectif, on dit que N est un *quotient* de M. Si φ est bijectif on dit que φ est un *isomorphisme.*

Soient M_1 et M_2 deux monoïdes. Le produit cartésien $M_1 \times M_2$, muni de la loi de composition interne $(m_1 , m_2)(n_1 , n_2) = (m_1 n_1 , m_2 n_2)$ est un monoïde, appelé *produit* de M_1 et M_2.

On appelle *congruence* sur un monoïde M une relation d'équivalence R sur M telle que pour tout x, y, z da M, $x \mathrel{R} y$ entraîne $xz \mathrel{R} yz$ et $zx \mathrel{R} zy$. On appelle *index de la congruence* le cardinal de l'ensemble quotient M/R.

Monoïde libre.

Soit A un ensemble fini appelé *alphabet.* On note A^* l'ensemble des mots sur l'alphabet A. On appelle *lettr* les éléments de A, et on note 1 le mot vide. Tout mot s'écrit de façon unique sous la forme $u = a_1 a_2 \dots a_n$ av $n \geqslant 0$ et où $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des lettres.

Le produit des mots $a_1 a_2 \dots a_n$ et $b_1 b_2 \dots b_m$ est le mot $a_1 a_2 \dots a_n b_1 b_2 \dots b_m$. Muni de cette loi de compositioı A^* est un monoïde. On admettra la propriété « universelle » suivante :

« toute application φ de A dans un monoïde M se prolonge de façon unique en un morphisme de monoïde de A^* dans M. Ce prolongement est défini par les formules $\varphi(1) = 1$ et, pour tout mot non vide $u = a_1 \dots a_n$ par $\varphi(u) = \varphi(a_1) \dots \varphi(a_n)$. »

Mots.

On dit qu'un mot u est *facteur* d'un mot v s'il existe des mots x et y (éventuellement vides) tels que $v = xuy$.

On dit qu'on mot $u = a_1 \dots a_n$ est *sous-mot* d'un mot v s'il existe une suite $v_0, v_1, \dots, v_n$ de mots (éventuellement vides) telle que $v = v_0 a_1 v_1 a_2 \dots a_n v_n$. Ainsi le mot *aba* est un sous-mot de *caccbac* mais n'est pas facteur de ce mot.

La longueur d'un mot u est notée $|u|$.

Langages.

On appelle *langage* tout sous-ensemble de A^*. Une *algèbre de Boole de langages* (sur A^*) est un ensemble $\mathcal{B}$ de langages tel que :

i) $\varnothing \in \mathcal{B}$.

ii) Si $L_1 \in \mathcal{B}$ et $L_2 \in \mathcal{B}$, alors $L_1 \cap L_2 \in \mathcal{B}$.

iii) Si $L \in \mathcal{B}$ alors $A^* \setminus L \in \mathcal{B}$.

Automates.

On appelle automate sur l'alphabet A un quintuplet $\mathcal{A} = (Q, A, \delta, q_0, F)$, où

Q est un ensemble fini, appelé ensemble des états,

δ est une application de $Q \times A$ dans Q,

q_0 est un élément de Q (l'état initial),

F est un sous-ensemble de Q (l'ensemble des états finaux).

L'application δ se prolonge en une application $(q, u) \mapsto q \cdot u$ de $Q \times A^*$ dans Q en posant, pour tout $q \in Q$, $u \in A^*$ et $a \in A$, $q \cdot 1 = q$ et $q \cdot (ua) = \delta(q \cdot u, a)$.

Le langage reconnu par $\mathcal{A}$ est le langage $L = \{ u \in A^* \mid q_0 \cdot u \in F \}$.

Idéaux.

Soit I un idéal d'un anneau et soit n un entier positif. On note I^n l'idéal engendré par les éléments de la forme $x_1 x_2 \dots x_n$, où $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont des éléments de I.

I

1° Soit $\sim$ une congruence sur un monoïde M et soit $\pi : M \rightarrow M/\sim$ l'application canonique de M sur l'ensemble quotient $M/\sim$. Montrer qu'il existe une unique structure de monoïde sur $M/\sim$ telle que π soit un morphisme de monoïdes.

2° Soient $\sim_1$ et $\sim_2$ deux congruences sur un monoïde M telles que, pour tout x, y dans M, $x \sim_1 y$ entraîne $x \sim_2 y$. Démontrer qu'il existe un morphisme de monoïdes surjectif de $M/\sim_1$ sur $M/\sim_2$.

3° On dit qu'un langage L de A^* est reconnu par un monoïde M s'il existe un morphisme de monoïdes η de A^* dans M et une partie P de M telle que $L = \eta^{-1}(P)$.

a. Montrer que si M est quotient d'un monoïde N, N reconnaît également L (on pourra utiliser la propriété universelle de A^* pour construire un morphisme de monoïdes de A^* dans N).

b. Montrer que M reconnaît également le langage $A^* \backslash L$.

c. Montrer que si un monoïde M_1 (respectivement M_2) reconnaît un langage L_1 (respectivement L_2), le monoïde $M_1 \times M_2$ reconnaît $L_1 \cap L_2$.

4° Soit $\mathcal{A} = (Q, A, \delta, q_0, F)$ un automate sur l'alphabet A et soit L le langage de A^* reconnu par $\mathcal{A}$. On note $\mathcal{T}(Q)$ le monoïde des applications de Q dans lui-même muni de la loi de composition $(f, g) \rightarrow fg = g \circ f$. À chaque mot u de A^*, on associe l'application $\overline{u} \in \mathcal{T}(Q)$ définie par $\overline{u}(q) = q.u$.

a. Montrer que l'application $u \dashrightarrow \overline{u}$ définit un morphisme de monoïdes de A^* dans $\mathcal{T}(Q)$.

b. Montrer que $\mathcal{T}(Q)$ reconnaît L.

5° Soit η un morphisme de monoïdes de A^* dans un monoïde fini M et soit P une partie de M. On pose $L = \eta^{-1}(P)$.

a. Montrer que l'automate $\mathcal{A} = (M, A, \delta, 1, P)$ — où δ est définie par $\delta(m, a) = m\eta(a)$ — reconnaît le langage L.

b. Montrer qu'un langage est rationnel (ou « régulier ») si, et seulement si, il est reconnu par un monoïde fini.

II

On donne ci-dessous l'en-tête et deux procédures du programme « sous-mots ».

```
program sous_mots (input, output);

const

    taille_max = 25;    (* taille maximum de l'alphabet *)

    long_max = 100;     (* longueur maximum des mots *)

type
    mot = array [1...long_max] of integer;
var

    k, m : integer;

    t : array [1...taille_max] of integer;

    u : mot;

    procedure entree;
```

```
var
    i : integer;
begin
    write ('Donnez le nombre de lettres de l''alphabet : ');
    readln(k);
    begin
        write( 'Donnez la longueur du mot : ');
        readln(m);
        for i := 1 to m do begin
            write( 'Donnez la lettre numero ' , i , ' : a ');
            readln(u[i])
        end
    end
end;
procedure automate (k , m : integer; u : mot);
var
    i, j : integer;
begin
    writeln( 'L''ensemble des etats est (0,..., ', m + 1, ') ');
    for j := 1 to k do begin
        writeln( 'delta( ', m + 1, ', a ', j, ')= ', m + 1);
        writeln( 'delta( ', m, ', a ',j , ')= ', m + 1);
        t[j] := m + 1
    end;
    for i := m - 1 downto 0 do
        for j := 1 to k do begin
            if j = u[i + 1] then
                t[j] := i + 1;
            writeln( 'delta( ', i, ', a ', j, ')= ', t[j])
    end;
writeln( 'L''etat initial est 0; ');
writeln( 'Tous les etats sauf ', m + 1, 'sont des etats finaux. ')
end;
```

La procédure « entree » permet de fixer la taille k de l'alphabet, puis de donner un mot u sur l'alphabet $\{ a_1 , ..., a_k \}$ en précisant d'abord sa longueur m. Le mot u est représenté en fait par une suite finie d'entiers de l'ensemble $\{ 1, ..., k \}$. Ainsi, pour $k = 3$, le mot $a_1a_3a_2a_1$ est représenté par la suite 1,3,2,1. Dans la suite, on ne fera plus la distinction entre un mot et sa représentation par une suite d'entiers.

1° Donner sans démonstration le résultat de l'exécution de la procédure « automate » lorsque $k = 2$, $m = 4$ et lorsque u est le mot $a_1a_2a_1a_1$.

2° De façon générale, si u est un mot de longueur m sur l'alphabet $\{a_1, ..., a_k\}$, l'exécution de la procédure « automate » permet de définir un automate $\mathcal{A}(k, m, u) = (Q, A, \delta, q_0, F)$ où $Q = \{0,1, ..., m+1\}$, $A = \{a_1, ..., a_k\}$, $q_0 = 0$, $F = \{0,1, ..., m\}$ et où δ est l'application « delta » décrite lors de l'exécution de la procédure.

a. Démontrer que pour tout entier i tel que $0 \leqslant i \leqslant m$, et pour tout $a \in A$, $i + 1 \leqslant \delta(i, a) \leqslant \delta(i + 1, a)$.

b. On pose $u = b_1 ... b_m$ (où $b_1, ..., b_m \in A$). Démontrer que pour tout entier i tel que $0 \leqslant i < m$, $\delta(i, b_{i+1}) = i + 1$.

3° *a.* Démontrer que si i et j sont des entiers tels que $0 \leqslant i < j \leqslant m + 1$, alors $\delta(i, b_j) \leqslant j$.

b. Démontrer que l'automate $\mathcal{A}(k, m, u)$ reconnaît l'ensemble des sous-mots de u.

4° Calculer en fonction de k et de m le nombre d'exécutions de l'instruction « writeln » lors de l'exécution de la procédure « automate ».

III

Soit n un entier positif ou nul. On définit une relation $\leqslant_n$ sur A^* par $u \leqslant_n v$ si et seulement si tout sous-mot de longueur inférieure ou égale à n de u est sous-mot de v.

1° Montrer que $\leqslant_n$ est une relation de préordre. On notera $\sim_n$ la relation d'équivalence associée à $\leqslant_n$.

a. Montrer que $\sim_n$ est une congruence d'index fini sur A^*.

b. On suppose (pour cette question uniquement) que A est un alphabet de 2 lettres. Calculer l'index de $\sim_1$ et montrer que pour $n \geqslant 2$, l'index de $\sim_n$ est supérieur ou égal à 2^{n+1}.

2° Pour tout mot u, on pose $S(u) = \{v \in A^* \mid u \text{ est un sous-mot de } v\}$, et on note $\mathcal{J}_n$ l'algèbre de Boole engendrée par les langages $S(u)$ tels que $|u| \leqslant n$. Montrer qu'un langage L est dans $\mathcal{J}_n$ si et seulement si L est union de classes d'équivalence de $\sim_n$.

3° On dit qu'un monoïde M est ordonné s'il existe une relation d'ordre $\leqslant$ définie sur M et telle que :

pour tout $x \in M$, $x \leqslant 1$, et,

pour tout x, y, z dans M, $x \leqslant y$ entraîne $xz \leqslant yz$ et $zx \leqslant zy$.

a. Montrer que le monoïde $S_n(A) = A^*/\sim_n$ est ordonné.

b. Soit M un monoïde ordonné et soit η un morphisme de monoïdes surjectif de A^* dans M. On suppose que toute suite strictement décroissante d'éléments de M est de longueur inférieure ou égale à $n + 1$. Montrer que si $u \sim_n v$ alors $\eta(u) = \eta(v)$.

c. En déduire que M est quotient de $S_n(A)$ et que tout langage reconnu par M est élément de $\mathcal{J}_n$.

IV

Soit M un monoïde. On définit une relation $\leqslant_J$ sur M en posant $x \leqslant_J y$ si, et seulement si, il existe des éléments s et t de M tels que $x = syt$. Le monoïde M est dit J-trivial si la relation $\leqslant_J$ est une relation d'ordre.

1° *a.* Montrer que dans tout monoïde M, $\leqslant_J$ est une relation de préordre mais pas nécessairement une relation d'ordre (on donnera un contre-exemple explicite).

b. Soit E un ensemble fini. Si R et S sont deux relations sur E, on définit une relation RS en posant, pour tout $x, y \in E$:

x RS y si, et seulement si, il existe $z \in E$ tel que x R z et z S y.

On note $\mathcal{R}(E)$ l'ensemble des relations réflexives sur E. Montrer que $\mathcal{R}(E)$, muni de la loi de composition $(R,S) \to RS$, est un monoïde J-trivial.

c. Montrer qu'un monoïde ordonné est J-trivial.

d. Soit M l'ensemble de matrices à coefficients entiers suivant :

$$\mathrm{M} = \left\{ \begin{pmatrix} 1&0 \\ 0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0 \\ 0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0 \\ 0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1 \\ 0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0 \\ 0&0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Montrer que M muni de la multiplication usuelle des matrices est un monoïde J-trivial non ordonné.

2° Soit M un monoïde *fini*. Démontrer l'équivalence des conditions i), ii) et iii). (On pourra montrer successivement l'équivalence de i) et ii) puis celle de i) et iii).)

i) Il existe un entier n tel que, pour tout x, y dans M, $(xy)^n x = (xy)^n = y(xy)^n$.

ii) Il existe un entier n tel que, pour tout x, y dans M, $(xy)^n = (yx)^n$ et $x^n = x^{n+1}$.

iii) M est J-trivial.

3° Soit M un monoïde fini J-trivial.

a. Montrer que tout sous-monoïde et tout quotient de M sont également J-triviaux.

b. Montrer que le produit de deux monoïdes finis J-triviaux est J-trivial.

4° Soit M un monoïde fini J-trivial.

a. Montrer que M contient un élément minimum pour l'ordre $\leqslant_J$, qui sera noté 0. Vérifier que, pour tout $x \in \mathrm{M}$, $0 \leqslant_J x \leqslant_J 1$ et $0x = 0 = x0$.

b. On note N(M) l'ensemble des éléments minimaux de $\mathrm{M} \setminus \{0\}$ pour l'ordre $\leqslant_J$. Montrer que pour tout $n \in \mathrm{N(M)}$, l'ensemble $\mathrm{M} \setminus \{n\}$, muni de la loi de composition interne $*$ définie par

$$x * y = \begin{cases} xy & \text{si } xy \neq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est un monoïde, que l'on notera M_n. Montrer que l'application π_n de M dans M_n, définie par $\pi_n(x) = x$ si $x \neq n$ et $\pi_n(n) = 0$, est un morphisme de monoïdes.

c. On suppose que $\mathrm{N(M)} = \{n_1, n_2, \ldots, n_r\}$ avec $r \geqslant 2$. Montrer que l'application π de M dans $\mathrm{M}_{n_1} \times \mathrm{M}_{n_2} \times \ldots \times \mathrm{M}_{n_r}$ définie par $\pi(m) = (\pi_{n_1}(m), \pi_{n_2}(m), \ldots, \pi_{n_r}(m))$ est un morphisme de monoïdes injectif.

5° Pour tout entier positif n, on note P(n) la propriété suivante :

« si M est un monoïde J-trivial tel que Card M $\leqslant n$, alors M est quotient d'un monoïde ordonné fini ».
On se propose d'établir P(n) par récurrence sur n. P(1) étant trivialement vérifiée, on suppose que P(n) est vraie pour un certain entier $n > 0$ et on considère un monoïde J-trivial M tel que Card M $= n + 1$.

a. Montrer que si Card N(M) $\geqslant 2$, M est quotient d'un monoïde ordonné fini.

b. On suppose désormais $\mathrm{N(M)} = \{n\}$. Montrer que si $n^2 = n$, $\mathrm{M} \setminus \{0\}$ est un sous-monoïde de M. En déduire que M est quotient d'un monoïde ordonné fini.

6° On suppose maintenant $n^2 \neq n$.

a. Démontrer que $n^2 = 0$.

b. Montrer qu'il existe un alphabet fini A, un monoïde ordonné fini T et des morphismes de monoïdes surjectifs, φ de A* sur M, α de A* sur T et β de T sur M_n, tels que $\pi_n \circ \varphi = \beta \circ \alpha$.

7° Soit $\leqslant_A$ la relation définie sur A* par $u \leqslant_A v$ si et seulement si

(*) $\alpha(u) \leqslant \alpha(v)$, et

(**) pour toute factorisation du type $u = u_0 a u_1$ avec $u_0 \in \mathrm{A}^*$, $u_1 \in \mathrm{A}^*$ et $a \in \mathrm{A} \cup \{1\}$, il existe une factorisation du type $v = v_0 b v_1$ avec $v_0 \in \mathrm{A}^*$, $v_1 \in \mathrm{A}^*$ et $b = a$ ou $b = 1$, telle que :

$$\alpha(u_0) \leqslant \alpha(v_0) \text{ et } \alpha(u_1) \leqslant \alpha(v_1)$$

a. Établir que $\leqslant_A$ est une relation de préordre sur A* et que pour tout mot u de A*, $u \leqslant_A 1$.

b. Montrer que si u, v et w sont des mots tels que $u \leqslant_A v$, alors $uw \leqslant_A vw$ et $wu \leqslant_A wv$.

8° Soit $\sim_A$ la relation d'équivalence associée au préordre $\leqslant_A$.

a. Montrer que $\sim_A$ est une congruence d'index fini.

b. Montrer que pour tout $u, v \in A^*$, $u \sim_A v$ entraîne $\varphi(u) = \varphi(v)$.

c. En déduire que M est quotient d'un monoïde ordonné fini.

9° On note $\mathfrak{J}$ la réunion des ensembles $\mathfrak{J}_n$ définis au III-2°.

a. Vérifier que $\mathfrak{J}$ est une algèbre de Boole.

b. Démontrer que, pour tout langage L, les conditions suivantes sont équivalentes :

i) L est reconnu par un monoïde J-trivial fini,

ii) L est reconnu par un monoïde ordonné fini,

iii) $L \in \mathfrak{J}$.

V

Soit k un corps commutatif et M un monoïde. On note $k[M]$ l'ensemble des sommes formelles de la forme $\alpha = \sum_{m \in M} \alpha_m m$, où $(\alpha_m)_{m \in M}$ est une famille presque nulle d'éléments de k (c'est-à-dire telle que $\alpha_m = 0$ sauf pour un nombre *fini* d'éléments de M). On admettra que $k[M]$, muni des trois opérations suivantes :

$$\sum_{m \in M} \alpha_m m + \sum_{m \in M} \beta_m m = \sum_{m \in M} (\alpha_m + \beta_m) m$$

$$\left(\sum_{m \in M} \alpha_m m\right) \left(\sum_{m \in M}\right) \beta_m\, m = \sum_{m \in M} \sum_{st = m} (\alpha_s \beta_t) m$$

$$\lambda \left(\sum_{m \in M} \alpha_m m\right) = \sum_{m \in M} (\lambda \alpha_m) m \text{ (où } \lambda \text{ désigne un élément de } k)$$

est une k-algèbre unitaire.

Étant donné deux mots u et v, on note $\binom{v}{u}$ le nombre de façons distinctes d'écrire u comme sous-mot de v. Plus formellement, si $u = a_1 \dots a_n$,

$$\binom{v}{u} = \text{Card } \{ (v_0, v_1, \dots, v_n) \in A^* \times \dots \times A^* \mid v = v_0 a_1 v_1 \dots a_n v_n \}.$$

Par exemple, $\binom{abab}{ab} = 3$ et $\binom{aabbaa}{aba} = 8$.

1° Soit a une lettre. Montrer que si n et m sont des entiers tels que $0 \leqslant m \leqslant n$, on a $\binom{a^n}{a^m} = \binom{n}{m}$.

2° Soient u et v deux mots et soient a et b deux lettres. Établir les formules

(*) $\binom{va}{ub} = \binom{v}{ub} + \delta_{a,b} \binom{v}{u}$ où $\delta_{a,b} = 1$ si $a = b$ et $\delta_{a,b} = 0$ si $a \neq b$.

(**) $\binom{v}{1} = 1$.

(***) $\binom{1}{u} = 0$ si $u \neq 1$

et montrer que ces trois formules suffisent à déterminer $\binom{v}{u}$ pour tous les mots u et v.

3° On prend $M = A^*$. Dans ce cas, un élément de $k[A^*]$ est appelé polynôme en variables non commutative à coefficients dans k. Montrer qu'il existe un unique automorphisme d'algèbre μ (respectivement σ) sur $k[A^*]$ te que $\mu(a) = 1 + a$ (respectivement $\sigma(a) = 1 - a$) pour tout $a \in A$. Calculer $\mu(aba)$.

4° On prend $k = \mathbb{Q}$, le corps des rationnels.

a. Vérifier que pour tout mot v

$$\mu(v) = \sum_{u \in A^*} \binom{v}{u} u$$

$$\sigma(v) = \sum_{u \in A^*} (-1)^{|u|} \binom{v}{u} u$$

b. En déduire que pour tous mots u, v, w

$$\binom{uv}{w} = \sum_{w_1 w_2 = w} \binom{u}{w_1}\binom{v}{w_2}$$

5° Soit p un nombre premier et w un mot. On définit une relation $\equiv_w$ sur A^* en posant $u \equiv_w v$ si, et seulement si, pour tout facteur x de w, $\binom{u}{x} \equiv \binom{v}{x} \bmod p$.

a. Montrer que $\equiv_w$ est une congruence d'index fini sur A^*.

b. Montrer que pour tout mot u, $u^{p^{|w|}} \equiv_w 1$.

c. En déduire que le monoïde quotient $A^*/\equiv_w$ est un p-groupe (c'est-à-dire un groupe fini dont l'ordre est une puissance de p).

6° Soit w un mot et soit i un entier tel que $0 \leqslant i < p$. On pose

$$L_{w,i} = \left\{ v \in A^* \mid \binom{v}{w} \equiv i \bmod p \right\}$$

a. Montrer que $L_{w,i}$ est union de classes d'équivalence de la congruence $\equiv_w$.

b. En déduire que $L_{w,i}$ est reconnu par un p-groupe.

c. Soit $\mathcal{G}_p$ l'algèbre de Boole engendrée par les langages de la forme $L_{w,i}$ (où $w \in A^*$ et $0 \leqslant i < p$). Montrer que si $L \in \mathcal{G}_p$, alors L est reconnu par un p-groupe.

7° Soit n un entier positif ou nul. On définit une relation $\equiv_n$ sur A^* en posant $u \equiv_n v$ si et seulement si $u \equiv_w v$ pour tout mot w tel que $|w| \leqslant n$.

a. Montrer que $\equiv_n$ est une congruence et que le monoïde quotient $G_n = A^*/\equiv_n$ est un p-groupe.

b. Décrire G_0 et G_1.

8° Soit l'ensemble des éléments $\alpha = \sum_{u \in A^*} \alpha_u u$ de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\,[A^*]$ tels que $\sum_{u \in A^*} \alpha_u = 0$.

a. Montrer que I est un idéal engendré par les éléments de la forme $(1 - a)$ avec $a \in A$.

b. En déduire que $\sigma(I^{n+1})$ est l'idéal engendré par les éléments de la forme w où $|w| > n$.

c. Soient u et v deux mots. Montrer que $u \equiv_n v$ si et seulement si $u - v \in I^{n+1}$.

9° Soit G un p-groupe non trivial.

a. Démontrer qu'il existe un élément x de G, différent de 1, tel que $x^p = 1$ et tel que, pour tout $g \in G$, $xg = gx$.

b. Soit G′ le sous-groupe de G engendré par x et soit $H = G/G'$. On note γ l'homomorphisme de groupe canonique de G sur H. Montrer que γ se prolonge de façon unique en un homomorphisme d'algèbre de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[G]$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[H]$.

c. On pose $K = \gamma^{-1}(0)$. Montrer que K est égal à l'idéal engendré par $(1 - x)$.

d. Montrer que $(1 - x)^p = 0$ et en déduire que $K^p = 0$.

10° Soit I_G (respectivement I_H) l'idéal de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[G]$ (respectivement de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[H]$) engendré par les éléments de la forme $1 - g$ où $g \in G$ (respectivement $g \in H$).

a. Montrer que $\gamma(I_G) = I_H$.

b. Montrer par récurrence sur r que si G est un p-groupe d'ordre p^r, alors $I_G^{p^r} = 0$.

11° Soit G un p-groupe d'ordre p^r et soit η un morphisme de monoïdes surjectif de A^* dans G. On pose $n = p^r - 1$.

a. Montrer que si $u \equiv_n v$, alors $\eta(u) = \eta(v)$.

b. En déduire que G est quotient de G_n.

12° Soit L un langage de A^* reconnu par un p-groupe.

a. Montrer qu'il existe un entier positif n tel que G_n reconnaisse L.

b. En déduire que $L \in \mathcal{G}_p$ si et seulement si L est reconnu par un p-groupe.

RAPPORT SUR L'EPREUVE D'ANALYSE NUMERIQUE.

I - REMARQUES GENERALES.

L'objet du problème était de mettre en place les questions d'approximation d'une fonction par des fractions rationnelles. Le critère le plus simple est retenu, c'est à dire l'ordre d'approximation en zéro. Quand cet ordre est maximal (p+q+1 pour une fraction de type (p,q)), on trouve les approximants de Padé, quand l'ordre est seulement p+1 et le dénominateur arbitraire, on trouve les approximants de type Padé.

Les fractions rationnelles étant évidemment développables en séries entières, le champ théorique naturel de ces questions est la théorie (élémentaire) des fonctions de variables complexes. Il est clair que les difficultés de beaucoup de candidats viennent d'un raisonnement peu sûr dans ce cadre, et ceci dès la formule de Cauchy.

Il faut insister sur le fait que la valeur d'une justification (dérivation sous le signe somme par exemple) ne tient pas à son volume!

Enfin deux erreurs s'étaient glissées au début de la quatrième partie. La 1ère n'a pas géné les candidats, la seconde en a géné certains, ce dont on a tenu compte dans la notation.

II - ANALYSE DU SUJET.

La première partie amène à la définition des approximants de Padé et de type Padé. On démontre les formules d'interpolation d'Hermite d'une fonction g par un polynôme P puis on passe au problème proprement dit par la fonctionnelle c ; g est remplacé par

$$\frac{1}{1-xt}$$

et on a :

$$c\left(\frac{1}{1-xt}\right) = f(x) \quad \text{et} \quad c(P) = \langle n-1/n \rangle_f$$

La deuxième partie étudie le comportement des pôles de la suite des approximants de Padé $\langle [n/\gamma] \rangle_n$ d'une fonction méromorphe à γ poles dans le disque de rayon ρ. On démontre le théorème de Montessus de Ballore : les pôles des approximants convergent vers les pôles de f.

Les parties III, IV, V ne concernent que les approximants de type Padé. La troisième partie est une sorte de réciproque de la seconde : si f est méromorphe avec γ pôles et si on choisit ces points comme pôles des approximants de type Padé, alors les développements en série de $(n+\gamma-1/\gamma)$ et de $[n+\gamma-1/\gamma]$ sont voisins.

La partie IV traite des approximants de Padé et de type Padé de l'exponentielle pour lesquelles on peut définir un C-polynôme (ou polynôme générateur). La question 24 permettait à travers la méthode de Lanczos, de retrouver le polynôme de Legendre de d°n comme générateur de l'approximant de Padé $[n/n]$ de l'exponentielle. L'intérêt de cette partie réside dans le fait que les approximants sont explicitement connus, y compris leur vitesse de convergence (Q.26).

La cinquième partie s'intéressaient aux fonctions développables en série de Stieltjes : si les dénominateurs sont associés à des polynômes orthogonaux (ici ceux de Tchebicheff), les ATP convergent dans tout le domaine d'analycité de la fonction, et convergent plus vite que la série dans son disque de convergence.

III - COMMENTAIRE SUR LES QUESTIONS.

1ère partie : Beaucoup de candidats n'ont pas réalisé quelques points simples et ont passé un temps considérable à cette partie :

1) P(t) est l'intégrale par rapport à u d'un polynôme de d°n-1 en t c'est donc un polynôme de d°n-1 en t.

$$V_n(t)/t-u = (t-x_i)^{m_i}(\varphi(t)/t-u)$$

et t-u ne s'annule pas en x_i, donc x_i est un zéro d'ordre m_i de $V_n(t)/t-u$.

2°) $c(P_x) = \tilde{W}_n(x)/\tilde{V}_n(x)$.

C est linéaire et agit sur t donc

$$C(P_x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial r} c\left(\frac{V_n(t)-V_n(u)}{t-u}\right)\frac{h(u)}{V_n(u)}\,du,$$

sans intégrale double, sans théorèmes de Fubini, ou Lebesgue. (On pouvait développer le polynôme si on voulait être convaincu !)
Donc

$$C(P_x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial r}\frac{W_n(t)}{V_n(u)(1-xu)}\,du,$$

1/x est un pôle extérieur au contour, donc on applique le théorème des résidus à l'extérieur du contour où les pôles sont 1/x et l'infini.

Le résidu est nul à l'infini ($d°W_n < d°V_n$) et finalement :

$$C(P_x) = -\operatorname{Res}\left(\frac{W_n(u)}{V_n(u)(1-xu)}, 1/x \right) = \frac{W_n(x^{-1})}{x\, V_n(x^{-1})}$$

Ce calcul qui n'a été correct que dans deux ou trois copies est tout à fait symbolique du manque de rigueur et de sûreté des candidats en analyse complexe.

2ème partie.

Cette partie, à finalité tout à fait numérique, expose en fait une "belle" démonstration, Elle a été assez bien faite par un certain nombre de candidats.
Les question III, IV, V n'ont été abordées par les candidats dans la majorité des cas que pour gagner des points ici et là. Elles comportaient effectivement quelques questions faciles, mais par exemple la question 14 très facile est rarement bien faite, et confirme le commentaire sur la 1ère partie.

IV - REPARTITION DES NOTES.

Nombre de copies 277
Moyenne (sur 40) 11.52

Répartition	Notes	
	0.4	57
	5.9	70
	10.14	58
	15.19	46
	20.24	28
	25.29	12
	30.34	3
	35.40	3

RAPPORT SUR L'ÉPREUVE DE MÉCANIQUE GÉNÉRALE

Présentation du sujet

L'épreuve de mécanique portait cette année sur l'étude de certaines propriétés des mouvements périodiques des systèmes hamiltoniens.

Dans la première partie, on établissait une propriété variationnelle des mouvements périodiques, de période fixée T. Ces mouvements sont, dans l'espace A des applications différentiables γ de $[0, T]$ dans l'espace des phases P prenant, ainsi que toutes leurs dérivées, des valeurs égales aux deux extrémités de cet intervalle, les extrémales de la fonctionnelle

$$I(\gamma) = \int_0^T \left(\sum_{i=1}^n p_i(t) \frac{dq^i(t)}{dt} - H \circ \gamma(t) \right) dt .$$

Cette propriété, variante du principe de Hamilton, figure par exemple, sous une forme voisine, dans le livre classique d'Elie Cartan "Leçons sur les invariants intégraux" (Hermann, Paris, 1922); elle a été utilisée notamment par I. Ekeland (*J. Diff. Eq.* **34**, 1979, 523–534). La première question, très facile, demandait de montrer que la fonctionnelle I était liée par une relation très simple à une autre fonctionnelle J; cette relation permettait de prouver que sur l'espace A, les fonctionnelles I et J admettaient les mêmes extrémales. Dans la seconde question, on devait prouver que les extrémales de I (ou de J) sont les mouvements périodiques de période T du système hamiltonien considéré. Dans la troisième, il était demandé d'appliquer cette propriété à la recherche des mouvements périodiques de l'oscillateur harmonique. Cet exemple ne servait qu'à illustrer la propriété dans un cas très simple, trop simple même, puisque tous les mouvements de ce système sont périodiques et de même période. En fait, on demandait d'exprimer que le mouvement considéré réalisait un extremum de la fonctionnelle I non pas dans l'espace fonctionnel A entier, mais dans un sous-espace de dimension finie: cela suffisait à déterminer tous les paramètres dont pouvait dépendre le mouvement périodique recherché. Bien entendu, il fallait ensuite vérifier qu'on avait bien obtenu ainsi une solution des équations de Hamilton, ce qui faisait l'objet de la dernière question de cette partie.

Dans la seconde partie, la même méthode devait être appliquée à la recherche des mouvements stationnaires du problème plan des trois corps. On demandait de prouver que les seules configurations stationnaires possibles du système sont celles (connues depuis Lagrange) où les trois corps sont soit alignés, soit disposés aux sommets d'un triangle équilatéral. On demandait, dans chaque cas, de déterminer complètement la configuration, ainsi que la période du mouvement. Enfin, on devait vérifier (comme dans l'exemple simple de la première partie) que les mouvements ainsi déterminés vérifiaient effectivement les équations de Hamilton.

Dans la troisième partie, on demandait d'établir une propriété remarquable des systèmes hamiltoniens qui possèdent une famille de mouvements périodiques dépendant différentiablement d'un paramètre: si les mouvements de cette famille sont tous de même énergie, la fonctionnelle $K = I + HT$ prend la même valeur, pour tous les mouvements de la famille. On devait ensuite en déduire une seconde propriété remarquable: pour un système hamiltonien dont tous les mouvements sont périodiques, la période est (sous certaines hypothèses générales de connexité et de régularité) fonction seulement de l'énergie. Ces propriétés figurent dans une publication de W. B. Gordon (*J. Math. Mech.* **19**, 1969–70, 111–114), ainsi que dans une publication de Frankel (*Ann. of Math.* **70**, 1959, 1–8); mais elles étaient probablement connues antérieurement. Les questions 1 à 3 amenaient les candidats à établir la première, la question 4 la seconde. Les deux dernières questions (5 et 6) invitaient les candidats à vérifier ces propriétés sur deux exemples: l'oscillateur harmonique, puis le système de Kepler.

Commentaire

Le calcul des variations ne figurant pas explicitement au programme, pas plus que le principe de Hamilton, on a dû, dans une partie préliminaire de l'énoncé, indiquer un certain nombre de résultats (utiles pour la résolution du problème) que les candidats pouvaient utiliser, sans avoir à les démontrer.

Première partie. Tous les candidats ont essayé de résoudre la première partie. Tous ont correctement répondu à la première question (très facile).

La première partie de la seconde question était tout aussi facile: on attendait des candidats qu'ils disent qu'une fonction différentiable périodique, de période T, détermine, par restriction à l'intervalle $[0, T]$, une fonction différentiable définie sur $[0, T]$ prenant, ainsi que toutes ses dérivées, des valeurs égales aux deux extrémités de cet intervalle; et que réciproquement, une fonction différentiable définie sur $[0, T]$ prenant, ainsi que toutes ses dérivées, des valeurs égales aux deux extrémités de cet intervalle, se prolonge par périodicité en une fonction différentiable (en tout point), périodique de période T. Or on relève un bon nombre de réponses fantaisistes, certains candidats cherchant par exemple à prouver la périodicité par un développement en série de Taylor! La seconde partie de cette question (où il suffisait d'appliquer les indications données dans les préliminaires) a été traitée tout à fait correctement par une quinzaine de candidats, et de manière en partie correcte par plus de la moitié des candidats.

La question 3 a), simple exercice de calcul, a été correctement traitée par la majorité des candidats. Mais la question 3 b) a été souvent mal interprétée: alors qu'on souhaitait voir utiliser le résultat de la question 2, une trentaine de candidats ont répondu en résolvant les équations de Hamilton, ce qui bien entendu conduisait au résultat correct, mais rendait sans objet la question 3 c). La notation a été adaptée de manière à ne pas pénaliser ces candidats, dans la mesure où leurs résultats, même obtenus par une méthode autre que celle suggérée dans l'énoncé, étaient corrects.

Deuxième partie. Elle a été abordée par la majorité des candidats.

La question 1 a), évidente, a été presque toujours traitée correctement. Par contre, environ 40 candidats (sur 93) ont fait une erreur stupide dans la question 1 b): pour exprimer le produit scalaire, dans le plan $\mathbf{R}^2$, identifié à $\mathbf{C}$, de deux vecteurs (x_1, y_1) et (x_2, y_2), identifiés aux complexes $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$, ils ont fait le produit de z_1 et de z_2, au lieu de prendre la partie réelle du produit de z_1 et du complexe conjugué de z_2.

Cette erreur avait malheureusement des conséquences funestes sur les questions suivantes 2 et 3.

Par ailleurs, l'énoncé de la question 2 comportait une petite erreur typographique: dans la formule (4), il était écrit $P_k(t)$ au lieu de P_k, ce qui pouvait laisser penser que P_k était une fonction de t, alors qu'il était dit, à la ligne immédiatement au dessous, que P_k était une constante. Pour la plupart, les candidats ont considéré P_k comme une constante, ce qui était effectivement l'interprétation correcte, sans rien signaler. Trois ou quatre ont signalé l'erreur et indiqué qu'ils prenaient P_k constante. Un a déclaré que cela lui avait fait perdre du temps. Cette erreur typographique semble cependant n'avoir dans aucun cas causé de variation importante de la valeur d'une copie.

Comme la question 3 b) de la première partie, la question 3 a été traitée, par certains candidats, par résolution des équations de Hamilton ou par le principe fondamental, ce qui n'était pas la méthode suggérée par l'énoncé. Il en a été parfois de même de la question 4. La notation a été faite de manière telle que les candidats ayant obtenu le résultat correct ne soient pas pénalisés, quelle que soit la méthode employée.

Les questions 4, 5, 6 et 7 de la seconde partie n'ont été abordées que par moins du tiers candidats.

Troisième partie. Elle a été abordée par une vingtaine de candidats. Sept ou huit seulement en ont traité correctement une partie notable.

La première question se résolvait par application de la formule de Stokes dans un cas très élémentaire: transformation d'une intégrale sur un contour fermé (constitué par deux segments de droite parallèles à l'axe des ordonnées, et par deux arcs de courbe qui étaient les graphes de deux fonctions) en intégrale double dans la partie du plan dont ce contour formait la frontière. Alors que l'énoncé indiquait la méthode à suivre, cette question n'a été abordée que par cinq ou six candidats, et traitée de manière vraiment correcte par aucun!

Les questions 2, 3, 4, faciles, ont permis à quatre ou cinq candidats de gagner quelques points.

Un seul candidat a traité correctement la question 5, et abordé la question 6, sans l'achever.

Répartition des notes

Note	Nombre de copies	Note	Nombre de copies	Note	Nombre de copies
0 à 4	12	5 à 9	20	10 à 14	32
15 à 19	13	20 à 24	9	25 à 29	4
30 à 34	0	35 à 39	2	40	1

Corrigé

Première partie.

1. On a:

$$\begin{aligned} I(\gamma) - J(\gamma) &= \frac{1}{2}\int_a^b \sum_{i=1}^n \left(p_i(t)\frac{dq^i(t)}{dt} - q^i(t)\frac{dp_i(t)}{dt}\right) dt \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \int_a^b \frac{d}{dt}\left(p_i(t)q^i(t)\right) dt \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \left(p_i(b)q^i(b) - p_i(a)q^i(a)\right). \end{aligned}$$

2. L'application restriction à l'intervalle $[0,T]$, de l'espace des applications différentiables de $\mathbf{R}$ dans P périodiques et de période T, est injective, et a son image contenue dans A. En utilisant la définition de A, on vérifie que l'image de cette application est A entier, puisqu'un élément de A se prolonge, par périodicité, en une application de $\mathbf{R}$ dans P, périodique de période T, différentiable en tout point de $\mathbf{R}$.

Soit $\gamma : \mathbf{R} \to P$ un élément de A. On identifiera γ à une application différentiable, périodique de période T, de $\mathbf{R}$ dans P. En raison de la périodicité, on a

$$I(\gamma) = J(\gamma).$$

Les fonctionnelles I et J, étant égales sur A, ont sur cet espace les mêmes extrémales.

Soit γ_s ($s \in J$) une famille à un paramètre d'éléments de A, vérifiant $\gamma_{s_0} = \gamma$. On applique la formule indiquée au point 5 des préliminaires, en posant

$$\mathcal{L}(q,p,\dot{q},\dot{p}) = \sum_{i=1}^n p_i\dot{q}^i - H(q,p),$$

et en prenant, pour tout $s \in J$, $a_s = 0$, $b_s = T$. En raison de la périodicité, les termes tout intégrés au second membre de la formule donnant $\frac{d}{ds}I(\gamma_s)$ se retranchent deux à deux, et il reste

$$\frac{d}{ds}I(\gamma_s) = \int_0^T \sum_{i=1}^n \left(\left(-\frac{\partial H}{\partial q^i} - \dot{p}_i\right) \frac{\partial q^i(s,t)}{\partial s} + \left(\dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right) \frac{\partial p_i(s,t)}{\partial s} \right) dt .$$

Cette formule, compte tenu de la définition et du résultat indiqués aux points 6 et 7 des préliminaires, montre que γ est une extrémale de I sur A si et seulement si elle vérifie les équations de Hamilton, c'est-à-dire si et seulement si c'est un mouvement du système.

3 a). Un calcul simple donne

$$I(\gamma) = \pi PQ \sin(\beta - \alpha) - \frac{T}{2}\left(\frac{P^2}{2m} + kQ^2\right) .$$

3 b). On prend P, Q et $\beta - \alpha$ comme paramètres, et on écrit que les dérivées partielles de $I(\gamma)$ par rapport à ces paramètres sont nulles.

3 c). On vérifie que les expressions de $p(t)$ et $q(t)$ trouvées dans la question précédente sont bien solutions des équations de Hamilton.

Deuxième partie.

1 a). On trouve:

$$H(z_k, \xi_k) = \sum_{k=1}^3 \frac{|\xi_k|^2}{2m_k} - K\left(\frac{m_1 m_2}{|z_1 - z_2|} + \frac{m_2 m_3}{|z_2 - z_3|} + \frac{m_3 m_1}{|z_3 - z_1|}\right) .$$

1 b). On trouve:

$$I(\gamma) = \int_a^b \left(\sum_{k=1}^3 \Re\left(\xi_k(t) \overline{\frac{dz_k(t)}{dt}}\right) - H(z_k(t), \xi_k(t)) \right) dt .$$

2. Le calcul se simplifie si l'on remarque que H ne dépend pas de t. On trouve:

$$I(\gamma) = \pi i \sum_{k=1}^3 (Q_k \overline{P_k} - P_k \overline{Q_k}) - hT .$$

3. On pose:

$$Q_k = r_k \exp(i\theta_k)\,; \quad P_k = \rho_k \exp(i\alpha_k)\,,$$

avec $r_k \geq 0$, $\rho_k \geq 0$. On pose aussi:

$$\rho_k \cos(\alpha_k - \theta_k) = x_k\,, \quad \rho_k \sin(\alpha_k - \theta_k) = y_k\,.$$

On considère $I(\gamma)$ comme dépendant des paramètres x_k et y_k, et on écrit que ses dérivées partielles par rapport à ces paramètres sont nulles. On trouve ainsi l'expression (5) de l'énoncé, dont l'interprétation mécanique est la suivante: l'impulsion du point matériel M_k est le produit de sa vitesse par sa masse.

Compte tenu des relations déjà trouvées, l'expression de I devient:

$$I(\gamma) = \pi\omega \sum_{k=1}^{3} m_k r_k^2 + KT\left(\frac{m_1 m_2}{|Q_1 - Q_2|} + \frac{m_2 m_3}{|Q_2 - Q_3|} + \frac{m_3 m_1}{|Q_3 - Q_1|}\right).$$

On remplace Q_k par $Q_k + su$, s étant un paramètre réel, et u un élément fixe quelconque de $\mathbf{C}$. On obtient ainsi une famille γ_s à un paramètre s d'applications, et on écrit que la dérivée de $I(\gamma_s)$ par rapport à s est nulle pour $s = 0$. On trouve ainsi:

$$\sum_{k=1}^{3} m_k \left(Q_k \overline{u} + \overline{Q_k} u\right) = 0\,.$$

En faisant successivement $u = 1$ puis $u = i$, on obtient l'expression (6) de l'énoncé. Sa signification mécanique est la suivante: le point O est le centre de masse du système.

4 a). On écrit que la dérivée partielle de $I(\gamma)$ par rapport à θ_1 est nulle, et on obtient la formule indiquée dans l'énoncé. On obtient deux autres formules analogues en permutant circulairement les rôles de θ_1, θ_2, θ_3.

4 b). On suit les indications de l'énoncé, et on écrit que la dérivée de $I(\gamma)$ par rapport à λ est nulle pour $\lambda = 1$. On trouve la formule indiquée.

5. Si les points M_1, M_2 et M_3 ne sont pas alignés, la relation (6) de l'énoncé montre que Q_1, Q_2 et Q_3 sont non nuls. La relation obtenue en 4 a) peut s'écrire:

$$\frac{m_2 r_2}{r_{12}^3} \sin(\theta_1 - \theta_2) + \frac{m_3 r_3}{r_{31}^3} \sin(\theta_1 - \theta_3) = 0\,.$$

En comparant avec l'égalité déduite de (6) par projection sur la perpendiculaire à OM_1, on en déduit $r_{12} = r_{31}$. On montre de même $r_{12} = r_{23}$. Les trois points matériels forment donc un triangle équilatéral.

L'expression de T^2 obtenue à la question 4 b) peut être transformée, en utilisant la relation (6) ainsi que le fait que le triangle est équilatéral. On trouve:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{K} \frac{r^3}{m_1 + m_2 + m_3}\,.$$

6 a). La propriété résulte de l'égalité (6).

6 b). On écrit que les dérivées partielles de $I(\gamma)$ par rapport aux paramètres x_1, x_2 et x_3 sont nulles. En remplaçant ces trois paramètres par leurs expressions au moyen de a et de λ, on obtient, après quelques calculs simples, la double égalité indiquée dans l'énoncé.

6 c). Les fonctions, définies sur l'intervalle ouvert $]0,1[$,

$$\lambda \mapsto \left(\frac{m_2}{\lambda^2} + m_3\right)(m_2\lambda + m_3)^{-1}$$

et

$$\lambda \mapsto \left(m_1 + \frac{m_2}{(1-\lambda)^2}\right)(m_1 + m_2(1-\lambda))^{-1}$$

sont, l'une strictement décroissante de $+\infty$ à 1, l'autre strictement croissante de 1 à $+\infty$. Leur différence s'annule donc pour une valeur unique de $\lambda \in]0,1[$. Cette valeur de λ satisfait la seconde égalité obtenue à la question 6 b. La première égalité permet alors de déterminer la période T du mouvement, connaissant K, a, m_1, m_2, m_3.

7. On vérifie, par calcul direct, que γ est solution des équations de Hamilton, successivement pour la configuration équilatérale et pour la configuration alignée.

Troisième partie.

1. On pose, pour tout $(s,t) \in \Omega$:

$$p_k(s,t) = p_k(\gamma_s(t))\,; \quad q^k(s,t) = q^k(\gamma_s(t))\,.$$

$$F(s,t) = \sum_{k=1}^{n} p_k(s,t)\frac{\partial q^k(s,t)}{\partial t} - H(\gamma_s(t))\,.$$

On remarque que $I(\gamma_{s_1})$ et $I(\gamma_{s_2})$ sont les intégrales de F sur les deux segments de droite, faisant partie du contour frontière de Ω, $s = s_1$, $a(s_1) \le t \le b(s_1)$, et $s = s_2$, $a(s_2) \le t \le b(s_2)$. On calcule la dérivée partielle de F par rapport à s; compte tenu des équations de Hamilton, on obtient:

$$\frac{\partial F(s,t)}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{k=1}^{n} p_k(s,t)\frac{\partial q^k(s,t)}{\partial s}\right)\,.$$

On pose donc

$$G(s,t) = \sum_{k=1}^{n} p_k(s,t)\frac{\partial q^k(s,t)}{\partial s}\,.$$

D'après la formule de Stokes, on a:

$$\oint_{\partial\Omega}(F(s,t)dt + G(s,t)ds) = \iint_{\Omega}\left(\frac{\partial F(s,t)}{\partial s} - \frac{\partial G(s,t)}{\partial t}\right) ds\,dt\,.$$

En explicitant, on trouve la formule indiquée dans l'énoncé.

2. L'application de la formule indiquée au point 5 des Préliminaires conduit à:

$$\frac{d}{ds}I(\gamma_s) = -h(s)\frac{dT(s)}{ds},$$

d'où la formule de la question précédente, en intégrant sur l'intervalle $[s_1, s_2]$.

3. Le résultat indiqué dans l'énoncé découle directement de la question 1 et de la définition de K.

4 a). Question sans difficulté. On indiquait aux candidats qu'ils pouvaient admettre la différentiabilité de l'application $(s,t) \mapsto \gamma_s(t)$. En fait, celle-ci résulte du théorème de différentiabilité des solutions d'une équation différentielle par rapport aux données de Cauchy.

4 b). Question sans difficulté.

4 c). Même chose.

5. Tous les mouvements de l'oscillateur harmonique sont périodiques, de même période

$$T = \pi\sqrt{\frac{2m}{k}}.$$

Le calcul de K conduit à

$$K(q,p) = TH(q,p),$$

résultat en accord avec celui de la question précédente.

6. On sait que les trajectoires du système de Kepler sont, dans l'espace de configuration, des ellipses, des hyperboles ou des paraboles, selon les données de Cauchy, ayant l'origine pour foyer. L'ensemble des données de Cauchy pour lesquelles les trajectoires sont des ellipses est l'ouvert de l'espace des phases

$$\{(\vec{q},\vec{p}) \in \mathbf{E}^3 \times \mathbf{E}^3 \mid H(\vec{q},\vec{p}) < O, \quad \vec{q}\wedge\vec{p} \neq 0\},$$

où $\mathbf{E}^3$ désigne l'espace euclidien orienté de dimension 3. La condidion $\vec{q}\wedge\vec{p} \neq 0$, qui exprime que le moment cinétique par rapport à l'origine est non nul, a été imposée pour éviter les collisions avec le centre attractif. Le hamiltonien du système a pour expression:

$$H(\vec{q},\vec{p}) = \frac{\|\vec{p}\|^2}{2m} - \frac{km}{\|\vec{q}\|}.$$

Le calcul de K peut être fait en considérant une orbite circulaire, puisqu'on sait d'avance que la valeur de K ne dépend que de l'énergie. On trouve:

$$K = 2\pi mk\sqrt{\frac{m}{-2h}}.$$

En dérivant K par rapport à l'énergie h, on obtient:

$$\frac{dK}{dh} = \frac{\pi km^{3/2}}{\sqrt{2}}(-h)^{-3/2},$$

qui doit être égale à la période T. C'est bien le cas, puisqu'on a la relation période-énergie (pour une énergie $h < 0$):

$$T^2 = -\frac{\pi^2k^2m^3}{2h^3}.$$

RAPPORT SUR L'EPREUVE DE PROBABILITES ET STATISTIQUES

Le problème développait des techniques d'approximation poissonnienne dans la lignée des travaux de Le Cam (1960) et Serfling (1978). Un exemple d'application était joint, concernant l'étude de certaine propriétés des records (Rényi (1962)).

Aucune difficulté sérieuse n'était présente dans l'énoncé, et il aurait été à la rigueur possible à un étudiant n'ayant que des bases sommaires en probabilités d'arriver à obtenir une note honorable au prix d'un effort minimal.

Dans l'ensemble, les résultats ont été malgré tout assez décevants. Il semble surtout que les candidats manquent de "savoir faire" sur des questions, somme toute, d'abord relativement élémentaire .

La leçon à retenir devrait être la suivante. Au niveau de l'agrégation, il n'est pas indispensable de rédiger un problème excessivement sophistiqué pour arriver à classer convenablement les candidats de l'option probabilités et statistique. Dans l'attente hypothétique d'un relèvement massif du niveau général des étudiants, il serait sans doute préférable d'adopter un profil assez bas pour les épreuves à venir.

Il est clair que les probabilités et la statistique sont des disciplines complexes nécessitant dès le départ un excellent niveau en analyse. De ce fait, on ne peut s'attendre à des miracles, et il serait sans doute utile de vérifier si les candidats savent calculer $P(A|B)$ en fonction de $P(A \cap B)$ et $P(B)$, avant de supposer bien connu le fait que l'espérance conditionnelle est un projecteur de L_p (par exemple).

Les commentaires de détail joints au corrigé résumé du problème donneront une idée des résultats de l'épreuve.

Corrigé résumé du problème

Première Partie

1°) $P(U \in D)-P(V \in D) = a+b$, où $a = P(U \in D \cap A)-P(V \in D \cap A) \leq 0$, et

$$b = P(U \in D \cap C)-P(V \in D \cap C) \geq 0.$$

Par conséquent, $-a$ est minimum pour $D \subset A$, de même que b pour $D \subset C$. De plus,

$$P(U \in C)-P(V \in C) = P(V \in A)-P(U \in A) \geq 0.$$

Donc nécessairement

$$d(L(U),L(V)) = P(U \in C)-P(V \in C) = P(V \in A)-P(U \in A) = \frac{1}{2} \sum_k |P(U=k)-P(V=k)|.$$

De l'identité $|x-y|=x+y-2\min(x,y)$ et de $\sum_k P(U=k) = \sum_k P(V=k) = 1$, on déduit

$$d(L(U),L(V)) = 1 - \sum_k \min(P(U=k),P(V=k)).$$

Commentaire

Déjà dans cette question, on observe un grand nombre de réponses incomplètes, consistant à n'établir que des inégalités en lieu et place des égalités demandées.

2°) Pour tout k, $P(U=k)-P(V=k)=P(\{U\neq V\} \cap \{U=k\})-P(\{U\neq V\} \cap \{V=k\})$. Par suite

$$\sum_k |P(U=k)-P(V=k)| \leq \sum_k (P(\{U\neq V\} \cap \{U=k\})+P(\{U\neq V\} \cap \{V=k\}) = 2P(U\neq V),$$

d'où $d(L(U),L(V)) \leq P(U\neq V)$ par le 1°.

Commentaire

Une quantité considérable de réponses fausses, parmi lesquelles on remarque entr autres, des affirmations telles que $P(\{U\neq V\})=P(U \in A)-P(V \in A)$ (par exemple), qui r vent de la plus haute fantaisie.

3°)a) Il suffit de vérifier que $R_{ij}\geq 0$ et que $\sum_j R_{ij} = P_i$, $\sum_i R_{ij} = Q_j$, et $\sum_{i,j} R_{i.}$

b) En se servant de la question précédente, on peut définir $p_{k\ell}$, $k \in C$, $\ell \in A$ par

$$p_{k\ell} = \frac{(P(U=k)-P(V=k))(P(V=\ell)-P(U=\ell))}{d(L(U),L(V))}$$, si $d(L(U),L(V))\neq 0$, et $p_{k\ell} = 0$ autremen

c) Pour la construction précédente, $P(U=V=k)=\min(P(U=k),P(V=k))$ pour tout k, et donc $P(U\neq V)= 1 - \sum_k P(U=V=k) = 1 - \sum_k \min(P(U=k),P(V=k)) = d(L(U),L(V))$ par le 1°.

Commentaire

A partir du moment où l'on sait qu'une probabilité sur un ensemble dénombrable se ramène à la donnée d'une série de termes non négatifs de somme totale un, on devra être en mesure de résoudre cette question. Le résultat a été très mauvais dans l'ense ble.

Par ailleurs, certains candidats ont tenu à vérifier au 3°a que les R_{ij} vérifiaie tous les axiomes des probabilités. On ne leur en demandait pas tant.

4°)a) $d(L(U),L(V)) = \frac{1}{2} \sum_{k=0} |P(U=k)-P(V=k)| = \frac{1}{2}\{|1-p-e^{-p}|+|p-pe^{-p}|+(1-e^{-p}-pe^{-p})\}$.

Il suffit alors de remarquer que $e^{-p}-1+p \geq 0$, tandis que $e^{-p} \leq 1$ pour en déduire

$$d(L(U),L(V)) = p(1-e^{-p}) \leq p^2.$$

b) Posons V=UW où U et W sont indépendants. On en déduit par des calculs évider que

$$P(W=0) = \frac{e^{-p}-1+p}{p} \geq 0, \text{ tandis que } P(W=k) = \frac{p^{k-1}e^{-p}}{k!} \text{ pour } k\geq 1.$$

On vérifie que $\sum_k P(W=k) = 1$, ce qui rend possible la construction par produits.

Enfin $P(U\neq V) = P(U=1)P(W\neq 1) = p(1-e^{-p}) = d(L(U),L(V))$.

Commentaire

Beaucoup de candidats n'aboutissent pas, ne sachant vérifier que $1-p-e^{-p} \geq 0$, ou se trompant dans l'évaluation du signe de cette expression. Pour le reste, la notion de produit de mesures semble mal comprise ...

5°)a) T_n suit une loi de Poisson d'espérance $\sum_{i=1}^{n} p_i$ (cours, fonctions caractéristiques, ou vérification directe).

b) On répète la construction du 4° pour tout n, de manière à avoir une suite de couples (X_i,Y_i), $i=1,2,\ldots$, indépendants et tels que $d(L(X_i),L(Y_i))=P(X_i \neq Y_i)$. On a alors

$$d(L(S_n),L(T_n)) \leq P(S_n \neq T_n) = 1-P(S_n=T_n) \leq 1-P(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i=Y_i\}) = 1-\prod_{i=1}^{n}(1-P(X_i \neq Y_i)) =$$

$$= 1-\prod_{i=1}^{n}(1-d(L(X_i),L(Y_i))) \leq \sum_{i=1}^{n} d(L(X_i),L(Y_i)) \leq \sum_{i=1}^{n} p_i(1-e^{-p_i}) \leq \sum_{i=1}^{n} p_i^2.$$

Commentaire

Les candidats connaissent mal les propriétés de la loi de Poisson (au programme) et tentent parfois vainement de vérifier le a au prix de pages de calculs faux. Pour le reste, des inégalités usuelles telles

$\prod_{i=1}^{n}(1-u_i) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} u_i$ semblent au delà de la portée du candidat moyen,

malgré les indications transparentes de l'énoncé.

Deuxième Partie

1°) $E(N(m,n)) = \sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{i} = \log(\frac{n}{m}) + o(1)$, uniformément en $n \leq m \leq N$ lorsque $N \to \infty$.

$V(N(m,n)) = \sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{i^2}$, et $\sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{i^2} \leq \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \to 0$ pour $n \geq m \geq N \to \infty$.

On se ramène donc au cas précédent.

Commentaire

Question particulièrement aisée, destinée à sauver de la note zéro les candidats désarçonnés par le reste du problème. Malgré tout, nombre de candidats n'ont pas vu cette question, et une énorme proportion s'avère incapable de calculer la variance de $N(m,n)$, écrivant que la variance de X_i est $1/i^2$, au lieu de $(1-1/i)/i$.

2°)a) $E(\exp(iuN(m,n))) = \sum_{j=m+1}^{n} \{1+\frac{1}{j}(e^{iu}-1)\} = \exp(\sum_{j=m+1}^{n} \log(1+\frac{1}{j}(e^{iu}-1)))$.

Lorsque $T \to \infty$, si $m=[Te^s]$ et $n=[Te^t]$, $n/m \to e^{t-s}$ et $\sum_{j=m+1}^{n} \frac{1}{j}(e^{iu}-1) \to (t-s)(e^{iu}-1)$,

tandis que $\sum_{j=m+1}^{n} (\frac{1}{j}(e^{iu}-1))^2 \to 0$. La limite de la fonction caractéristique de $M_T(s,t)$ est donc la fonction caractéristique d'une loi de Poisson d'espérance t-s.

b) Les v.a. considérées étant indépendantes, on obtient comme loi limite un produit de lois de Poisson d'espérances s_1, s_2-s_1, ...

Commentaire

Bien qu'un peu plus technique, cette question restait simple dans la mesure où elle ne faisait appel qu'à des propriétés simples du logarithme. A la correction, on est surpris de l'aversion qu'éprouvent les candidats à la mani lation des logarithmes complexes. Certains d'entre eux vont jusqu'à décrire leur raisonnement comme un calcul formel, qui "serait vrai si on avait le droit d'écrire" le logarithme d'un nombre complexe. Les lacunes ne viennent pas ici des probabilités

c) On a

$$E(\exp\{iu \frac{S_n-\log n}{\sqrt{\log n}}\}) = \exp\{\sum_{j=1}^{n} \log\{1+\frac{1}{j}(\exp(\frac{iu}{\sqrt{\log n}})-1\}- iu\sqrt{\log n}\} =$$

$$= \exp\{\sum_{j=1}^{n} \{\frac{1}{j}(\frac{iu}{\sqrt{\log n}} - \frac{u^2}{2\log n}(1+o(1))) + \frac{O(1)}{\log n} - iu\sqrt{\log n}\} =$$

$$= \exp\{(\log n + \gamma+o(1))(\frac{iu}{\sqrt{\log n}} - \frac{u^2}{2\log n}(1+o(1)) + o(1) - iu\sqrt{\log n}\} =$$

$$= \exp\{-\frac{1}{2}\frac{u^2}{\log n} + o(1)\}$$ pour $n\to\infty$, d'où le résultat.

d) $\lim\limits_{n\to\infty} (E(S_n)-\log n) = \gamma$, $\lim\limits_{n\to\infty} (V(S_n)-\log n) = \gamma- \frac{\pi^2}{6}$.

Commentaire

Tandis que le c n'est traité que par une toute petite élite, le d est fait dans l'ensemble correctement, malgré des erreurs dues à des candidats qui tentent de ramen le d au c.

3°)a) Par les I,4° et 5°, il est possible de construire une suite $\{W_n, n\geq 1\}$ de v.a indépendantes des X_i et mutuellement indépendantes (extension de l'espace par produit de manière à obtenir le résultat cherché en posant $Y_i=W_iX_i$.

b) T_n suit une loi de Poisson d'espérance $\sum\limits_{1\leq i\leq n}(1/i)$, lorsque les Y_i sont choi indépendants.

Comme $P(X_i\neq Y_i) \leq 1/i^2$, et donc que $\sum\limits_{i=1}^{\infty} P(X_i\neq Y_i) < \infty$, on conclut par Borel-Cante

Commentaire

Très peu de candidats semblent connaître le lemme de Borel-Cantelli (ou être en mesure de l'utiliser).

4°)a) $P(\xi=m,\eta=n|\zeta=m+n)P(\zeta=m+n) = \frac{(m+n)!}{m!n!}\theta^m(1-\theta)^n \frac{\alpha^{m+n}}{(m+n)!}e^{-\alpha} =$

$$\{\frac{(\alpha\theta)^m}{m!}e^{-\alpha\theta}\}\{\frac{(\alpha(1-\theta))^n}{n!}e^{-\alpha(1-\theta)}\} .$$

Dans cette dernière expression, on reconnaît un produit de probabilités. Ainsi ξ et η suivent des lois de Poisson indépendantes d'espérances $\alpha\theta$ et $\alpha(1-\theta)$.

b) On procède par récurrence sur n en utilisant le a.

Commentaire

Cette question a été souvent abordée. Bien peu ont réalisé l'indépendance de ξ et η.

c) On applique la loi des grands nombres à $\sum_{i=1}^{L(n)} Z_i \sim L(n)$ p.s., d'où le résultat par les encadrements du b.

Troisième Partie

1°) L'ensemble des $\{\omega_1,\dots,\omega_n\}$ non touts distincts est de mesure de Lebesgue nulle.

Commentaire

Question de cours facile, bonnes réponses en général.

2°)a) $D_n(t)$ suit une loi binômiale $B(t,n)$.

b) $P(\omega_{i,n}\le t) = P(D_n(t)\ge i) = \sum_{j=i}^{n}\binom{n}{j}t^j(1-t)^{n-j}$, $0<t<1$.

c) Par dérivation (par exemple)

$$P(\omega_{i,n}\le t) = \frac{1}{\beta(i,n-i+1)}\int_0^t t^{i-1}(1-t)^{n-i}dt.$$

3°)a) Conséquence directe du 1°.

b) La matrice étant de permutation, son jacobien est un. La densité est obtenue comme $\sum f(x_{r_1},\dots,x_{r_n})$, où $(r_1,\dots,r_n)$ varie dans toutes les permutations de $(1,\dots,n)$. On obtient donc $n!$.

c) Soit $r=(r_1,\dots,r_n)$ une permutation donnée de $(1,\dots,n)$ et doit $R=(r_{1,n},\dots,r_{n,n})$. Pour tout borélien A de l'ensemble des $0<x_1<\dots<x_n<1$, on a

$$P(\{(\omega_{1,n},\dots,\omega_{n,n})\in A\}\cap\{R=r\}) = P((\omega_{s_1},\dots,\omega_{s_n})\in A).$$

En prenant pour A tout l'espace, on obtient $P(R=r)=1/n!$, notant qu'ici $(s_1,\dots,s_n)$ est une permutation de $(1,\dots,n)$ définie par r. Enfin, la loi conditionnelle de $(\omega_{1,n},\dots,\omega_{n,n})$ sachant $R=r$ ne dépend pas de r, d'où l'indépendance.

Commentaires

Beaucoup de bonnes réponses au 2°, résultats très médiocres au 3°.

4°)a) Evident (cf. 3°)

b) $P(R(n)\le i|\omega_{i,n-1}=t) = P(\omega_n<t|\omega_{i,n-1}=t) = t$. Ainsi $P(R(n)\le i) = E(\omega_{i,n-1})$ [illegible]

en utilisant le 2°c. D'où $P(R(n)=i) = 1/n$, indépendamment de $1\le i\le n$.

Commentaires

Question mal traitée.

c) $r_{1,n},\dots,r_{n,n}$ déterminent $R(1),\dots,R(n)$, tandis que $R(n+1)$ ne dépend que de $_{1,n},\dots,\ _{n,n}$ et de $_{n+1}$, d'où l'indépendance.

5°)a) Convergence vers une loi de Poisson d'espérance log k (cf.II,2°).

b) On a

$$\frac{\theta^N}{N!}e^{-\theta} \leq \sum_{r=N}^{\infty}\frac{\theta^r}{r!}e^{-\theta} \leq \frac{\theta^N}{N!}e^{-\theta}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\theta^i}{(N+1)\dots(N+i)} \leq \frac{\theta^N}{N!}e^{-\theta}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\theta}{N}\right)^i \leq \frac{\theta^N e^{-}}{N!(1-}$$

c) Par le II,3°, $N(n,kn)-M(n,kn)$ est p.s. nul à partir d'un certain rang. Il suffit donc de raisonner pour $M(n,kn)$. Or

$$P_n = P\left(M(n,kn) \geq (1+\varepsilon)\frac{\log n}{\operatorname{loglog} n}\right) \leq \frac{\theta^N}{N!}e^{-\theta}\left(\frac{1}{1-\frac{\theta}{N}}\right), \text{ où } \theta = \sum_{i=n+1}^{kn}\frac{1}{i} \to \log k,$$

et où $N = \dfrac{(1+\varepsilon)\log n}{\operatorname{loglog} n} \to \infty$. Par Stirling, on en déduit que $P_n \leq \exp(-(1+\varepsilon+o(1))\log n)$

pour $n\to\infty$, d'où pour $\varepsilon>0$ la convergence de $\sum P_n$ et le résultat par Borel-Cantelli.

Commentaire

Le a et le b sont souvent traités. Par contre, le c ne semble pas avoir retenu l'attention des candidats.

6°)a) De toute évidence $1 \leq \liminf\limits_{n\to\infty}\{L(nk)-L(n)\} \leq \limsup\limits_{n\to\infty}\{L(nk)-L(n)\} \leq 1+[\log k$

b,c) τ_n suit une loi de Poisson d'espérance ℓ. Le même démonstration qu'au 5°c montre que

$$\sum_n P\left(\tau_n \geq \frac{(1+\varepsilon)\log n}{\operatorname{loglog} n}\right) < \infty \quad \text{si} \quad \varepsilon>0.$$

Posons $\delta_n = \tau_{n\ell}$. Ces v.a. sont indépendantes et telles que

$$\sum_n P\left(\delta_n > \frac{(1-\varepsilon)\log n}{\operatorname{loglog} n}\right) = \infty \quad \text{si} \quad \varepsilon>0.$$

Le résultat s'en déduit par Borel-Cantelli et $\tau_{L(n)} \leq N(n,kn)$, $k\geq 2$.

d) Il suffit de refaire les mêmes raisonnements, en remplaçant les v.a. Z_n par des v.a. de Poisson d'espérance 1/2 (par exemple).

Commentaire

Cette question n'est généralement pas traitée.

Indications bibliographiques

P. Deheuvels et D. Pfeifer (1986) A semigroup approach to Poisson approximation, Annals of Probability, Vol. 14.

Option Probabilités-Statistiques

Répartition des notes

0	à	4	:	59	copies
5	à	9	:	46	copies
10	à	14	:	53	copies
15	à	19	:	64	copies
20	à	24	:	28	copies
25	à	29	:	17	copies
30	à	34	:	11	copies
35	à	40	:	12	copies
				290	

Rapport sur l'épreuve "Mathématiques de l'Informatique

1. Description du problème

Le problème proposait l'étude des ensembles de mots définis par des propriétés de "comptage" de leurs sous-mots. Le comptage portait sur le nombre de façons distinctes d'écrire un mot u comme sous-mot d'un mot v. On envisageait dans le problème deux types de comptage. Le comptage "booléen" qui correspond à la distinction "u est sous-mot de v" ou "u n'est pas sous-mot de v", faisait l'objet des parties III et IV du problème. On démontrait que les langages définis par ce type de comptage sont précisément les langages reconnus par un monoïde J-trivial fini, ou encore par un monoïde ordonné fini. Le comptage modulo p, où p est un nombre premier, était étudié dans la cinquième partie : les langages définis par ce type de comptage sont exactement les langages reconnus par un p-groupe.

L'analogie entre monoïdes finis J-triviaux et p-groupes n'est d'ailleurs pas fortuite. Appelons matrice unitriangulaire une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1. On démontre alors que tout monoïde fini J-trivial -resp. tout p-groupe- est quotient d'un monoïde de matrices unitriangulaires à coefficients dans le semianneau de Boole -resp. dans le corps $\mathbb{Z}/p\,\mathbb{Z}$-

La première partie permettait de démontrer l'équivalence entre le formalisme des automates et celui des monoïdes. La deuxième partie décrivait un algorithme linéaire pour calculer l'automate minimal de l'ensemble des sous-mots d'un mot donné. Les parties III et IV aboutissaient à la démonstration du théorème de Imre Simon [3] en suivant la méthode proposée récemment en [4]. La principale difficulté consistait à prouver que tout monoïde fini J-trivial M est quotient d'un monoïde ordonné fini par récurrence sur le cardinal de M (Questions 5 à 8 du IV). Les résultats de la cinquième partie sont dûs à S. Eilenberg et M.P. Schützenberger et l'énoncé suivait d'assez près l'exposé donné en [1]. On introduisait d'abord le "coefficient binômial" de deux mots dont on démontrait quelques propriétés élémentaires (voir [2] pour plus de détails). On utilisait ensuite les propriétés de l'algèbre d'un p-groupe pour conclure. A noter que des résultats plus précis peuvent être obtenus en utilisant le calcul des commutateurs dans le groupe libre [5].

[1] S. Eilenberg, Automata, Languages and Machines, Academic Press, Vol. B (1976) pp. 238-245.

[2] M. Lothaire, Combinatorics on Words, Addison Wesley, Encyclopedia of Mathematics 17 (1983) chapitre 6

[3] I. Simon, Piecewise testable events, Proc. 2nd GI Conf. Lecture Notes in Computer Science 33, springer (1975) 214-222.

[4] H. Straubing et D. Thérien, Partially ordered finite monoids and a theorem of I. Simon, à paraître

[5] D. Thérien, Subword counting and nilpotent groups, combinatorics on words, Progress and Perspectives, L. Cummings éd. Academic Press (1983) 297-305.

2. Commentaires sur les copies

La plupart des candidats ont abordé les deux premières parties du problème et ont cherché ensuite à grapiller des points dans les autres parties. Le problème comportait un certain nombre de questions faciles, voire très faciles, sur lesquelles de nombreux candidats semblent avoir perdu beaucoup de temps, sans pour autant les résoudre correctement. L'exemple le plus typique est le III 1°)b) où certains candidats ont besoin d'une page de calcul pour prouver que la composée de deux relations réflexives est réflexive.

La première partie ne comportait pas de difficulté et la notion d'automate semble être relativement bien connue des candidats. En revanche, la plupart des candidats ne connaissent ni la définition des langages rationnels ni l'énoncé du théorème de Kleene. La question 3°)a) n'a été traitée correctement que par un tiers des copies environ.

Dans la seconde partie, les candidats se sont laissés abuser par l'aspect élémentaire du programme Pascal qui leur était proposé, et ont souvent confondu intuition et démonstration. De nombreux candidats semblent éprouver de réelles difficultés à mettre en place un raisonnement par récurrence, et la question 3°)b) n'a été traitée correctement que dans une seule copie !

Troisième partie. Malgré le contre-exemple explicitement donné dans l'énoncé, certains candidats ont confondu les notions de facteurs et de sous-mots. Les questions relatives à l'index ont opéré une sélection très nette, de même que la deuxième question. Personne n'a su résoudre le 3°)b).

Les candidats ont surtout abordé les trois premières questions de la quatrième partie. Pour le 1°)a), la diversité des contre-exemples proposés est remarquable : on y retrouve pratiquement tous les exemples de groupes au programme de l'agrégation ! La question 2°) était difficile, mais a été partiellement résolue dans les meilleures copies. En revanche les questions 4 à 9, rarement abordées, n'ont jamais été résolues de façon satisfaisante.

L'aspect algébrique de la cinquième partie a attiré les meilleurs candidats qui ont souvent abordé les quatre premières questions. La fin du problème n'a été traitée que dans une seule copie.

Rappelons que les correcteurs tiennent le plus grand compte de la rédaction des copies, qui manque souvent de clarté et de rigueur. Enfin signalons l'orthographe du mot "occurrence"...

La répartition des notes, sur 82 copies corrigées, est la suivante

0 à 4	19	20 à 24	6
5 à 9	9	25 à 29	7
10 à 14	22	30 à 34	5
15 à 19	12	35 à 39	1
		40	1

3. Commentaires sur les questions

I) La première partie n'offrait guère de difficultés. La question 5°b), qui était la seule "question de cours" du problème, a cependant dérouté nombre de candidats. Rappelons donc que les langages rationnels de A^* forment le plus petit ensemble de langages de A^* contenant les langages finis et fermé pour les opérations union, produit et étoile. Le théorème de Kleene (qui figure, rappelons-le, au programme de l'option) affirme qu'un langage est rationnel si et seulement si il est reconnu par un automate fini. Le 5°b) découle directement du théorème de Kleene et des questions 4°)b et 5°)a.

II) 1°) Sur l'exemple l'éxécution de la procédure "automate" donnait le résultat suivant

L'ensemble des états est (0,...,5)
delta(5,a1) = 5
delta(4,a1) = 5
delta(5,a2) = 5
delta(4,a2) = 5
delta(3,a1) = 4
delta(3,a2) = 5
delta(2,a1) = 3
delta(2,a2) = 5
delta(1,a1) = 3
delta(1,a2) = 2
delta(0,a1) = 1
delta(0,a2) = 2

L'état initial est 0 ;
Tous les états sauf 5 sont des états finaux.

2°) La double inégalité $i+1 \leqslant \delta(i,a) \leqslant \delta(i+1,a)$ s'établissait facilement par récurrence sur $m-i$. En revanche la formule $\delta(i,b_{i+1}) = i+1$ pouvait être établie directement.

3°) Le a) se déduisait facilement du 2°). En revanche le b) était plus délicat et n'a été traité que dans une seule copie. Une solution consistait à établir d'abord par récurrence sur m-i la formule

$$\delta(i,a_j) = \begin{cases} k \text{ si } k \text{ est le plus petit entier tel que } k>i \text{ et } b_k \\ m+1 \text{ s'il n'existe aucun } k>i \text{ tel que } b_k = a_j \end{cases}$$

III)1°) Beaucoup d'erreurs sur cette question.
Une classe modulo $\sim_n$ est caractérisée par un ensemble de mots de longueur inférieure ou égale à n. Comme il y a $N = 1 + \text{card} +\ldots+(\text{card}A)^n$ mots de longueur au plus n, il y a au plus 2^N classes distinctes. Si $A = \{a,b\}$, l'index de $\sim_1$ est 4 (considérer les mots 1,a,b et ab). Par ailleurs deux mots, équivalents pour $\sim_n$, et de longueur au plus n, sont nécessairement égaux, ce qui fournit $2^{n+1}-1$ classes distinctes. On pouvait ensuite observer que pour $n > o$, le mot $a^n b$ n'est équivalent à aucun mot de longueur inférieur ou égale à n.

2°) Il fallait observer d'une part que

$$\{v \in A^* \mid v \sim_n u\} = \bigcap_{w \text{ sous-mot de } u} S(w) \setminus \bigcup_{w \text{ non sous-mot de } u} S(w)$$

et d'autre part que $S(u)$ était saturé modulo $\sim_n$

3°) Pour le b), on se ramène facilement au cas où u et v sont de longueur strictement supérieure à n. u admet alors une factorisation $u = u_o a_1 u_1 \ldots a_n u_n$ (avec $a_i \in A$, $u_i \in A^*$) telle que $\eta(1) = \eta(u_o) \geqslant \eta(u_o a_1) = \eta(u_o a_1 u_1) \geqslant \ldots \geqslant \eta(u_o a_1 \ldots u_{n-1} a_n) = (u_o a_1 \ldots u_{n-1} a_n)$ et donc $\eta(u) = \eta(a_1 a_2 \ldots a_n)$. Comme $a_1 \ldots a_n$ est sous-mot de u, donc de v, on en déduit facilement $\eta(u) \leqslant \eta(v)$, et un raisonnement dual montre que $\eta(v) \leqslant \eta(u)$.

Pour le c) il suffisait d'appliquer le I1°) puis le I3°)a)

IV) 1°) La relation $\leqslant_J$ n'est transitive dans aucun groupe non trivial. Signalons toutefois qu'il existe des contre-exemples autres que les groupes, par exemple le monoïde multiplicatif des matrices $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$.

Pour démontrer que M n'est pas un monoïde ordonné, il ne suffisait pas de prouver que la relation $\leqslant_J$ n'est pas compatible avec la multiplication !

2° i) $\Rightarrow$ ii) En prenant $y = 1$ on trouve $x^n = x^{n+1}$. Par ailleurs on observe que $(xy)^n = (xy)^n x = x(yx)^n = (yx)^n$

ii) $\Rightarrow$ i) On a $(xy)^n = (yx)^n = (yx)^{n+1} = y(xy)^n x$, d'où en itérant $(xy)^n = y^n (xy)^n x^n$ et donc $(xy)^n x = y^n (xy)^n x^{n+1} = y^n (xy)^n x^n = (xy)^n$.

(i) $\Rightarrow$ (iii) Si $x \leqslant_J y$ et $y \leqslant_J x$, il existe $s,t,u,v \in M$ tels que $x = syt$ et $y = uxv$, d'où $x = (su)x(vt)$, et en itérant $x = (su)^n x(vt)^n$. On conclut facilement en utilisant les égalités

$$(su)^n = u(su)^n \text{ et } (vt)^n = (vt)^n v.$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) Soit x M. Puisque M est fini, la suite décroissante

$$1 \geqslant_J x \geqslant_J x^2 \ldots \geqslant_J x^n$$

est stationnaire et il existe $n_x > 0$ tel que $x^{n_x} = x^{n_x+1}$. En prenant $n = \max\{n_x \mid x \in M\}$, on a, pour tout $x \in M$, $x^n = x^{n+1}$. En particulier, si $x,y \in M$, il vient $(xy)^n \geqslant_J (xy)^n x \geqslant_J (xy)^{n+1} = (xy)^n$ d'où $(xy)^n = (xy)^n x$.

3°) Il suffisait d'utiliser les équations établies en 2°). Une preuve directe était possible mais assez délicate dans le cas du quotient !

4°) Le monoïde M_n est en fait le quotient de M par la congruence qui identifie 0 et n.

a) Il ne suffit pas de dire qu'il existe un élément minimal, il faut encore vérifier son unicité.

b) La question était plus difficile qu'il n'y parait. Il fallait distinguer les cas (a) $xy \neq n$ et $yz \neq n$ (b) $xyz = n$ et (c) ($xy = n$ ou $yz = n$) et $xyz \neq n$ et observer dans le cas (c) que $xyz \underset{J}{\leqslant} xy$ et donc que $xyz = 0$

c) Là encore, plusieurs cas à distinguer

5°) On vérifiait sans trop de peine que la propriété d'être quotient d'un monoïde ordonné fini est stable par passage au sous-monoïde, au monoïde quotient et au produit de deux monoïdes.

a) Si Card $N(M) \geqslant 2$, M est isomorphe à un sous-monoïde du produit $\prod_{n \in N(M)} M_n$, ce qui permet de conclure par récurrence puisque Card $M_n <$ Card M

b) On suppose $N(M) = \{n\}$ et $n^2 = n$. Si $x \neq 0$, on a $x \underset{J}{\geqslant} n$ par minimalité de n et il existe $r,s \in M$ tels que $n = rx$ Il vient

$$n \underset{J}{\geqslant} nr \underset{J}{\geqslant} nrx \underset{J}{\geqslant} nrxs = n^2 = n$$

d'où $n = nr = nrx$ et $n = nx$. Donc si $x \neq 0$ et $y \neq 0$, $nxy = ny = n$ et $xy \neq 0$. Donc $M \setminus \{0\}$ est un sous-monoïde de M. Par récurrence $M \setminus \{0\}$ est quotient d'un monoïde ordonné T. On en déduit que M est quotient d'un monoïde ordonné en adjoignant un zéro à T.

8°)

a) La classe d'un mot u est caractérisée par $\alpha(u)$ et par l'ensemble des triplets $(\alpha(u_0), a, \alpha(u_1))$ tels que $u_0 a u_1 = u$ et $a \in A \cup \{1\}$.

On en déduit facilement que $\sim_A$ est d'index fini

b) C'était la question la plus difficile du problème. Posons $I = \{n, o\}$. On se ramenait facilement au cas où $\varphi(u)$ et $\varphi(v)$ sont éléments de I et on traitait successivement les cas suivants

(1) Il existe une factorisation $u = u_0 u_1$ avec $\varphi(u_0)$ et $\varphi(u_1)$ dans $M \setminus I$

(1') Même condition que (1) en substituant v à u.

(2) Les conditions (1) et (1') sont exclues mais il existe une factorisation $u = u_o a u_1$ avec $a \in A$, $\varphi(u_o) \in M \setminus I$ et $\varphi(u_1) \in M \setminus I$

(2') Même condition que (2) en substituant v à u.

(3) La cas restant : toutes les factorisations $u = u_o u_1$ ou $u = u_o a u_1$ (resp. $v = v_o v_1$ ou $v = v_o a v_1$) satisfont $\varphi(u_o) \in I$ ou $\varphi(u_1) \in I$ (resp. $\varphi(v_o) \in I$ ou $\varphi(v_1) \in I$).

Dans le cas (1), on considère une factorisation $u = u_o u_1$ (avec $\varphi(u_o)$, $\varphi(u_1) \in M \setminus I$) telle que le couple $(\alpha(u_o), \alpha(u_1))$ soit maximal pour l'ordre produit dans $T \times T$. Puisque $u \sim_A v$, il existe des factorisations $v = v_o v_1$ et $u = u'_o u'_1$ telles que $\alpha(u_o) \leqslant \alpha(v_o) \leqslant \alpha(u'_o)$ et $\alpha(u_1) \leqslant \alpha(v_1) \leqslant \alpha(u'_1)$. On peut supposer que u_o est facteur gauche de u'_o et que u'_1 est facteur droit de u_1 (l'autre cas se traite de manière analogue). On en déduit d'une part $\alpha(u'_o) \leqslant \alpha(u_o)$ d'où $\varphi(u_o) = \varphi(v_o) = \varphi(u'_o)$ car $\varphi(u_o) \in M \setminus I$ et d'autre part $\varphi(u_1) \leqslant_J \varphi(u'_1)$ d'où $\varphi(u'_1) \in M \setminus I$ puisque $\varphi(u_1) \in M \setminus I$. D'après la maximalité de la factorisation choisie, on a nécessairement $\alpha(u_1) = \alpha(v_1) = \alpha(u'_1)$ puis $\varphi(u_1) = \varphi(v_1)$ et finalement $\varphi(u) = \varphi(v)$
Le cas (1') est analogue et les cas (2) et (2') se traitent par une méthode analogue. Enfin dans le cas (3), on note u_o le facteur gauche de u (éventuellement vide) de longueur maximale tel que $\varphi(u_o) \notin I$, et on pose $u = u_o a u_1$ avec $a \in A$. On a alors $\varphi(u_o a) \in I$ et $\varphi(u_1) \in I$ d'où $\varphi(u) \in I.I = \{n,o\}\{n,o\} = 0$. De même $\varphi(v) = 0$ donc $\varphi(u) = \varphi(v)$.

V)

1°) et 2°) Pas de difficulté particulière.

3°) On pouvait observer que μ est l'inverse de $-\sigma$, et que σ est une involution.

4°)a) Les formules s'établissaient par récurrence sur la longueur de v en utilisant le 2°).

b) résultait immédiatement de la formule $\mu(uv) = \mu(u)\mu(v)$

5°)b) Par récurrence sur $|w|$. Le cas $|w| = 0$ ne présente pas de difficulté. Si $|w| = n+1$ et si v est facteur de w, on a

$$\binom{u^{p^{n+1}}}{v} = \sum_{v_1 \cdots v_p = v} \binom{u^{p^n}}{v_1} \cdots \binom{u^{p^n}}{v_p}$$

Or par hypothèse de récurrence $\binom{u^{p^n}}{v_i} \equiv 0 \bmod p$ si $0 < |v_i| \leqslant n$ ce qui montre que $\binom{u^{p^{n+1}}}{v} \equiv 0 \bmod p$ si $0 < |v| \leqslant n$. Si $v = 1$, on a $\binom{u^{p^{n+1}}}{1} \equiv 1 \bmod_p$ et si $v = w$, il y a exactement p terme non nuls (modulo p) dans la sommation ci-dessus, correspondant aux p factorisations pour lesquelles l'un des v_i est égal à w. Donc

$$\binom{u^{p^{n+1}}}{w} = p \binom{u^{p^n}}{w} \equiv 0 \mod p$$

c) On a $x^{p^n} = 1$ pour tout élément x de $G = A^*|\equiv_w$. On en déduit facilement que G est un groupe fini, puis -mais c'est moins évident que ne l'ont affirmé certains candidats - que G est un p-groupe (en utilisant par exemple la formule des classes)

8°) a) On pouvait observer que pour tout mot u et pour toute lettre a

$$(1-ua) = (1-u)+u(1-a)$$

9°) a) Résultat classique, qui découle lui aussi de la formule des classes.

d) Puisque $\binom{p}{i} \equiv 0 \bmod p$ pour $1 \leqslant i \leqslant p-1$, on obtenait $(1-x)^p = 1+(-1)^p$. Pas de problème si p est impair. Et si p = 2 $1+1 = 0 \bmod 2$! Comme x est dans le centre de G, K^p est l'idéal engendré par $(1-x)^p$, d'où le résultat.

12°) b) Si $L \in \mathcal{G}_p$, L est reconnu par un p-groupe d'après 5°) c)

Réciproquement, si L est reconnu par un p-groupe G, L est union de $\equiv_n$ -classes (où n = Card G-1) et chaque $\equiv_n$-classe est intersection de $\equiv_w$-classes. Enfin chaque $\equiv_w$-classe est combinaison booléenne des $L_{w,i}$ et $L \in \mathcal{G}_p$.

A noter que cette dernière question conduit à un algorithme pour décider si un langage rationnel donné L est élément de $\mathcal{G}_p$. On calcule d'abord l'automate minimal de L, puis le monoïde M associé à cet automate (décrit dans la première partie). Alors L est élément de $\mathcal{G}_p$ si, et seulement si, M est un p-groupe. De la même façon, on peut décider si un langage rationnel donné est élément de J : il faut et il suffit que M soit J-trivial.

ORAL

Le niveau du concours 1986 a été satisfaisant. Comme l'an dernier il y avait 180 places, ce qui a attiré quelques professeurs certifiés et les a fortement motivés à préparer le concours. La présence à l'oral de plusieurs candidats étudiants, dont certains très bons, a confirmé le mouvement déjà amorcé l'an dernier. Espérons que ce mouvement continuera, et que les étudiants de nos Universités seront encore un peu plus nombreux, dans les années à venir, à se présenter à l'agrégation.

Les 302 candidats admissibles ont été répartis d'après le classement d'écrit en deux jurys comportant chacun une commission d'algèbre et une commission d'analyse. Une concertation permanente a assuré une bonne harmonisation entre les jurys.

Quelques candidats, trop rares encore, ont fait un effort pour mettre dans leurs leçons des exemples numériques, des algorithmes, des illustrations venues de l'analyse numérique, de l'informatique,de la mécanique, des probabilités, etc... Le jury souhaite que cet effort se généralise et espère entendre des mathématiques plus concrètes.

Le rôle de la bibliothèque de l'agrégation et des compléments éventuels apportés par les candidats est d'aider ceux-ci à préparer des leçons de meileure qualité. Cette documentation n'a pas pour but de contenir des ouvrages que les candidats n'auraient qu'à recopier, sur un papier d'abord, au tableau ensuite. Le jury veillera à ce que cet esprit soit respecté.

Rapport d'analyse

1. Les règles de l'oral d'analyse sont les mêmes que celles de l'oral d'algèbre; elles n'ont pas non plus varié par rapport à l'année précédente. On renvoie au rapport d'algèbre pour leur définition précise et d'utiles conseils, les formulant simplement de façon abrégée.

La leçon commence par la présentation, en 15 à 20 minutes, d'un plan qui doit tenir tout entier sur le tableau (Pour donner une idée des dimensions du tableau, précisons qu'il peut être découpé en 3 pages, chacune comprenant 15 lignes de 50 caractères pour une écriture normale). Quelle que soit son organisation, le plan doit contenir des énoncés précis.

Elle se poursuit par un exposé de 15 minutes environ, choisi par le jury parmi 2 ou 3 thèmes proposés par le candidat. L'exposé doit avoir un contenu substantiel et le choix offert doit être réel. A cette occasion le jury peut demander au candidat de poser ses notes, de résumer ou au contraire de détailler tel passage d'une démonstration.

Les questions qui viennent à la fin ne sont pas des pièges; elles ont pour but de rectifier des erreurs et de tester les connaissances du candidat sur le sujet et ses éventuels prolongements.

Ajoutons que l'éventail offert par la bibliothèque ne doit pas desservir les candidats. Il est dangereux de passer du temps à feuilleter des ouvrages que l'on ne connait pas afin d'y trouver des idées et de recopier certains passages à la hâte, énoncés ou même formules.

2. Certaines leçons correspondent à une fraction bien définie du programme : le jury n'attend pas des candidats qu'ils s'écartent systématiquement de ce que l'on peut trouver dans les ouvrages (lesquels sont à leur disposition). Cependant ils devront faire la preuve d'avoir bien compris ce qu'ils exposent, les questions étant notamment là pour le vérifier, ce qui implique qu'ils n'exposent que ce qu'ils ont bien compris. En particulier ils seront capables de mettre l'accent sur les points essentiels et d'éviter de se placer dans des hypothèses dont la généralité est excessive ou gratuite. Ils pourront citer un théorème difficile dont ils ne connaissent pas toute la démonstration s'ils en proposent des applications intéressantes.

Il n'est pas interdit bien sûr de présenter un point de vue original ou d'enrichir l'exposé de développements moins classiques, à condition de garder la maîtrise de ce que l'on dit. Seulement ce ne doit pas être la préoccupation première.

D'autres leçons touchent au contraire à plusieurs parties du programme. Leurs limites sont imprécises; même si d'aventure une certaine tradition peut attacher au titre une interprétation particulière, toute interprétation est admise dès lors qu'elle est défendable. D'autre part l'exposé peut, au choix du candidat, traiter le sujet

d'une manière analytique, en essayant de couvrir les différents points du programme rattachés au sujet, dans un ordre logique,

ou synthétique, en mettant l'accent sur quelques exemples importants, voire un seul thème fort, révélant toute la richesse du sujet.

Il ne faut pas cacher que la seconde option exige davantage d'esprit critique, sinon de recul; cependant elle peut permettre à certains candidats de mettre en valeur leur culture et leur expérience.

Bien entendu cette classification des leçons est largement arbitraire, certains titres pouvant se trouver à égale distance de l'un et l'autre type. Le candidat est libre d'orienter la leçon dans le sens de sa préférence.

3. Actuellement l'agrégation, en plus de son rôle naturel de concours de recrutement pour l'enseignement, est un diplôme prisé par l'industrie, et il est très positif qu'elle soit aussi un carrefour où se rencontrent futurs enseignants et futurs chercheurs.

Les modifications du programme et l'évolution de l'équilibre des thèmes proposés à l'oral pourront donner moins d'importance à des questions non essentielles pour la formation des enseignants et éloignées des mathématiques actuellement pratiquées par les scientifiques ou les ingénieurs. Cela entraînera quelques modifications dans la liste ou le libellé des titres des leçons.

Pour les leçons de composition, dont la définition est plus souple, le candidat pourra suivant sa préférence se placer dans un esprit relativement traditionnel ou bien intégrer des éléments qu'il aura pu rencontrer dans sa formation à la recherche mathématique. Cependant, dans ce dernier cas, il devra savoir tenir un discours pour non spécialistes, ancré sur des exemples concrets et éloigné de tout formalisme. Cela correspond à un effort de reflexion personnelle dont la difficulté ne doit pas être sousestimée.

4. Les commentaires particuliers restent en gros valables d'une année sur l'autre. On ne les reproduit pas pour éviter de concentrer l'attention des préparations sur des points de détail. D'ailleurs nulle erreur isolée n'est condamnable, nulle ignorance en soi n'est impardonnable. Le jury essaie de juger les candidats d'après leurs talents d'enseignant et de mathématicien. Comme (futur) enseignant il leur est demandé d'exposer avec clarté et élégance des choses simples, et comme mathématicien de réagir avec méthode et initiative face à des situations auxquelles ils n'ont pas été complètement préparés.

Une remarque cependant concerne les aspects numériques de l'analyse élémentaire qui ont été introduits ces dernières années dans les leçons. Cela a conduit à un renouvellement des thèmes, l'accent étant notamment mis sur l'obtention de majorations exactes là où l'on se contente en général d'estimations asymptotiques, la distinction entre les deux points de vue étant essentielle.

Si une leçon n'est pas directement orientée vers les problèmes numériques, mais se prête à une brève évocation, il est permis d'en profiter, envisageant au besoin la mise en oeuvre effective des méthodes sans aller jusqu'à la programmation elle-même. C'est une liberté et non une consigne.

A cette occasion le jury n'attend pas des candidats une quelconque érudition, mais seulement qu'ils fournissent des résultats parlants et des applications réalistes.

5. En résumé rien d'extravagant n'est donc demandé et, sous réserve du respect des conventions de base, la plus grande liberté est laissée au candidat.

Cela ne veut pas dire que l'exercice proposé soit banal. Les candidats de cette année auraient pu bien souvent, avec les mêmes connaissances de base, fournir une meilleure prestation.

Beaucoup de plans ressemblent à un catalogue. Le fait de multiplier les I, II, a), b) ne constitue pas un plan en soi. Certains modèles de fiches qui circulent y sont probablement pour quelquechose : si elles constituent une base utile pour la préparation, au moment de l'oral le plan retenu par le candidat doit laisser percevoir un fil directeur, une progression en conformité avec sa réflexion personnelle.

La tendance au catalogue masque souvent la pauvreté du contenu réel. Elle est ainsi accompagnée par une inflation de préliminaires ou de questions n'ayant qu'un lointain rapport avec le sujet.

Pour de bons candidats elle se traduit parfois par une avalanche de théorèmes sans hiérarchie entre eux. Il ne faut pas oublier que les mathématiques sont pas vocation simples et que le fait d'un bon enseignant est de les faire paraître telles, même lorsqu'elles sont un peu compliquées.

Pour ce qui est des développements, il est surprenant de constater qu'ils sont souvent insuffisamment préparés. Les candidats dégagent rarement les idées essentielles et se noient au contraire dans une technique mal dominée.

En 1986, sur 301 admissibles 125 avaient choisi l'option de Probabilités et Statistiques à l'écrit, et seulement 3 candidats ont choisi une leçon d'oral en probabilités. Il y a là une anomalie dont le jury ne détient pas complètement l'explication.

EPREUVE D'ALGEBRE ET DE GEOMETRIE
RAPPORT D'ORAL

Dans l'ensemble les candidats connaissent les règles de l'oral, mais il n'est pas inutile de reprendre ce qui a déjà été signalé dans le rapport de 1985 :

- présentation, en 15 à 20 minutes, d'un plan qui doit tenir sur le tableau,

- proposition de 2 ou 3 thèmes d'exposé (3 de préférence), et développement, en 15 minutes environ, de celui qui est choisi par le jury,

- réponses à diverses questions portant sur la leçon ou ses prolongements.

Insistons sur la nécessité de respecter ces règles, en particulier le temps consacré à chaque partie. Les candidats sont donc invités à savoir juger la longueur de leur plan et de leur exposé.

Le plan

Le plan ne doit pas être une table des matières : il doit contenir des définitions et des énoncés de théorème. Le niveau auquel il se situe est librement choisi par le candidat, étant entendu que le minimum requis est celui du premier cycle de l'enseignement supérieur. Même à ce niveau, on peut obtenir une très bonne note, car un plan ne s'enrichit pas seulement par une accumulation de connaissances, mais bien plus par un large choix d'exemples et d'applications, et une bonne réflexion sur les liens que présente le sujet avec d'autres parties du programme. En d'autres termes le jury ne demande pas l'érudition, mais un approfondissement des connaissances.

- Les notions introduites dans le plan doivent être dominées, et le candidat doit pouvoir répondre à des questions sur tout sujet qu'il a introduit. Dans le cas où un résultat profond est énoncé sans être proposé en exposé, le candidat doit, à défaut d'en connaître la démonstration, pou en citer des conséquences significatives et être capable de l'utiliser pou résoudre des exercices d'application simples. Dans le cas où un résultat élémentaire est énoncé, le candidat doit pouvoir par contre en donner la démonstration. Par exemple, on doit savoir démontrer que l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ e euclidien, lorsque cet anneau est mentionné par le candidat.

- Il est inutile que le candidat inscrive au tableau toutes les définitions et toutes les propriétés élémentaires qu'il signale, cela lui fait perdre un temps précieux.

L'exposé

Le choix d'exposés proposés par le candidat est un élément impor de l'appréciation : il doit mettre en évidence les points essentiels de la leçon, et refléter la diversité du sujet et le niveau auquel on s'est plac Insistons sur le fait qu'il doit s'agir d'un vrai choix - le jury apprécie peu les artifices de "carte forcée" ! - et que chacune des propositions do pouvoir être exposée dans les 15 minutes imparties : il peut s'agir de la démonstration, complète ou partielle, d'un théorème, de la résolution d'un ou plusieurs exercices, ou encore du développement d'un aspect particulier du sujet esquissé dans le plan ; mais la démonstration d'un théorème impor ne doit pas être vidée de son contenu en admettant un lemme crucial. Eventuellement lorsque la démonstration d'un résultat est particulièrement lon le candidat peut admettre des lemmes techniques, pour lesquels il doit pouvoir néanmoins fournir, à la demande du jury, des indications.

L'exposé proprement dit doit être pour le candidat l'occasion de faire preuve de qualités d'aisance au tableau et de maîtrise des éléments de son plan. Trop nombreux sont ceux qui se contentent de recopier leurs notes tenues à la main, ils sont alors sanctionnés par le jury. Il est donc souhaitable de poser ses notes, quitte à s'y référer brièvement pour contrô un résultat ou retrouver un détail. S'il est légitime de passer rapidement sur des calculs de routine, la démonstration doit être bien dominée, les différentes étapes et les idées directrices clairement dégagées. Insistons encore sur le danger de recopier à la hâte une démonstration prise dans un livre que l'on n'a jamais étudié auparavant. Le jury se réserve la possibilit d'intervenir pendant l'exposé : il s'agit souvent de faire préciser un point de démonstration, ou éventuellement de faire rectifier une erreur.

Les questions

Elles ont pour but de vérifier si le candidat maîtrise convenablemen le sujet et les notions qu'il a introduites : rectification éventuelle des erreurs du plan ou de l'exposé, exercices assez courts utilisant les résultats cités, questions ayant pour but de tester les connaissances du candidat sur des points liés à la leçon ou ses prolongements naturels...

Remarques particulières

Dénombrements :

Il faut savoir traiter directement des questions par des raisonnemen combinatoires. Par ailleurs, comme toujours quand le sujet s'y prête, il n'est pas interdit de faire appel à l'analyse (séries entières notamment). D'autre part, les structures algébriques sur des ensembles finis fournissent de bons thèmes de dénombrements.

Groupes :

- A propos des groupes abéliens de type fini, il faut parler du sous-groupe de torsion et ne pas oublier les groupes abéliens finis. On doit également être capable d'étudier la structure du quotient de $\mathbb{Z}^2$ par un sous-groupe, ou de déterminer tous les groupes abéliens d'ordre n (n proposé par le jury).

- Les théorèmes de Sylow permettent de démontrer facilement que pour certains nombres premiers p et q, tout groupe d'ordre p^2q n'est jamais simple. Il est souhaitable de varier les exemples et de ne pas se cantonner au groupe d'ordre 63.

- La notion de produit semi-direct, souvent introduite, doit pouvoir être illustrée et appliquée à des exemples concrets.

- Les groupes diédraux et leurs représentations en géométrie devraient être mieux connus.

- Il faut savoir décortiquer $\mathfrak{S}_4$, et trouver dans $\mathfrak{S}_n$ le conjugu d'un cycle par une permutation.

- Des applications à l'algèbre linéaire et à la géométrie doivent illustrer les leçons "Groupes opérant sur un ensemble" et "Eléments conjugué dans un groupe" ; les groupes de pavages fournissent de bons exemples.

Anneaux, corps, polynômes :

- En dehors de $\mathbb{Z}$ et de $K[X]$, les anneaux cités en exemple sont rarement étudiés. Aucun candidat, semble-t-il, ne s'est jamais demandé si l'anneau des décimaux est principal...

- Les exemples d'idéaux sont particulièrement pauvres, les candida semblent ignorer par exemple les idéaux maximaux de $\mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]$.

- L'algorithme d'Euclide doit être décrit en tant qu'algorithme effectif : il n'est pas interdit d'utiliser à cette fin un langage de programmation.

- Les critères d'irréductibilité énoncés doivent être précis, et les relations entre l'irréductibilité des polynômes sur $\mathbb{Z}$ et sur $\mathbb{Q}$ mieux maîtrisées.

- L'irréductibilité concerne aussi les polynômes à plusieurs variables.

- On peut passer rapidement sur la construction de l'algèbre des polynômes à plusieurs indéterminées, ou du corps des fractions rationnelles.

- Il ne suffit pas d'énoncer le théorème de structure de l'algèbre des polynômes symétriques à coefficients dans un corps, encore faut-il savoir exprimer de tels polynômes à l'aide des polynômes symétriques élémentaires dans des exemples simples.

- Il faut connaître l'expression du résultant de deux polynômes en fonction des valeurs de l'un des polynômes en les racines de l'autre.

- Lorsque le théorème de Lüroth est mentionné par un candidat, il serait souhaitable que le rapport entre ce théorème et la théorie des courbes unicursales soit connu.

Algèbre linéaire :

- Les aspects matriciels sont souvent négligés.

- Dans plusieurs leçons, les méthodes numériques constituent un point de vue à ne pas négliger (systèmes linéaires, déterminants, valeurs propres,...).

- Dans la leçon "Dimension des espaces vectoriels dans le cas fini", il faut parler du rang.

- La leçon "Endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie" n'est pas identique à la leçon "Valeurs propres, vecteurs propres".

- Des considérations topologiques peuvent enrichir de nombreux plans (étude de la continuité à propos des notions de déterminant, rang, polynôme caractéristique, sous-ensembles remarquables denses des anneaux de matrices, étude de connexité des groupes linéaires etc...).

- Il semble que les candidats ne connaissent pas d'autre exemple de bases duales que celui fourni par l'interpolation de Lagrange. D'autre part, on devrait pouvoir préciser la signification de la phrase : "il n'y a pas d'isomorphisme canonique de E dans E^*".

- Lorsqu'un candidat introduit la notion d'endomorphisme semi-simple, il doit savoir les caractériser dans les cas réel et complexe.

Formes bilinéaires symétriques, alternées, hermitiennes :

- Les propriétés de diagonalisation des endomorphismes normaux sont différentes sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.

- Rappelons encore une fois que si les matrices symétriques réelles sont diagonalisables, il n'en va pas de même des matrices symétriques complexes.

- L'expression "on complexifie..." ne saurait constituer un raisonnement complet. L'utilisation du complexifié dans la réduction des endomorphismes normaux réels a été souvent maladroite.

Géométrie :

La géométrie a eu les faveurs d'assez nombreux candidats.

- Le jury accueille favorablement toute démonstration de résultats élémentaires qui s'appuie sur de bons raisonnements géométriques expliqués sur des figures.

- La géométrie métrique plane nécessite certaines connaissances élémentaires sur le triangle.

- Les angles suscitent toujours beaucoup d'appréhension, qu'il conviendrait de surmonter une bonne fois...

- L'utilisation de la géométrie projective, à condition de pouvoir la justifier, permet de simplifier certaines démonstrations.

- Il faut savoir déduire les groupes finis de $O(3)$ de ceux de $O^+(3)$.

- Les leçons sur les coniques ou les quadriques dans l'espace affine euclidien ne se limitent pas à leur classification.

- Les candidats doivent savoir faire le lien entre éléments orthogonaux par rapport à une forme quadratique et éléments conjugués par rapport à une conique ou une quadrique.

- Les propriétés élémentaires des tangentes aux coniques doivent être connues des candidats.

- La géométrie projective est mal connue, et le lien avec la géométrie affine n'est jamais clairement exposé.

Liste des leçons d'algèbre et de géométrie
Session de 1986

1 Exemples de problèmes de dénombrement.
2 Coefficients binomiaux. Applications.
3 Groupes abéliens de type fini ; sous-groupes de $\mathbb{Z}^n$.
4 Exemples et applications de la notion de sous-groupe distingué.
5 Parties génératrices d'un groupe ; exemples ; applications à la géométrie.
6 Illustrer par des exemples, notamment géométriques, la notion d'éléments conjugués dans un groupe.
7 Exemples de groupes finis, tirés de l'algèbre linéaire et de la géométrie.
8 Groupes opérant sur un ensemble. Applications.
9 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.
10 Exemples d'idéaux et d'anneaux quotients d'un anneau commutatif unitaire.
11 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications.
12 Divisibilité et factorisation dans un anneau commutatif intègre ; exemples.
13 Propriétés élémentaires des nombres premiers.
14 P.g.c.d., p.p.c.m., théorème de Bezout, exemples et méthodes de calcul.
15 Exemples de corps.
16 Corps de rupture d'un polynôme irréductible. Applications.
17 Exemples d'algèbres.
18 Quaternions.
19 Corps des nombres complexes.
20 Groupe multiplicatif des nombres complexes ; racines de l'unité.
21 Applications géométriques des nombres complexes.
22 Polynômes à n indéterminées.
23 Racines des polynômes à une indéterminée à coefficients complexes. Résultant. Discriminant.
24 Racines des polynômes à une indéterminée.
25 Polynômes irréductibles.
26 Polynômes symétriques. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme.
27 Fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif ; applications.
28 Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples et applications.
29 Dimension des espaces vectoriels dans le cas fini.
30 Endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie.
31 Groupe linéaire en dimension finie.
32 Matrices carrées inversibles.
33 Exemples de sous-groupes du groupe linéaire.
34 La dualité en algèbre linéaire ; applications ; (on se limitera au cas de la dimension finie)
35 Rang d'une application linéaire et d'une matrice. Equations linéaires.
36 Résolution d'un système de n équations linéaires à p inconnues.
37 Matrices.
38 Applications multilinéaires alternées. Déterminants.
39 Applications des déterminants.
40 Méthodes de calcul d'un déterminant. Exemples et applications.
41 Sous-espaces vectoriels stables pour un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.
42 Vecteurs propres, valeurs propres. Diagonalisation. Applications.
43 Réduction de Jordan. Applications.
44 Polynôme minimal, polynôme caractéristique.
45 Matrices semblables.

46 Polynômes d'endomorphismes.
47 Formes bilinéaires symétriques; formes bilinéaires alternées.
48 Orthogonalité, isotropie pour une forme bilinéaire symétrique.
49 Décomposition en carrés d'une forme quadratique. Applications.
50 Applications des formes quadratiques réelles en dimension finie.
51 Groupe orthogonal d'une forme quadratique non dégénérée.
52 Espaces vectoriels euclidiens en dimension finie.
53 Groupe orthogonal d'un espaces vectoriel euclidien de dimension finie.
54 Espaces vectoriels hermitiens de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Groupe unitaire.
55 Dualité dans les espaces vectoriels hermitiens et euclidiens de dimension finie. Réduction des endomorphismes normaux.
56 Formes quadratiques sur un espace vectoriel euclidien. Applications.
57 Changements de bases et classifications de matrices.
58 Convexité dans les espaces affines réels de dimension finie.
59 Polyèdres convexes.
60 Exemples de sous-groupes du groupe affine réel en dimension $\leqslant 3$.
61 Exemples de groupes d'isométries d'un espace affine euclidien en dimension $\leqslant 3$.
62 Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Formes réduites, exemples en dimension $\leqslant 3$.
63 Polyèdres réguliers dans un espace affine euclidien de dimension 3.
64 Exemples de problèmes de géométrie affine.
65 Barycentres; applications.
66 Angles.
67 Exemples de problèmes d'angles et de distances en géométrie.
68 Propriétés affines, propriétés métriques : exemples en géométrie plane.
69 Inversion plane. Groupe circulaire.
70 Cercles et sphères.
71 Familles linéaires de cercles.
72 Droite projective. Birapport.
73 Propriétés projectives, propriétés affines: exemples.
74 Coniques dans le plan affine euclidien.
75 Quadriques de l'espace affine euclidien de dimension 3.

Sujets d'analyse

1 Applications à l'analyse de la notion de compacité
2 Exemples d'espaces compacts.
3 Espaces homéomorphes.Exemples et contre-exemples
4 Connexité.Applications.
5 Théorèmes du point fixe.Applications.
6 Sous-espaces denses.Illustration par l'approximation des fonctions
7 Exemples d'applications linéaires continues d'un espace vectoriel normé dans un autre et de calcul de leurs normes .
8 Espaces vectoriels normés de dimension finie.
9 Géométrie dans un espace vectoriel normé.
10 Exemples d'utilisation de la dénombrabilité en topologie et en analyse (ou en probabilités) .
11 Donner une construction de $\mathbb{R}$; en déduire les principales propriétés de $\mathbb{R}$.
12 Une caractérisation de $\mathbb{R}$ (par certaines de ses propriétés) étant connue , en déduire les autres propriétés fondamentales de $\mathbb{R}$.
13 Topologie de la droite numérique $\mathbb{R}$ et sous-ensembles remarquables de $\mathbb{R}$.
14 Exemples d'étude de suites de nombres réels,applications.
15 Etude , sur des exemples , de la rapidité de convergence d'une suite de nombres réels ; calcul approché de la limite.
16 Approximations d'un nombre réel.
17 Etude , sur des exemples , de suites réelles ou complexes définies par divers types de relations de récurrence.
18 Continuité et dérivabilité de fonctions réelles d'une variable réelle ; exemples et contre-exemples.
19 Continuité uniforme . Applications , exemples et contre-exemples .
20 Fonctions à variation bornée . Applications.
21 Applications réciproques ; théorèmes d'existence ; exemples.
22 Exemples d'étude de fonctions définies implicitement.
23 Applications du théorème des fonctions implicites.
24 Exemples d'utilisation de changements de variables en analyse et en géométrie.
25 Fonctions convexes d'une ou de plusieurs variables réelles,applications.
26 Applications de la notion de convexité à des problèmes d'extremum.
27 Problèmes de prolongement de fonctions ; exemples.
28 Exemples d'études qualitatives des solutions ou des courbes intégrales d'une équation différentielle.
29 Fonctions de plusieurs variables réelles ; théorème des accroissements finis et applications.
30 Applications de classe C^k d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.
31 Différentes formules de Taylor . Majoration des restes . Applications.
32 Problèmes d'extremum.
33 Développements limités,applications.
34 Exemples de développements asymptotiques.
35 Intégrales impropres ; exemples .
36 Problèmes d'interversion d'une limite et d'une intégrale . Exemples.
37 Problèmes de dérivabilité en calcul intégral.
38 Exemples d'étude de fonctions définies par une intégrale.
39 Exemples de calculs d'intégrales .
40 Méthodes de calcul approché d'intégrales.
41 Séries : Sommation par paquets , réindexation.
42 Illustrer par des exemples et des contre-exemples la théorie des séries numériques.
43 Calcul approché de la somme d'une série numérique.
44 Comparaison d'une série et d'une intégrale . Applications .
45 Exemples d'étude d'une fonction définie par une série.
46 Différentes notions de convergence d'une suite de fonctions . Exemples.
47 Séries de fonctions,convergence uniforme,convergence normale;exemples.
48 Exemples de problèmes d'interversion de limites.
49 Convergence d'une série entière . Propriétés de la somme d'une telle série.
50 Exemples de développement d'une fonction en série entière.Applications.
51 Série de Taylor.
52 Solutions des équations différentielles $y'=f(x,y)$; solutions maximales.
53 Exemples d'équations différentielles linéaires.
54 Etude détaillée,sur un petit nombre d'exemples,d'équations différentielles non linéaires ; illustrations géométriques.

55 Exemples de problèmes conduisant à des équations différentielles.
56 Divers modes de définition et de représentation des surfaces de $\mathbb{R}^3$. Exemples.
57 Propriétés affines locales des courbes . Exemples.
58 Propriétés métriques des courbes planes ou gauches . Exemples.
59 Exemples d'études de courbes planes.
60 Exemples de recherche et d'études d'enveloppes de droites dans le plan.
61 Etude locale des courbes de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.
62 Mouvement à accélération centrale . Exemples.
63 Mouvement d'un repère orthonormé ; applications à la théorie des courbes gauches et à la cinématique du solide.
64 Mouvement d'un plan sur un plan.
65 Méthodes de calcul approché de solutions numériques des équations $f(x)=0$.
66 Approximation des fonctions numériques par des fonctions polynomiales.
67 Théorèmes limites fondamentaux en calcul des probabilités.
68 Le jeu de pile ou face (variables de Bernoulli indépendantes).
69 Probabilité conditionnelle . Exemples.
70 Loi binomiale , loi de Poisson.
71 Etude locale de champs de vecteurs. Exemples .
72 Exemples de méthodes numériques pour le calcul approché des fonctions élémentaires .
73 Présenter,sur des exemples,des méthodes de résolution approchée d'équations différentielles .
74 Exemples d'équations fonctionnelles .
75 Fonctions périodiques .

BIBLIOTHEQUE DE L'AGRÉGATION

Pendant la préparation de l'oral, les candidats peuvent utiliser les ouvrages mis à leur disposition sur place, dont la liste figure ci-après, ou les ouvrages qu'ils ont apportés eux-mêmes, à condition qu'il s'agisse de livres imprimés, diffusés dans le commerce et dépourvus de notes manuscrites.

En outre, les Ecoles Normales Supérieures déposent un nombre important d'ouvrages à la bibliothèque de l'agrégation pendant la durée du concours: ces ouvrages peuvent bien entendu être consultés par tous les candidats.

La documentation utilisée par les candidats ne saurait contenir des ouvrages que ceux-ci n'auraient qu'à recopier, ce qui ôterait toute signification à l'épreuve. Le jury se réserve donc le droit de ne pas autoriser un ouvrage de ce type, même muni du dépôt légal.

D'autre part, la restriction aux ouvrages imprimés et diffusés dans le commerce répond à un souci d'équité: tout candidat doit pouvoir en principe se procurer tout document autorisé.

Pour ces raisons, le jury n'autorise pas l'usage de montages "raisonnés" d'extraits photocopiés d'articles de revues ou d'encyclopédies; l'utilisation publique de tels montages contrevient en outre aux lois sur le copyright.

Le jury attire enfin l'attention des candidats sur le fait que l'usage ou la tentative d'usage de documents non autorisés pendant la préparation des épreuves orales constitue une fraude ou une tentative de fraude à un concours public et serait sanctionné comme tel.

Liste des ouvrages constituant la bibliothèque de l'agrégation de mathématiques en 1985:

ARNOLD	*Equations différentielles ordinaires*	(MIR)
ARTIN	*Algèbre Géométrique*	(Gauthier-Villars)
BASS	*Cours de Mathématiques,* tomes 1et2	(Masson)
BERGER	*Géométrie,* index, tomes 1 à 5	(CEDIC-Nathan)
	Problèmes de Géométrie rédigés et commentés	(Colin)
BERGER et GOSTIAUX	*Géométrie différentielle*	(Colin)
BIRKHOFF et MACLANE	*Algèbre: 1.Structures fondamentales*	
	2.Les grands théorèmes	(Gauthier-Villars)
BLANCHARD	*Les corps non commutatifs*	(P.U.F.)
BOURBAKI	les volumes suivants:	(Hermann)
	Théorie des ensembles	
	Algèbre	
	Fonctions d'une variable réelle	
	Topologie générale	
	Espaces vectoriels topologiques	
	Intégration	
BOUVIER et RICHARD	*Groupes*	(Hermann)
BROUSSE	*Mécanique*	(Colin)
CABANNES	*Cours de mécanique générale*	(Dunod)
CAGNAC, RAMIS, COMMEAU	*Nouveau cours de Mathématiques Spéciales*	(Masson)
CAGNAC et THIBERGE	*Géométrie, classes terminales C*	(Masson)
CARTAN	*Fonctions analytiques*	(Hermann)
	Formes différentielles	(Hermann)
	Calcul différentiel	(Hermann)
CHAMBADAL et OVAERT	*Cours de Mathématiques* tomes 1 et 2	(Gauthier-Villars)
CHEVALLARD et ROLLAND	*Théorie des séries*	(CEDIC)
CHOQUET	*Cours d'analyse*	(Masson)
	L'enseignement de la géométrie	(Hermann)
CIARLET	*Introduction à l'analyse matricielle et à l'optimisation*	(Masson)
COUTY	*Analyse*	(Colin)
CROUZEIX et MIGNOT	*Analyse numérique des équations différentielles*	(Masson)
DEHEUVELS	*Formes Quadratiques et Groupes classiques*	(P.U.F.)

DIEUDONNE	*Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*	(Hermann)
	Sur les groupes classiques	(Hermann)
	Calcul infinitésimal	(Hermann)
	Eléments d'analyse, tomes 1 et 2	(Gauthier-Villars)
DIXMIER	*Analyse M.P.*	(Gauthier-Villars)
DUBREIL	*Leçons d'algèbre moderne*	(Dunod)
DUBUC	*Géométrie plane*	(P.U.F.)
EXBRAYAT et MAZET	*Algèbre, Analyse, Topologie*	
FADEEV et SOMINSKY	*Recueil d'exercices d'algèbre supérieure*	(MIR)
FELLER	*An introduction to probability theory*	
	and its applications, tomes 1 et 2	(Wiley)
FLORY	*Exercices de Toplogie et d'Analyse*,	
	tomes 1 à 4	(Vuibert)
FRENKEL	*Algèbre et Géométrie*	(Hermann)
	Géométrie pour l'élève professeur	
GANTMACHER	*Théorie des matrices*	(Dunod)
GENET	*Mesure et Intégration*	(Vuibert)
GODEMENT	*Algèbre*	(Hermann)
HARDY et WRIGHT	*An introduction to the theory of numbers*	
	(5th edition)	(Oxford)
HENNEQUIN et TORTRAT	*Théorie des probabilités et quelques*	
	applications	(Masson)
HERVE	*Les fonctions analytiques*	(P.U.F)
JACOBSON	*Basic algebra*, tomes 1 et 2	(Freeman)
KERBRAT	*Géométrie des courbes et des surfaces*	(Hermann)
KNUTH	*The art of computer programming*,	
	(vol.1,2,3)	(Addison-Wesley)
KREE	*Introduction aux mathématiques appliquées*	(Dunod)
KRIVINE	*Théorie axiomatique des ensembles*	(P.U.F.)
LANG	*Introduction aux variétés différentiables*	
	Algèbre	
	Linear Algebra	(Addison-Wesley)
D.LEHMANN-C.SACRE	*Géométrie différentielle des surfaces*	(P.U.F.)
LELONG-FERRAND	*Cours de mathématiques*, tomes 1 à 4	
et ARNAUDIES		(Dunod)
LELONG-FERRAND	*Géométrie différentielle*	(Masson)
MALLIAVIN	*Géométrie différentielle intrinsèque*	(Hermann)
MARTIN	*Géométrie*	(Colin)

METIVIER *Introduction à la théorie des probabilités* (Dunod)

MUTAFIAN *Le défi algébrique* (tomes 1 et 2) (Vuibert)

NEVEU *Bases mathématiques du calcul des probabilités* (Masson)

OVAERT et VERLEY *Exercices et Problèmes, Classes Préparatoires et 1er cycle, Algèbre* (vol.1), *Analyse* (vol.1) (CEDIC-Nathan)

PERRIN *Cours d'algèbre* (E.N.S.J.F.)

POLYA et SZEGO *Problems and theorems in analysis* (tomes 1 et 2) (Springer)

QUERRE *Cours d'algèbre* (Masson)

QUEYSANNE *Algèbre* (Colin)

RALSTON et RABINOWITZ *A first course in numerical analysis* (McGraw-Hill)

RAMIS, DESCHAMPS, et ODOUX *Mathématiques spéciales* (tomes 1 à 5) (Masson)

RIDEAU *Exercices de calcul différentiel* (Hermann)

RIESZ et NAGY *Leçons d'analyse fonctionnelle* (Gauthier-Villars)

RUDIN *Real and complex analysis* (Mac Graw-Hill)

SAMUEL *Théorie algébrique des nombres* (Hermann)

SCHWARTZ *Cours d'analyse* (tomes 1 et 2) (Hermann)

Topologie Générale et Analyse fonctionnelle (Hermann)

SEDGEWICK *Algorithms* (Addison-Wesley)

SERRE *Cours d'arithmétique* (P.U.F.)

SAMUEL *Géométrie projective* (P.U.F)

TITCHMARSH *The theory of functions* (2nd edition) (Oxford)

VALIRON *Cours d'analyse* (tomes 1 et 2) (Masson)

VAUQUOIS *Les probabilités* (Hermann)

WARUSFEL *Structures algébriques finies* (Hachette)

Imprimerie du C.R.D.P. de LILLE. - Dépôt légal 4e trimestre 1986