

Exclu du prêt

8123

Doc.  
AGREGATION 85

MINISTRE DE L'EDUCATION NATIONALE

DIRECTION DES PERSONNELS ENSEIGNANTS A GESTION  
NATIONALE DES LYCEES ET COLLEGES

**UNIVERSITE de NANCY I**  
*Département de Mathématiques*  
**BIBLIOTHEQUE**

AGREGATION  
MATHEMATIQUES

*Rapport présenté par Monsieur NICOLAS  
Professeur à l'université de Limoges  
Président du jury*

1985

## PRESENTATION

### COMPOSITION DU JURY

M. Jean-Louis NICOLAS	<i>Professeur à l'université de Limoges, PRESIDENT</i>
M. Jacques DABLANC	<i>Inspecteur Général de l'éducation nationale, VICE-PRESIDENT</i>
M. Pierre LEGRAND	<i>Inspecteur Général de l'éducation nationale, VICE-PRESIDENT</i>
M. Jean-Michel LEMAIRE	<i>Professeur à l'université de Nice, VICE-PRESIDENT</i>
M. Philippe ANTOINE	<i>Professeur à l'université de Lille I</i>
M. Paul ATTALI	<i>Professeur au lycée Buffon à Paris</i>
M. Pierre BERARD	<i>Professeur à l'université de Savoie à Chambéry</i>
Mme Marie BERGOUNIOUX	<i>Professeur au lycée technique d'Evreux</i>
M. Jean-Pierre BOREL	<i>Maître assistant à l'université de Limoges</i>
M. Paul DEHEUELS	<i>Professeur à l'université Pierre et Marie Curie à Paris</i>
M. Jacques DENEL	<i>Professeur à l'université de Lille I</i>
M. Pierre FEVRIER	<i>Professeur au lycée de Fontainebleau</i>
M. Philippe FLAJOLET	<i>Ingénieur INRIA</i>
M. Michel GONNORD	<i>Professeur au lycée Pierre de Fermat à Toulouse</i>
M. Guy HENNIART	<i>Professeur à l'université de Paris-Sud</i>
M. Francis HUMMEL	<i>Professeur au lycée Thiers à Marseille</i>
M. Thierry JEULIN	<i>Professeur à l'université de Paris VII</i>
M. Jean-Pierre LAVIGNE	<i>Maître assistant à l'université de Nancy I</i>

M. Dominique LEPINGLE	<i>Professeur à l'université d'Orléans</i>
M. Jean-Louis LODAY	<i>Maître de recherche au CNRS</i>
Mme Lucette LOSCO	<i>Professeur à l'université de Besançon</i>
M. Charles MARLE	<i>Professeur à l'université Pierre et Marie Curie à Paris</i>
Mlle Annie MILLET	<i>Maître assistante à l'université d'Angers</i>
Mme Marie-Hélène PERY	<i>Professeur au lycée St-Louis à Paris</i>
M. Jean-Eric PIN	<i>Chargé de recherche au CNRS</i>
Mme Geneviève POURCIN	<i>Professeur à l'université d'Angers</i>
M. Jean-Pierre RAMIS	<i>Professeur à l'université Louis Pasteur à Strasbourg</i>
M. Guy RENAULT	<i>Professeur à l'université de Poitiers</i>
M. François ROUVIERE	<i>Professeur à l'université de Nice</i>
M. Alain TISSIER	<i>Professeur au lycée Albert Schweitzer Le Raincy</i>
M. Eric VAN DER OORD	<i>Professeur au lycée Chateaubriand à Rennes</i>
M. François VAN ISEGHEM	<i>Maître assistant à l'université de Lille I</i>
M. Jean-Pierre VIAL	<i>Professeur au lycée Charlemagne à Paris</i>

## CALENDRIER DES EPREUVES

### EPREUVES ECRITES

Elles ont eu lieu dans les divers centres aux dates suivantes :

- Mathématiques générales : 23 avril, de 8 h à 14 h.
- Analyse : 24 avril, de 8 h à 14 h.
- Mathématiques appliquées : 26 avril, de 8 h à 14 h.

La liste d'admissibilité a été affichée le 6 juin au lycée Montaigne et 34, rue de Châteaudun à Paris.

### EPREUVES ORALES

Elles se sont déroulées du 13 juin au 10 juillet au lycée Montaigne à Paris. La liste d'admission a été affichée le 11 juillet au lycée Montaigne et 34, rue de Châteaudun à Paris.

## STATISTIQUES DIVERSES

### RESULTATS GENERAUX

Postes mis au concours .....	180
Candidats inscrits .....	1 239
Candidats présents à l'épreuve de mathématiques générales .....	971
Candidats présents à l'épreuve d'analyse .....	936
Candidats présents à l'épreuve de mathématiques appliquées .....	896
Admissibles (* étranger) .....	300 + 2*
Admis .....	180 + 1*
Proposés pour l'équivalence des épreuves théoriques du Capes .....	0
Liste supplémentaire .....	0
Moyenne sur 20 des points obtenus par :	
Le premier admissible .....	20
Le dernier admissible .....	4,9
Le premier agrégé .....	17,8
Le dernier agrégé .....	6,6

REPARTITION DES NOTES D'ECRIT

Le tableau ci-dessous indique le nombre  $N(m)$  des candidats ayant obtenu aux épreuves écrites une moyenne sur 20, supérieure (au sens large) à  $m$ .

m	16	14	12	10	9	8	7	6
N(m)	6	15	34	68	8	113	149	212

m	5	4	3	2	1
N(m)	291	378	483	590	728

REPARTITION ENTRE LES OPTIONS

	Informatique	Analyse numérique	Mécanique	Probabilités
Inscrits	136	530	137	436
Présents	79	402	102	313
Admissibles	21	124	44	113
Admis	14	65	24	78

SITUATION UNIVERSITAIRE DES CANDIDATS

Dans le tableau suivant, les notations U, J, C, F, T, correspondent aux candidats des E.N.S. ULM, JOURDAN, ST-CLOUD, FONTENAY et ENSET.

Les autres abréviations sont les suivantes :

E . . . . .	Etudiants
C.P.R. . . . .	Stagiaires de C.P.R.
B.A. . . . .	Professeurs bi-admissibles
P.C. . . . .	Certifiés ; certifiés stagiaires
A. . . . .	Assistants
CO . . . . .	Coopérants ou détachés
S.N. . . . .	Professeurs au service militaire, en congé, en sursis, en disponibilité
D . . . . .	A.E., P.E.G.C., Instituteurs, M.I.-S.E., Professeurs L.T., Divers
M.A. . . . .	Maîtres auxiliaires
P . . . . .	Enseignement privé
I . . . . .	Ingénieurs

Candidats	U	J	C	F	T	E	C.P.R.	B.A.	PC
Inscrits	9	11	18	15	29	101	102	64	549
Admissibles	8	10	17	14	29	43	13	47	81
Admis	8	10	15	11	27	27	4	29	36

Candidats	A	CO	S.N.	M.A.	P	D	I	TOTAL
Inscrits	10	40	39	64	86	94	8	1 239
Admissibles	4	8	11	4	8	3	2	302
Admis	1	4	6	0	1	0	2	181

REPARTITION ENTRE CANDIDATS ET CANDIDATES

	Candidats	Candidats
Inscrits	845	394
Admissibles	233	69
Admis	133	48

## REPARTITION SUIVANT LES CENTRES D'ECRIT

Candidats Centres	Inscrits	Ayant composé aux trois épreuves	Admissibles	Admis
Aix-Marseille	46	29	11	7
Amiens	55	42	7	1
Besançon	13	11	5	1
Bordeaux-Pau	25	15	2	2
Caen	20	13	2	2
Clermont-Ferrand	13	10	4	1
Dijon	20	13	3	2
Grenoble	35	25	9	4
Lille	113	84	20	8
Limoges	6	4	0	0
Lyon-St-Etienne	44	34	13	7
Montpellier	25	19	2	0
Nancy-Metz	54	43	17	9
Nantes	41	39	6	2
Nice	15	11	4	0
Orléans-Tours	36	26	3	1
Paris	376	267	140	107
Poitiers	10	10	4	1
Reims	30	23	6	4
Rennes-Brest	39	28	4	0
Rouen	52	37	8	7
Strasbourg- Mulhouse	32	29	8	2
Toulouse	32	21	6	4
Corse	2	1	0	0
Autres centres	105	44	18	9

# MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

DURÉE : 6 heures

## PRÉAMBULE

Ce problème est consacré à l'étude de la question suivante : étant donné deux polygones du plan (resp. : deux polyèdres de l'espace) de même aire (resp. : de même volume), peut-on découper le premier en morceaux et déplacer ces morceaux de façon à reconstituer le second ?

La partie I met en place les données et fournit quelques résultats généraux. La partie II est l'étude du problème en dimension 2 et la partie III constitue une première approche de cette étude en dimension 3. La partie IV construit les outils nécessaires à une étude plus approfondie, abordée dans la partie V.

## DÉFINITIONS ET NOTATIONS

Soit  $n$  un entier naturel au moins égal à 2 et soit  $E$  un espace affine réel euclidien de dimension  $n$ , muni de sa topologie usuelle. On notera comme d'habitude  $\overset{\circ}{X}$  et  $\overline{X}$  l'intérieur et l'adhérence d'une partie  $X$  de  $E$ .

On appelle *simplexe* de  $E$  toute partie  $S$  de  $E$  qui est l'enveloppe convexe de  $n + 1$  points affinement indépendants de  $E$ ; l'ensemble de ces  $n + 1$  points est uniquement déterminé par  $S$  : c'est l'ensemble des *sommets* du simplexe  $S$ .

Soient  $X$  et  $Y$  des parties de  $E$ ; on dira qu'elles sont *quasi disjointes* lorsque leurs intérieurs sont disjoints, c'est-à-dire  $\overset{\circ}{X} \cap \overset{\circ}{Y} = \emptyset$ . Soient  $X_1, \dots, X_k$ ,  $X$  des parties de  $E$ ; les notations

$$X = \bigsqcup_{i=1}^k X_i \quad \text{ou} \quad X = X_1 \sqcup X_2 \sqcup \dots \sqcup X_k$$

signifient : pour tous  $i, j$  tels que  $1 \leq i < j \leq k$  les parties  $X_i$  et  $X_j$  sont quasi disjointes et la réunion des  $X_i$  est  $X$ .

On appelle *polyèdre* de  $E$  toute partie (éventuellement vide) de  $E$  qui est la réunion d'un ensemble fini de simplexes deux à deux quasi disjoints.

On distingue parmi les polyèdres de  $E$  les *polytopes* : ce sont les polyèdres convexes non vides de  $E$ ; on admettra que les polytopes de  $E$  sont aussi caractérisés parmi les polyèdres par l'une des propriétés suivantes :

- 1° Il existe une partie finie génératrice de  $E$  dont le polytope est l'enveloppe convexe;
- 2° Il existe une famille finie de demi-espaces fermés dont le polytope est l'intersection.

On admettra de plus les résultats suivants sur les polytopes : soit  $P$  un polytope; alors :

- a. Soit  $k$  le nombre minimal de points dont  $P$  est l'enveloppe convexe. Alors il existe une et une seule partie ayant  $k$  éléments dont  $P$  est l'enveloppe convexe; c'est l'ensemble des *sommets* de  $P$ . Dans le cas particulier des simplexes, on retrouve la même notion de sommet;
- b. Soit  $m$  le nombre minimal d'éléments d'un ensemble de demi-espaces fermés dont  $P$  est l'intersection; alors il existe un et un seul tel ensemble ayant  $m$  éléments. Soit  $\{F_1, \dots, F_m\}$  cet ensemble; la frontière  $H_i$  de  $F_i$  est un *hyperplan facial* de  $P$ . La frontière de  $P$  est la réunion des  $H_i \cap P$ , et chaque  $H_i \cap P$  est un polytope de  $H_i$ , appelé *face* de  $P$ .



On admettra sans démonstration que toutes les notions introduites ci-dessus sont invariantes par isométrie (et plus généralement par bijection affine).

On appellera *décomposition* d'un polyèdre  $P$  toute famille finie de polyèdres deux à deux quasi disjoints dont  $P$  est la réunion. Soient  $(P_1, \dots, P_s)$  et  $(P'_1, \dots, P'_t)$  des décompositions du polyèdre  $P$ ; on dira que  $(P'_1, \dots, P'_t)$  est plus fine que  $(P_1, \dots, P_s)$  si tout  $P'_j$  est inclus dans au moins un  $P_i$ .

## PARTIE I. — LES INVARIANTS DE DÉCOUPAGE

Dans cette partie,  $n$  est quelconque.

- I.1. Soient  $P_1, \dots, P_k$  des polyèdres deux à deux quasi disjoints; montrer que leur réunion est un polyèdre.
- I.2. *a.* Montrer que tout polyèdre est l'adhérence de son intérieur. On pourra commencer par le cas des simplexes.
- b.* Montrer que si  $P'$  est un polyèdre quasi disjoint de  $P$ , alors  $\overset{\circ}{P}' \cap P = \emptyset$ .
- I.3. Montrer que si  $P_1, \dots, P_k, P$  sont des polyèdres deux à deux quasi disjoints, alors les polyèdres  $P_1 \perp\!\!\!\perp \dots \perp\!\!\!\perp P_k$  et  $P$  sont quasi disjoints.
- I.4. Soit  $P$  un polyèdre; soit  $(P_i)$  une décomposition de  $P$ , et soit  $(P'_j)$  une décomposition de  $P$  plus fine que  $(P_i)$ ; montrer que chaque  $P_i$  admet une décomposition formée de certains  $P'_j$ .
- I.5. Soit  $P$  un polyèdre; soit  $(H_1, \dots, H_m)$  une famille finie d'hyperplans de  $E$ , contenant les hyperplans faciaux des polyèdres d'une décomposition de  $P$ ; montrer qu'il existe une seule décomposition  $(P_1, \dots, P_r)$  de  $P$  telle que

$$P \setminus \bigcup_{i=1}^m H_i = \bigcup_{j=1}^r \overset{\circ}{P}_j$$

(on pourra, pour chaque point de  $\overset{\circ}{P}$ , considérer l'ensemble des demi-espaces ouverts qui le contiennent et qui ont pour frontière l'un des  $H_i$ ).

Ce type de décomposition sera appelé *dissection* de  $P$ .

- I.6. Étant donné deux décompositions  $(P_i)$  et  $(Q_j)$  d'un polyèdre  $P$ , montrer qu'il existe une dissection  $(R_k)$  de  $P$  telle que chaque  $P_i$  et chaque  $Q_j$  admette pour dissection une sous-famille de  $(R_k)$ .
- Soit  $\Pi$  (resp.  $\Pi_c$ ) l'ensemble des polyèdres (resp. des polytopes) de  $E$ . Soit  $A$  un groupe commutatif noté additivement; on dit qu'une application  $f$  de  $\Pi_c$  dans  $A$  est *additive* lorsque pour tout polytope  $P$  et toute dissection de  $P$  en deux polytopes  $P_1$  et  $P_2$  on a :

$$f(P) = f(P_1) + f(P_2)$$

- I.7. Soit  $f$  une application additive de  $\Pi_c$  dans un groupe commutatif  $\mathfrak{A}$ .
- a.* Montrer que pour tout polytope  $P$  et toute décomposition  $(P_i)$  de  $P$  on a :

$$f(P) = \sum_i f(P_i)$$

(on pourra traiter d'abord le cas d'une dissection).

- b.* Montrer qu'il existe une unique application  $\bar{f}$  de  $\Pi$  dans  $\mathfrak{A}$  qui prolonge  $f$  et telle que l'on ait

$$\bar{f}(P \perp\!\!\!\perp P') = \bar{f}(P) + \bar{f}(P')$$

pour tous polyèdres quasi disjoints  $P$  et  $P'$ .

Soit  $G$  un groupe d'isométries de  $E$ . On dira que deux polyèdres  $P$  et  $Q$  sont *G-équidécomposables* et l'on écrira  $P \underset{G}{\approx} Q$ , s'il existe des décompositions  $(P_i)$  de  $P$ ,  $(Q_i)$  de  $Q$ , et des éléments  $(g_i)$  de  $G$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ , tels que l'on ait  $g_i(P_i) = Q_i$  pour tout  $i$ .

- I.8. Montrer que la relation  $P \underset{G}{\approx} Q$  est une relation d'équivalence sur  $\Pi$ .
- I.9. Montrer que si deux polyèdres admettent des décompositions  $(P_i)$  et  $(Q_i)$  telles que  $P_i$  et  $Q_i$  soient *G-équidécomposables* pour tout  $i$ , alors  $P$  et  $Q$  sont *G-équidécomposables*.

I.10. Soit  $f$  une application additive de  $\Pi_c$  dans le groupe  $\mathcal{A}$  et soit  $\bar{f}$  son prolongement à  $\Pi$ .

On suppose que pour tout  $g$  de  $G$ , et pour tout polytope  $P$ , on a  $f(g(P)) = f(P)$ .

Montrer que l'on a  $\bar{f}(P) = \bar{f}(Q)$  pour tout couple de polyèdres  $G$ -équidécomposables  $(P, Q)$ .

Une telle application  $\bar{f}$  sera appelée dans la suite un invariant de  $G$ -découpage.

On admettra en particulier que pour  $n = 2$  (resp. 3), l'aire (resp. le volume) dans  $E$  est un invariant de  $G$ -découpage à valeurs réelles pour tout groupe d'isométries  $G$ .

## PARTIE II. — ÉQUIDÉCOMPOSABILITÉ DANS LE PLAN

Dans cette partie, on suppose  $n = 2$ . Selon l'usage, on appellera polygones les polyèdres et polygones convexes les polytopes de  $E$ .

Un parallélogramme est l'enveloppe convexe de quatre points non alignés  $A, B, C, D$ , tels que  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ; on parlera alors du parallélogramme (ou du rectangle, ou du carré)  $ABCD$ . Les simplexes de  $E$  sont appelés triangles.

On désignera par  $T$  le groupe des translations de  $E$  et par  $S$  le groupe engendré par  $T$  et une symétrie par rapport à un point.

II.1. Donner les éléments de  $S$ .

II.2. Soient  $ABCD$  et  $A'B'C'D'$  deux parallélogrammes tels que  $A = A', B = B'$  et que  $C, D, C', D'$  soient alignés. Montrer que  $ABCD \underset{T}{\approx} A'B'C'D'$ .

II.3. Montrer que tout triangle est  $S$ -équidécomposable à un parallélogramme.

II.4. En déduire que tout polygone est  $S$ -équidécomposable à une réunion de rectangles d'intérieurs disjoints.

II.5. Soit  $ABCD$  un rectangle tel que  $\|\overrightarrow{AB}\| = a, \|\overrightarrow{AD}\| = b, 0 < b < a$ .

a. Montrer que  $ABCD$  est  $T$ -équidécomposable à un carré. On pourra considérer le carré  $AB'C'D'$  défini par  $\overrightarrow{AB'} = -(\sqrt{b}/\sqrt{a})\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AD'} = -(\sqrt{a}/\sqrt{b})\overrightarrow{AD}$ .

b. Soit  $H$  une droite passant par  $A$  telle que  $ABCD$  soit d'un même côté de  $H$ . Soit  $A'B'C'D'$  l'image de  $ABCD$  par la réflexion de droite  $H$ . Montrer que  $ABCD$  et  $A'B'C'D'$  sont  $T$ -équidécomposables.

c. En déduire que deux rectangles d'aires égales sont  $T$ -équidécomposables.

II.6. A quelle condition deux polygones sont-ils  $S$ -équidécomposables?

II.7. Soit  $\mathcal{A}$  le groupe des applications de l'ensemble des vecteurs non nuls du plan  $E$  dans  $\mathbb{R}$  et soit l'application  $\beta$  de  $\Pi_c$  dans  $\mathcal{A}$  définie comme suit : soit  $P$  un polygone convexe de sommets consécutifs  $A_1, \dots, A_s, A_{s+1} = A_1$ , de sorte que les droites faciales de  $P$  sont les droites  $A_i A_{i+1}$  ( $1 \leq i \leq s$ ) et  $M$  un point intérieur à  $P$ . On pose, pour tout vecteur non nul  $\vec{v}$ ,

$$\beta(P)(\vec{v}) = \sum_{i=1}^s \varepsilon_i(\vec{v}) \|\overrightarrow{A_i A_{i+1}}\|$$

où :

$$\varepsilon_i(\vec{v}) = 0 \text{ si } \vec{v} \cdot \overrightarrow{A_i A_{i+1}} \neq 0$$

$$\varepsilon_i(\vec{v}) = +1 \text{ si } \vec{v} \cdot \overrightarrow{A_i A_{i+1}} = 0 \text{ et } \vec{v} \cdot \overrightarrow{MA_i} > 0$$

$$\varepsilon_i(\vec{v}) = -1 \text{ si } \vec{v} \cdot \overrightarrow{A_i A_{i+1}} = 0 \text{ et } \vec{v} \cdot \overrightarrow{MA_i} < 0$$

a. L'application  $\beta$  dépend-elle du choix de  $M$ ?

b. Montrer que  $\beta$  s'étend en un invariant de  $T$ -découpage.

c. A quelle condition deux triangles sont-ils  $T$ -équidécomposables?

### PARTIE III. — ÉQUIDÉCOMPOSABILITÉ DANS L'ESPACE

On suppose dorénavant  $n = 3$ . Dans cette partie, on aborde l'étude de l'équidécomposabilité des polyèdres de  $E$ , c'est-à-dire de l'équidécomposabilité sous le groupe de toutes les isométries de  $E$ . On écrira simplement  $P \approx Q$  si les polyèdres  $P$  et  $Q$  sont équidécomposables.

- III.1. Établir que, si  $P$  et  $Q$  sont deux parallélépipèdes rectangles de même volume, alors  $P \approx Q$ .
- III.2. *a.* Étant donné un polygone  $B$  d'un plan  $P$  et un vecteur  $\vec{v}$  non parallèle à  $P$ , montrer que l'ensemble des points  $M + t\vec{v}$ , où  $M \in B$  et  $0 \leq t \leq 1$ , est un polyèdre, qu'on appellera un prisme de base  $B$ ; ce prisme est dit droit si  $\vec{v}$  est orthogonal à  $P$ .
- b.* Tout prisme est-il équidécomposable à un cube? On commencera par étudier le cas des prismes droits.
- III.3. On donne dans un repère orthonormé  $Oxyz$ , le tétraèdre  $V$  de sommets les points  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(1, 1, 0)$ , et  $(1, 1, 1)$ .
- a.* Montrer que le cube défini par  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$  admet une décomposition en 6 tétraèdres isométriques à  $V$ .
- b.* Pour tout entier  $m \geq 2$ , exhiber une décomposition de  $V$  en  $m^3$  tétraèdres semblables à  $V$ .
- N.B.* : Ici, et dans la suite, «  $P$  est semblable à  $Q$  dans le rapport  $t > 0$  » signifie que  $P$  se déduit de  $Q$  par la composée d'une isométrie et d'une homothétie de rapport  $t$ ; on ne distingue donc pas les similitudes directes et inverses.
- c.* Dédire de ce qui précède que  $V$  est équidécomposable à un cube.

### PARTIE IV. — L'ESPACE VECTORIEL $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

Une application  $f$  d'un ensemble  $X$  dans  $\mathbb{Z}$  est dite à support fini si l'ensemble des éléments  $x$  de  $X$  tels que  $f(x) \neq 0$  est fini (éventuellement vide). L'ensemble des applications à support fini de  $X$  dans  $\mathbb{Z}$  est manifestement un groupe abélien pour l'addition des applications (on ne demande pas de le vérifier), noté  $\mathbb{Z}^{(X)}$ .

On prend désormais pour  $X$  le produit cartésien  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$  de deux groupes abéliens  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ ; si, pour  $a \in \mathcal{A}$  et  $b \in \mathcal{B}$ ,  $\chi_{(a,b)}$  désigne la fonction qui vaut 1 au point  $(a, b)$  et 0 en tout autre point de  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ , tout élément  $f$  de  $\mathbb{Z}^{(\mathcal{A} \times \mathcal{B})}$  a l'écriture :

$$f = \sum f(a, b) \chi_{(a,b)}$$

où les  $f(a, b)$  sont des entiers relatifs tous nuls sauf un nombre fini d'entre eux.

On désigne par  $\mathcal{R}$  le sous-groupe de  $\mathbb{Z}^{(\mathcal{A} \times \mathcal{B})}$  engendré par les éléments de la forme :

$$\chi_{(a,b)} + \chi_{(a',b)} - \chi_{(a+a',b)}$$

et

$$\chi_{(a,b)} + \chi_{(a,b')} - \chi_{(a,b+b')}$$

où  $a$  et  $a'$  (resp.  $b$  et  $b'$ ) varient arbitrairement dans  $\mathcal{A}$  (resp.  $\mathcal{B}$ ).

On note alors  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  le groupe quotient  $\mathbb{Z}^{(\mathcal{A} \times \mathcal{B})} / \mathcal{R}$  et, pour tout  $(a, b)$  dans  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ , on note  $a \otimes b$  la classe de  $\chi_{(a,b)}$  modulo  $\mathcal{R}$ .

Le groupe  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  est dit produit tensoriel de  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ .

IV.1.a. Établir que l'ensemble des  $a \otimes b$ , où  $(a, b)$  parcourt  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ , est une partie génératrice du groupe  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ .

*b.* Une application  $f$  de  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$  dans un groupe abélien  $\mathcal{C}$  sera dite biadditive si les applications :

$$a \longmapsto f(a, b) \quad \text{et} \quad b \longmapsto f(a, b)$$

de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{C}$  et de  $\mathcal{B}$  dans  $\mathcal{C}$  respectivement sont des homomorphismes.

Établir que l'application  $p$  de  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$  dans  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  définie par :

$$(a, b) \longmapsto a \otimes b$$

est biadditive.

c. Le symbole 0 désignant indifféremment les éléments neutres de  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ , établir :

$$\forall a \in \mathcal{A}, \forall b \in \mathcal{B}, \quad 0 \otimes b = a \otimes 0 = 0$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall a \in \mathcal{A}, \forall b \in \mathcal{B}, \quad (na) \otimes b = a \otimes (nb) = n(a \otimes b)$$

IV.2. Montrer que, si  $f$  est une application biadditive de  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$  dans un groupe abélien  $\mathcal{G}$ , il existe un unique homomorphisme  $\bar{f}$  de  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  dans  $\mathcal{G}$  tel que  $f = \bar{f} \cdot p$ .

IV.3. On suppose ici que  $\mathcal{A}$  est un espace vectoriel sur le corps commutatif  $K$ , et que  $\mathcal{B}$  est un groupe abélien quelconque. On définit une action de  $K$  sur  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  par :

$$\forall k \in K, \forall a \in \mathcal{A}, \forall b \in \mathcal{B}, \quad k.(a \otimes b) = (ka) \otimes b$$

Vérifier que cela définit sur  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  une structure de  $K$ -espace vectoriel.

Le seul exemple de produit tensoriel de deux groupes abéliens qui sera utilisé dans la suite sera  $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , qui a, d'après ce que l'on vient de voir, une structure d'espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  telle que, si  $\bar{z}$  désigne la classe modulo  $\mathbb{Z}$  du réel  $z$  (notation qui sera désormais utilisée systématiquement).

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad \forall z \in \mathbb{R}, \quad (xy) \otimes \bar{z} = x(y \otimes \bar{z})$$

IV.4. Établir que l'on a dans  $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  la propriété suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{Q}, \quad \forall z \in \mathbb{R}, \quad x \otimes (\overline{yz}) = (xy) \otimes \bar{z}$$

Dans la suite, on admet la possibilité de compléter toute famille de réels linéairement indépendants sur  $\mathbb{Q}$  en une base de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{Q}$ .

IV.5. a. Établir l'existence, pour tout nombre irrationnel  $y$ , d'un homomorphisme du groupe  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{Q}$  tel que 1 ait pour image 0 et  $y$  pour image 1.

b. Soient  $x$  et  $y$  deux réels,  $x \neq 0$ ; montrer que l'élément  $x \otimes \bar{y}$  de  $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  est nul si et seulement si  $y$  est rationnel.

c. Montrer que si une famille  $(z_j)$  de réels est libre sur  $\mathbb{Q}$  et si 1 n'est pas engendré par cette famille, alors la famille  $(1 \otimes \bar{z}_j)$  est libre dans l'espace vectoriel réel  $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .

IV.6. a. Établir l'existence d'une suite de polynômes  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ , tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos \theta) = \cos n\theta$$

b. Calculer le terme de plus haut degré de  $T_n$  et son terme constant.

c. On donne un réel  $\theta = \pi p/q$ , où  $p/q \in \mathbb{Q}$ , tel que  $\cos \theta \in \mathbb{Q}$ . Donner les différentes valeurs possibles de  $\cos \theta$ ; on commencera par le cas où  $q$  est impair : on montrera que  $\cos \theta$  est de la forme  $2^{-s}$  ou  $-2^{-s}$ , avec  $s \in \mathbb{N}$ , puis que  $s = 0$  ou 1. On étudiera ensuite le cas où  $q$  est pair.

d. Soit  $\theta_0$  l'angle dièdre intérieur de deux faces d'un tétraèdre régulier. Calculer  $\cos \theta_0$ . Que peut-on dire de  $\theta_0/\pi$ ?

## PARTIE V. — L'INVARIANT DE DEHN

On rappelle que  $n = 3$ . On se propose dans cette dernière partie de définir un invariant de découpage pour les polyèdres de l'espace.

Soit  $P$  un polyèdre convexe, c'est-à-dire un polytope de  $E$ ; les côtés des faces de  $P$  sont appelés arêtes de  $P$  et constituent un ensemble de segments noté  $\mathbf{A}(P)$ ; à chaque arête  $a$  est associée une unique paire  $\{H, H'\}$  de plans faciaux de  $P$  telle que  $a$  soit l'intersection de  $P$ ,  $H$  et  $H'$ . On désigne par  $\theta(a)$  une mesure en radians de l'angle dièdre limité par  $H$  et  $H'$  qui contient  $P$ , et par  $l(a)$  la longueur du segment  $a$ . On pose enfin :

$$\Delta(P) = \sum_{a \in \mathbf{A}(P)} l(a) \otimes \overline{(\theta(a)/\pi)} \in \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

ce qui définit une application de  $\Pi_c$  dans  $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .

V.1. Montrer que  $\Delta$  s'étend en un invariant de découpage, qu'on appelle l'invariant de Dehn.

V.2. a. Quel est l'invariant de Dehn du tétraèdre  $V$  étudié en III.3? Quel est celui d'un cube? Celui d'un prisme?

b. Quel est l'invariant de Dehn d'un tétraèdre régulier d'arête 1? Un tétraèdre régulier est-il équidécomposable à un cube?

V.3. Soit  $P$  un polyèdre tel que  $\Delta(P) \neq 0$ .

a. On donne  $m$  réels strictement positifs  $t_1, t_2, \dots, t_m$  et  $m$  polyèdres  $P_1, P_2, \dots, P_m$  d'intérieurs deux à deux disjoints et tels que, pour tout  $i$  variant de 1 à  $m$ ,  $P_i$  soit semblable à  $P$  dans le rapport  $t_i$ ; soit  $Q$  la réunion des  $P_i$ . Calculer le volume  $v(Q)$  de  $Q$  et  $\Delta(Q)$  en fonction de  $v(P)$ , de  $\Delta(P)$  et des nombres  $t_i$ .

b. En déduire l'existence, pour tout réel  $t \geq 1$ , d'un polyèdre  $P_t$  tel que

$$v(P_t) = v(P) \quad \text{et} \quad \Delta(P_t) = t \cdot \Delta(P)$$

c. Étendre ce résultat au cas  $0 < t < 1$ .

d. Montrer l'existence d'un polyèdre  $P'$  tel que  $\Delta(P') = -\Delta(P)$ .

e. Étendre enfin le résultat du b. au cas d'un réel  $t$  quelconque.

V.4. Montrer que l'ensemble des valeurs de  $\Delta(P)$ , lorsque  $P$  décrit l'ensemble des polyèdres ayant un volume donné non nul  $v_0$ , est un sous-espace vectoriel non réduit à  $\{0\}$  et indépendant de  $v_0$  du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .

Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère orthonormé de  $E$ . On considère l'enveloppe convexe  $D$  des 20 points dont les coordonnées dans ce repère sont :

$$(\pm \rho/2, \pm \rho/2, \pm \rho/2), \quad (\pm \rho^2/2, 0, \pm 1/2), \quad (\pm 1/2, \pm \rho^2/2, 0), \quad (0, \pm 1/2, \pm \rho^2/2)$$

où  $\rho = (1 + \sqrt{5})/2$  est la racine positive de l'équation  $X^2 - X - 1 = 0$ . Le polyèdre  $D$  est un dodécaèdre régulier.

V.5. Dessiner la projection de  $D$  sur le plan  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Soit  $\theta_D$  l'angle dièdre intérieur de deux faces adjacentes de  $D$ . Montrer que :

$$\cos \theta_D = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Calculer  $\Delta(D)$  en fonction de  $\theta_D$ .

V.6. En déduire que :

$$\forall m \in \mathbb{Z} - \{0\}, \quad \text{tg } m \theta_D \in \mathbb{Q}^*$$

V.7. On rappelle que l'enveloppe convexe des centres de gravité des faces de  $D$  est un icosaèdre régulier. Soit  $\theta_I$  l'angle dièdre intérieur de deux faces d'un icosaèdre régulier. Montrer que :

$$\forall m \in \mathbb{Z} - \{0\}, \quad \text{tg } m \theta_I \in \mathbb{Q}^* \cdot \sqrt{5}$$

V.8. Montrer que les réels  $\pi, \theta_D, \theta_I, \theta_0$ , où l'on rappelle que  $\theta_0$  est l'angle dièdre de deux faces d'un tétraèdre régulier (cf. IV.6.d.), sont  $\mathbb{Q}$ -linéairement indépendants.

Que peut-on en conclure?

## RAPPORT SUR L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

L'épreuve de Mathématiques générales proposait cette année un thème d'étude à la fois très ancien, puisqu'il remonte à Euclide, et toujours très actuel, puisqu'un exposé du Séminaire Bourbaki de juin 1985 lui est consacré ! [C].

Comme il était précisé dans l'introduction, il s'agissait d'étudier si, étant donné deux polyèdres de même volume, on peut découper le premier en morceaux polyédraux et réassembler ces morceaux pour reconstituer le second.

La réponse est affirmative en dimension deux, c'est-à-dire dans le cas des polygones, et était essentiellement connue d'Euclide. La deuxième partie du problème conduisait à un résultat plus fin, dû à Hadwiger : les déplacements autorisés des pièces du "puzzle" doivent au moins contenir les translations et les symétries par rapport à un point. En revanche, en dimension trois (et au-delà) la réponse est négative : pour qu'un polyèdre puisse être découpé en morceaux polyédraux et réassemblé en un cube (c'est-à-dire soit équidécomposable à un cube suivant la terminologie de l'énoncé), il est nécessaire qu'un certain invariant, imaginé par Max Dehn vers 1900, soit nul. L'objet de la quatrième partie était de construire et d'étudier l'espace vectoriel réel  $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}$  dans lequel l'invariant de Dehn prend ses valeurs. La cinquième partie définissait cet invariant et abordait l'étude de ses valeurs : on demandait de montrer que l'ensemble des valeurs prises par l'invariant de Dehn sur les polyèdres de volume  $v_0$  donné est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}$ , indépendant de  $v_0$ , et que les invariants d'un tétraèdre d'un dodécaèdre et d'un icosaèdre réguliers sont linéairement indépendants : le sous-espace en question est donc de dimension au moins trois (en fait on peut montrer que sa dimension a la puissance du continu!).

Signalons qu'on a établi assez récemment (J.P. Sydler, 1965) la réciproque (en dimension trois) : deux polyèdres de même volume sont équidécomposables si et seulement si leurs invariants de Dehn sont égaux : on trouvera dans [J] un exposé très clair et accessible à un candidat à l'agrégation du théorème de Sydler. Pour une bibliographie détaillée du sujet et un survol de ses développements actuels, voir [C].

Beaucoup de candidats n'ont traité que la première partie et le début de la quatrième, c'est-à-dire la partie la plus "ingrate" du problème. En outre, certaines erreurs graves relevées dans la première partie révèlent une perception trop formelle des mathématiques chez beaucoup de candidats, perception qui ne semble pas s'appuyer sur de bonnes images mentales : que penser par exemple des dizaines de copies où l'on lit que l'intérieur d'une réunion est égal à la réunion des intérieurs, alors que tout le problème offrait des contre-exemples à cette assertion !

La première partie était consacrée à des généralités indispensables à une définition mathématique précise du sujet. Beaucoup de candidats ont été gênés par une maîtrise insuffisante des notions de base de topologie générale : en dehors de l'erreur déjà signalée, on croit souvent que la frontière d'une partie quelconque de  $\mathbb{R}^n$  est toujours d'intérieur vide, et l'on fait grand usage de boules et de suites pour établir des résultats (1.2 b/, 1.3) qui découlent immédiatement des définitions et propriétés ensemblistes élémentaires de l'adhérence et de l'intérieur. Les questions 1.4 et 1.5 étaient plus délicates : dans 1.4, chaque  $P_i$  est l'adhérence de la réunion des  $P_j$  contenus dans  $\overset{\circ}{P}_i$ , et dans 1.5 les polytopes de la décomposition cherchée sont les adhérences des composantes connexes du complémentaire dans  $P$  de la réunion des hyperplans  $H_i$  : ces idées simples sont rarement formulées de façon claire, même lorsqu'elles sont à peu près perçues. Enfin, dans 1.8, à peine un candidat sur dix s'aperçoit que la transitivité n'est pas triviale et requiert la considération d'une décomposition de  $Q$  plus fine que chacune des décompositions qui assurent  $P \sim Q$  et  $Q \sim R$ .

La deuxième partie remettait à l'honneur la géométrie élémentaire, et a permis à une minorité non négligeable de candidats d'obtenir une note honorable. Signalons que l'équidécomposabilité des polygones sous le groupe  $S$  est proposée comme activité de complément dans le livre de Première  $S$  édité par l'IREM de Strasbourg. La question II.1 est souvent fort mal traitée : en dehors des réponses du genre "S est l'ensemble des symétries, des translations et des produits de symétries et de translations", aussi vraies qu'inacceptables, beaucoup négligent de montrer que  $S$  contient les symétries par rapport à tous les points de  $E_2$ . La question II.5 demandait un réel effort d'imagination géométrique : quelques copies ont proposé des solutions élégantes, utilisant ou non la suggestion de l'énoncé, mais qui reposent toutes sur la dissection suivant  $CC'$ . Dans la question II.6, il fallait choisir les rectangles de mêmes directions de côtés et ayant un côté de même longueur, ce qui est possible grâce aux questions précédentes : il ne reste plus qu'à les juxtaposer par translations pour obtenir un seul rectangle, lui-même  $T$ -équidécomposable à un carré. Dans la question II.7, il ne suffisait évidemment pas d'établir l'invariance de  $\beta$  par translations, d'ailleurs triviale : d'après I.7, il suffisait d'établir en outre l'additivité de  $\beta$  pour une dissection déterminée par une seule droite, ce qui n'était guère difficile.

La partie III a été fort peu abordée, par "peur de l'espace" semble-t-il. Des dessins clairs auraient pourtant suffi pour obtenir l'adhésion des correcteurs. En revanche, il est surprenant de lire assez souvent que si  $S$  est un triangle du plan  $P$  et  $\vec{v}$  un vecteur non contenu dans la direction de  $P$ , l'ensemble des points  $M + t\vec{v}$ , où  $M$  parcourt  $S$  et  $t$  le segment  $[0,1]$  est un simplexe ! là encore, un dessin suffisait à dissiper l'erreur ... La décomposition du cube en six tétraèdres a été vue par quelques candidats, mais personne n'a remarqué que chaque tétraèdre de la décomposition du cube  $[0,1]^3$  est l'ensemble des points dont les coordonnées sont dans l'un des six ordres possibles - rappelons que les inéquations linéaires sont mentionnées dans le programme. Les mêmes candidats ont généralement vu qu'il suffisait de prendre  $m = 6$  dans II.3 c/.

La partie IV commençait par des vérifications de routine plus ou moins traitées par la plupart des copies non vides : une difficulté cependant dans le IV.3 : la vérification de l'axiome d'additivité des homothéties revient à montrer que l'action de  $K$  est bien définie sur  $A \otimes B$  tout entier et pas seulement sur les éléments de la forme  $a \otimes b$  : ceci résulte de IV. 2, appliqué à l'application biadditive de  $A \times B$  dans  $A \otimes B$  définie par  $\forall a \in A, \forall b \in B, (a, b) \mapsto (k.a) \otimes b$ . Pour la question IV.5 : dans a/ on complétait  $(1, y)$  en une  $\mathbb{Q}$ -base de  $\mathbb{R}$  et l'on prenait pour  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$  la coordonnée suivant  $y$  ; dans b/ la réciproque s'obtenait en considérant  $\Psi : \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} / \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  définie (cf. IV.3) par  $\Psi(a \otimes b) = a \cdot \phi(b)$  : certains ont vu l'idée, mais ont pris  $\mathbb{Q}$  comme but de  $\Psi$ , ce qui est impossible. Enfin dans c/ on ne pouvait pas écrire en général  $\sum x_i \otimes z_i = 1 \otimes \sum x_i y_j$  si les  $x_i$  sont réels, mais seulement s'ils sont rationnels (IV.4). La question 6 sur les polynômes de Tchebychev est classique, mais même a/ et b/ ont été souvent bien maladroitement traitées. La question 6 d/ ( $\cos \theta_0 = 1/3$ ) s'obtenait immédiatement par projection orthogonale sur une face (aire de la projection!) ou facilement par trigonométrie élémentaire dans un plan de symétrie.

Enfin la partie V n'a été abordée que par les meilleures copies : les questions V.4 à V.8 ne présentaient pourtant guère de difficulté si l'on s'aidait d'une figure soignée ... et de la formule d'addition des tangentes.

#### Bibliographie

[C] P. CARTIER, Décompositions des polyèdres : le point sur le troisième problème de Hilbert, Séminaire Bourbaki, Exposé n° 646, juin 1985.

[J] B. JESSEN, The algebra of polyhedra and the Dehn-Sydler theorem, Math. Scand. 22 (1968), pp. 241-256.



Répartition des notes (sur 60) obtenues par les candidats  
à l'épreuve de mathématiques générales

Absents .....	268
de 0 à 4 .....	260
de 5 à 9 .....	185
de 10 à 14 .....	193
de 15 à 19 .....	152
de 20 à 24 .....	96
de 25 à 29 .....	45
de 30 à 34 .....	18
de 35 à 39 .....	10
de 40 à 44 .....	3
de 45 à 49 .....	5
de 50 à 54 .....	2
de 55 à 60 .....	2

---

1 239 inscrits

# COMPOSITION D'ANALYSE

DURÉE : 6 heures

## RAPPELS ET NOTATIONS

$\mathbb{R}$  (resp.  $\mathbb{C}$ ) désigne le corps des nombres réels (resp. complexes). Si  $A$  et  $B$  sont des parties de  $\mathbb{R}$ , on note  $A + B$  l'ensemble  $\{x + y \mid x \in A, y \in B\}$ ,  $\overset{\circ}{A}$  (resp.  $\bar{A}$ ) l'intérieur (resp. l'adhérence) de  $A$ ;  $\chi_A$  est la fonction caractéristique de  $A$ , égale à 1 (resp. 0) sur  $A$  (resp.  $\mathbb{R} - A$ ).

On note  $C_0$  l'espace vectoriel des applications continues  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  telles que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

On munit  $C_0$  de la norme de la convergence uniforme  $\|f\|_\infty = \sup \{ |f(x)| \mid x \in \mathbb{R} \}$ .

$\mathfrak{M}$  (resp.  $\mathfrak{Q}$ ) désignera l'ensemble des mesures de Radon complexes (resp. positives non nulles) de masse totale finie sur  $\mathbb{R}$ . On rappelle que l'application qui à un élément  $\mu$  de  $\mathfrak{M}$  fait correspondre la forme linéaire :

$$f \longmapsto \mu(f) = \int f(x) d\mu(x)$$

identifie  $\mathfrak{M}$  à l'ensemble des formes linéaires continues sur  $C_0$ . On munit  $\mathfrak{M}$  de la norme duale  $\|\mu\| = \sup \{ |\mu(f)| \mid \|f\|_\infty = 1 \}$ . En particulier, pour  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\delta_a$  désignera la mesure associée à la forme linéaire  $f \longmapsto f(a)$ .

Si  $\mu$  est une mesure de Radon sur  $\mathbb{R}$ ,  $g$  une fonction  $\mu$ -intégrable, on notera  $g \cdot \mu$  la mesure de densité  $g$  par rapport à  $\mu$ . Soit  $\mu \in \mathfrak{M}$ , on désignera par  $|\mu|$  l'unique mesure positive telle que  $\mu = g \cdot |\mu|$ , où  $|g(x)| = 1$  pour tout  $x$ . Le support de  $\mu$  est l'ensemble  $S(\mu)$  des réels  $x$  tels que pour tout voisinage ouvert  $V$  de  $x$  l'on ait  $|\mu|(V) > 0$ . L'ensemble des éléments de  $\mathfrak{M}$  (resp.  $\mathfrak{Q}$ ) à support contenu dans une partie  $A$  de  $\mathbb{R}$  sera noté  $\mathfrak{M}(A)$  (resp.  $\mathfrak{Q}(A)$ ). On rappelle que  $\mathfrak{M}(\{a\}) = \mathbb{C} \cdot \delta_a$ .

La mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$  est notée  $\lambda$ ;  $L^1$  désigne l'ensemble des classes de fonctions  $\lambda$ -intégrables,  $\gamma$  la fonction  $x \longmapsto e^{-x^2/2}$ . Pour  $f \in L^1$ ,  $\|f\|_1$  désigne le réel  $\|f \cdot \lambda\|$ . On rappelle que  $\|\gamma\|_1 = \sqrt{2\pi}$ .

Soit  $(E, *)$  un monoïde abélien, i.e. un ensemble muni d'une loi de composition  $*$ , commutative, associative et possédant un élément neutre  $e$ . Si  $a, b, c$  sont des éléments de  $E$  tels que  $a = b * c$ , on dira que  $b$  divise  $a$ . Un élément qui divise  $e$  est dit inversible. Si  $a = b * u$ , où  $u$  est inversible, on dit que  $a$  et  $b$  sont associés.

Une partie  $F$  de  $E$  est primaire si tout diviseur d'un élément de  $F$  est soit inversible, soit associé à un élément de  $F$ . Un élément  $a$  de  $E$  est irréductible si le singleton  $\{a\}$  est une partie primaire de  $E$ . On rappelle enfin qu'un élément  $a$  de  $E$  est dit régulier si l'application  $x \longmapsto a * x$  est injective sur  $E$ .

Les trois premières questions de chacune des parties I et II sont consacrées à des résultats préliminaires. Il est demandé aux candidats d'y répondre de manière précise, en justifiant notamment l'interversion des intégrations à l'aide des théorèmes du programme.

Les parties III et IV sont indépendantes.

1° a. Soient  $\mu$  et  $\nu$  deux éléments de  $\mathfrak{M}$ , prouver que l'intégrale :

$$(\mu * \nu)(f) = \int \left( \int f(x+y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

a un sens pour tout élément  $f$  de  $C_0$ , et que l'on définit ainsi un élément  $\mu * \nu$  de  $\mathfrak{M}$  vérifiant  $\|\mu * \nu\| \leq \|\mu\| \cdot \|\nu\|$ .

Montrer que la loi de composition  $*$  munit  $\mathfrak{M}$  d'une structure d'algèbre commutative et associative, admettant pour unité  $\delta_0$ . Vérifier que  $(\mathfrak{A}, *)$  est un sous-monoïde de  $(\mathfrak{M}, *)$ .

b. Soient  $\nu$  un élément de  $\mathfrak{M}$ ,  $f$  un élément de  $L^1$ ; établir que  $\nu * (f \cdot \lambda) = g \cdot \lambda$ , où  $g$  est l'élément de  $L^1$  défini pour  $\lambda$ -presque tout  $x$  par la formule :

$$g(x) = \int f(x-y) d\nu(y)$$

et qu'on notera  $g = \nu * f$ .

2° Soient  $\mu$  et  $\nu$  deux éléments de  $\mathfrak{M}$ . Prouver l'inclusion  $S(\mu * \nu) \subset \overline{S(\mu) + S(\nu)}$ . Donner un exemple où l'on n'a pas  $S(\mu * \nu) \subset S(\mu) + S(\nu)$ .

3° Soient  $\mu$  et  $\nu$  deux éléments de  $\mathfrak{A}$ . Établir l'inclusion :  $S(\mu) + S(\nu) \subset S(\mu * \nu)$ . Quels sont les éléments inversibles du monoïde  $(\mathfrak{A}, *)$  ?

4° Soit  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$ ,  $B$  l'ensemble des couples  $(x, y)$  d'éléments de  $A$  tels que  $x < y$ .

a. Montrer que  $\mathfrak{A}(A)$  est une partie primaire de  $(\mathfrak{A}, *)$ .

b. Prouver que, pour que tout élément de  $\mathfrak{A}(A)$  soit irréductible dans  $\mathfrak{A}$  il faut et il suffit que l'application  $(x, y) \mapsto y - x$  soit injective sur  $B$ .

5° a. Soit  $P$  le polynôme  $P = \sum_{l=0}^{l=n-1} X^l$ . On suppose qu'il existe des polynômes unitaires et à coefficients positifs

$$\text{ou nuls } A = X^p + \sum_{j=0}^{j=p-1} a_j X^j \text{ et } B = X^q + \sum_{k=0}^{k=q-1} b_k X^k \text{ tels que } P = A \cdot B.$$

Montrer que les coefficients  $a_j$  et  $b_k$  de  $A$  et  $B$  ne peuvent prendre que les valeurs 0 ou 1.

b. Pour tout entier naturel strictement positif  $n$  on pose  $\mu_n = \delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_{n-1}$ . Établir que  $\mu_n$  est irréductible dans  $\mathfrak{A}$  si, et seulement si,  $n$  est premier.

c. Donner un exemple d'une famille  $(\nu_i)_{1 \leq i \leq 4}$  d'éléments irréductibles de  $\mathfrak{A}$ , deux à deux non associés, et telle que l'on ait  $\nu_1 * \nu_2 = \nu_3 * \nu_4$ .

6° a. Montrer que l'ensemble des éléments non irréductibles de  $\mathfrak{A}$  est dense dans  $\mathfrak{A}$ .

b. Prouver qu'il en est de même pour l'ensemble des éléments irréductibles. (On pourra, pour approcher une mesure  $\mu$ , se ramener au cas où  $\mu$  est à support compact et considérer les mesures  $\mu + \frac{1}{n} \delta_n$ .)

II

Pour tout nombre réel strictement positif  $h$  on notera  $\gamma_h$  la fonction définie par  $\gamma_h(x) = \frac{1}{h} \gamma\left(\frac{x}{h}\right)$ .

1° Soit  $\mu$  un élément de  $\mathfrak{M}$  tel que pour tout  $h > 0$  l'on ait  $\mu * \gamma_h = 0$ . Montrer, par exemple à l'aide d'une version du théorème de Stone-Weierstrass, que  $\mu = 0$ .

2° a. Pour tout  $\mu \in \mathfrak{M}$  et tout nombre réel  $t$  on pose :

$$\widehat{\mu}(t) = \int e^{-itx} d\mu(x) \tag{1}$$

Prouver que cette intégrale converge et définit une fonction  $\widehat{\mu}$  uniformément continue et bornée sur  $\mathbb{R}$ . Si  $f \in L^1$  on notera  $\widehat{f}$  la fonction  $(f \cdot \lambda)$ .

Vérifier que pour tout couple  $(\mu, \nu)$  d'éléments de  $\mathfrak{M}$  l'on a les relations  $\widehat{(\mu * \nu)}(t) = \widehat{\mu}(t) \cdot \widehat{\nu}(t)$  et  $\int \widehat{\nu}(t) d\mu(t) = \int \widehat{\mu}(t) d\nu(t)$ .

b. Montrer que l'intégrale  $F(z) = \int e^{zx} \gamma(x) d\lambda(x)$  converge pour tout nombre complexe  $z$  et définit une fonction  $F$  holomorphe sur  $\mathbb{C}$ . En déduire l'expression de  $\widehat{\gamma}$ .

3° a. Soient  $\mu \in \mathfrak{M}$ ,  $h > 0$ ; établir que pour presque tout nombre réel  $x$  l'on a (cf. I, 1° b) :

$$\mu * \gamma_h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{h^2 t^2}{2} + itx} \widehat{\mu}(t) d\lambda(t)$$

b. En déduire que l'application  $\mu \mapsto \widehat{\mu}$  est injective et que la relation  $\mu * \gamma = 0$  implique  $\mu = 0$ .

c. Soit  $\mu$  un élément de  $\mathfrak{M}$  tel que  $\widehat{\mu} \in L^1$ . Prouver que  $\mu = g \cdot \lambda$ , où  $g(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{itx} \widehat{\mu}(t) d\lambda(t)$ . En déduire que pour toute application  $\psi$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ , deux fois continûment dérivable et à support compact, il existe un élément  $\mu$  de  $\mathfrak{M}$  tel que  $\widehat{\mu} = \psi$ .

4° Pour  $\mu \in \mathfrak{M}$  on pose  $Z(\mu) = \{t \in \mathbb{R} \mid \widehat{\mu}(t) = 0\}$ .

Caractériser, à l'aide de  $Z(\mu)$ , les éléments réguliers des monoïdes  $(\mathfrak{M}, *)$  et  $(\mathfrak{P}, *)$ .

5° a. Soit  $\mu$  un élément de  $\mathfrak{P}$ , montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

(i) La fonction  $\frac{\widehat{\mu}(t) + \widehat{\mu}(-t) - 2\widehat{\mu}(0)}{t^2}$  est bornée sur  $\mathbb{R}^*$ .

(ii)  $\int x^2 d\mu(x) < +\infty$

(iii)  $\widehat{\mu}$  est de classe  $C^2$ .

b. Soient  $\mu$  et  $\nu$  deux éléments de  $\mathfrak{P}$  tels que  $\mu$  divise  $\nu$  et  $\nu$  divise  $\mu$  dans  $\mathfrak{P}$ . Prouver que  $\mu$  et  $\nu$  sont associées dans  $\mathfrak{P}$ .

6° a. Soient  $\mu$  un élément de  $\mathfrak{M}$ ,  $T$  un réel strictement positif, montrer qu'il est équivalent de dire :

(i)  $\widehat{\mu}$  est  $T$ -périodique

(ii)  $\mu \in \mathfrak{M}\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \mathbb{Z}\right)$ .

Dans ces conditions, quelle est la série de Fourier de  $\widehat{\mu}$ ?

b. Vérifier qu'il existe un élément  $\nu_0$  de  $\mathfrak{P}(\mathbb{Z})$  tel que  $\widehat{\nu_0}(t) = 1 - \frac{2|t|}{\pi}$  pour  $|t| \leq \pi$ .

c. Application :

Soit  $a$  un nombre réel strictement positif. Montrer qu'il existe un élément  $v_1$  de  $\mathfrak{N}$  tel que  $\|v_1\| = a$  et que  $v_1(t) = t$  pour  $|t| \leq a$ . Soit  $\mu$  un élément de  $\mathfrak{N}([-a, a])$ , établir que  $\mu$  est dérivable et que l'on a l'inégalité  $\|(\hat{\mu})'\|_\infty \leq a \|\hat{\mu}\|_\infty$ .

Soit  $P$  un polynôme de degré  $n$  à coefficients complexes, prouver l'inégalité :

$$\sup \left\{ |P'(z)| \mid |z| \leq 1 \right\} \leq n \cdot \sup \left\{ |P(z)| \mid |z| \leq 1 \right\}.$$

III

1° Soit  $\mu$  un élément de  $\mathfrak{R}$ ,  $R$  un nombre réel strictement positif; on suppose que la fonction  $\mu$  se prolonge en une fonction analytique dans le disque  $D_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ .

a. Soit  $r \in ]0, R[$ , montrer que la suite  $n \mapsto \frac{r^{2n}}{(2n)!} \int x^{2n} d\mu(x)$  est bornée. (On pourra s'inspirer du II. 5° a.)

b. En déduire que la suite  $n \mapsto \frac{r^n}{n!} \int |x|^n d\mu(x)$  est bornée et que la fonction  $x \mapsto e^{mx}$  est  $\mu$ -intégrable pour tout  $m \in ]-R, R[$ .

2° Pour tout élément  $\mu$  de  $\mathfrak{R}$  on note  $J_\mu$  l'ensemble des réels  $m$  tels que la fonction  $x \mapsto e^{mx}$  soit  $\mu$ -intégrable.

a. Montrer que  $J_\mu$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et que pour tout couple  $(\mu, \nu)$  d'éléments de  $\mathfrak{R}$  l'on a  $J_{\mu * \nu} = J_\mu \cap J_\nu$ .

b. On suppose  $J_\mu$  non vide et on note  $B_\mu$  la bande  $B_\mu = \{t = u + iv \in \mathbb{C} \mid v \in J_\mu\}$ ,  $B'_\mu = B_\mu \cup \mathbb{R}$ . Établir que la formule (1) du II. 2° définit une fonction de la variable complexe  $t$ , continue sur  $B'_\mu$  et holomorphe dans  $B_\mu$ , que l'on notera encore  $\hat{\mu}$ .

3° a. Dans les hypothèses précédentes, prouver que pour tout  $v \in J_\mu$  et tout nombre réel  $u$  l'on a

$$|\hat{\mu}(u + iv)| \leq |\hat{\mu}(iv)| \tag{2}$$

b. En déduire que la fonction d'une variable réelle  $\psi(v) = \text{Log } |\hat{\mu}(iv)|$  est convexe sur l'intervalle  $J_\mu$ .

c. Pour tout nombre réel  $k$  supérieur ou égal à un, on désigne par  $\mathfrak{R}_k$  l'ensemble des éléments  $\mu$  de  $\mathfrak{R}$  tels que  $J_\mu = \mathbb{R}$  et que la fonction  $v \mapsto (1 + |v|)^{-k} \psi_\mu(v)$  soit bornée sur  $\mathbb{R}$ . Prouver que  $\mathfrak{R}_k$  est une partie stable et primaire de  $\mathfrak{R}$ .

4° a. Soit  $f$  une fonction holomorphe dans  $D_R$  et telle que  $f(0) = 0$ ; on suppose qu'il existe une constante strictement positive  $A$  telle que pour tout  $z \in D_R$  l'on ait  $\text{Re}(f(z)) \leq A$ ; prouver alors l'inégalité :

$$\forall z \in D_R, |f(z)| \leq \frac{2A|z|}{R - |z|} \quad \left( \text{on pourra considérer la fonction } g(z) = \frac{f(z)}{2A - f(z)} \right).$$

Dans le cas où  $f$  est en outre une fonction entière, en déduire l'inégalité :

$$\sup \left\{ |f(z)| \mid |z| \leq R \right\} \leq 2 \sup \left\{ \text{Re}(f(z)) \mid |z| \leq 2R \right\}$$

b. Soient  $k \geq 1$ ,  $\mu$  un élément de  $\mathfrak{R}_k$ , on suppose que la fonction  $\mu$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{C}$ . Montrer que  $\hat{\mu}(t) = e^{P(t)}$ , où  $P$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $k$ .

En déduire que le degré de  $P$  est au plus égal à deux. (On pourra déterminer un équivalent de  $P(iv e^{i\theta})$ , quand  $v$  tend vers  $+\infty$ , et utiliser l'inégalité (2) avec un choix convenable de  $\theta$ .) Que peut-on dire de  $\mu$  si  $P$  est de degré un?

c. On pose  $v_h = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \gamma_h \cdot \lambda$ . Montrer que l'ensemble  $\{v_h \mid h > 0\}$  est une partie stable et primaire de  $\mathfrak{R}$ .

5° a. Pour tout nombre réel strictement positif  $r$  on pose  $\lambda_r = \chi_{[-r, r]} \cdot \lambda$ . Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le quotient  $r/s$  pour que  $\lambda_r$  et  $\lambda_s$  aient un diviseur commun non inversible dans  $(\mathfrak{R}, *)$ .

b. Montrer que pour tout nombre réel  $m$  assez grand la mesure  $\mu_m = \lambda_1 + \delta_m * \lambda_{\sqrt{2}}$  est irréductible dans  $\mathfrak{R}$ .

IV

Le but de cette partie est de donner une condition suffisante de divisibilité dans  $\mathfrak{N}(\mathbb{Z})$ .

1° Montrer que  $\mathfrak{N}(\mathbb{Z})$  est une sous-algèbre fermée de  $\mathfrak{N}$ . Soit  $\mu \in \mathfrak{N}(\mathbb{Z})$ , on pose  $a_k = \mu(\{k\})$ ; établir que  $\|\mu\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{|k| \leq n} |a_k|$  et que  $\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{|k| \leq n} a_k \cdot \delta_k$ , la convergence ayant lieu dans  $\mathfrak{N}$ . Prouver enfin que si  $|\mu(\{0\})| > \frac{1}{2} \|\mu\|$ ,  $\mu$  est inversible dans  $\mathfrak{N}(\mathbb{Z})$ .

2° Pour tout nombre réel  $a$  tel que  $0 < a < \pi$ , on notera  $E_a$  l'ensemble des applications de classe  $C^2$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ , nulles en dehors de l'intervalle  $[-a, a]$ . Si  $f \in E_a$ , on lui associe la fonction  $\check{f}$  définie par :

$$\check{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int f(t) e^{itx} d\lambda(t)$$

a. Montrer que  $\check{f}$  est définie, continue et intégrable sur  $\mathbb{R}$ , et que la suite  $n \mapsto \sum_{|k| \leq n} \check{f}(k) \delta_k$  converge, lorsque  $n$  tend vers l'infini, vers un élément  $\mu[f]$  de  $\mathfrak{N}(\mathbb{Z})$ .

Calculer  $\widehat{\mu[f]}$ .

b. Soit  $a'$  un nombre réel tel que  $a < a' < \pi$ ,  $\varphi$  un élément de  $E_{a'}$ , tel que pour tout  $x \in [-a, a]$  l'on ait  $\varphi(x) = 1$ . Prouver que pour tout  $f \in E_a$  l'on a :  $\check{f} = \check{f} * (\check{\varphi} \cdot \lambda)$ .

En déduire qu'il existe une constante  $k_a$ , ne dépendant que de  $a$ , telle que pour tout élément  $f$  de  $E_a$  l'on ait l'inégalité  $\|\mu[f]\| \leq k_a \|\check{f}\|_1$ .

3° a. On se fixe un élément  $\varphi_1$  de  $E_2$  tel que  $\varphi_1(x) = 1$  pour  $|x| \leq 1$ , et on pose, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $\varphi_n(x) = \varphi_1(nx)$  et  $\nu_n = \mu[\varphi_n]$ .

Montrer que la suite  $(\nu_n)$  est bornée dans  $\mathfrak{N}(\mathbb{Z})$  et que,

$$\text{pour tout entier relatif } m, \quad \|(\delta_m * \nu_n) - \nu_n\| \xrightarrow[n > x]{} 0.$$

En déduire que pour tout élément  $\mu$  de  $\mathfrak{N}(\mathbb{Z})$ ,

$$\|(\mu - \widehat{\mu}(0) \delta_0) * \nu_n\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

b. Soit  $\mu \in \mathfrak{N}(\mathbb{Z})$ , on suppose  $\widehat{\mu}(0) \neq 0$ ; prouver qu'il existe un élément inversible  $\nu$  de  $\mathfrak{N}(\mathbb{Z})$  tel que les fonctions  $\widehat{\mu}$  et  $\widehat{\nu}$  coïncident sur un voisinage de 0 dans  $\mathbb{R}$ .

4° Soient  $\mu, \nu \in \mathfrak{N}(\mathbb{Z})$ . Montrer que si  $Z(\mu) \subset \overset{\circ}{Z}(\nu)$ , alors  $\mu$  divise  $\nu$  dans  $\mathfrak{N}(\mathbb{Z})$ .  
Caractériser les éléments inversibles de  $\mathfrak{N}(\mathbb{Z})$ .

## ANALYSE : RAPPORT D'ECRIT

L'objet du problème était l'étude de quelques propriétés de factorisation, pour la convolution, des mesures bornées sur  $\mathbb{R}$ . Il s'inspirait des travaux de P. Lévy, H. Cramer, D.A. Raikov et D. Dugué, dans la première moitié de ce siècle.

La première partie avait pour thème le lien entre les propriétés de divisibilité d'une mesure et la géométrie de son support. On trouve l'essentiel des résultats dans (1) et (2).

La seconde partie était consacrée aux propriétés classiques de la transformation de Fourier. Les questions 4, 5 et 6 en étaient des applications directes.

La troisième partie concernait les mesures positives à transformée de Fourier analytique dans une bande. Elle débouchait sur le théorème de Cramer et sur un exemple de mesure irréductible absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Toutes ces propriétés sont données dans (1).

Enfin la quatrième partie, presque entièrement indépendante des précédentes, donnait une version du lemme de Wiener, en suivant d'assez près l'exposé qui en est fait dans (3).

Le sujet faisait constamment appel aux propriétés de l'intégrale de Lebesgue, du niveau de la maîtrise.

C'est dire que les candidats qui n'en avaient qu'une connaissance superficielle ont été lourdement pénalisés. Faut-il rappeler une fois de plus que le jury attend des candidats une familiarité suffisante avec le théorème de convergence dominée et le théorème de Fubini d'une part, avec la théorie élémentaire des fonctions holomorphes d'autre part.

Inversement ceux qui ont su répondre de manière correcte aux questions simples d'analyse classique des parties II et III ont eu une note convenable.

Les remarques qui suivent concernant les diverses questions du problème ne veulent pas en être un corrigé ; leur propos est critique, et elles s'étendent volontiers sur les questions traitées par le plus grand nombre, en délaissant celles qui n'ont été abordées, d'ailleurs souvent de manière satisfaisante, que par une minorité de candidats.

I.1.a) Les mesures produit réservant parfois des surprises, il convient de justifier la mesurabilité des fonctions auxquelles on applique le théorème de Fubini. D'autre part, l'anneau  $\mathcal{M}$  n'étant pas intègre, il était nécessaire d'établir que le produit de convolution de deux mesures positives non nulles est non nul.

D'une manière générale, beaucoup de candidats ont semblé gênés par les mesures complexes, malgré le mode d'emploi ( $\mu = g|\mu|$ ), fondé sur le théorème de Radon-Nikodym, qui en était donné dans l'introduction. C'est ainsi que souvent des preuves sont incorrectes faute de valeurs absolues.

b) Il ne fallait pas se contenter d'un calcul formel, et prendre soin d'établir la convergence pour presque tout  $x$  de l'intégrale définissant  $g$ .

2) Beaucoup de solutions confuses ont été données à cette question. Il était préférable de chercher d'abord le support de la mesure produit  $\mu \otimes \nu$  puis de considérer le produit de convolution comme mesure image, en remarquant qu'il résulte du théorème de convergence dominée que si une fonction mesurable est nulle sur le support d'une mesure, elle est alors d'intégrale nulle.

Enfin, un contre-exemple ne pouvait être trouvé qu'avec des supports non bornés (la somme d'un compact et d'un fermé est toujours fermée).

5) Le but de cette question était de montrer que l'irréductibilité d'une mesure n'est pas nécessairement liée à l'irrégularité de son support.

Les candidats qui ont supposé a priori  $A$  et  $B$  à coefficients entiers ont obtenu des solutions rapides mais qui n'avaient, hélas, rien à voir avec l'énoncé. La clef de la solution était de remarquer que  $A$  et  $B$  ayant des racines deux à deux conjuguées et de module un, étaient réciproques. Supposant par exemple  $p \leq q$ , on montrait alors, en considérant les termes de degré  $q$ , que pour  $j > 0$ , l'hypothèse  $a_j > 0$  entraînait  $b_j = 0$ , puis par récurrence que  $a_j + b_j = 1$  pour  $j \leq p$ .

6) Cette question relativement facile n'a obtenu que peu de réponses.

II.1) Il fallait montrer que l'espace vectoriel  $E$  engendré par les fonctions  $\gamma_h$  et leurs translatées ( $\gamma$  est paire!) est dense dans  $C_0$ , ce qui pouvait se faire soit en établissant que  $f * \gamma_h$  converge uniformément vers  $f$  quand  $h$  tend vers zéro, soit en appliquant le théorème de Stone-Weierstrass à l'espace compact  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Il était nécessaire dans ce cas de vérifier que les éléments de  $E$  ne s'annulent pas tous en un même point de  $\mathbb{R}$ .

2.a) Beaucoup de démonstrations de l'uniforme continuité de  $\hat{\mu}$  ont été incorrectes. Il suffisait de remarquer l'inégalité :

$$\hat{\mu}(t+h) - \hat{\mu}(t) \leq \int |e^{ihx} - 1| d|\mu|(x)$$

et d'appliquer le théorème de convergence dominée.

b) Signalons entre autres erreurs que la fonction  $e^{-ax-x^2/2}$  n'est ni équivalente à  $e^{-x^2/2}$  quand  $x$  tend vers l'infini ni majorée sur  $\mathbb{R}$  par  $e^{-|a|x-x^2/2}$ .



On attendait des candidats qu'ils déterminent l'expression de  $F(z)$  par prolongement analytique à partir de son calcul, élémentaire par changement de variable, pour  $z$  réel. Les correcteurs ont regretté de trouver trop de "changements de variable"  $x \rightarrow z+x$  ou de dérivations sous le signe intégral non justifiés.

3.a) Le jury s'est montré sévère pour cette vérification d'une formule donnée dans l'énoncé.

c) Il ne suffisait pas de vérifier que  $\mu * \gamma = (g \cdot \lambda) * \gamma$  car  $g$  n'est pas a priori intégrable. On pouvait tourner la difficulté en étudiant  $(g \cdot \gamma \cdot \lambda) * \gamma$ .

4) Trop peu de candidats ont vu que la condition cherchée était la vacuité non de  $Z(\mu)$ , mais de son intérieur.

5.a) L'implication difficile était  $i) \implies ii), iii)$ , et reposait sur le lemme de Fatou. Rappelons qu'un développement limité n'a qu'une signification locale et que l'égalité  $f(x) = g(x) + o(1)$  quand  $x$  tend vers zéro ne permet pas de déduire l'intégrabilité de  $f$  de celle de  $g$ , même par rapport à une mesure bornée!

6) Peu de candidats ont osé se lancer dans des calculs pourtant simples de coefficients de Fourier, qui leur auraient permis d'améliorer leur note.

III.1.a) Il fallait montrer par récurrence, en utilisant II.5.a) que 
$$\hat{\mu}^{(2n)}(0) = (-1)^n \int x^{2n} d\mu(x)$$
 et non se contenter de vagues allusions...

3.b) Il était commode d'utiliser le fait que  $\Psi$  est harmonique dans un voisinage de  $J_\mu$  et atteint un maximum pour  $v$  réel.

### Bibliographie

- (1) D. Dugué, Arithmétique des lois de probabilité, Gauthier Villars, 1957.
- (2) Linnik, Décompositions des lois de probabilité, Gauthier Villars, 1962.
- (3) N. Wiener, The Fourier Integral and certain of its applications, Dover 1933.

### Répartition des notes

0 à 4	:	500	30 à 34	:	20
5 à 9	:	158	35 à 39	:	21
10 à 14	:	129	40 à 44	:	13
15 à 19	:	48	45 à 49	:	7
20 à 24	:	20	50 à 54	:	4
25 à 29	:	24	55 à 60	:	8

## ANALYSE NUMÉRIQUE

*Les candidats sont priés de respecter les notations de l'énoncé et la numérotation des questions. Dans la correction des copies il sera tenu compte de la clarté des démonstrations ainsi que du soin apporté à leur rédaction.*

L'épreuve est consacrée à l'étude de certains problèmes en optimisation. Dans la première partie on étudie une condition d'optimalité pour le problème  $\max \{f(x) \mid x \in A \subset \mathbb{R}^n\}$ .

La deuxième partie traite de particularisations de la condition énoncée en I.

La troisième partie constitue une étude d'un algorithme permettant de résoudre le problème particulier  $\max \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}_+^n\}$ .

Enfin, dans la quatrième partie, il s'agit d'étudier des propriétés et un algorithme pour résoudre le problème  $\max \{f(x) \mid x \in A\}$ .

### NOTATIONS ET DÉFINITIONS GÉNÉRALES

$\mathbb{N}$  l'ensemble des entiers naturels  $\{0, 1, \dots, \dots\}$ .

$\mathbb{R}$  le corps des réels,  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ ,  $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ ,  $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^*$ .

$\mathbb{R}^n$  l'espace vectoriel euclidien à  $n$  dimensions ;

Si  $x \in \mathbb{R}^n$ , les composantes de  $x$  seront notées  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

$\langle x, y \rangle$  le produit scalaire de  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $y \in \mathbb{R}^n$ .

$\|x\|$  la norme euclidienne de  $x \in \mathbb{R}^n$ .

$\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i \geq 0\}$

Si  $A \subset \mathbb{R}^n$  on note :

À l'intérieur de  $A$ ,  $\bar{A}$  l'adhérence de  $A$ ,  $\text{Fr}(A)$  la frontière de  $A$ .

$\text{co}(A)$  l'enveloppe convexe de  $A$ .

$\overline{\text{co}}(A)$  l'enveloppe convexe fermée de  $A$ .

$\mathcal{P}(A)$  l'ensemble des parties de  $A$ .

Si  $A \subset \mathbb{R}^n$  on appelle cône tangent à  $A$  en  $x \in A$  l'ensemble :

$$T(A, x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \forall k \in \mathbb{N}, \exists x_k \in A, \exists \lambda_k \in \mathbb{R}^+, x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x, \lambda_k(x_k - x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y\}$$

Si  $K$  est un cône de  $\mathbb{R}^n$  on définit son cône polaire négatif par l'ensemble :

$$\Gamma(K) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \forall z \in K, \langle y, z \rangle \leq 0\}$$

Étant donné  $X \subset \mathbb{R}^n$ , on dit qu'une application  $A$  de  $X$  dans les parties de  $\mathbb{R}^n$  (c'est-à-dire une application multivoque de  $X$  dans  $\mathbb{R}^n$ ) est :

- ouverte en  $\bar{x} \in X$  si et seulement si pour tout  $y \in A(\bar{x})$  et toute suite  $(x_k)_N$  de  $X$  convergeant vers  $\bar{x}$  il existe une suite  $(y_k)_N$  de  $\mathbb{R}^n$  convergeant vers  $y$  et il existe  $k_0$  tels que  $\forall k \geq k_0, y_k \in A(x_k)$ ;
- fermée en  $\bar{x} \in X$  si et seulement si pour toute suite  $(x_k)_N$  de  $X$  convergeant vers  $\bar{x}$  et pour toute suite  $(y_k)_N$  de  $\mathbb{R}^n$  convergeant vers  $\bar{y}$  et vérifiant  $\forall k \in \mathbb{N}, y_k \in A(x_k)$  on a  $\bar{y} \in A(\bar{x})$ .

Si  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  on note  $V(\bar{x})$  l'ensemble des voisinages de  $\bar{x}$  et pour  $\varepsilon > 0$

$B(\bar{x}, \varepsilon)$  la boule ouverte de centre  $\bar{x}$  et de rayon  $\varepsilon$ .

Si  $f$  est une application de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  alors :

- on note  $\nabla f(x)$  le gradient (Frechet) de  $f$  au point  $x \in \mathbb{R}^n$ , s'il existe.
- pour  $d \in \mathbb{R}^n - \{0\}$  on dit que  $f$  possède une dérivée directionnelle le long de  $d$  en  $x$  si 
$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{f(x + \theta d) - f(x)}{\theta} \right\}$$
 existe et on note  $f'(x; d)$  cette limite.
- $f$  est par définition concave si  $-f$  est convexe.

Pour tout  $(x, d) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , on note :

$$D^+(x; d) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists \theta \in \mathbb{R}^+, y = x + \theta d\}$$

$$[x, d] = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \exists \lambda \in [0, 1], z = \lambda x + (1 - \lambda) d\}$$

$$]x, d[ = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \exists \lambda \in ]0, 1[, z = \lambda x + (1 - \lambda) d\}$$

On considérera dans cette épreuve, des problèmes d'optimisation. Ils seront notés soit  $\max \{f(x) \mid x \in A\}$  soit sous une forme plus détaillée :

$$\begin{array}{l} \vdots \\ \max f(x) \\ \vdots \\ x \in A \end{array}$$

Pour un problème d'optimisation  $\max \{f(x) \mid x \in A\}$  on dira que :

- $A$  est le domaine réalisable.
- $\bar{x}$  est une solution locale si et seulement si  $\exists V \in V(\bar{x}), \forall x \in A \cap V, f(x) \leq f(\bar{x})$ .
- $\bar{x}$  est une solution locale stricte si et seulement si  $\exists V \in V(\bar{x}), \forall x \in A \cap V, x \neq \bar{x}, f(x) < f(\bar{x})$ .
- $\bar{x}$  est une solution optimale si et seulement si  $\forall x \in A, f(x) \leq f(\bar{x})$ .

#### PRÉLIMINAIRE

Q.1. Soient  $X$  une partie de  $\mathbb{R}^n$ ,  $Y$  une partie de  $\mathbb{R}^m$ ,  $A$  une application de  $Y$  dans  $\mathcal{Q}(X)$ ,  $f$  une application de  $X \times Y$  dans  $\mathbb{R}$ .

On considère le problème d'optimisation paramétré par  $y \in Y$  suivant :

$$\mathbf{P}(y) \begin{array}{l} \vdots \\ \max f(x, y) \\ \vdots \\ x \in A(y) \end{array}$$

et on note  $v(y)$  la valeur optimale de  $\mathbf{P}(y)$

$S(y)$  l'ensemble des solutions optimales de  $\mathbf{P}(y)$  que l'on suppose non vide quel que soit  $y$  dans  $Y$ .

Montrer que :

- Si  $X$  est compact,  $A$  fermée en  $y_0$ ,  $f$  semi-continue supérieurement en tout point de  $A(y_0) \times \{y_0\}$  alors  $v$  est semi-continue supérieurement en  $y_0$ .
- Si  $A$  est ouverte en  $y_0$ , si  $f$  est semi-continue inférieurement en tout point de  $A(y_0) \times \{y_0\}$  alors  $v$  est semi-continue inférieurement en  $y_0$ .
- Si  $A$  est ouverte et fermée en  $y_0$ , si  $f$  est continue en tout point de  $A(y_0) \times \{y_0\}$  alors l'application  $S$  est fermée en  $y_0$ .

PREMIÈRE PARTIE

Q.2. Dans cette partie,  $A$  représente une partie de  $\mathbb{R}^n$  et  $\bar{x}$  un point de  $A$ .

a. Montrer que le cône tangent à  $A$  en  $\bar{x}$  est fermé.

b. Si  $A$  est convexe montrer que  $T(A, \bar{x})$  est convexe et montrer que :

$$T(A, \bar{x}) = \overline{\{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists \lambda \in \mathbb{R}^+, \exists x \in A : y = \lambda(x - \bar{x})\}}$$

Q.3. Soient  $m$  applications de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ , notées  $g_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ).

On suppose que  $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, \dots, m\}, g_i(x) \geq 0\}$  et que les  $g_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) sont différentiables en  $\bar{x}$ .

On note  $E(\bar{x})$  l'ensemble des indices  $i$  de  $\{1, \dots, m\}$  tels que  $g_i(\bar{x}) = 0$  et  $K'(A, \bar{x})$  l'ensemble des  $y$  de  $\mathbb{R}^n$  tels que  $\forall i \in E(\bar{x}), \langle \nabla g_i(\bar{x}), y \rangle \geq 0$ .

a. Montrer que  $T(A, \bar{x}) \subset K'(A, \bar{x})$ .

b. Montrer que si les  $g_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) sont affines (c'est-à-dire si  $A$  est un polyèdre) alors  $T(A, \bar{x}) = K'(A, \bar{x})$ .

c. Montrer que s'il existe  $d \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\forall i \in E(\bar{x}), \langle \nabla g_i(\bar{x}), d \rangle > 0$  alors  $T(A, \bar{x}) = K'(A, \bar{x})$ .

Q.4. Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ . On considère le problème d'optimisation :

$$\left. \begin{array}{l} \max f(x) \\ x \in A \end{array} \right\}$$

Montrer que si  $f$  est différentiable en  $\bar{x}$  et si  $\bar{x}$  maximise localement  $f$  sur  $A$  alors  $\nabla f(\bar{x}) \in \Gamma(T(A, \bar{x}))$ .

On dira, dans la suite du problème, qu'un point  $\bar{x}$  est stationnaire pour le problème  $\max \{f(x) \mid x \in A\}$  si  $\bar{x} \in A$  et si  $\bar{x}$  vérifie la condition nécessaire énoncée en Q.4., c'est-à-dire  $\nabla f(\bar{x}) \in \Gamma(T(A, \bar{x}))$ .

DEUXIÈME PARTIE

L'objet de cette partie est de donner des conditions suffisantes permettant de caractériser, dans certains cas, le cône polaire d'un cône tangent et d'expliciter la condition nécessaire d'optimalité trouvée à la question Q.4.

Q.5. Soit  $A$  un convexe de  $\mathbb{R}^n$  et soient  $x$  et  $y$  deux points de  $\mathbb{R}^n$  tels que  $x \in \overset{\circ}{A}$  et  $y \notin \overset{\circ}{A}$ .

Montrer que  $[x, y] \cap \text{Fr}(A)$  est un ensemble réduit à un élément, noté  $z$ , et que  $[x, z[ \subset \overset{\circ}{A}$ .

Q.6. Si  $A$  et  $B$  sont deux convexes de  $\mathbb{R}^n$  tels que  $\overset{\circ}{A} \cap B \neq \emptyset$ , montrer que  $\overline{\overset{\circ}{A} \cap B} = \overline{\overset{\circ}{A}} \cap \overline{B}$ .

Q.7. Soient  $K$  un cône de  $\mathbb{R}^n$ ,  $C_1$  et  $C_2$  deux cônes fermés de  $\mathbb{R}^n$  et  $K_1$  et  $K_2$  deux cônes convexes fermés de  $\mathbb{R}^n$ .

Démontrer successivement que :

a.  $\Gamma(\Gamma(K)) = \overline{c\sigma(K)}$

b.  $\Gamma(K) = \Gamma(\overline{c\sigma(K)})$

c.  $C_1 \cup C_2 \subset C_1 + C_2 \subset c\sigma(C_1 \cup C_2)$

d.  $\Gamma(C_1) \cup \Gamma(C_2) \subset \Gamma(C_1 \cap C_2)$

e.  $\Gamma(C_1 + C_2) = \Gamma(C_1) \cap \Gamma(C_2)$

f.  $\Gamma(K_1 \cap K_2) = \overline{\Gamma(K_1) + \Gamma(K_2)}$

Q.8. Si  $K$  est un cône polyédrique de  $\mathbb{R}^n$  ( $K = \{y \in \mathbb{R}^n \mid By \geq 0\}$  où  $B$  est une matrice de  $m$  lignes et  $n$  colonnes) montrer que

$$\Gamma(K) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists u \in \mathbb{R}_+^m : y = -B^t u\}$$

(la notation  $B^t$  signifie « transposée de la matrice  $B$  »).

Q.9. On se donne le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \max f(x) \\ x \in A \cap B \end{cases}$$

et on suppose que :  $\bar{x} \in A \cap B$ ,  $B$  est une partie fermée de  $\mathbb{R}^n$ ,  $g_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) sont  $m$  applications de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  différentiables en  $\bar{x}$  et  $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall j \in \{1, \dots, m\}, g_j(x) \geq 0\}$ .

On note

$$\begin{cases} E(\bar{x}) = \{j \in \{1, \dots, m\} \mid g_j(\bar{x}) = 0\} \\ K'(A, \bar{x}) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \forall j \in E(\bar{x}), \langle \nabla g_j(\bar{x}), y \rangle \geq 0\}. \end{cases}$$

Montrer que si

$$\begin{cases} \overline{c\sigma}(T(A \cap B, \bar{x})) = K'(A, \bar{x}) \cap \overline{c\sigma}(T(B, \bar{x})) \\ \Gamma(K'(A, \bar{x})) + \Gamma(T(B, \bar{x})) \text{ est fermé} \end{cases}$$

alors si  $\bar{x}$  maximise localement  $f$  sur  $A \cap B$  et si  $f$  est différentiable en  $\bar{x}$  il existe  $u \in \mathbb{R}_+^m$  tel que :

$$\begin{cases} \text{(i)} & \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m u_i \nabla g_i(\bar{x}) \in \Gamma(T(B, \bar{x})) \\ \text{(ii)} & \forall i \in \{1, \dots, m\}, u_i g_i(\bar{x}) = 0. \end{cases}$$

Q.10. Les notations de la question Q.9 sont reprises.

On suppose que  $B$  est donné par  $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, \dots, p\}, h_i(x) = 0\}$  où les  $h_i$  ( $i = 1, \dots, p$ ) sont  $p$  applications de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  différentiables en  $\bar{x}$ .

On suppose que les vecteurs  $\nabla h_i(\bar{x})$  ( $i = 1, \dots, p$ ) sont linéairement indépendants et qu'il existe  $d \in \mathbb{R}^n$  tel que :

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, p\}, \langle \nabla h_i(\bar{x}), d \rangle = 0 \\ \forall j \in E(\bar{x}), \langle \nabla g_j(\bar{x}), d \rangle > 0. \end{cases}$$

Démontrer que si  $f$  est différentiable en  $\bar{x}$  et si  $\bar{x}$  maximise localement  $f$  sur  $A \cap B$  alors il existe  $u \in \mathbb{R}_+^m$ ,  $v \in \mathbb{R}^p$  vérifiant :

$$\begin{cases} \text{(i)} & \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m u_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{i=1}^p v_i \nabla h_i(\bar{x}) = 0 \\ \text{(ii)} & \forall i \in \{1, \dots, m\}, u_i g_i(\bar{x}) = 0 \end{cases}$$

### TROISIÈME PARTIE

Dans cette partie on étudie des conditions suffisantes sur la construction d'un algorithme « *convergent* » pour résoudre le problème d'optimisation  $(P_3)$  :  $\max \{ f(x) \mid x \in \mathbb{R}_+^n \}$  où  $f$  est une application de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ .

L'algorithme dont il sera question peut être abstraitement formulé par la donnée de deux procédures  $R_1$  et  $R_2$ .

$R_1$  permet de choisir en un point  $x \in \mathbb{R}_+^n$  non stationnaire pour  $(P_3)$  une direction réalisable de pente, notée  $d$ , c'est-à-dire une direction telle que  $D^+(x; d) \cap \mathbb{R}_+^n \neq \{x\}$  et  $\langle \nabla f(x), d \rangle > 0$ .

$R_2$  permet de choisir sur la partie réalisable de  $D^+(x; d)$ , pour  $x \in \mathbb{R}_+^n$  et  $d$  associée à  $x$  par la procédure  $R_1$ , un point  $x' \in \mathbb{R}_+^n$  tel que  $f(x') > f(x)$ . L'algorithme se formule alors de la manière suivante :

$x_0 \in \mathbb{R}_+^n$  un point de départ

itération  $k$  ( $k \geq 0$ )  $x_k \in \mathbb{R}_+^n$  est donné.

si  $x_k$  est stationnaire pour  $(P_3)$  alors stop sinon :

— choisir  $d_k$  par  $R_1$

— choisir le successeur  $x_{k+1}$  de  $x_k$  par  $R_2$

fin itération  $k$ .

On dit que l'algorithme converge si on obtient un point stationnaire à une itération  $\bar{k}$  ou si les points d'accumulation de la suite  $(x_k)_N$  construite sont stationnaires.

A la question Q.11 on montre sur un exemple qu'un mauvais choix pour  $R_1$  peut conduire à un algorithme non convergent. Dans les questions suivantes on étudie des procédures  $R_1$  et  $R_2$  particulières et on démontre la convergence de l'algorithme dans les questions Q.15 et Q.16.

Q.11. On suppose que l'application  $f$  du problème  $(P_3)$  est définie en  $x \in \mathbb{R}^3$  par  $f(x) = -\frac{4}{3}(x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2)^{\frac{3}{2}} + x_3$ .

La procédure  $R_1$  utilisée détermine, pour  $x \in \mathbb{R}_+^3$ , la direction  $d$  par :

$$\forall j \in \{1, 2, 3\}, \quad \begin{cases} d_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) & \text{si } \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \geq 0 \text{ ou si } x_j > 0 \\ d_j = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La procédure  $R_2$  utilisée détermine, pour  $x \in \mathbb{R}_+^3$  et  $d$  associée à  $x$  par  $R_1$ , un point  $x' \in D^+(x; d) \cap \mathbb{R}_+^3$  vérifiant :

$$\forall y \in D^+(x; d) \cap \mathbb{R}_+^3, \quad f(x') \geq f(y).$$

a. Montrer que l'application  $f$  est concave et est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^3$ .

b. Montrer que la direction  $d$  associée à  $x \in \mathbb{R}_+^3$  par  $R_1$ , est la projection de  $\nabla f(x)$  sur le cône  $T(\mathbb{R}_+^3, x)$  et que si  $d \neq 0$  et si  $x'$  est construit par  $R_2$  alors  $f(x') > f(x)$ .

c. Le point de départ de l'algorithme est choisi de la forme  $x_0 = (0, a, b)$  avec  $b \geq 0$  et  $0 < a < 2^{-3/2}$ . Calculer le terme général de la suite construite par l'algorithme.

d. En déduire que la suite construite converge vers un point  $\bar{x}$  qui n'est pas stationnaire pour le problème  $(P_3)$ .

Dans la suite de cette partie on considérera la procédure  $R_1$  suivante, associée à une valeur fixée  $\varepsilon \in ]0, 1[ \subset \mathbb{R}$ .

A  $x \in \mathbb{R}_+^n$  on associe  $\alpha(x) = \max \left\{ \max_{j=1, \dots, n} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right\}, \left| \min_{j=1, \dots, n} \left\{ x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right\} \right| \right\}$  et on construit

la direction  $d(x)$  par :

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} \left\{ \begin{array}{l} d_j(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \text{ si } \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \geq 0 \text{ ou } \left| x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right| \geq \varepsilon \alpha(x) \\ = 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$$

Q.12. a. Montrer que si  $\alpha(x) = 0$  alors  $x$  est stationnaire pour le problème  $(P_0)$ .

b. En notant, pour  $x \in \mathbb{R}_+^n$ ,  $L(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \forall k \in \mathbb{N}, \exists x_k \in \mathbb{R}_+^n, x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x \text{ et } d(x_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y\}$ , montrer que si  $\bar{x}$  n'est pas stationnaire pour  $(P_0)$  alors

(i)  $L(\bar{x})$  est un ensemble de cardinal fini et  $0 \notin L(\bar{x})$

(ii)  $\exists \gamma > 0, \exists V \in \mathcal{V}(\bar{x}), \forall x \in V \cap \mathbb{R}_+^n, \langle \nabla f(x), d(x) \rangle \geq \gamma$ .

On considère la fonction  $\varphi$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\varphi(\theta, x, d) = f(x + \theta d) - f(x) - \frac{\theta}{2} \langle \nabla f(x), d \rangle.$$

On note  $\Delta = \{\theta \mid \exists j \in \mathbb{N}, \theta = 2^{-j}\}$  et en tout point  $(x, d) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  on considère :

$$F(x, d) = \{\theta \in \Delta \mid \varphi(\theta, x, d) \geq 0\}$$

$$R(x, d) = \{\theta \in \mathbb{R}_+^* \mid \varphi(\theta, x, d) = 0\}$$

et on définit les applications  $t$  et  $r$  par :

$$\forall (x, d) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, t(x, d) = \sup \{F(x, d)\}$$

$$\forall (x, d) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, r(x, d) = \inf \{R(x, d)\}.$$

Q.13. On suppose que  $f$  est bornée supérieurement sur  $\mathbb{R}^n$  et qu'au point  $(\bar{x}, \bar{d}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  on a  $\langle \nabla f(\bar{x}), \bar{d} \rangle > 0$ .

Montrer que :

a.  $\exists V \in \mathcal{V}((\bar{x}, \bar{d})), \forall (x, d) \in V, F(x, d) \neq \emptyset \text{ et } R(x, d) \neq \emptyset$ .

b. La fonction  $t$  n'est pas obligatoirement semi-continue inférieurement au point  $(\bar{x}, \bar{d})$ . (On donnera un exemple où  $f$  est une fonction d'une seule variable).

c. La fonction  $r$  est semi-continue inférieurement au point  $(\bar{x}, \bar{d})$ .

Q.14. On suppose que  $f$  est bornée supérieurement sur  $\mathbb{R}^n$ . On considère une suite  $((x_k, d_k))_{k \in \mathbb{N}}$  convergeant vers  $(\bar{x}, \bar{d})$  avec :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \langle \nabla f(x_k), d_k \rangle > 0 \text{ et } \langle \nabla f(\bar{x}), \bar{d} \rangle > 0.$$

Montrer que  $\bar{x}$  n'est pas point d'accumulation de la suite  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, y_k = x_k + t(x_k, d_k) d_k.$$

Pour le problème  $(P_3)$  la procédure  $R_2$ , en un point non stationnaire  $x \in \mathbb{R}_+^n$  et  $d$  associée à  $x$  par  $R_1$ , est définie par le choix d'un point  $x' \in \mathbb{R}_+^n$  tel que :

$$x' = x + \lambda d \quad \text{avec} \quad \lambda = \sup \{ \theta \in \Delta \mid \theta \leq \theta', \varphi(\theta, x, d) \geq 0 \}$$

$$\text{où} \quad \theta' = \sup \{ \theta \geq 0 \mid x + \theta d \in \mathbb{R}_+^n \}.$$

Q.15. On envisage une suite  $(x_k)_N$  de  $\mathbb{R}_+^n$  convergeant vers  $\bar{x}$ . On suppose que  $\bar{x}$  et  $x_k$  pour tout  $k$  ne sont pas stationnaires pour le problème  $(P_3)$ . A cette suite on associe la suite  $(y_k)_N$  construite par la procédure  $R_2$ .

Montrer que  $\bar{x}$  n'est pas un point d'accumulation de la suite  $(y_k)_N$ .

Q.16. La résolution du problème  $(P_3)$  est conduite au moyen des procédures  $R_1$  et  $R_2$ . Montrer que si le point de départ  $x_0$  est tel que  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq f(x_0)\}$  soit compact, alors les points d'accumulation de la suite construite par l'algorithme sont stationnaires pour le problème  $(P_3)$ .

#### QUATRIÈME PARTIE

On s'intéresse dans cette partie au problème général  $(P_4)$  :

$$(P_4) \quad \begin{cases} \max f(x) \\ h_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, p \\ g_j(x) \geq 0 \quad j = 1, \dots, m \\ x \in D = \{y \in \mathbb{R}^n \mid By \geq b\}. \end{cases}$$

On supposera dans cette partie que les fonctionnelles  $f$ ,  $h_i$  ( $i = 1, \dots, p$ ),  $g_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) sont de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^n$ , que le domaine réalisable de  $(P_4)$ , noté  $D_4$ , est non vide et que  $B$  est une matrice à  $q$  lignes et  $n$  colonnes.

On note  $\chi$  l'application de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\chi(x) = - \left( \sum_{i=1}^p |h_i(x)| + \sum_{j=1}^m \max \{ 0, -g_j(x) \} \right)$$

et on définit l'application  $p$  de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}$  par :

$$p(x, \alpha) = f(x) + \alpha \chi(x).$$

On notera également en tout  $x \in D_4$  l'ensemble des indices des contraintes en inégalités de  $(P_4)$  actives en  $x$  par  $E(x) = E_1(x) \cup E_2(x)$  avec

$$E_1(x) = \{j \in \{1, \dots, m\} \mid g_j(x) = 0\}$$

et

$$E_2(x) = \{l \in \{1, \dots, q\} \mid B_l x = b_l\}, \text{ avec } B_l \text{ la } l^{\text{ème}} \text{ ligne de } B.$$

On pourra, dans certaines questions, faire en  $x \in D_4$  l'hypothèse  $(H_4)$  suivante :

$(H_4)$   $(H_4)$  est vraie en  $x \in D_4$  si et seulement si

$$\begin{cases} \text{i) } \quad \nabla h_i(x) \quad i = 1, \dots, p \text{ sont linéairement indépendants} \\ \text{ii) } \quad \exists d \in \mathbb{R}^n \text{ tel que} \\ \quad \quad \forall i \in \{1, \dots, p\}, \langle \nabla h_i(x), d \rangle = 0 \\ \quad \quad \forall i \in E_1(x), \langle \nabla g_i(x), d \rangle > 0 \\ \quad \quad \forall i \in E_2(x), B_i d > 0 \end{cases}$$

Q.17. Montrer que pour tout  $(x, d, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n - \{0\}) \times \mathbb{R}_+^*$  la fonction  $\varphi_\alpha$  (définie par  $\varphi_\alpha(t) = p(t, \alpha)$ ) de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  possède une dérivée directionnelle le long de  $d$  en  $x$ .

Exprimer simplement cette dérivée en fonction des gradients de  $f$ ,  $h_i$  ( $i = 1, \dots, p$ ) et  $g_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) calculés en  $x$ .



Q.18. On considère un point  $\bar{x} \in \mathbf{D}_4$ . Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes :

i)  $(\mathbf{H}_4)$  est vraie en  $\bar{x}$

ii)  $\exists V \in \mathbf{V}(\bar{x})$  tel que pour toute fonction bornée  $c$  de  $V$  dans  $\mathbb{R}^p$  il existe une fonction bornée  $d$  de  $V$  dans  $\mathbb{R}^n$  vérifiant pour tout  $x \in V$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall i \in \{1, \dots, p\}, \langle \nabla h_i(x), d(x) \rangle = c_i(x) \\ \forall j \in E_1(\bar{x}), \langle \nabla g_j(x), d(x) \rangle \geq +1 \\ \forall j \in E_2(\bar{x}), B_j d(x) \geq +1 \end{array} \right.$$

L'objet des questions qui suivent est de montrer que la résolution de  $(\mathbf{P}_4)$  est liée, dans certains cas, à la résolution du problème  $\max \{p(x, \alpha) \mid x \in D\}$  pour  $\alpha$  assez grand.

Q.19. Montrer que l'existence de  $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}^+$ ,  $\bar{x} \in D$  et  $V \in \mathbf{V}(\bar{x})$  vérifiant

i)  $V \cap \mathbf{D}_4 \neq \emptyset$

ii)  $\forall \alpha \geq \bar{\alpha}, \forall x \in V \cap D, p(x, \alpha) \leq p(\bar{x}, \alpha)$

implique que  $\bar{x}$  est une solution locale de  $(\mathbf{P}_4)$ .

Q.20. On suppose que  $\bar{x}$  est une solution locale stricte de  $(\mathbf{P}_4)$ .

Démontrer que pour tout  $\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) fixé, il existe un triplet  $(\delta, \gamma, \alpha) \in \mathbb{R}_+^3$  vérifiant :

i)  $0 < \delta < \varepsilon, \quad \gamma > 0, \quad \alpha > 0$

ii)  $\forall \gamma' (0 < \gamma' \leq \gamma), \forall y \in D \cap \text{Fr}(B(\bar{x}, \delta)), \chi(y) \leq -\gamma'$  ou  $f(\bar{x}) - f(y) \geq \gamma'$

iii)  $\alpha\gamma \geq \gamma + 1$  et  $\forall \alpha' \geq \alpha, \forall y \in D \cap \text{Fr}(B(\bar{x}, \delta)), p(y, \alpha') < p(\bar{x}, \alpha')$   
( $B(\bar{x}, \delta)$  est la boule ouverte de centre  $\bar{x}$  et de rayon  $\delta$ ).

Q.21. L'hypothèse de la question Q.20 étant vérifiée, à tout  $\varepsilon > 0$  on associe l'ensemble  $U(\varepsilon)$  des triplets vérifiant

i) à iii) de Q.20. A tout  $t \in \mathbb{R}_+^*$  on associe l'ensemble  $W(t)$  des  $\varepsilon > 0$  tels qu'il existe un triplet  $(\delta, \gamma, \alpha) \in U(\varepsilon)$  vérifiant  $\alpha \leq t$ .

Montrer que :

a.  $\exists t_0 > 0, \forall t \geq t_0, W(t) \neq \emptyset$

b.  $\forall t \geq t_0, e(t) = \inf \{\varepsilon \mid \varepsilon \in W(t)\} > 0$

c.  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = 0.$

Q.22. Dédurre de la question Q.21 la proposition suivante :

Si  $\bar{x}$  est une solution locale stricte de  $(\mathbf{P}_4)$  alors il existe  $\bar{\alpha} > 0$  et deux fonctions  $\delta$  et  $x$  ( $\delta : [\bar{\alpha}, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ ,  $x : [\bar{\alpha}, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^n$ ) tels que pour tout  $\alpha \geq \bar{\alpha}$  on ait :

a.  $x(\alpha) \in D \cap B(\bar{x}, \delta(\alpha))$

b.  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \delta(\alpha) = 0$

c.  $\forall t \in D \cap B(\bar{x}, \delta(\alpha)), p(t, \alpha) \leq p(x(\alpha), \alpha).$

Q.23. Montrer que si  $\bar{x} \in D_4$  est une solution locale stricte de  $(P_4)$  et si  $(H_4)$  est vraie en  $\bar{x}$  alors

$$\exists \bar{\alpha} > 0, \exists V \in \mathcal{V}(\bar{x}), \forall \alpha \geq \bar{\alpha}, \forall x \in D \cap V, p(x, \alpha) \leq p(\bar{x}, \alpha).$$

On suppose dans la suite de cette partie que  $m$ , le nombre de contraintes en inégalité,  $g_j(x) \geq 0$  ( $j = 1, \dots, m$ ) est nul. Pour ce problème  $(P_4)$  particularisé ( $\max \{f(x) \mid x \in D \cap \{y \mid \forall i = \{1, \dots, p\}, h_i(y) = 0\}\}$ ), on note pour tout  $x \in D$ ,  $(P'_4(x))$  le problème d'optimisation suivant, paramétré par  $x$  :

$$(P'_4(x)) \quad \begin{cases} \max < \nabla f(x), t - x > \\ \forall i \in \{1, \dots, p\}, h_i(x) + < \nabla h_i(x), t - x > = 0 \\ t \in D. \end{cases}$$

On note  $D'_4$  l'application de  $D$  dans les parties de  $D$  définie en tout  $x$  de  $D$  par

$$D'_4(x) = \{t \in D \mid \forall i \in \{1, \dots, p\}, h_i(x) + < \nabla h_i(x), t - x > = 0\}$$

et par  $S_4$  l'application de  $D$  dans les parties de  $D$  qui représente l'ensemble des solutions optimales de  $(P'_4(x))$ .

On fera les hypothèses :

- i)  $D$  est compact
- ii)  $\forall x \in D, D'_4(x) \neq \emptyset$
- iii)  $\exists M > 0, \forall x \in D, \forall z \in S_4(x), \exists u \in \mathbb{R}^p$  vérifiant :

$$\max_{i=1, \dots, p} \{|u_i|\} \leq M \quad \text{et} \quad \nabla f(x) + \sum_{i=1}^p u_i \nabla h_i(x) \in \Gamma(T(D, z))$$

- iv)  $\forall x \in D_4, (H_4)$  est vraie en  $x$ .

Q.24. Montrer que l'application  $D'_4$  est ouverte et fermée en tout  $x \in D_4$ .

Q.25. L'algorithme suivant est appliqué au problème  $(P_4)$ .

$x_0 \in D$  point de départ,  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  fixé.

*itération k.*

si  $x_k \in S_4(x_k)$  alors stop sinon

- i) choisir  $z_k \in S_4(x_k)$  et poser  $d_k = z_k - x_k$
- ii) calculer  $x_{k+1} = x_k + t(x_k, d_k) d_k$

$$\text{où } t(x_k, d_k) = \sup \left\{ \theta \in \Delta \mid p(x_k + \theta d_k, \alpha) - p(x_k, \alpha) - \frac{\theta}{2} P'(x_k, \alpha; d_k) \geq 0 \right\}$$

(cf. procédure  $R_2$  de la partie III associée à la fonction  $p$ ).

*Fin itération.*

Montrer qu'il existe une valeur  $\bar{\alpha} > 0$  telle que pour tout  $\alpha \geq \bar{\alpha}$  ou bien l'algorithme fournit en un nombre fini d'itérations un point  $x_k$  vérifiant la condition nécessaire d'optimalité pour  $(P_4)$  ou bien l'algorithme construit une suite telle que ses points d'accumulation vérifient la condition nécessaire d'optimalité pour  $(P_4)$ . (Cette condition nécessaire d'optimalité est étudiée en Q.10.)

## RAPPORT SUR L'EPREUVE D'ANALYSE NUMERIQUE

### I - Présentation du sujet

Le problème d'analyse numérique de cette année était consacré à l'étude d'algorithmes permettant de déterminer les points stationnaires de problèmes d'optimisation du type  $\max \{f(x) \mid x \in A\} \subset \mathbb{R}^n$ , c'est-à-dire des points candidats à être des solutions locales (ou globales) du problème.

Dans le préliminaire on présente le théorème du maximum de Berge.

Dans la première partie on introduit la notion de cône tangent  $T(A, \bar{x})$  en un point  $\bar{x}$  à une partie  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  et on montre que si  $f$  est différentiable au point  $\bar{x}$ , une condition d'optimalité au point  $\bar{x}$  pour  $\max \{f(x) \mid x \in A\}$  est que  $\nabla f(\bar{x})$  appartienne au cône polaire de  $T(A, \bar{x})$  (on dit alors que  $\bar{x}$  est stationnaire).

Dans la deuxième partie on donne des conditions suffisantes pour caractériser le cône polaire d'un cône tangent et on explicite la condition pour que  $x$  soit stationnaire dans le cas où  $A$  est caractérisé par des contraintes unilatérales et des contraintes bilatérales (condition de Kuhn-Tucker).

La troisième partie traite de la construction d'un algorithme convergent pour trouver des points stationnaires lorsque  $A = \mathbb{R}_+^n$ . L'étude d'un exemple montre qu'une procédure trop simple - quoique naturelle - (adaptation de la méthode de la plus forte pente à un problème avec contraintes) peut conduire à un algorithme non convergent.

Enfin, la quatrième partie traite de la construction d'un algorithme dans le cas où  $A$  est caractérisé par des contraintes unilatérales et bilatérales. La méthode utilisée est celle des fonctions pénalisantes qui permet de ramener le problème d'optimisation à une forme plus simple (problème sans contraintes -non linéaires-). L'objet des questions de cette partie ( $Q_{17}$  à  $Q_{23}$ ) était la démonstration d'une condition suffisante d'existence d'une pénalité exacte dans le cas non convexe. Dans les deux dernières questions on traite de la convergence d'un algorithme par linéarisation successive qui est un moyen simple de résoudre des problèmes d'origine concrète.

La résolution de ce problème ne demandait que des connaissances générales sur la topologie de  $\mathbb{R}^n$  et la notion de différentiabilité d'une application en un point.

## II - Les résultats

Au vu des copies les plus faibles, il apparaît que de trop nombreux candidats ne maîtrisent pas la notion d'application différentiable, ce qui compromet évidemment gravement leurs chances de succès à l'agrégation, particulièrement à l'option d'analyse numérique.

Les meilleures copies ont traité avec plus ou moins de bonheur le préliminaire et les deux premières parties. La troisième a été abordée par certains, mais la question Q.II.a a presque toujours donné lieu à des erreurs consternantes. La quatrième partie, de loin la plus délicate, n'a été qu'effleurée.

Cette année, 402 candidats ont choisi l'option d'analyse numérique. Bien que cette option comporte désormais un programme spécialisé, une certaine proportion de candidats ont visiblement choisi cette option par défaut. S'il est vrai que l'on peut aborder l'épreuve d'analyse numérique avec pour seul bagage les connaissances d'analyse enseignées dans toutes les maîtrises, voire les licences, de mathématiques, encore faut-il posséder ces connaissances et savoir les utiliser.

## III - Remarques sur les questions abordées par les candidats

### Préliminaire

Q1 a. et b. sans difficulté si l'on sait ce qu'est une application semi-continue.

Q1 c. On ne supposait pas  $X$  compact. Il ne fallait donc pas se servir du résultat de a.

### Première partie

Q2 a. Si pour tout  $n$  on a  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k^n = \bar{x}$  on n'a pas (contrairement à une croyance fort répandue)  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k^k = \bar{x}$ .

b. La convexité de  $T(A, \bar{x})$  résultait de l'expression de  $T(A, \bar{x})$  comme fermeture de  $\{\lambda(x - \bar{x}) \mid x \in A, \lambda \in \mathbb{R}^+\}$ .

Q3 a. La partie  $A$  n'est pas convexe : il ne faut pas utiliser la Q2 b. Par ailleurs, la relation  $\forall k \in \mathbb{N}, g_i(x_k) = \nabla g_i(\bar{x})(x_k - \bar{x}) + \varepsilon(x_k) \quad \|\|x_k - \bar{x}\|\| \geq 0$  n'implique pas que  $\nabla g(\bar{x})(x_k - \bar{x}) \geq 0$ , même pour " $k$  assez grand".

La relation demandée résulte du passage à la limite de :

$$\nabla g_i(\bar{x})(\lambda_k(x_k - \bar{x})) + \varepsilon(x_k) \quad \|\|\lambda_k(x_k - \bar{x})\|\| \geq 0$$

b. On montre que si  $y \in T(A, \bar{x})$  alors  $x_t = \bar{x} + ty \in A$  pour  $t$  assez petit. Il ne fallait pas oublier de regarder le signe de  $g_i(x_t)$  pour  $i \notin E(\bar{x})$ .

Q4. Même remarque que pour Q3 a.

### Deuxième partie

Q5. Question classique.

Q6. On ne suppose pas  $B \neq \emptyset$ .

Q7. Sans difficulté.

Q8. Il fallait démontrer que  $H = \{y \mid \exists u \in \mathbb{R}_+^n, y = -B_u^t\}$  est fermé afin de pouvoir appliquer  $\Gamma(H) = H$ . Si on note  $b_i$  les vecteurs lignes de  $B$ , on a  $H = \{y \mid \exists \lambda_i \geq 0, y = \sum_i \lambda_i b_i\}$  :  $H$  est le cône tangent en 0 au polyèdre de sommets  $\{0\} \cup \{b_i\}_{i=1}^n$ , donc est fermé (Q2 a).

Q9. On appliquait les résultats précédemment démontrés Q4, Q7b., Q7f., Q8.

### Troisième partie

Q11 a. La fonction  $t \mapsto t^{3/4}$  n'est pas convexe ! La concavité de  $f$  résulte de la convexité de  $t \mapsto t^{3/2}$  et de la convexité de  $(x_1, x_2) \mapsto (x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2)^{1/2}$  qui est une norme. Les dérivées partielles de  $t$  ne sont pas définies aux points  $(0, 0, x_3)$  et il fallait les prolonger par continuité.

### Remarques bibliographiques

Partie III - l'exemple de la question Q11 est donné par P. Wolfe, IBM Journal, July 72.

La partie IV est une présentation de certaines parties de l'article de :

Han-Mangasarian "Exact penalty functions in non linear programming"  
Mathematical programming 17, pages 251-269 (1979).

Le lecteur pourra également s'intéresser aux livres de :

Laurent "Approximation et optimisation" Hermann (1972)

Luenberger "Introduction to linear and non-linear programming" Wesley, 1973.

Fletcher "Practical methods of Optimization (vol. 1 et 2). John Wiley, 1980-81

par exemple.

#### IV - Répartition des notes

La moyenne des notes (sur 40) est 9,8. Le détail de la répartition des notes est donné dans le tableau suivant :

0 à 4 . . . . .	157 copies
5 à 9 . . . . .	73 "
10 à 14 . . . . .	54 "
15 à 19 . . . . .	42 "
20 à 24 . . . . .	39 "
25 à 29 . . . . .	22 "
30 à 34 . . . . .	11 "
35 à 39 . . . . .	3 "
40 . . . . .	1 "

## MÉCANIQUE GÉNÉRALE

Le problème proposé a pour but l'établissement d'une méthode générale pour la mise en équations d'un système d'un nombre quelconque de solides, reliés entre eux par des articulations. Elle est utilisée dans les applications pratiques, notamment en robotique, où la principale difficulté rencontrée par le mécanicien provient du grand nombre de solides et d'articulations du système. Dans de telles applications, il est essentiel de présenter les trop nombreuses équations sous une forme condensée simple, permettant un traitement informatique (la solution générale n'étant en général pas envisageable). Deux méthodes sont possibles : celle de Lagrange, ou l'application des théorèmes généraux. C'est la seconde qui est développée dans ce problème. On proposera notamment une généralisation, aux systèmes de solides articulés, de l'équation bien connue d'Euler (relative au théorème du moment cinétique pour le mouvement d'un corps solide unique).

L'étude proposée se décompose en deux parties : dans la partie I le système mécanique est relié à un solide  $S_0$  fixe, ou de mouvement connu en fonction du temps, appelé organe porteur.

Dans la partie II, le système mécanique, bien que soumis à des actions extérieures est *libre de toute action de liaison extérieure*. (L'organe porteur n'existe plus.)

Ces deux études seront illustrées par des exemples précis (I.B, II.B) que le candidat pourra chercher à traiter en admettant éventuellement les résultats généraux des I.A, II.A.

Dans la partie II.B, les questions 1° et 2° relatives au cas particulier d'un seul solide peuvent être traitées indépendamment du reste du problème.

### I

I.A. Nous considérons un système de  $n$  solides  $S_1 \dots S_n$ . Dans cette partie ce système, noté  $\Sigma$ , est relié à un organe porteur  $S_0$ . Les  $(n + 1)$  solides  $S_0, S_1, \dots, S_n$  sont reliés entre eux par  $p$  liaisons  $L_1 \dots L_p$ . Chaque liaison est une liaison entre deux de ces solides. Au système  $\Sigma$  nous associons un *graphe* : ensemble de  $(n + 1)$  points  $s_0, s_1 \dots s_n$  appelés *sommets* et représentant les solides  $S_0, S_1 \dots S_n$ , et de  $p$  arcs  $l_1 \dots l_p$  représentant les liaisons  $L_1 \dots L_p$ . « L'arc  $l_j$  relie les sommets  $s_i$  et  $s_k$  » exprime que « La liaison  $L_j$  relie les solides  $S_i$  et  $S_k$  ». On appelle chaîne du graphe toute suite non vide d'arcs adjacents  $\{l_{j_1}, l_{j_2}, \dots, l_{j_m}\}$  d'extrémités respectives  $s_{i_1} s_{i_2}, s_{i_2} s_{i_3}, \dots, s_{i_m} s_{i_{m+1}}$ . Une chaîne est dite fermée si  $s_{i_1} = s_{i_{m+1}}$ . Nous écartons le cas des systèmes  $\Sigma$  dont le graphe présente une chaîne fermée : on dit qu'on travaille en chaîne ouverte.

Nous supposons donc que le graphe ne présente pas de chaîne fermée et qu'il est de plus *connexe* : c'est-à-dire que deux sommets quelconques sont reliés entre eux par une chaîne (unique du fait de la non-existence de chaîne fermée) : par exemple et en particulier tout sommet  $s_i$  est relié au sommet  $s_0$  par une chaîne unique.

Afin d'associer à une liaison  $L_j$  un torseur  $\mathfrak{C}_j$  des actions de  $L_j$  on donne une orientation arbitraire à l'arc  $l_j$  correspondant dans le graphe : si  $l_j$  est un arc orienté d'origine  $s_i$  et d'extrémité  $s_k$ ,  $\mathfrak{C}_j$  désigne le torseur des actions de  $S_k$  sur  $S_i$  et par conséquent  $-\mathfrak{C}_j$  désigne le torseur des actions de  $S_i$  sur  $S_k$ .

On suppose qu'un seul solide, noté  $S_1$ , est relié à l'organe porteur  $S_0$ . On admettra que le graphe étant connexe et sans chaîne fermée, on a nécessairement  $p = n$ .

1° On suppose que  $S_0$  est fixe, que toute liaison  $L_j$  entre  $S_i$  et  $S_k$  ne permet qu'une rotation de  $S_k$  relativement à  $S_i$ , autour d'un point  $O_j$  lié à  $S_i$  et à  $S_k$  appelé centre de la liaison  $L_j$ .

Soit  $S_1$  le solide unique relié à  $S_0$  ; on désigne par  $L_1$  la liaison entre  $S_0$  et  $S_1$ , de rotation autour du point fixe  $O_1$ . On pose  $O = O_1$ .

On désigne par  $S = (s_{ij})$  la matrice d'éléments  $s_{ij}$  :

$$\begin{cases} i \in \{1, \dots, n\} \text{ est l'indice de ligne;} \\ j \in \{1, \dots, p = n\} \text{ est l'indice de colonne;} \\ \left. \begin{aligned} s_{ij} &= 1 & \text{si } l_j \text{ est un arc d'origine } s_i; \\ s_{ij} &= -1 & \text{si } l_j \text{ est un arc d'extrémité } s_i; \\ s_{ij} &= 0 & \text{dans les autres cas.} \end{aligned} \right\}$$

Soit  $G_i$  le centre d'inertie du solide  $S_i$ ,  $m_i$  sa masse; on pose :

$$\begin{cases} \vec{r}_i = \vec{OG}_i; \\ \left. \begin{aligned} \vec{\gamma}_{ij} &= \vec{G_i O_j} \text{ si } L_j \text{ est une liaison agissant sur } S_i; \\ \vec{\gamma}_{ij} &= \vec{0} \text{ dans les autres cas;} \end{aligned} \right\} \\ \vec{c}_{ij} = s_{ij} \vec{\gamma}_{ij}.$$

Pour des commodités de présentation, on utilisera des matrices dont les coefficients pourront être scalaires ou vectoriels. Le produit de deux matrices se fera suivant les règles usuelles. Lorsque deux matrices considérées, par exemple  $C$  et  $X$ , sont à coefficients vectoriels on notera  $C \wedge X$  le produit matriciel effectué en faisant le produit vectoriel pour composer entre eux les éléments de  $C$  et de  $X$ . Si  $A$  est une matrice, on notera  ${}^tA$  sa transposée (les éléments de  ${}^tA$  étant de même nature que ceux de  $A$ ).

On pose :

$$C = (\vec{c}_{ij}), \quad r = \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{r}_n \end{pmatrix}, \quad m = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & m_2 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & m_n \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} \vec{\sigma}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{\sigma}_n \end{pmatrix},$$

où  $\vec{\sigma}_i$  est le moment cinétique de  $S_i$  en  $G_i$ .

On désigne par  $(\vec{X}_j, \vec{Y}_j)$  les éléments de réduction en  $O_j$  de  $\mathcal{C}_j$ , par  $(\vec{F}_i, \vec{M}_i)$  les éléments de réduction en  $G_i$  du torseur des actions extérieures appliquées à  $S_i$ , autres que les actions des liaisons avec les autres solides ou l'organe porteur  $S_0$ , par  $X, Y, F, M$  les matrices :

$$X = \begin{pmatrix} \vec{X}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{X}_n \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} \vec{Y}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{Y}_n \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} \vec{F}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{F}_n \end{pmatrix}; \quad M = \begin{pmatrix} \vec{M}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{M}_n \end{pmatrix}.$$

Montrer que les théorèmes généraux appliqués à chaque solide  $S_i$  aboutissent aux équations (1) :

$$(1) \quad \begin{cases} m \ddot{\vec{r}} = F + SX; \\ \dot{\vec{\sigma}} = M + SY + C \wedge X. \end{cases}$$

2° Soit  $T$  la matrice  $(t_{ji})$  ( $j \in \{1, \dots, p = n\}$  est l'indice de ligne,  $i \in \{1, \dots, n\}$  est l'indice de colonne) définie par :

$$\left\{ \begin{aligned} t_{ji} &= 1 & \text{si l'arc } l_j \text{ appartient à la chaîne reliant } s_0 \text{ à } s_i \text{ et sur cette chaîne est orienté vers } s_0; \\ t_{ji} &= -1 & \text{si l'arc } l_j \text{ appartient à la chaîne reliant } s_0 \text{ à } s_i \text{ et sur cette chaîne est orienté vers } s_i; \\ t_{ji} &= 0 & \text{dans les autres cas.} \end{aligned} \right.$$

2° a. Montrer que  $T$  et  $S$  sont inverses l'une de l'autre.



On pourra montrer au préalable que si  $l_m$  a pour origine  $s_i$  et pour extrémité  $s_k$  :

$$(TS)_{jm} = t_{ji} - t_{jk}.$$

2° b. En déduire les équations (2) :

$$(2) \quad \begin{cases} X = T(m\ddot{r} - F); \\ \dot{\sigma} = M + SY + CT \wedge (m\ddot{r} - F). \end{cases}$$

3° a. Montrer que si  $L_j$  est une liaison entre  $S_i$  et  $S_k$  :

$$\vec{r}_i + \gamma_{ij} = \vec{r}_k + \gamma_{kj}.$$

3° b. En déduire la relation :

$$r = - {}^t(CT) 1_n, \quad \text{où} \quad 1_n = \begin{pmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On pourra montrer que :

$${}^tS r + {}^tC 1_n = 0$$

3° c. Posant  $B = -CT$ , montrer le théorème du moment cinétique généralisé à un système  $\Sigma$  :

$$(3) \quad \dot{\sigma} = M + SY + B \wedge (-m {}^tB 1_n + F).$$

Commenter.

I.B.  $\Sigma$  est un système de 3 barres  $O_1 O_2$ ,  $O_2 O_3$ ,  $O_3 O_4$ , identiques, de longueur  $2l$ , de masses  $m$ , mobiles dans un plan vertical fixe  $Oxy$ ;  $\vec{x}$  est la verticale descendante. Ces barres sont articulées au point  $O_1 = O$  fixe, et entre elles aux points  $O_2$  et  $O_3$ . Les liaisons sont toutes supposées parfaites. Les seules actions extérieures non de liaison, sont dues à l'accélération de la pesanteur  $g\vec{x}$ . On pose  $\overrightarrow{O_1 O_2} = 2l\vec{u}_1$ ,  $\overrightarrow{O_2 O_3} = 2l\vec{u}_2$ ,  $\overrightarrow{O_3 O_4} = 2l\vec{u}_3$ .

1° Tracer le graphe de  $\Sigma$ . On orientera  $l_i$  de  $s_i$  vers  $s_k$  si  $i < k$ . Déterminer  $S$  et  $T$ . Vérifier que  $S$  et  $T$  sont inverses. Déterminer  $C$ ,  $B$ ,  $r = {}^tB 1_n$ .

Faire une vérification directe de ce dernier résultat.

2° En déduire l'expression de l'équation (3) au moyen des vecteurs  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ , des rotations instantanées des barres  $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \vec{\omega}_3$ , et de l'accélération de la pesanteur.

3° On étudie les petits mouvements du système autour de la verticale descendante  $\vec{Ox}$  et on pose :

$$(\vec{x}, \vec{u}_i) = \varphi_i \quad (\varphi_i \ll 1).$$

Exprimer sous forme matricielle les équations linéarisées des petits mouvements.

I.C. On propose deux généralisations :

1° L'organe porteur  $S_0$  n'est plus fixe. Le mouvement du point  $O_1$ , centre de la liaison de  $S_1$  sur  $S_0$ , est décrit par  $\overrightarrow{OO_1} = \vec{f}(t)$ ,  $O$  étant un point fixe et  $\vec{f}(t)$  une fonction vectorielle supposée connue du temps  $t$ .

1° a. Montrer que  $r = \vec{f}(t) 1_n + {}^tB 1_n$ .

1° b. En déduire que l'équation (3) doit être remplacée dans le cas présent par :

$$\dot{\sigma} = M + SY + B \wedge (-m {}^tB 1_n + F) - B \wedge (m \ddot{f} 1_n).$$

2° Les liaisons  $L_j$  entre les solides de  $\Sigma$  ne sont plus nécessairement des articulations de rotation relative. Si  $L_j$  est une liaison entre deux solides  $S_i$  et  $S_k$ , elle permet au solide  $S_k$  de se mouvoir par rapport à  $S_i$  par translation le long d'une droite  $\Delta_j$  de  $S_i$  et par rotation autour de cette droite. Le centre de liaison  $O_j$  est alors un point lié à  $\Delta_j$ , fixe dans  $S_i$ , mobile dans  $S_k$ .

Préciser comment ce cas peut se traiter à partir de I.A.

## II

II.A. Nous considérons désormais le cas d'un système  $\Sigma$  de  $n$  solides  $S_1 \dots S_n$ , libre de toute liaison extérieure (l'organe porteur  $S_0$  est supprimé). Le système est alors constitué des  $n$  solides  $S_1 \dots S_n$  et de  $p$  liaisons  $L_1 \dots L_p$  entre ces solides. Il est encore représenté par un graphe, ensemble de  $n$  sommets  $s_1 \dots s_n$  représentant les solides et de  $p$  arcs  $l_1 \dots l_p$  représentant les liaisons.

Les liaisons sont encore des liaisons de rotation comme au début de la première partie. On suppose encore le graphe connexe, sans chaîne fermée et orienté. On admettra que le graphe étant connexe et sans chaîne fermée,  $p = n - 1$ , dans le cas présent d'un système sans organe porteur.

1° On définit la matrice rectangulaire  $S$  de  $n$  lignes et  $p = n - 1$  colonnes, par :

$$S = (s_{ij}) : \begin{cases} s_{ij} = 1 & \text{si } l_j \text{ est un arc d'origine } s_i ; \\ s_{ij} = -1 & \text{si } l_j \text{ est un arc d'extrémité } s_i ; \\ s_{ij} = 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

$O$  est un point fixe. On définit de la même façon que dans la première partie  $\vec{r}_i, \vec{\gamma}_{ij}, c_{ij} \dots$

Démontrer les équations (1) :

$$(1) \quad \begin{cases} m \ddot{\vec{r}} = F + SX ; \\ \dot{\vec{\sigma}} = M + SY + C \wedge X . \end{cases}$$

2° Soit  $T$  la matrice  $(t_{ji})$  de  $p = n - 1$  lignes et  $n$  colonnes, définie par :

$$T = (t_{ji}) : \begin{cases} t_{j1} = 0 ; \\ t_{ji} = 1 & \text{si } l_j \text{ appartient à la chaîne reliant } s_1 \text{ à } s_i \text{ et est orienté vers } s_1 \text{ dans cette chaîne ;} \\ t_{ji} = -1 & \text{si } l_j \text{ appartient à la chaîne reliant } s_1 \text{ à } s_i \text{ et est orienté vers } s_i \text{ dans cette chaîne ;} \\ t_{ji} = 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

2° a. Montrer que  $TS = I_{n-1}$ , où  $I_{n-1}$  est la matrice unité de  $\mathbb{R}^{n-1}$ .

2° b. En déduire les équations (2) :

$$(2) \quad \begin{cases} X = T(m \ddot{\vec{r}} - F) ; \\ \dot{\vec{\sigma}} = M + SY + CT \wedge (m \ddot{\vec{r}} - F) . \end{cases}$$

3° Soit  $G$  le centre d'inertie du système  $\Sigma$ . On pose  $\vec{r}_G = \vec{OG}$ .

3° a. Montrer que  $\Sigma m_i \ddot{\vec{r}}_G = \Sigma \vec{F}_i$ .

$$3° b. \text{ On pose } \vec{R}_i = \vec{r}_i - \vec{r}_G, \text{ et } R = \begin{pmatrix} \vec{R}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{R}_n \end{pmatrix}$$

On définit la matrice carrée  $\mu$  à  $n$  lignes et  $n$  colonnes par :

$$\mu = (\mu_{ik}), \text{ avec } \mu_{ik} = \delta_{ik} - \frac{m_i}{\sum_{q=1}^n m_q};$$

$$\delta_{ik} = 1 \quad \text{si } i = k, \quad \delta_{ik} = 0 \quad \text{si } i \neq k.$$

Montrer que  $m \ddot{R} = \mu F + SX$ .

En déduire que  $X = T(m \ddot{R} - \mu F)$ .

Montrer l'équation (3') :

$$(3') \quad \dot{\sigma} = M + SY + CT \wedge (m \ddot{R} - \mu F).$$

3° c. Établir la relation exprimant  $R$  en fonction de  $C$  :

$$R = - {}^t(CT \mu) 1_n$$

Pour cela on pourra montrer les relations suivantes :

$${}^tS(R - \overrightarrow{R}_1 1_n) + {}^tC 1_n = 0;$$

$$R - \overrightarrow{R}_1 1_n = - {}^t(CT) 1_n;$$

$${}^t\mu R = R;$$

$${}^t\mu 1_n = 0.$$

On pose  $B = - CT \mu$ . Montrer que (3') s'écrit alors :

$$(3'') \quad \dot{\sigma} = M + SY + CT \wedge (m {}^tB 1_n - \mu F).$$

4° a. Montrer que  $\mu = I_n - \frac{1}{\sum_{q=1}^n m_q} (m 1_n {}^t 1_n)$ .

En déduire que  $\mu m {}^t\mu = m {}^t\mu$ .

4° b. Montrer la forme finale de l'équation (3) :

$$(3) \quad \dot{\sigma} = M + SY + B \wedge (-m {}^tB 1_n + F).$$

II. B. Un satellite de la Terre est constitué de  $n$  solides articulés entre eux. Dans les questions 1° et 2° on considère le cas particulier d'un seul solide.

1° Le satellite est un solide  $S$  de centre d'inertie  $G$  soumis à l'attraction newtonienne de la Terre, supposée sphérique, donc assimilée à un point matériel  $T$  considéré comme fixe. Le mouvement de  $G$  est supposé circulaire uniforme autour de  $T$ , de vitesse angulaire  $\overrightarrow{\omega}_0$ . On désigne par  $\overrightarrow{e}_1$  le vecteur tangent à la trajectoire de  $G$  et dans le sens du mouvement, par  $\overrightarrow{e}_3$  le vecteur unitaire colinéaire à  $\overrightarrow{TG}$  et de même sens, par  $\overrightarrow{e}_2$  le vecteur tel que  $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$  soit une base orthonormée directe. On a donc  $\overrightarrow{\omega}_0 = \omega_0 \overrightarrow{e}_2$ , avec  $\omega_0 > 0$ .

On désigne par  $\mathcal{R}$  le repère d'origine  $G$  et d'axes  $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3$ . Les actions de  $T$  sur  $S$  sont approchées par le torseur  $\mathfrak{T}$  d'éléments de réduction en  $G$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{résultante : } \vec{F} = -\omega_0^2 m \overrightarrow{TG}; \\ \text{moment résultant en } G : \vec{M} = 3\omega_0^2 \overrightarrow{e}_3 \wedge \mathfrak{J} \overrightarrow{e}_3. \end{array} \right.$$

$\mathfrak{J}$  est le tenseur d'inertie de  $S$  en  $G$ .

1° a. Montrer que S est en équilibre relatif dans le repère  $\mathcal{R}$  si et seulement si l'équation (a) est vérifiée :

$$(a) \quad \dot{\vec{e}}_2 \wedge \mathfrak{J} \vec{e}_2 - 3 \dot{\vec{e}}_3 \wedge \mathfrak{J} \vec{e}_3 = 0.$$

1° b. En déduire que  $\mathcal{R}$  est alors un repère principal d'inertie.

2° On munit le satellite d'un gyroscope, ce qui revient à ajouter au moment cinétique de S en G un vecteur  $\vec{h}$  fixe dans S. Montrer que l'équation (a) est alors remplacée par :

$$\dot{\vec{e}}_2 \wedge \frac{\vec{h}}{\omega_0} + \dot{\vec{e}}_2 \wedge \mathfrak{J} \vec{e}_2 - 3 \dot{\vec{e}}_3 \wedge \mathfrak{J} \vec{e}_3 = 0.$$

Montrer que  $\mathcal{R}$  n'est plus nécessairement principal d'inertie. Préciser les relations que doivent vérifier les composantes dans le repère  $(G, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  du tenseur d'inertie du solide et du vecteur  $\vec{h}$ .

3° Le satellite est un système  $\Sigma$  de deux solides  $S_1$  et  $S_2$ . G est le centre d'inertie de  $\Sigma$ . On suppose encore que G est animé d'un mouvement circulaire autour de T ; le repère  $\mathcal{R}$  est choisi comme précédemment.

Les actions de la Terre sur chaque solide sont approchées par les torseurs d'éléments de réduction en  $G_i (i = 1, 2)$  :

$$\begin{cases} \vec{F}_i = -\omega_0^2 m_i (\vec{TG}_i - 3 \vec{e}_3 (\vec{G}G_i \cdot \vec{e}_3)) ; \\ \vec{M}_i = 3 \omega_0^2 \vec{e}_3 \wedge \mathfrak{J}_i \vec{e}_3. \end{cases}$$

$\mathfrak{J}_i$  est le tenseur d'inertie de  $S_i$  en  $G_i$ .

La liaison  $L_1$  entre  $S_1$  et  $S_2$  est supposée de rotation relative autour d'un point, et parfaite. Le satellite est encore supposé en équilibre relatif par rapport à  $\mathcal{R}$ . Dans les questions 3° a, 3° b, les solides ne sont pas munis de gyroscopes.

3° a. Montrer que les éléments de la matrice B sont fixes dans  $\mathcal{R}$ .

3° b. Calculer successivement S, T,  $\mu$ , B, R.

$$\text{On posera } C = \begin{pmatrix} \vec{c}_1 \\ \vec{c}_2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que l'équation (a) est alors remplacée par :

$$(b) \quad \vec{e}_2 \wedge \mathcal{L}_i \vec{e}_2 - 3 \vec{e}_3 \wedge \mathcal{L}_i \vec{e}_3 = 0, \quad \text{avec } i = 1, 2,$$

où  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$  sont deux opérateurs linéaires que l'on précisera.

3° c. Les solides sont munis de gyroscopes, de couples gyroscopiques respectifs  $\vec{h}_1$  fixe dans  $S_1$ ,  $\vec{h}_2$  fixe dans  $S_2$ . Montrer que l'équation (b) est alors remplacée par :

$$(c) \quad \vec{e}_2 \wedge \frac{\vec{h}_i}{\omega_0} + \vec{e}_2 \wedge \mathcal{L}_i \vec{e}_2 - 3 \vec{e}_3 \wedge \mathcal{L}_i \vec{e}_3 = 0, \quad \text{avec } i = 1, 2.$$

## RAPPORT SUR L'EPREUVE DE MECANIQUE GENERALE

Le problème posé cette année concernait la mise en équations par les théorèmes généraux d'un système articulé de plusieurs solides. C'est un sujet important à l'heure actuelle à cause de la modélisation dynamique des robots constitués bien souvent d'au moins 6 solides articulés entre eux par des liaisons souvent à 1 degré de liberté (prismatique : translation relative ; rotoïde : rotation relative). Bien qu'il semble qu'à l'heure actuelle la mise en équations par la méthode de Lagrange soit plus performante en robotique, la mise en équations par les théorèmes généraux exposée par le Professeur J. Wittemburg dans son livre "Dynamics of Systems of Rigid Bodies" (Teubner, Stuttgart 1977) est un formalisme concis permettant le traitement d'un mécanisme en chaîne ouverte.

Dans la partie IA on adapte au problème considéré des éléments très simples de théorie des graphes ; chaque solide est représenté par le sommet d'un graphe, chaque liaison représente un arc de ce graphe. On met en évidence deux matrices  $S$  et  $T$  associées au graphe, carrées dans le cas d'un système mécanique articulé (S.M.A.) relié à un organe porteur. De ce fait, ce cas est algébriquement plus simple : c'est le cas de la 1ère partie I. On obtient alors d'une part les équations (1) traduisant la mise en équations par les théorèmes généraux, d'autre part l'équation (3) qui ressemble au théorème du moment cinétique d'un seul solide en son centre d'inertie. Le paragraphe IB est la considération d'un cas très concret, avec la technique usuelle aux mécaniciens ; ce paragraphe pouvait être traité après avoir admis les résultats énoncés au départ.

IC proposait deux extensions : tout d'abord au cas où l'organe porteur était mobile (le terme complémentaire s'interprète comme associé aux forces d'inertie d'entraînement), puis au cas de liaisons plus délicates pour lesquels le centre de liaison n'est plus fixe dans les solides associés (ce qui amène à des difficultés pour le calcul de la matrice  $\tilde{B}$ ). La deuxième partie traite du cas où l'organe porteur n'existe pas ; apparemment il n'y a pas grandes différences mais ici les matrices  $S$  et  $T$  associées au graphe du S.M.A. ne sont plus rectangulaires : on a encore  $TS = I_{n-1}$ , par contre contrairement à ce qui a été très souvent affirmé  $ST \neq I_n$ . Compte-tenu de calculs algébriques plus délicats on aboutit à une mise en équation tout à fait analogue.

IIB concerne une application à la mécanique spatiale : il s'agit d'un satellite (muni d'antennes par exemple) qui se présente sous forme d'un S.M.A. et qui, pour des raisons concrètes importantes (mesures faites depuis ce satellite), doit avoir relativement à la Terre la même orientation dans

un repère lié au mouvement de rotation de son centre d'inertie. La question IIV 1° est indépendante du reste du problème, elle se généralise ensuite au cas de 2 solides articulés, le cas très général est traité dans la référence citée.

La résolution de ce problème nécessitait des connaissances élémentaires de mécanique (théorèmes généraux, cinématique...) et de calcul matriciel.

#### Commentaire des résultats

Il y a eu assez peu de copies blanches. La première partie (IA) a été très généralement abordée et parfois traitée assez complètement. Ceux qui ont traité avec succès le IA ont abordé assez souvent le IIA.

Les parties plus techniques IB, IIB ont eu peut-être un peu moins de succès. Quelques copies ont assez bien abordé une partie importante du problème. L'énoncé articulé par des applications et des parties indépendantes permettait une approche du travail.

#### Répartition des notes

Cette année, 102 candidats ont effectivement composé en Option Mécanique générale. Ce chiffre est encore en augmentation (81 candidats en 1983, 89 en 1984) malgré la création d'une nouvelle option (Informatique). La moyenne générale des notes est de 15,07 sur 40 avec la répartition ci-dessous :

0 à 4	: 27 copies	20 à 24	: 23 copies
5 à 9	: 9 "	25 à 29	: 11 "
10 à 14	: 12 "	30 à 34	: 3 "
15 à 19	: 12 "	35 à 40	: 5 "

#### Corrigé succinct

IA -

1/ Appliquons au solide  $S_i$  les théorèmes généraux. Les actions de la liaison  $L_j$  sur  $S_i$  sont représentées par le torseur d'éléments de réduction en  $O_j$  :  $(s_{ij}\vec{X}_j, s_{ij}\vec{Y}_j)$ .

Théorème du Centre d'Inertie :

$$m_i \overset{\bullet\bullet}{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_j s_{ij} \vec{X}_j$$

Théorème du Moment Cinétique en  $G_i$  :

$$\overset{\bullet}{\vec{\sigma}}_i = \vec{M}_i + \sum_j s_{ij} \vec{Y}_j + \sum_j \vec{\gamma}_{ij} \wedge s_{ij} \vec{X}_j$$

Nous avons appliqué la formule du transport en  $G_i$  du torseur  $\tau_j$  donné en  $O_j$ .

$$\text{Mais } \vec{\gamma}_{ij} \wedge s_{ij} \vec{X}_j = \vec{\gamma}_{ij} s_{ij} \wedge \vec{X}_j = \vec{C}_{ij} \wedge \vec{X}_j$$

On obtient donc sous forme matricielle :

$$(1) \begin{cases} m \overset{\bullet\bullet}{r} = F + SX \\ \overset{\bullet}{\sigma} = M + SY + C \wedge X \end{cases}$$

2a/ Montrons que  $(TS)_{jm} = \sum_i t_{ji} s_{im}$ .

$s_{im} = 0$  sauf si  $\ell_m$  part de  $s_i$  ( $s_{im} = 1$ ) on arrive en  $s_i$  ( $s_{im} = -1$ ).

Par conséquent si  $\ell_m$  part de  $s_i$  vers  $s_k$  :

$$(TS)_{jm} = t_{ji} - t_{jk}$$

Si  $j = m$  :

\* si la chaîne allant de  $s_0$  à  $s_i$  passe par  $s_k$  alors

$$t_{ji} = 1, \quad t_{jk} = 0$$

\* si la chaîne allant de  $s_0$  à  $s_i$  ne passe pas par  $s_k$  alors  $t_{ji} = 0$

$$t_{jk} = -1.$$

Dans les 2 cas  $(TS)_{jj} = t_{ji} - t_{jk} = 1$ .

Si  $j \neq m$  : la considération des différents cas possibles donne :

$$\text{si } t_{ji} = 1 \text{ alors } t_{jk} = 1$$

$$\text{si } t_{ji} = -1 \text{ alors } t_{jk} = -1$$

$$\text{si } t_{ji} = 0 \text{ (} j \neq m \text{) alors } t_{jm} = 0$$

Dans tous les cas  $(TS)_{jm} = t_{ji} - t_{jm} = 0$  pour  $j \neq m$ .

T et S sont donc deux matrices inverses.

$$2b/ \quad \overset{\bullet\bullet}{mr} = F + SX \text{ entraîne } X = T(\overset{\bullet\bullet}{mr} - F)$$

Donc de  $\overset{\bullet}{\sigma} = M + SY + C \wedge X$  on déduit  $\overset{\bullet}{\sigma} = M + SY + C \wedge (T(\overset{\bullet\bullet}{mr} - F))$ .

On peut vérifier directement que  $C \wedge (T\overset{\bullet\bullet}{mr} - F) = CT \wedge (\overset{\bullet\bullet}{mr} - F)$ . Donc on obtient :

$$(2) \quad \begin{cases} X = T(\overset{\bullet\bullet}{mr} - F) \\ \overset{\bullet}{\sigma} = M + SY + CT \wedge (\overset{\bullet\bullet}{mr} - F) \end{cases}$$

$$3a/ \quad \vec{r}_i + \vec{\gamma}_{ij} = \vec{r}_k + \vec{\gamma}_{Rj} \text{ traduit la relation de Chasles :}$$

$$\overrightarrow{OG_i} + \overrightarrow{G_i O_j} = \overrightarrow{OG_k} + \overrightarrow{G_k O_j} = \overrightarrow{OO_j}$$

$$3b/ \quad \text{Montrons au préalable que } {}^t S r + {}^t C 1_n = 0.$$

La  $j^{\text{ième}}$  composante de  ${}^t C 1_n$  est  $\sum_i \vec{C}_{ij} = \sum_i s_{ij} \vec{\gamma}_{ij}$  or

$\sum_i s_{ij} (\vec{r}_i + \vec{\gamma}_{ij}) = (\vec{r}_i + \vec{\gamma}_{ij}) - (\vec{r}_k + \vec{\gamma}_{kj}) = 0$  si  $l_j$  a  $s_i$  pour origine et  $s_k$  pour extrémité, et par application de 3a. Donc  $\sum_i s_{ij} \vec{r}_i + \sum_i \vec{C}_{ij} = 0$

Par conséquent  $r = -({}^t S)^{-1} {}^t C 1_n = -{}^t T {}^t C 1_n = -{}^t (CT) 1_n$ .

$$3c/ \quad \text{Nous venons d'obtenir } r = -{}^t B 1_n \text{ donc } \overset{\bullet\bullet}{r} = -{}^t \overset{\bullet\bullet}{B} 1_n, \text{ reportant dans (2)}$$

on obtient :

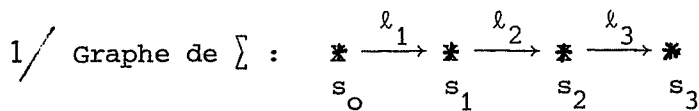
$$(3) \quad \overset{\bullet}{\sigma} = M + SY - B \wedge (m {}^t \overset{\bullet\bullet}{B} 1_n + F).$$



Commentaire : Par hypothèse chaque liaison  $L_j$  entre  $S_i$  et  $S_k$  est une liaison de rotation relative de ces deux solides.

Par conséquent, le système  $\Sigma$  est repéré par  $n$  rotations. Par conséquent l'équation (3) est l'équation différentielle permettant d'étudier les  $n$  rotations, donc le mouvement de  $\Sigma$ . Les éléments de  $B$  sont des vecteurs *combinaisons* linéaires de vecteurs  $\vec{\gamma}_{ij} = \overrightarrow{G_i O_j}$  liés au solide de  $S_i$ . Si les liaisons  $L_j$  sont parfaites  $Y = 0$ , on obtient une équation qui généralise l'équation d'Euler d'un seul solide.

IB



$$S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On vérifie directement  $ST = I$

$$Y = \begin{pmatrix} -l\vec{u}_1 & l\vec{u}_1 & 0 \\ 0 & -l\vec{u}_2 & l\vec{u}_2 \\ 0 & 0 & -l\vec{u}_3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} l\vec{u}_1 & l\vec{u}_1 & 0 \\ 0 & l\vec{u}_2 & l\vec{u}_2 \\ 0 & 0 & l\vec{u}_3 \end{pmatrix}$$

$$B = -CT = \begin{pmatrix} l\vec{u}_1 & 2l\vec{u}_1 & 2l\vec{u}_1 \\ 0 & l\vec{u}_2 & 2l\vec{u}_2 \\ 0 & 0 & l\vec{u}_3 \end{pmatrix}$$

$$r = {}^t B 1_n = \begin{pmatrix} l\vec{u}_1 \\ 2l\vec{u}_1 + \vec{u}_2 \\ 2l\vec{u}_1 + 2l\vec{u}_2 + l\vec{u}_3 \end{pmatrix} \quad \text{se vérifie directement}$$

$$2/ \ddot{\sigma} = B \wedge (-m\dot{r} + F)$$

$$\frac{m\ell^2}{3} \begin{pmatrix} \ddot{\omega}_1 \\ \ddot{\omega}_2 \\ \ddot{\omega}_3 \end{pmatrix} = m\ell \begin{pmatrix} \vec{u}_1 & 2\vec{u}_1 & 2\vec{u}_1 \\ 0 & \vec{u}_2 & 2\vec{u}_2 \\ 0 & 0 & \vec{u}_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{bmatrix} -\ell \begin{pmatrix} \ddot{u}_1 \\ 2\vec{u}_1 + \ddot{u}_2 \\ 2\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 + \ddot{u}_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} g_x \\ g_x \\ g_x \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

avec  $\vec{u}_i = \vec{\omega}_i \wedge \vec{u}_i$

$$\ddot{u}_i = \dot{\omega}_i \wedge \vec{u}_i + \omega_i \wedge (\omega_i \wedge \vec{u}_i)$$

Soit  $\phi_i$  l'angle polaire de  $\vec{u}_i$ ;  $\vec{\omega}_i = \dot{\phi}_i \vec{z}$  et (3) est bien une équation différentielle du second ordre pour  $\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}$ .

$$3/ \frac{m\ell^2}{3} \begin{pmatrix} \ddot{\omega}_1 \\ \ddot{\omega}_2 \\ \ddot{\omega}_3 \end{pmatrix} = m\ell \begin{bmatrix} \vec{u}_1 \wedge (9\ddot{u}_1 + 6\ddot{u}_2 + 2\ddot{u}_3) \\ -\ell \begin{pmatrix} \vec{u}_2 \wedge (6\ddot{u}_1 + 5\ddot{u}_2 + 2\ddot{u}_3) \\ \vec{u}_3 \wedge (2\ddot{u}_1 + 2\ddot{u}_2 + \ddot{u}_3) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 5\vec{u}_1 \\ 3\vec{u}_2 \\ \vec{u}_3 \end{pmatrix} \wedge g_x \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}_i \sim \vec{x} \quad \vec{u}_i \sim \phi_i \vec{y} \quad \ddot{u}_i \sim \phi_i \ddot{y}$$

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \\ \ddot{\phi}_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 9\ddot{\phi}_1 + 6\ddot{\phi}_2 + 2\ddot{\phi}_3 \\ 6\ddot{\phi}_1 + 5\ddot{\phi}_2 + 2\ddot{\phi}_3 \\ 2\ddot{\phi}_1 + 2\ddot{\phi}_2 + \ddot{\phi}_3 \end{pmatrix} + \frac{g}{\ell} \begin{pmatrix} 5\phi_1 \\ 3\phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{28}{3} & 6 & 2 \\ 6 & \frac{16}{3} & 2 \\ 2 & 2 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \\ \ddot{\phi}_3 \end{pmatrix} = \frac{g}{l} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}$$

IC

1a/ On a toujours  $\begin{pmatrix} \overrightarrow{O_1 G_1} \\ \vdots \\ \overrightarrow{O_1 G_n} \end{pmatrix} = {}^t B_1 \mathbf{1}_n$ , car ceci a été établi par des considérations

géométriques, indépendamment du mouvement de  $O_1$ . Or  $\overrightarrow{OG_i} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1 G_i}$  donc

$$\mathbf{r} = \vec{f}_n + {}^t B_1 \mathbf{1}_n.$$

1b/ Partons de la 2ème équation de (2) :

$$\begin{aligned} \ddot{\sigma} &= M + SY + CT \wedge (m \mathbf{r} - F) = M + SY + B_n (-m \mathbf{r} + F) \\ &= M + SY + B \wedge (-m \mathbf{f}_n - m {}^t B_1 \mathbf{1}_n + F) \end{aligned}$$

Il est plus simple d'établir cette équation en écrivant la loi fondamentale dans le repère mobile en translation d'origine  $O_1$ . Il suffit d'ajouter à  $F$  la force d'inertie d'entraînement  $-m \mathbf{f}_n$ .

2/ Les équations (2) et (3) sont encore valables. Mais le mouvement de  $S_i$  par rapport à  $S_k$  par l'intermédiaire de  $L_j$  n'est plus seulement de rotation. Dans le cas présent les vecteurs  $\vec{\gamma}_{ij}$  ne sont plus liés aux solides  $S_i$ , il faudra donc être très prudent dans la dérivation vectorielle des vecteurs composant  $B$ .

IIA

1/ Idem que IA 1.

2a / Comme au I, si  $\ell_m$  part de  $s_i$  vers  $s_k$

$$(TS)_{jm} = t_{ji} - t_{jk}$$

Le reste de la démonstration reste valable.

2b / Les matrices T et S sont dans le cas présent rectangulaires. Mais de  $TS = I_{n-1}$  on peut déduire par multiplication à gauche par T de la 1ère équation de (1)

$$X = T(m\overset{\bullet\bullet}{r} - F)$$

(2) est alors immédiate.

3a / C'est le théorème du centre d'inertie par  $\sum$ .

3b / Reportons  $\vec{r}_i = \vec{R}_i + \vec{r}_G$  dans (1) :

$$m_i \overset{\bullet\bullet}{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_j s_{ij} \vec{X}_j \Rightarrow m_i (\overset{\bullet\bullet}{\vec{R}}_i + \vec{r}_G) = \vec{F}_i + \sum_j s_{ij} \vec{X}_j$$

$$\text{or } \vec{r}_G = \frac{1}{\sum m_i} \sum \vec{F}_i \text{ . Donc}$$

$$m_i \overset{\bullet\bullet}{\vec{R}}_i = \sum_{i'} \mu_{ii'} \vec{F}_{i'} + \sum_j s_{ij} \vec{X}_j$$

et finalement

$$mR = \mu F + SX$$

Par multiplication à gauche par T :  $X = T(mR - \mu F)$ . De  $\overset{\bullet\bullet}{\sigma} = M + C \wedge X + S \wedge Y$ , il vient :

$$\overset{\bullet\bullet}{\sigma} = M + C \wedge \underbrace{(T(mR - \mu F))}_{CT \wedge (mR - \mu F)} + SY \quad (3')$$

3c/ Comme au 14b on a encore  ${}^t S r + {}^t C 1_n = 0$  quelle que soit l'origine.

Prenons l'origine en G :

$${}^t S (R - R_1 1_n) + {}^t C 1_n = 0$$

$S = \begin{pmatrix} X \\ S \end{pmatrix}$   $T = (O \bar{T})$ ,  $\bar{S} \bar{T}$  sont des matrices  $(n-1) \times (n-1)$ .

$TS = I_{n-1}$  prouve que  $\bar{S}$  et  $\bar{T}$  sont inverses. Donc :

$$ST = \begin{pmatrix} 0 & \hline \vdots & I_{n-1} \\ 0 & \hline \end{pmatrix}$$

Il est alors immédiat que  ${}^t (ST) (R - R_1 1_n) = R - R_1 1_n$ . Or  ${}^t S (R - R_1 1_n) + {}^t C 1_n = 0$

Donc  ${}^t T {}^t S (R - R_1 1_n) + {}^t T {}^t C 1_n = 0$

$$R - R_1 1_n = -{}^t (CT) 1_n$$

$$\begin{cases} R - R_1 1_n = -{}^t (CT) 1_n \\ m_1 R_1 + \dots + m_n R_n = 0 \end{cases}$$

$${}^t \mu = \begin{pmatrix} 1 - \frac{m_1}{\sum m_i} & -\frac{m_2}{\sum m_i} & \dots \\ -\frac{m_1}{\sum m_i} & 1 - \frac{m_2}{\sum m_i} & \dots \\ -\frac{m_1}{\sum m_i} & -\frac{m_2}{\sum m_i} & \dots \end{pmatrix}$$

On a immédiatement  ${}^t \mu R = R$ ,  ${}^t \mu 1_n = 0$ .

Multiplions à gauche  $R - R_1 1_n = -{}^t (CT) 1_n$  par  ${}^t \mu$  :

$$R = -{}^t (CT \mu) 1_n = {}^t B 1_n$$

L'équation (3') s'écrit alors (3'')

$$4a/ \quad m_1 \mathbf{t}_{1_n} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (1 \dots 1) = \begin{pmatrix} m_1 \dots m_1 \\ \vdots \\ m_n \dots m_n \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } \mu = I - \frac{1}{\sum m_i} m_1 \mathbf{t}_{1_n}$$

4b/ De 4a on déduit :

$$CT\mu \wedge (m \mathbf{t}_{B_n}^{\bullet\bullet}) = CT \wedge (m \mathbf{t}_{B_n}^{\bullet\bullet})$$

Donc (3'') devient

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= M + SY - B \wedge (m \mathbf{t}_{B_n}^{\bullet\bullet}) - CT \wedge \mu F \\ &= M + SY + B \wedge (-m \mathbf{t}_{B_n}^{\bullet\bullet} + F) \quad \text{qui est (3)} \end{aligned}$$

### IIB

1a/ Appliquons le théorème du moment cinétique en G à S, le mouvement de S étant supposé d'équilibre relatif dans R.

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} &= \mathbf{J} \vec{\omega}_o & \vec{\omega}_o \wedge \mathbf{J} \vec{\omega}_o &= M \\ \omega_o^2 \vec{e}_2 \wedge \mathbf{J} \vec{e}_2 &= 3\omega_o^2 \vec{e}_3 \wedge \mathbf{J} \vec{e}_3 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \vec{e}_2 \wedge \mathbf{J} \vec{e}_2 = 3\vec{e}_3 \wedge \mathbf{J} \vec{e}_3$$

1b/ Soit  $\mathbf{J}_R = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}$  le tenseur d'inertie du solide dans R.

$$\begin{pmatrix} D \\ 0 \\ F \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} D \\ -E \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{donc } D = E = F = 0$$

R est donc principal d'inertie.

$$2/ \vec{\sigma} = \vec{J}_{\omega_0} \vec{h}$$

$$\vec{\omega}_0 \wedge (\vec{J}_{\omega_0} \vec{h}) = \vec{M} \quad \text{dans le cas d'équilibre relatif.}$$

$$\text{Donc } \vec{e}_2 \wedge \frac{\vec{h}}{\omega_0} + \vec{e}_2 \wedge \vec{J} \vec{e}_2 = 3 \vec{e}_3 \wedge \vec{J} \vec{e}_3$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \omega_0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\omega_0 F + h_1 \\ -\omega_0 B + h_2 \\ -\omega_0 D + h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\omega_0^2 D \\ -3\omega_0^2 E \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$4\omega_0 D = h_3 \quad E = 0 \quad \omega_0 F = h_1$$

Seule condition sur  $R$  :  $E = 0$ , conditions sur  $\vec{h}$  :  $h_1 = \omega_0 F$ ,

$$h_3 = 4\omega_0 D.$$

3a/ En équilibre relatif tous les  $\vec{\gamma}_{ij}$  sont fixés dans  $R$  donc les éléments de  $B$  sont fixes dans  $R$ .

$$3b/ \begin{matrix} * & \xrightarrow{\ell_1} & * \\ s_1 & & s_2 \end{matrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad T = (0 \quad -1) \quad C = \begin{pmatrix} \vec{C}_1 \\ \vec{C}_2 \end{pmatrix} \quad \mu = \frac{1}{m_1 + m_2} \begin{pmatrix} m_2 & -m_1 \\ -m_2 & m_1 \end{pmatrix}$$

$$B = -CT\mu = \frac{1}{m_1 + m_2} \begin{pmatrix} -m_2 \vec{C}_1 & m_1 \vec{C}_1 \\ -m_2 \vec{C}_2 & m_1 \vec{C}_2 \end{pmatrix}$$

$$R = {}^t B I_n = \frac{\vec{C}_1 + \vec{C}_2}{m_1 + m_2} \begin{pmatrix} -m_2 \\ m_1 \end{pmatrix}$$

Appliquons (3) ( $Y = 0$ )

$$\ddot{\sigma} = M+B \wedge (-m \overset{\bullet\bullet}{\underset{n}{B}}_1 + F)$$

$$\begin{pmatrix} \vec{\omega}_0 \wedge \vec{J}_1 \vec{\omega}_0 - 3\omega_0^2 \vec{e}_3 \wedge \vec{J}_1 \vec{e}_3 \\ \vec{\omega}_0 \wedge \vec{J}_2 \vec{\omega}_0 - 3\omega_0^2 \vec{e}_3 \wedge \vec{J}_2 \vec{e}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{m_1+m_2} \begin{pmatrix} -m_2 \vec{C}_1 & m_1 \vec{C}_1 \\ -m_2 \vec{C}_2 & m_1 \vec{C}_2 \end{pmatrix} (-m \overset{\bullet\bullet}{\underset{n}{B}}_1 + F)$$

$$F = \begin{pmatrix} -\omega_0^2 m_1 (\vec{r}_G + \vec{R}_1 - 3\vec{e}_3 \vec{R}_1 \cdot \vec{e}_3) \\ -\omega_0^2 m_2 (\vec{r}_G + \vec{R}_2 - 3\vec{e}_3 \vec{R}_2 \cdot \vec{e}_3) \end{pmatrix}$$

On vérifie que la contribution de  $\vec{r}_G$  est nulle et on obtient :

$$\omega_0^2 \begin{pmatrix} \vec{e}_2 \wedge \vec{J}_1 \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 \wedge \vec{J}_1 \vec{e}_3 \\ \vec{e}_2 \wedge \vec{J}_2 \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 \wedge \vec{J}_2 \vec{e}_3 \end{pmatrix} = \frac{m_1 m_2 \omega_0^2}{m_1+m_2} \begin{pmatrix} \vec{e}_2 \wedge (\vec{e}_2 \cdot (\vec{R}_2 - \vec{R}_1) \vec{C}_1) - 3\vec{e}_3 \wedge [\vec{e}_3 \cdot (\vec{R}_2 - \vec{R}_1) \vec{C}_1] \\ \vec{e}_2 \wedge (\vec{e}_2 \cdot (\vec{R}_2 - \vec{R}_1) \vec{C}_2) - 3\vec{e}_3 \wedge [\vec{e}_3 \cdot (\vec{R}_2 - \vec{R}_1) \vec{C}_2] \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \mathcal{L}_1 \vec{e}_2 = \vec{J}_1 \vec{e}_2 + \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} [(\vec{R}_1 - \vec{R}_2) \cdot \vec{e}_2] \vec{C}_1$$

$$\mathcal{L}_2 \vec{e}_2 = \vec{J}_2 \vec{e}_2 + \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} [(\vec{R}_1 - \vec{R}_2) \cdot \vec{e}_2] \vec{C}_2$$

3c/ Immédiate. Idem que le passage de 1 à 2.



# PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

## DÉFINITIONS, NOTATIONS ET RAPPELS

- 1° Dans tout le problème  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$  désignent respectivement les ensembles des entiers naturels, des entiers relatifs, des rationnels, des réels et des complexes. Si  $n$  est un entier ( $n \geq 1$ ),  $\mathbb{R}^n$  est l'ensemble des  $n$ -uples de réels. Si  $(x_i, i \in I)$  désigne une famille de nombres réels, on note  $\sup_{i \in I} x_i$  leur borne supérieure et  $\inf_{i \in I} x_i$  leur borne inférieure.

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}; \quad \mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}; \quad \overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

- 2° Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace probabilisé. On dit que  $V$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  si  $V$  est une application mesurable de  $(\Omega, \mathcal{A})$  dans  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{R}^n)$  où  $\mathcal{R}^n$  désigne la tribu borélienne de  $\mathbb{R}^n$ . Lorsque  $n = 1$  on dit que  $V$  est une variable aléatoire réelle. On note  $P_V$  la loi de  $V$ , c'est-à-dire la probabilité sur  $\mathcal{R}^n$  image de  $P$  par  $V$ . Par abus de langage,  $V$  désigne aussi la classe de  $P$ -équivalence de l'application  $V$ . Pour tout  $A$  de  $\mathcal{R}^n$ , on note

$$\{X \in A\} = X^{-1}(A).$$

La notion de variable aléatoire complexe est obtenue en identifiant  $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{R}^2$ .

On note  $1_A$  la fonction indicatrice d'un ensemble  $A \in \mathcal{A}$ , c'est-à-dire la variable aléatoire réelle qui vaut 1 sur  $A$ , et 0 sur le complémentaire de  $A$ .

- 3° Si  $(V_i, i \in I)$  est une famille de variables aléatoires (à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ ) on note  $\sigma(V_i, i \in I)$  la plus petite sous-tribu de  $\mathcal{A}$  rendant mesurables les applications  $V_i$  de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^n$  pour tout  $i \in I$ . Une application mesurable de  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{R}^n)$  dans  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{R}^d)$  est dite borélienne.

- 4° Un processus  $\xi$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  est la donnée d'une famille  $(\xi_t, t \in \mathbb{R}_+)$  de variables aléatoires  $d$ -dimensionnelles. On dit que  $\xi$  est (*presque sûrement*) continu s'il existe  $A \in \mathcal{A}$ , de probabilité 1 tel que : pour tout  $\omega$  de  $A$ , l'application  $t \in \mathbb{R}_+ \rightarrow \xi_t(\omega) \in \mathbb{R}^d$  est continue.

On dit que deux processus *continus*  $\xi$  et  $\xi'$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  ont même loi si : pour toute suite finie  $t_0, t_1, \dots, t_n$  de réels positifs, les lois de  $(\xi_{t_0}, \xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n})$  et  $(\xi'_{t_0}, \xi'_{t_1}, \dots, \xi'_{t_n})$  coïncident.

- 5° On note  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$  l'espace vectoriel des classes de  $P$ -équivalence de variables (réelles ou complexes) sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  dont le module est de carré intégrable, muni de la norme  $\|\cdot\|_2$ . Si  $V$  est une variable aléatoire, on note  $V \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$  par l'abus de langage précisé au 2°.

- 6° Soient  $\mathcal{F}$  une sous-tribu de  $\mathcal{A}$  et  $V$  une variable aléatoire intégrable.  $E[V|\mathcal{F}]$  désigne l'espérance conditionnelle de  $V$  par rapport à  $\mathcal{F}$  :  $E[V|\mathcal{F}]$  est  $\mathcal{F}$ -mesurable et vérifie  $E[V 1_F] = E[E[V|\mathcal{F}] 1_F]$  pour tout ensemble  $\mathcal{F}$ -mesurable  $F$ .

Si  $V$  est de la forme  $1_A$  ( $A \in \mathcal{A}$ ) on notera aussi  $E[1_A|\mathcal{F}]$  sous la forme  $P[A|\mathcal{F}]$ ; si  $\mathcal{F}$  est la tribu  $\sigma(M)$  engendrée par la variable aléatoire  $M$ , on abrégera  $E[\cdot|\mathcal{F}]$  par  $E[\cdot|M]$ .

7° Une variable aléatoire  $V$  (respectivement un processus  $\xi$ ) est dit indépendant d'une sous-tribu  $\mathcal{H}$  de  $\mathcal{A}$  si les tribus  $\sigma(V)$  et  $\mathcal{H}$  (respectivement  $\sigma(\xi_t, t \in \mathbb{R}_+)$  et  $\mathcal{H}$ ) sont indépendantes.

Soient  $(N_i, i \in I)$  et  $(M_k, k \in K)$  deux familles de variables (à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ ). On rappelle que les tribus  $\sigma(N_i, i \in I)$  et  $\sigma(M_k, k \in K)$  qu'elles engendrent sont indépendantes dès que : pour toute famille finie  $f_1, f_2, \dots, f_n, g_1, \dots, g_m$  de fonctions boréliennes bornées (ou seulement continues bornées) sur  $\mathbb{R}^d$  et pour tout  $(i_1, \dots, i_n) \in I^n$ , pour tout  $(k_1, \dots, k_m) \in K^m$ ,

$$E[f_1(N_{i_1}) \dots f_n(N_{i_n}) g_1(M_{k_1}) \dots g_m(M_{k_m})] = E[f_1(N_{i_1}) \dots f_n(N_{i_n})] \cdot E[g_1(M_{k_1}) \dots g_m(M_{k_m})].$$

8° On dit de même que des éléments aléatoires (ensembles, variables, tribus, processus, ...) sont *indépendants conditionnellement* à un événement  $A$  de  $\mathcal{A}$  s'ils sont indépendants lorsque l'on munit  $(\Omega, \mathcal{A})$  de la probabilité conditionnelle  $P[\cdot | A] = \frac{P[\cdot \cap A]}{P[A]}$ .

9° Soient  $\mathcal{F}$  une sous-tribu de  $\mathcal{A}$ ,  $M$  une variable aléatoire  $\mathcal{F}$ -mesurable (à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$ ) et  $N$  une variable aléatoire (à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ ) indépendante de  $\mathcal{F}$ . Si  $\varphi$  est borélienne bornée sur  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ ,

$$E[\varphi(M, N) | \mathcal{F}] = \int \varphi(M, x) P_N(dx).$$

10° Une écriture du type :  $\int_a^b f(t) dt$  (resp.  $\int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx$ ) indique que l'on intègre la fonction (borélienne)  $f$  (resp.  $g$ ) par rapport à la mesure de Lebesgue sur l'intervalle  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$  (resp. sur  $\mathbb{R}^n$ ).

11° Tous les éléments aléatoires introduits dans la suite sont supposés définis sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

## PREMIÈRE PARTIE

1° Soit  $(V_n, n \geq 1)$  une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, ayant un moment d'ordre 2 et centrées ( $E[V_n] = 0$ ). On note :

$$b_n = E[V_n^2] \quad \text{et pour } t \in [-1, +1], \quad S_n(t) = \sum_{1 \leq k \leq n} V_k \exp(ik\pi t)$$

On suppose qu'il existe  $\delta > 0$  avec

$$\sum_{k \geq 1} k^{\delta+1/2} b_k < +\infty.$$

a. Montrer que, pour tout  $t \in [-1, +1]$ , la suite  $(S_n(t), n \geq 1)$  converge dans  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$  vers une variable aléatoire complexe  $W_t$ .

b. Établir les majorations suivantes :

$$i) \quad |S_n(t) - S_m(t)|^2 \leq \left( \sum_{m < k \leq n} V_k^2 \right) + 2 \sum_{1 \leq j < n-m} \left| \sum_{m < k \leq n-j} V_k V_{k+j} \right| \quad (1 \leq m < n).$$

$$ii) \quad E \left[ \left| \sum_{m < k \leq n-j} V_k V_{k+j} \right| \right] \leq \left( \sum_{m < k \leq n-j} b_k b_{k+j} \right)^{1/2} \quad (1 \leq m, n, j; m+j \leq n).$$

$$iii) \quad E \left[ \left\{ \sup_{t \in [-1, +1]} |S_n(t) - S_m(t)| \right\}^2 \right] \leq (1 + \sqrt{2}(n-m)) \sum_{m < k \leq n} b_k \quad (1 \leq m < n).$$

c. Montrer que pour toute suite  $(c_n, n \geq 1)$  de réels on a :

$$\sum_{n \geq 1} c_n |2^{n/4}| \leq (2^\delta - 1)^{-1/2} \cdot \left( \sum_{n \geq 1} c_n^2 2^{n(\delta+1/2)} \right)^{1/2}.$$

En déduire :

$$\sum_{n \geq 1} 2^{n/4} \left( \sum_{2^n < k \leq 2^{n+1}} b_k \right)^{1/2} \leq (2^\delta - 1)^{-1/2} \left( \sum_{k \geq 1} k^{1/2+\delta} b_k \right)^{1/2}.$$

d. Soit, pour  $n$  entier non nul,  $M_n = \sup_{t \in [-1, +1]} |S_{2^{n+1}}(t) - S_{2^n}(t)|$ .

Montrer que  $\sum_{n \geq 1} E[M_n]$  est fini. En déduire :  $P \left[ \sum_{n \geq 1} M_n < +\infty \right] = 1$ .

Montrer que, pour presque tout  $\omega$  de  $\Omega$ , la suite de fonctions :

$$t \longrightarrow \sum_{1 \leq k \leq 2^n} V_k(\omega) \exp(ik\pi t) \quad (n \geq 0, t \in [-1, +1])$$

converge uniformément sur  $[-1, +1]$ . En conclure que l'on peut supposer (et c'est ce que l'on fera dans la suite) que  $W$  est presque sûrement continu.

2° a. Soit  $f \in L^2([-1, +1], du)$  et pour  $k \in \mathbb{Z}$  :

$$a_k = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f(t) \exp(-ik\pi t) dt.$$

On rappelle :  $f(u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \exp(ik\pi u)$  dans  $L^2([-1, +1], du)$ .

Montrer que si  $f$  est paire,  $a_k = a_{-k}$  pour tout entier  $k$ .

b. Soit  $g \in L^2([0, 1], du)$ . Montrer qu'il existe des coefficients  $(\gamma_n, n \in \mathbb{N})$  tels que :

$$g(u) = \sum_{n \geq 0} \gamma_n \cos n\pi u \quad \text{dans } L^2([0, 1], du).$$

c. En déduire :

i) pour  $0 \leq t \leq 1$ ,  $1_{|0,t|}(u) - t = \frac{2}{\pi} \sum_{k \geq 1} \frac{\sin k\pi t}{k} \cos k\pi u$  dans  $L^2([0, 1], du)$ .

ii) pour  $0 \leq t \leq s \leq 1$ ,  $t(1-s) = \frac{2}{\pi^2} \sum_{k \geq 1} \frac{\sin k\pi t}{k^2} \frac{\sin k\pi s}{k^2}$ .

3° On suppose dorénavant que  $\pi^2 n^2 b_n = 2 (n \geq 1)$ ;  $C_t$  désigne, pour  $0 \leq t \leq 1$ , la partie imaginaire de  $W_t$ .

a. Montrer que pour  $0 \leq t \leq 1$ ,  $C_t$  est une variable aléatoire centrée, de variance  $t(1-t)$ . Calculer  $E[C_t C_s]$  pour  $0 \leq s, t \leq 1$ .

b. Soit pour  $t$  réel positif,  $B_t = (1+t) C_{\frac{t}{1+t}}$ . Montrer que pour  $s$  et  $t$  positifs,  $E[B_t B_s] = \inf(t, s)$ .

4° On suppose désormais de plus que chaque variable  $V_n$  suit une loi de Laplace-Gauss.

a. Montrer que les suites de réels  $(\lambda_k, k \geq 1)$  telles que la suite  $\left( \sum_{1 \leq k \leq n} \lambda_k V_k, n \geq 1 \right)$  converge dans  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$

sont exactement les suites vérifiant  $\sum_{k \geq 1} \frac{\lambda_k^2}{k^2} < +\infty$ , et montrer que dans ce cas la limite dans  $L^2$  est une

variable aléatoire gaussienne, centrée, de variance  $\frac{2}{\pi^2} \sum_{k \geq 1} \frac{\lambda_k^2}{k^2}$ .

b. Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$  des réels et  $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$  ;

Montrer que la variable aléatoire  $\sum_{1 \leq j \leq n} u_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})$  est centrée, a pour variance  $\sum_{1 \leq j \leq n} u_j^2 (t_j - t_{j-1})$ ,

et est gaussienne.

En déduire que les variables  $(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}, 1 \leq j \leq n)$  sont indépendantes.

c. Montrer que  $E[B_1^4] = 3$ . En déduire que, pour tout  $t \geq 0$ , la suite

$\left( \sum_{0 < k \leq n} \left( B_{\frac{k}{n}t} - B_{\frac{k-1}{n}t} \right)^2, n \geq 1 \right)$  converge vers  $t$  dans  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

## DEUXIÈME PARTIE

On suppose définies sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  trois copies indépendantes  $X, Y$  et  $Z$  du processus  $B$  (i.e.  $X, Y, Z$  sont presque sûrement continus, ont même loi que  $B$  et les tribus  $\sigma(X_t, t \geq 0)$ ,  $\sigma(Y_t, t \geq 0)$  et  $\sigma(Z_t, t \geq 0)$  sont indépendantes.  $U$  désigne le processus (à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$ )  $(X, Y, Z)$ .

Pour  $t \geq 0$ ,  $\mathcal{F}_t$  désigne la tribu  $\sigma(U_s, 0 \leq s \leq t)$ ;  $\mathcal{F}_\infty = \sigma(U_s, s \geq 0)$ .

Une variable  $T$  à valeurs dans  $\overline{\mathbb{R}}_+$  est un temps d'arrêt si  $\{\omega \mid T(\omega) \leq t\}$  est dans  $\mathcal{F}_t$  pour tout réel positif  $t$ .

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty, A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t \geq 0\}.$$

1° Soient  $S$  et  $T$  des temps d'arrêt.

a. Montrer que  $\mathcal{F}_S$  est une tribu et que  $S$  est  $\mathcal{F}_S$ -mesurable.

b. Si  $S$  est inférieur à  $T$ , montrer que  $\mathcal{F}_S$  est contenue dans  $\mathcal{F}_T$ .

c. Pour  $n \in \mathbb{N}$  ( $n \geq 1$ ), soit  $T_n$  la variable définie par :

$$T_n = (k+1)2^{-n} \text{ sur } \{k2^{-n} \leq T < (k+1)2^{-n}\}, T_n = +\infty \text{ sur } \{T = +\infty\}.$$

Montrer que  $(T_n, n \geq 1)$  est une suite de temps d'arrêt, décroissant vers  $T$ . Montrer que pour tout  $A \in \mathcal{F}_{T_n}$  et tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $A \cap \left\{ T_n = \frac{k+1}{2^n} \right\}$  appartient à  $\mathcal{F}_{(k+1)2^{-n}}$ .

2° a. Soit  $r \geq 0$ ; montrer que le processus  $t \longrightarrow U_{t+r} - U_r$  est indépendant de la tribu  $\mathcal{F}_r$  et a même loi que  $U$ .

b. Soit  $T$  un temps d'arrêt; montrer que, conditionnellement à  $\{T < +\infty\}$ , le processus  $t \longrightarrow U_{T_n+t} - U_{T_n}$  est indépendant de  $\mathcal{F}_{T_n}$  et a même loi que  $U$ . En déduire que, conditionnellement à  $\{T < +\infty\}$ , le processus  $t \longrightarrow U_{T+t} - U_T$  est indépendant de  $\mathcal{F}_T$ , de même loi que  $U$ .

c. Montrer que pour  $\varphi$  fonction borélienne bornée sur  $\mathbb{R}^3$ ,  $t \geq 0$  et  $h > 0$ , on a :

$$E[\varphi(U_{t+h}) \mid \mathcal{F}_t] = \frac{1}{(2\pi h)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} dv \varphi(v) \exp - \left( \frac{\|v - U_t\|^2}{2h} \right)$$

où  $\|u\| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$  est la norme euclidienne du vecteur  $u = (x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$ .

TROISIÈME PARTIE

UNIVERSITE de NANCY I  
Département de Mathématiques  
BIBLIOTHEQUE

Q et G désignent les fonctions définies sur  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$  par :

$$Q(h, a, r) = \sqrt{\frac{2}{\pi h}} \frac{r}{a} \operatorname{sh} \left( \frac{ar}{h} \right) \exp \left( - \frac{a^2 + r^2}{2h} \right) \quad (a > 0)$$

$$Q(h, 0, r) = \sqrt{\frac{2}{\pi h^3}} r^2 \exp \left( - \frac{r^2}{2h} \right)$$

$$G(p, a, r) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \frac{r}{a} \left( \exp \left( - \sqrt{2p} |r - a| \right) - \exp \left( - \sqrt{2p} (r + a) \right) \right) \quad (a > 0)$$

$$G(p, 0, r) = 2r \exp \left( - \sqrt{2p} r \right)$$

On admettra l'égalité pour  $p > 0$  et  $b \geq 0$  :

$$\sqrt{2p} \int_0^\infty \exp \left( - \left( pt + \frac{b^2}{2t} \right) \right) \frac{dt}{\sqrt{2\pi t}} = \exp \left( - b \sqrt{2p} \right).$$

On pourra aussi admettre le résultat suivant : soit  $f$  une fonction borélienne bornée sur  $\mathbb{R}_+$  ; si  $\int_0^\infty f(t) \exp(-pt) dt$  est nulle pour tout  $p > 0$ , alors  $f$  est nulle presque sûrement (pour la mesure de Lebesgue).

$U$  étant le processus (à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$ ) défini dans la deuxième partie, si  $u \in \mathbb{R}^3$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $R_t^u$  est le réel  $\|u + U_t\|$  ; pour simplifier l'écriture on remplacera  $R_t^u$  par  $R_t$ .

1° Soit  $f$  une fonction borélienne bornée sur  $\mathbb{R}_+$ .

a. Soit  $w$  un vecteur non nul de  $\mathbb{R}^3$ ,  $h$  un réel ( $h > 0$ ) ; montrer l'égalité :

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(\|x\|) \exp \left( - \frac{\|x - w\|^2}{2h} \right) \frac{dx}{(2\pi h)^{3/2}} = \int_0^\infty f(r) Q(h, \|w\|, r) dr.$$

(On pourra faire un changement de repère orthonormé tel que  $\frac{w}{\|w\|}$  soit l'un des vecteurs de base, puis intégrer en coordonnées sphériques.)

b. Établir l'égalité suivante ( $t \geq 0$ ,  $h > 0$ ) :

$$E[f(R_{t+h}^u) | \mathcal{F}_t] = \int_0^\infty f(r) Q(h, R_t^u, r) dr \quad (u \in \mathbb{R}^3).$$

Quelle est la loi de  $R_t$  ?

c. Montrer que si  $p$  est strictement positif, on a :

$$E \left[ \int_0^\infty f(R_{t+h}^u) \exp(-ph) dh | \mathcal{F}_t \right] = \int_0^\infty f(r) G(p, R_t^u, r) dr \quad (u \in \mathbb{R}^3).$$

2° a. Soient  $0 < t_1 < t_2 \dots < t_n$  des réels et  $u \in \mathbb{R}^3$ ; calculer la densité de la loi du vecteur aléatoire  $(R_{t_1}^u, R_{t_2}^u, \dots, R_{t_n}^u)$ . Montrer que les processus  $t \longrightarrow R_t^u$  et  $t \longrightarrow R_t^v$  ont la même loi si  $\|u\| = \|v\|$ .

b. Soient en outre  $t \geq 0$  et  $f_1, f_2, \dots, f_n$  des fonctions boréliennes bornées sur  $\mathbb{R}_+$ ; soit  $\Phi$  la fonction définie pour  $r \in \mathbb{R}_+$  par :

$$\Phi(r) = E [f_1(R_{t_1}^{r\alpha}) \dots f_n(R_{t_n}^{r\alpha})] \quad (\alpha \in \mathbb{R}^3, \|\alpha\| = 1).$$

Montrer que  $\Phi$  est borélienne et que :

$$E [f_1(R_{t_1+t}^u) \dots f_n(R_{t_n+t}^u) | \mathcal{F}_t] = \Phi(R_t^u) = E [f_1(R_{t_1+t}^u) \dots f_n(R_{t_n+t}^u) | R_t^u].$$

3° Soient  $u \in \mathbb{R}^3$  et  $a > 0$ ; on abrégera dans cette question  $R_t^u$  par  $\rho_t$ .

On définit sur  $\Omega$  une variable  $\tau$  (à valeurs dans  $\overline{\mathbb{R}_+}$ ) en posant :

$$\tau(\omega) = +\infty \text{ si, pour tout } t \geq 0, \rho_t(\omega) \text{ est différent de } a;$$

$$\tau(\omega) = \inf \{ t \geq 0, \rho_t(\omega) = a \} \text{ sinon.}$$

a. Montrer que, pour tout réel positif  $s$ , on a :

$$\{s < \tau\} = \bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq 1}} \bigcap_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ q \leq s}} \left\{ |\rho_q - a| \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

En déduire que  $\tau$  est un temps d'arrêt.

b. Soient  $f$  une fonction borélienne bornée sur  $\mathbb{R}_+$  et  $p > 0$ .

Montrer que, pour tout  $s \geq 0$ ,  $\int_0^s f(\rho_t) \exp(-pt) dt$  est  $\mathcal{F}_s$ -mesurable.

Montrer :

$$\int_0^\tau f(\rho_t) \exp(-pt) dt = \lim_n \sum_{k \geq 0} 1_{\left\{ \frac{k}{n} \leq \tau < \frac{k+1}{n} \right\}} \int_0^{\frac{k}{n}} f(\rho_t) \exp(-pt) dt$$

En déduire que  $\int_0^\tau f(\rho_t) \exp(-pt) dt$  est  $\mathcal{F}_\tau$ -mesurable. Établir en outre l'égalité :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(\rho_t) \exp(-pt) dt \\ = \int_0^\tau f(\rho_t) \exp(-pt) dt + 1_{\{\tau < +\infty\}} \exp(-p\tau) \int_0^\infty f(\rho_{t+\tau}) \exp(-pt) dt. \end{aligned}$$

c. Montrer que, conditionnellement à  $\{\tau < +\infty\}$ , le processus  $t \longrightarrow \rho_{t+\tau}$  est indépendant de  $\mathcal{F}_\tau$  et a même loi que  $R^{a\alpha}$  dès que  $\|\alpha\| = 1$ . En déduire, pour  $f$  fonction borélienne bornée, l'égalité :

$$\begin{aligned} E \left[ \int_0^\infty f(\rho_t) \exp(-pt) dt \right] \\ = E \left[ \int_0^\tau f(\rho_t) \exp(-pt) dt \right] + E \left[ 1_{\{\tau < +\infty\}} \exp(-p\tau) \int_0^\infty f(r) G(p, a, r) dr \right]. \end{aligned}$$

d. En utilisant les fonctions  $f_1 = 1_{]0, a[}$  ou  $f_2 = 1_{]a, +\infty[}$ , établir :

$$\begin{aligned} E [ 1_{\{\tau < +\infty\}} \exp(-p\tau) ] &= \frac{a}{\|u\|} \exp(-\sqrt{2p}(\|u\| - a)) && \text{si } \|u\| \geq a, \\ &= \frac{a}{\|u\|} \frac{\text{sh}(\|u\| \sqrt{2p})}{\text{sh}(a\sqrt{2p})} && \text{si } 0 < \|u\| < a, \\ &= \frac{a\sqrt{2p}}{\text{sh}(a\sqrt{2p})} && \text{si } 0 = \|u\|. \end{aligned}$$

En déduire :  $P[\tau < +\infty] = \inf\left(1, \frac{a}{\|u\|}\right)$ . Montrer que l'ensemble  $\{\exists t \geq 0, \rho_t = 0\}$  est  $\mathcal{F}_\infty$ -mesurable et qu'il est de probabilité nulle lorsque  $\|u\|$  est non nul.

e. On suppose  $\|u\| > a$ . Soit  $f$  borélienne bornée sur  $\mathbb{R}_+$ ; montrer pour  $p > 0$  l'égalité :

$$\begin{aligned} E \left[ \int_0^\tau f(\rho_t) \exp(-pt) dt \right] \\ = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_a^\infty \frac{r}{\|u\|} f(r) \left( \exp(-\sqrt{2p}|r - \|u\||) - \exp(-\sqrt{2p}(\|u\| + r - 2a)) \right) dr. \end{aligned}$$

En déduire :

$$\begin{aligned} E \left[ f(\rho_h) 1_{\{h < \tau\}} \right] \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi h}} \int_a^\infty \frac{r}{\|u\|} \left( \text{sh} \frac{(r-a)(\|u\| - a)}{h} \right) \left( \exp - \frac{(r-a)^2 + (\|u\| - a)^2}{2h} \right) f(r) dr \end{aligned}$$

( $h$  réel,  $h > 0$ ).

4° a. Soit pour  $n$  entier,  $n \geq 1$ ,  $A_n = \left\{ \exists t \geq 0, R_{\frac{1}{n} + t} = 0 \right\}$ .

Montrer que  $A_n$  est  $\mathcal{F}_\infty$ -mesurable; calculer  $P[A_n | R_{1/n}]$ . En déduire que  $\{\omega | t \longrightarrow U_t(\omega) \text{ ne retourne pas en } 0\}$  est un événement de probabilité 1.

b. Soient pour  $a$  et  $b$  réels strictement positifs :

$$\tau_a = \inf(t \geq 0, R_t = a) \quad (\inf \emptyset = +\infty \text{ par convention});$$

$$\sigma_b = \sup(t \geq 0, R_t < b).$$

Montrer que  $\tau_a$  est presque sûrement fini;  $a \longrightarrow \tau_a$  est croissante et tend vers  $+\infty$  avec  $a$ . Montrer que l'on a presque sûrement :

$$\{\tau_a < \sigma_b\} = \{\exists u \in \mathbb{Q}, u > 0, R_{u + \tau_a} < b\}.$$

En déduire :

$$P[\tau_a < \sigma_b] = \inf\left(1, \frac{b}{a}\right) \text{ et } P[\sigma_b < +\infty] = 1.$$

Montrer que  $R_t$  tend presque sûrement vers  $+\infty$  avec  $t$ .



5° Soient pour  $t \geq 0$  et  $h > 0$ ,  $J_t = \inf_{u \geq t} R_u$ ,  $I_{t,h} = \inf_{t \leq u \leq t+h} R_u$ .

a. Montrer que le processus  $J$  est presque sûrement continu et que  $J_t = \inf(J_{t+h}, I_{t,h})$ .

b. Montrer que pour  $t \geq 0$ ,  $b > 0$ ,  $\{J_t < b\} = \{\exists \varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon \geq 0, R_{\varepsilon+t} < b\}$ .

En déduire les égalités :

$$P [J_t \geq b \mid \mathcal{F}_t] = \sup \left( 0, 1 - \frac{b}{R_t} \right) = P [J_t > b \mid \mathcal{F}_t] \quad (t > 0);$$

$$E [f(J_t) \mid \mathcal{F}_t] = \frac{1}{R_t} \int_0^{R_t} f(j) dj \quad (t > 0, f \text{ borélienne bornée});$$

$$E [g(R_t, J_t) \mid \mathcal{F}_t] = \frac{1}{R_t} \int_0^{R_t} g(R_t, j) dj \quad (t > 0, g \text{ borélienne bornée sur } \mathbb{R}_+^2).$$

c. Soient  $g$  borélienne bornée sur  $\mathbb{R}_+^2$  et  $a > 0$ .

i) Démontrer l'égalité :

$$E [g(R_{t+h}, J_{t+h}) 1_{\{J_t > a\}} \mid \mathcal{F}_t] = E \left[ \frac{1}{R_{t+h}} \int_a^{R_{t+h}} g(R_{t+h}, j) dj 1_{\{a < R_{t+h}, a < I_{t,h}\}} \mid \mathcal{F}_t \right]$$

ii) Soit  $\tau_{t,a} = \inf(s \geq 0, R_{t+s} \leq a)$ . Déduire de l'égalité :

$$\{\tau_{t,a} > h\} = \{a < I_{t,h}\} \text{ la relation :}$$

$$\begin{aligned} & E [g(R_{t+h}, J_{t+h}) 1_{\{a < J_t\}} \mid \mathcal{F}_t] \\ &= 1_{\{a < R_t\}} \frac{1}{R_t} \sqrt{\frac{2}{\pi h}} \int_a^\infty \left( \text{sh} \frac{(R_t - a)(r - a)}{h} \right) \left( \exp - \frac{(r - a)^2 + (R_t - a)^2}{2h} \right) \int_a^r g(r, j) dj dr \end{aligned}$$

d. Montrer que pour  $f$  borélienne bornée sur  $\mathbb{R}$  et  $a > 0$ , on a :

$$\begin{aligned} & E [f(2J_{t+h} - R_{t+h}) 1_{\{a < J_t\}} \mid \mathcal{F}_t] \\ &= 1_{\{a < R_t\}} \frac{1}{R_t} \int_a^{R_t} \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x) \exp \left( - \frac{(x - 2y + R_t)^2}{2h} \right) dx \right) dy. \end{aligned}$$

Notons  $\beta_t = 2J_t - R_t$  et  $\mathcal{H}_t$  la tribu engendrée par  $\mathcal{F}_t$  et  $J_t$ .

Montrer que :

$$E [f(\beta_{t+h}) \mid \mathcal{H}_t] = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \exp \left( - \frac{(x - \beta_t)^2}{2h} \right) dx.$$

Montrer enfin que  $\beta$  a même loi que  $B$ .

## RAPPORT SUR L'EPREUVE DE PROBABILITES ET STATISTIQUES

Le but du problème était d'établir quelques propriétés de la norme euclidienne  $Z$  du mouvement brownien à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$ . La première partie donne une construction du brownien réel ; la deuxième traite de la propriété de Markov forte du brownien tridimensionnel. Dans la partie III on étudie les lois des premiers et derniers temps de passage de  $Z$  et le théorème de Pitman : si  $J$  est le processus des minima futurs de  $Z$ ,  $2J-Z$  est un mouvement brownien réel.

Dans la première partie, on attendait des candidats qu'ils connaissent et sachent manipuler dans des situations "concrètes" : inégalité de Schwarz et convergence dans  $L^2$  et  $l^2$ , variables aléatoires indépendantes, variables et vecteurs gaussiens, calculs de moments. Les deuxième et troisième parties étaient plutôt centrées sur les notions de tribus, de mesurabilité, d'espérances et de lois conditionnelles, notions que l'on voulait faire mettre en pratique dans quelques calculs explicites.

Quelques candidats ont abordé la deuxième partie, très peu la troisième (l'énoncé était long mais jamais conçu pour arrêter les candidats). Le niveau d'ensemble est faible, malgré un barème large et de nombreuses questions faciles parsemant le problème.

### Corrigé résumé du problème

#### Première partie

$$1) \text{ Pour } 1 \leq m < n, |S_n(t) - S_m(t)|^2 = \sum_{m < h, k \leq n} v_k v_h \exp i \bar{a}(k-h)t$$

$$= \sum_{m < k \leq n} v_k^2 + 2 \sum_{1 \leq j < n-m} \cos(\bar{a}jt) \left( \sum_{m < k \leq n-j} v_k v_{k+j} \right) ;$$

Les  $(v_k, k \geq 1)$  sont indépendantes, centrées ; par suite :

$$E[|S_n(t) - S_m(t)|^2] = \sum_{m < k \leq n} E[v_k^2] \leq \sum_{m < k \leq n} k^{\frac{S+1}{2}} b_k ;$$

La suite  $(S_n(t), n \geq 1)$ , de Cauchy dans l'espace de Hilbert  $L^2(\Omega, a, P)$ , converge vers une variable aléatoire  $W_t$ .

b-i) résulte de :  $|\cos x| \leq 1$  ( $x \in \mathbb{R}$ ).

L'inégalité de Schwarz dans  $L^2(\Omega, a, P)$  donne :

$$(E[|\sum_{m < k \leq n-j} V_k V_{k+j}|])^2 \leq E[(\sum_{m < k \leq n-j} V_k V_{k+j})^2] = \sum_{m < k \leq n-j} b_k b_{k+j}$$

(indépendance et centrage des  $V_k$  et  $j \geq 1$ ). b-i) donne une majoration uniforme en  $t$  et b-iii) résulte alors de b-ii) et de l'inégalité de Schwarz dans  $L^2$  ; il en est de même pour c). Comme pour tout  $n$ ,  $[E M_n] \leq (E[M_n^2])^{1/2}$ , les majorations établies en c) montrent que  $\sum_{n \geq 1} [E M_n] (=E[\sum_{n \geq 1} M_n])$  par convergence monotone

est fini ;  $\sum_{n \geq 1} M_n$  est intégrable, donc presque sûrement fini.

Si  $\sum_{n \geq 1} M_n(\omega)$  est fini, la série de terme général

$$\sup_t \left| \sum_{2^n < k \leq 2^{n+1}} V_k(\omega) \exp i k \pi t \right| \text{ est convergente, ce qui implique la convergence uniforme de } t \rightarrow \sum_{k=1}^{2^n} V_k(\omega) \exp i k \pi t ;$$

la limite donne une version continue de  $t \rightarrow W_t$ , la suite

$(S_{2^n}, n \geq 1)$  étant extraite de la suite  $(S_k, k \geq 1)$ .

2) a) est trivial (changer  $t$  en  $-t$  dans l'intégrale définissant  $a_k$ ). Pour b), on prolonge par parité  $g$  en une fonction de  $L^2([-1, +1], du)$  que l'on développe en série de Fourier ; en se restreignant à  $[0, 1]$ , on a :

$$g(u) = \sum_{n \geq 0} \gamma_n \cos n \pi u \text{ dans } L^2([0, 1], du), \text{ où } \gamma_0 = \int_0^1 g(u) du ;$$

$$\gamma_n = 2 \int_0^1 g(u) \cos n \pi u du \quad (n \geq 1).$$

Si  $g = 1_{[0, t]}^{-t}$ , b) donne :

$$1_{[0, t]}^{-t} = \frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\sin n \pi t}{n} \cos n \pi u \text{ dans } L^2([0, 1], du), \text{ donc}$$

aussi dans  $L^1([0, 1], du)$ , d'où ii) en intégrant terme à terme.

3)  $C_t = \sum_{k \geq 1} V_k \sin k \pi t$  dans  $L^2(\Omega, a, P)$  ; les  $(V_k, k \geq 1)$  sont

centrées, il en est de même de  $C_t$  et :

$$E[C_t C_s] = \sum_{k \geq 1} [E V_k^2] (\sin k\pi s) (\sin k\pi t) = t^s (1-t)^s$$

d'après 2) (en particulier  $E[C_t^2] = t(1-t)$ ).

4) a) Dire que la suite  $(\sum_{1 \leq k \leq n} \lambda_k V_k, n \geq 1)$  converge dans

$L^2(\Omega, a, P)$ , c'est dire qu'elle y est de Cauchy ; les  $(V_k, k \geq 1)$  étant indépendantes et centrées, c'est aussi dire :

$$\sum_{k \geq 1} \lambda_k^2 E[V_k^2] < +\infty; \text{ si on ajoute que les } (V_k, k \geq 1) \text{ sont gaussiennes,}$$

Le passage par les fonctions caractéristiques montre que la limite est gaussienne (centrée, de variance  $\sum_{k \geq 1} \lambda_k^2 E[V_k^2]$ ).

b)  $\sum_{1 \leq j \leq n} u_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})$  est limite dans  $L^2(\Omega, a, P)$  de  $\sum_{1 \leq k \leq n} \lambda_k V_k$ ,

$$\text{où } \lambda_k = \sum_{i \leq j \leq n} u_j \left( (1+t_j) \left( \sin \frac{k\pi t_j}{1+t_j} \right) - (1+t_{j-1}) \left( \sin \frac{k\pi t_{j-1}}{1+t_{j-1}} \right) \right);$$

c'est donc, d'après a) une variable gaussienne centrée ; le calcul direct, à l'aide de 3), montre que sa variance est

$$\sum_{1 \leq j \leq n} u_j^2 (t_j - t_{j-1}); \text{ la matrice de covariance du vecteur gaussien}$$

$(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}, 1 \leq j \leq n)$  est diagonale ; c'est dire que les composantes

sont indépendantes.

c)  $B_1$  est gaussienne centrée, de variance 1 et

$$E[B_1^4] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^4 \exp - \frac{x^2}{2} dx \text{ se calcule par intégration par}$$

parties.

$$\text{Enfin } E \left[ \left( t - \sum_{0 < k \leq n} \left( B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}} \right) \right)^2 \right] = 2 \frac{t^2}{n}.$$

### Deuxième partie

1)  $S$  étant un temps d'arrêt, on vérifie sans peine :  $\Omega \mathcal{F}_S ; \mathcal{F}_S$

est stable par union dénombrable et par complémentation.

$(^c A \cap \{S \leq t\}) = ^c (A \cap \{S \leq t\}) \cap \{S \leq t\}$  ;  $\mathcal{F}_S$  est bien une tribu.

Pour montrer que  $S$  est  $\mathcal{F}_S$ -mesurable, il suffit d'établir :

$\{S \leq a\}$  appartient à  $\mathcal{F}_S$  pour tout  $a \in \mathbb{R}_+$  ; or, pour  $t \geq 0$ ,  
 $\{S \leq a\} \cap \{S \leq t\} = \{S \leq a \wedge t\} \in \mathcal{F}_{a \wedge t} \subset \mathcal{F}_t$ .

En outre, si  $T$  est un temps d'arrêt supérieur à  $S$  et  $A \in \mathcal{F}_S$ ,  
pour tout  $t \geq 0$ ,  $A \cap \{T \leq t\}$  appartient à  $\mathcal{F}_t$ , comme intersection  
des deux ensembles (de  $\mathcal{F}_t$ )  $A \cap \{S \leq t\}$  et  $\{T \leq t\}$  ; on a alors  
 $A \in \mathcal{F}_Y$  et  $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$ . Le point c) est facile si l'on remarque que  
pour  $T$  temps d'arrêt et  $t > 0$ ,  $\{T < t\} = \bigcup_{n \geq 1} \{T \leq t - \frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}_t$ .

2) a) D'après I4) les accroissements de  $U$  sont indépendants,  
stationnaires. En utilisant le rappel 7 on montre facilement  
que le processus  $t \rightarrow U_{t+r} - U_t$  a même loi que  $U$  et est indépen-  
dant de  $\mathcal{F}_r$ .

b) Soit  $A \in \mathcal{F}_{T_n}$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_1, f_2, \dots, f_k$  des fonctions continues  
bornées sur  $\mathbb{R}^3$ ,  $0 \leq t_1, \dots, t_k$  ;

$$E[f_1(U_{T_n+t_1} - U_{T_n}) \dots f_k(U_{T_n+t_k} - U_{T_n}) 1_A 1_{\{T_n < +\infty\}}]$$

$$\sum E[f_1(U_{t_1 + \frac{m+1}{2^n}} - U_{\frac{m+1}{2^n}}) \dots f_k(U_{t_k + \frac{m+1}{2^n}} - U_{\frac{m+1}{2^n}}) 1_{A \cap \{T_n = \frac{m+1}{2^n}\}}] ;$$

puisque  $A \cap \{T_n = \frac{m+1}{2^n}\} \in \mathcal{F}_{\frac{m+1}{2^n}}$  (cf II 1)), on peut appliquer

II 2) a) au terme générique de la série, qui vaut donc :

$$E[f_1(U_{t_1}) \dots f_k(U_{t_k})] P[A \cap \{T_n = \frac{m+1}{2^n}\}] ;$$

par sommation (en  $m$ ) :

$$E[f_1(U_{T_n+t_1} - U_{T_n}) \dots f_k(U_{T_n+t_k} - U_{T_n}) 1_A 1_{\{T_n < +\infty\}}] =$$

$$E[f_1(U_{t_1}) \dots f_k(U_{t_k})] P[A \cap \{T_n < +\infty\}] \quad (*)$$

(d'où l'indépendance annoncée et le fait que  $t \rightarrow U_{T_n+t} - U_{T_n}$  a  
même loi que  $U$ , conditionnellement à  $\{T_n < +\infty\}$ ).

Le passage de  $T_n$  à  $T$  se fait par convergence dominée dans (\*),  
en se limitant à  $A \in \mathcal{F}_T$  ( $\subset \mathcal{F}_{T_n}$ , cf II 1)) ( $\{T < +\infty\} = \{T_n < +\infty\}$ ).

c)  $U_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable et  $U_{t+h} - U_t$  est un vecteur gaussien centré, de matrice de covariance  $h \text{Id}$ , indépendant de  $\mathcal{F}_t$  (voir II 2-a).

Le rappel 9 et l'invariance de la mesure de Lebesgue par translation donnent la formule indiquée.

### Troisième partie

1) a) On fait le changement de repère indiqué (qui laisse la mesure de Lebesgue invariante) puis on passe en coordonnées sphériques :

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(\|x\|) \exp - \frac{\|x-w\|^2}{2h} \frac{dx}{(2\pi h)^{3/2}} =$$

$$\int_0^{\infty} f(r) r^2 dr \exp - \frac{r^2 + \|w\|^2}{2h} \frac{1}{(2\pi h)^{3/2}} \int_0^{\pi} \exp - \left( \frac{r\|w\|}{h} \cos\theta \right) \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$\int_0^{\infty} f(r) Q(h, \|w\|, r) dr, \text{ par définition de } Q.$$

La formule reste valable pour  $w = 0$ .

b)  $R_{t+h}^u$  est la norme euclidienne de  $u + U_{t+h} = u + U_t + U_{t+h} - U_t$  ; d'après II 2) et III 1) a),

$$E[f(R_{t+h}^u) | \mathcal{F}_t] = \int_0^{\infty} f(r) Q(h, R_t^u, r) dr.$$

$R_h$  a pour densité  $Q(h, 0, r) 1_{\{r>0\}}$ .

c) se déduit de b) grâce au théorème de Fubini.

2) a) En utilisant III 1)b) et le théorème de Fubini, on montre par récurrence sur  $n$ , que si  $f_1, \dots, f_n$  sont boréliennes bornées sur  $\mathbb{R}_+$ ,

$$E[f_1(R_{t_1}^u) \dots f_n(R_{t_n}^u)] =$$

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} dr_1 \dots dr_n f_1(r_1) \dots f_n(r_n) Q(t_1, \|u\|, r_1) Q(t_2 - t_1, r_1, r_2) \dots$$

$$\dots Q(t_n - t_{n-1}, r_{n-1}, r_n) ;$$

La densité de la loi de  $(R_{t_1}^u, \dots, R_{t_n}^u)$  ne dépend que de  $\|u\|$  ;  
 les processus  $t \rightarrow R_t^u$  et  $t \rightarrow R_t^v$  ont donc même loi (rappel 4)  
 si  $\|u\| = \|v\|$ .

b) Le caractère borélien de  $\Phi$  est obtenu par classe monotone.  
 Si  $Y$  est le processus  $U_{\cdot+t}^{-1}U_t$ , on a :

$$\begin{aligned} E[f_1(R_{t+t_1}^u) \dots f_n(R_{t+t_n}^u) | \mathcal{F}_t] &= \\ E[f_1(\|u+U_{t+t_1}^{-1}Y_{t_1}\|) \dots f_n(\|u+U_{t+t_n}^{-1}Y_{t_n}\|) | \mathcal{F}_t] &= \text{(II 2) et} \\ &\text{rappel 9)} \\ \int f_1(\|u+U_{t+t_1}^{-1}y_1\|) \dots f_n(\|u+U_{t+t_n}^{-1}y_n\|) P_{(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})} & (dy_1, \dots, dy_n) \\ = \text{(II 2) et III 2)a)} \Phi(R_t^u) & ; \end{aligned}$$

comme  $R_t^u$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable, on a aussi

$$\Phi(R_t^u) = E[f_1(R_{t+t_1}^u) \dots f_n(R_{t+t_n}^u) | R_t^u]$$

3) a) L'égalité des deux ensembles résulte de la définition  
 de  $\tau$  et de la continuité de  $t \rightarrow f_t$  ;  $f_q$  est  $\mathcal{F}_q$ -mesurable pour  
 tout  $q$  ; on en déduit  $\{s < \tau\}$  est dans  $\mathcal{F}_s$  pour tout  $s$ , i.e. est  
 un temps d'arrêt.

b)  $(\omega, t) \in \Omega [0, s] \rightarrow f(f_t(\omega)) \exp-pt$  est  $\mathcal{F}_s \otimes \mathbb{R}_+$ -mesurable ; par  
 suite  $\int_0^s f(f_t) \exp-pt dt$  est  $\mathcal{F}_s$ -mesurable ; considérée comme  
 fonction de  $s \in \bar{\mathbb{R}}_+$  elle est continue, d'où :

$$1_{\{\tau < +\infty\}} \int_0^\tau f(f_t) \exp-pt dt = \lim_n \sum_{k \geq 0} 1_{\{\frac{k}{n} \leq \tau < \frac{k+1}{n}\}} \int_0^{\frac{k+1}{n}} f(f_t) \exp-pt dt$$

est  $\mathcal{F}_\tau$ -mesurable (de même que  $1_{\{\tau = +\infty\}} \int_0^\infty f(f_t) \exp-pt dt$ ) ; en

effet si  $b > a \geq 0$  et  $F$  est  $\mathcal{F}_a$ -mesurable,  $F 1_{\{a \leq \tau < b\}}$  est  $\mathcal{F}_\tau$ -mesurable.

c) D'après II 2), conditionnellement à  $\{\tau < +\infty\}$ ,  $t \rightarrow U_{t+\tau} - U_\tau$  est indépendant de  $\mathcal{F}_\tau$  et a même loi que  $t \rightarrow U_t$ ;  $U_\tau$  est  $\mathcal{F}_\tau$ -mesurable sur  $\{\tau < +\infty\}$  et de norme  $a$ ; l'indépendance (conditionnellement à  $\{\tau < +\infty\}$ ) de  $\mathcal{F}_\tau$  et  $t \rightarrow f_{t+\tau}$  (ainsi que la loi de  $f_{\cdot+\tau}$ ) résulte alors de III 2). La dernière égalité est conséquence de III 3)b) et III 1)c) :

$$E[1_{\{\tau < +\infty\}} (\exp - p\tau) \int_0^\infty f(f_{t+\tau}) \exp - pt \, dt | \mathcal{F}_\tau] = \\ 1_{\{\tau < +\infty\}} \exp - p\tau E \left[ \int_0^\infty f(R_t^{a\alpha}) \exp - pt \, dt \right] \quad (|\alpha| = 1).$$

$$\text{d) Si } \|u\| < a, \quad \int_a^\infty G(p, \|u\|, r) \, dr = E \left[ \int_0^\infty f_2(t) \exp - pt \, dt \right] \\ \text{(cf. III 1) c)} \\ = E \left[ \exp - p\tau 1_{\{\tau < +\infty\}} \int_a^\infty G(p, a, r) \, dr \text{ (III 3)c)} \right];$$

si  $\|u\| > a$ , on a de même :

$$\int_0^a G(p, \|u\|, r) \, dr = E \left[ \exp - p 1_{\{\tau < \infty\}} \int_0^a G(p, a, r) \, dr \right];$$

on en déduit l'expression de  $[E \exp - p\tau 1_{\{\tau < +\infty\}}]$ . Quand  $p$  tend vers 0,  $E[\exp - p 1_{\{\tau < +\infty\}}]$  tend vers  $P[\tau < +\infty]$ , qui vaut donc, par passage à la limite dans les expressions précédentes :  $\inf(1, \frac{a}{\|u\|})$ . Par continuité de :

$$t \rightarrow t', \quad \{t \geq 0, \quad t = 0\} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ 0 \leq q \leq m}} \left\{ \frac{1}{q} \leq \frac{1}{n} \right\} \in \mathcal{F}_\infty \quad ;$$

pour  $\|u\| > 0$ , quand  $a \rightarrow 0$ ,  $P[\tau < +\infty]$  tend vers  $P[\exists t \geq 0, t = 0] (= 0)$ .

e) On reprend l'égalité démontrée en III 3)c), dans laquelle on remplace  $E[\exp - p\tau 1_{\{\tau < +\infty\}}]$  par son expression calculée en III 3)d). On inverse la transformation de Laplace grâce à la formule donnée en préambule à la partie III; on obtient ainsi une égalité dh presque sûre; si  $f$  est continue bornée sur  $\mathbb{R}_+$ , les deux expressions données sont des fonctions continues à gauche de  $h$ ; il y a donc égalité pour tout  $h$  de  $\mathbb{R}_+^*$ ; les deux expressions étant des mesures en  $f$ , le résultat reste vrai pour  $h$  borélienne.



4) Comme  $R_{1/n}$  est p.s. différent de 0, III 2)b) et III 3)d) donnent :

$$P[A_n | R_{1/n}] = P[\exists t \geq 0, R_t^u = 0] \Big|_{|||u||| = R_{1/n}} = 0 \text{ p.s.}$$

La probabilité de retour en 0 est  $\lim_n P[A_n]$ , i.e. 0. D'après III 3)d),  $\tau_a$  est p.s. fini ; la continuité de  $t \rightarrow f_t$  (propriété des valeurs intermédiaires) implique que  $a \rightarrow \tau_a$  est croissante et  $\sup_a \tau_a = +\infty$  ; pour la même raison

$$\{\tau_a < \sigma_b\} = \{t \in \mathbb{Q}_+, R_{\tau_a + t} < b\}, \text{ d'où :}$$

$$P[\tau_a < \sigma_b] = \inf(1, \frac{b}{a}) \quad (\text{voir III 3)c) et III 3)d}).$$

Quand  $a$  tend vers  $+\infty$ , on obtient  $P[\sigma_b = +\infty] = 0$  ;  $t \rightarrow R_t$  ne repasse p.s. plus en  $b$  après le temps fini  $\sigma_b$  ;  $R_t$  tend donc vers l'infini avec  $t$ .

5) a) On peut supposer  $R$  continu, tendant vers l'infini avec  $t$  ; on montre facilement pour  $s \geq t$  :  $|J_t - J_s| \leq \sup_{s \leq x \leq t} |R_t - R_x|$ .

b) En écrivant  $\{J_t < b\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}_+} \{R_{\varepsilon+t} < b\}$  on déduit de III 2) :

$P[J_t \geq b | \mathcal{F}_t] = \sup(0, 1 - \frac{b}{R_t})$  ; la loi de  $J_t$ , conditionnellement à  $\mathcal{F}_t$  est la loi uniforme sur l'intervalle  $(0, R_t)$  ; d'où les autres formules.

c) Pour c-i), on écrit  $1_{\{J_t < a\}} = 1_{\{J_{t+h} < a\}} 1_{\{I_{t,h} < a\}}$ , on conditionne d'abord par  $\mathcal{F}_{t+h}$  ( $\supset \mathcal{F}_t$ ) et on utilise III 5)b).

c-ii) résulte alors de la formule établie en III 3)e) et de III 2) (conditionnellement à  $\mathcal{F}_t$ , la loi de  $R_{t+}$  est celle de  $R^{\alpha R}_t$ ,  $||\alpha|| = 1$ ).

d) On prend  $g(r, j) = f(2j-r)$  et on applique III 5)c) ; on fait le changement de variables  $x = 2j-r, y = j$ , d'où :

$$\begin{aligned}
 E[f(2j_{t+h} - R_{t+h}) 1_{\{a < J_t\}} | \mathcal{F}_t] &= \\
 1_{\{a < R_t\}} \frac{1}{R_t} \sqrt{\frac{2}{\pi h}} \int_{\mathbb{R}} f(x) dx \int_{avx}^{\infty} \exp \frac{(R_t - a)^2 + (2y - x - a)^2}{2h} & \\
 \text{sh} \frac{(R_t - a)(2y - x - a)}{h} dy = & \\
 1_{\{a < R_t\}} \frac{1}{R_t} \sqrt{\frac{2}{\pi h}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{1}{2} \left( \int_a^{R_t} \exp - \frac{(x - 2y + R_t)^2}{2h} dy \right) dx & \\
 (= E \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \exp - \frac{(x - 2J_t + R_t)^2}{2h} dx 1_{\{a < J_t\}} | \mathcal{F}_t \right], \text{voir} & \\
 & \text{III 5)b)) ;
 \end{aligned}$$

par suite :

$$E[f(2J_{t+h} - R_{t+h}) | \sigma(\mathcal{F}_t, J_t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \exp - \frac{(x - (2J_t - R_t))^2}{2h} dx.$$

Enfin, puisque  $J_t = \inf(J_{t+h}, I_{t,h})$  et que  $I_{t,h}$  est  $\mathcal{F}_{t+h}$ -mesurable, on voit que la famille de tribus  $(\mathcal{K}_t, t \geq 0)$  est croissante, que  $\beta_t = 2J_t - R_t$  est  $\mathcal{K}_t$ -mesurable et  $\mathcal{K}_t \supset \sigma(\beta_s, s \leq t)$ .

$$\text{De } E[f(\beta_{t+h}) | \sigma(\beta_s, s \leq t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \exp - \frac{(x - \beta_t)^2}{2h} dx,$$

on déduit aisément que  $\beta$  a même loi que (le brownien)  $B$ .

La répartition des notes des 313 copies de l'épreuve de probabilités et statistique est :

0 à 4	: 118 copies	20 à 24	: 21 copies
5 à 9	: 48 "	25 à 29	: 15 "
10 à 14	: 53 "	30 à 34	: 10 "
15 à 19	: 36 "	35 à 40	: 12 "

## MATHEMATIQUES DE L'INFORMATIQUE

---

Le problème porte sur l'analyse d'algorithmes pour l'évaluation d'expressions arithmétiques et l'allocation de registres en compilation. La partie I introduit les résultats de base de combinatoire des arbres. La partie II décrit une méthode d'évaluation (dite *méthode d'allocation gauche-droite*) et les résultats de dénombrement correspondants. La partie III présente l'analyse asymptotique des résultats de la partie II. La partie IV a pour objet une autre méthode d'évaluation (dite *méthode d'Ershov*).

### RAPPELS ET DEFINITIONS GENERALES

Soient  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$  et  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_l\}$  deux ensembles finis disjoints. L'ensemble  $\Omega$  est appelé ensemble des *opérateurs* (dans ce problème, il s'agira d'opérateurs binaires) et l'ensemble  $X$  est appelé ensemble des *variables*. On considère l'ensemble  $B(\Omega; X)$  des arbres binaires dont les sommets binaires  $\_$  ou sommets *internes*  $\_$  sont étiquetés par des éléments de  $\Omega$ , et dont les sommets zero-aires  $\_$  ou sommets *externes*  $\_$  sont étiquetés par des éléments de  $X$ . Les arbres considérés sont représentables graphiquement (voir exemple 1). Ils peuvent être définis récursivement ou spécifiés par une définition dans le langage de programmation Pascal (les deux définitions sont équivalentes).

A. Définition récursive. L'ensemble  $B(\Omega; X)$  des arbres binaires est défini par les conditions suivantes:

- chaque variable  $x \in X$  est un arbre;
- si  $t_1$  et  $t_2$  sont des arbres et si  $\omega \in \Omega$  est un opérateur, alors le triplet  $t = \langle \omega, t_1, t_2 \rangle$  est un arbre; les arbres  $t_1$  et  $t_2$  sont appelés respectivement sous-arbres gauche et droit de l'arbre  $t$ .

B. Définition dans le langage de programmation Pascal. On définit le type *sommet* comme un enregistrement avec variante. Il y a deux catégories de sommets: les sommets de catégorie *interne* comportent un champ *opérateur* de type  $\Omega$ , et deux champs *gauche* et *droite* qui sont des pointeurs sur d'autres sommets; les sommets de catégorie *externe* sont formés d'un unique champ *variable* de type  $X$ . Le type *arbre* est défini comme pointeur sur un sommet. Les types *sommet* et *arbre* sont ainsi spécifiés par:

```

type intext = (interne, externe);
arbre = ↑sommet;
sommet = record
    case categorie : intext of
        interne : (operateur : Ω; gauche, droite : arbre);
        externe : (variable : X);
    end;

```

Une structure chaînée  $a$  de type *arbre* appartient à  $B(\Omega; X)$  si et seulement si: (i) le graphe non orienté associé est sans cycle, et (ii) du sommet sur lequel pointe  $a$  on peut atteindre tout autre sommet par une succession de pointeurs gauches ou droits.

Le sommet  $a \uparrow$  sur lequel pointe  $a$  est la *racine* de l'arbre  $a$ ; les arbres  $a \uparrow .gauche$  et  $a \uparrow .droite$  sont les sous-arbres gauche et droit respectivement de l'arbre  $a$ .

On appelle *taille* d'un arbre le nombre de sommets internes qu'il comprend et l'on dénote par  $B_n(\Omega; X)$  l'ensemble des arbres de  $B(\Omega; X)$  de taille  $n$ .

Un arbre de  $B(\Omega; X)$  est représentable graphiquement dans le plan. On notera qu'alors les arbres gauche et droit issus d'un sommet sont distingués par la représentation planaire (voir l'exemple 1).

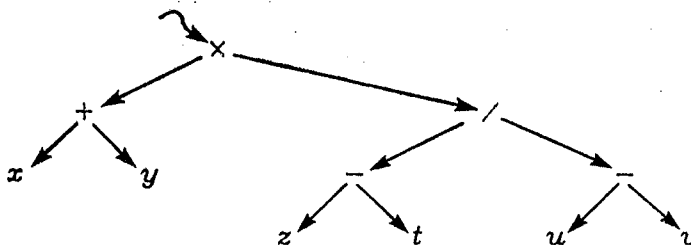
A tout arbre de  $B(\Omega; X)$  est associé par lecture préfixe une expression bien parenthésée sur l'ensemble des opérateurs binaires  $\Omega$  et sur l'ensemble des variables  $X$ . On supposera par la suite pour simplifier la description des algorithmes que les éléments de  $\Omega$  et  $X$  sont des caractères au sens du langage de programmation Pascal:

```

type Ω = char;
    X = char;

```

*Exemple 1:* La structure chaînée suivante



est un arbre de  $B_5(\Omega, X)$  où  $\Omega = \{+, -, \times, /\}$  et  $X = \{x, y, z, t, u, v\}$  auquel correspond l'expression bien parenthésée:

$$((x+y) \times ((z-t) / (u-v)))$$

NOTATIONS:

Dans la suite du problème, on note  $\log x$  le logarithme népérien de  $x$ . On étend la définition des coefficients binomiaux en posant:

- $\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$  lorsque  $m$  et  $n$  sont des entiers qui vérifient  $0 \leq n \leq m$ ;
- $\binom{m}{n} = 0$  dans les autres cas.

## Partie I

### Eléments de combinatoire des arbres.

1. On désigne par  $b_n^{<k,l>}$  le nombre d'éléments de  $B_n(\Omega, X)$  ( $k$  et  $l$  sont les cardinaux respectifs de  $\Omega$  et  $X$ ). Exprimer en fonction de  $n$ ,  $k$  et  $l$  le rapport:

$$\frac{b_n^{<k,l>}}{b_n^{<1,1>}}$$

2. On pose  $b_n = b_n^{<1,1>}$ . Montrer que les  $b_n$  vérifient la récurrence:

$$b_n = \sum_{j=0}^{n-1} b_j b_{n-1-j} \quad (n \geq 1)$$

et que  $b_0 = 1$ .

3. Soient  $\Omega_1 = \{\omega\}$  et  $X_1 = \{x\}$ . On définit une application  $\pi$  de  $B(\Omega_1; X_1)$  dans l'ensemble  $\{\omega, x\}^*$  des mots sur l'alphabet  $\{\omega, x\}$  par les règles suivantes:

- $\pi(t) = x$  si  $t$  est de taille 0;
- $\pi(t) = \omega.\pi(t_1).\pi(t_2)$  si  $t$  est de taille  $\geq 1$  et si  $t_1$  et  $t_2$  sont les sous-arbres gauche et droit de  $t$  respectivement (la notation  $u.v$  représente ici la concaténation des mots  $u$  et  $v$ ).

On définit la fonction  $\delta$  de  $\{\omega, x\}^*$  dans l'ensemble  $\mathbb{Z}$  des entiers relatifs par:

$$\delta(w) = |w|_\omega - |w|_x$$

où  $|w|_y$  représente le nombre d'occurrences de la lettre  $y$  dans le mot  $w$ .

On désigne par  $L$  l'image par  $\pi$  de  $B(\Omega_1; X_1)$ . Montrer que tout mot de  $L$  vérifie les deux propriétés:

$$(P1) \delta(w) = -1;$$

$$(P2) \text{ pour tout préfixe strict } u \text{ de } w: \delta(u) \geq 0.$$

On rappelle que  $u$  est préfixe strict de  $w$  s'il existe un mot  $v$  non vide tel que  $w = u.v$ .

Montrer que l'application  $\pi$  est une injection de  $B(\Omega_1; X_1)$  dans  $\{\omega, x\}^*$ . En déduire un minorant strictement positif  $R_1$  du rayon de convergence de la

série:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

4. Soit  $b(z)$  la somme de la série  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$  lorsque  $|z| < R_1$ ; montrer que  $b(z)$  vérifie l'équation:

$$b(z) = 1 + zb^2(z).$$

5. Montrer que

$$b_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Déterminer des nombres réels  $A, \lambda, \rho$  tels que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{\lambda A^n n^\rho} = 1.$$

On pourra pour cela utiliser sans la démontrer la formule de Stirling:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} = 1.$$

Déterminer le rayon de convergence de la série  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ .

## Partie II

### Allocation Gauche-Droite et résultats de dénombrements.

Un *programme élémentaire* est une suite d'*instructions* sur les variables de l'ensemble  $X$  et sur les éléments d'un tableau de dimension infinie dit *tableau des registres*

$$R = R[0], R[1], R[2], R[3], \dots$$

Ces instructions utilisent les opérateurs de  $\Omega$ . Elles sont de l'un des deux types suivants:

$$R[i] := x; \quad x \in X, i \geq 0 \quad (I)$$

$$R[i] := R[i'] \omega R[i'']; \quad \omega \in \Omega, i, i', i'' \geq 0 \quad (II)$$

On notera que dans les définitions (I), (II), il n'est pas imposé aux indices  $i, i', i''$  d'être distincts.

On dira qu'un programme élémentaire  $\Pi$  *utilise*  $r$  registres si et seulement si  $r$  est le plus grand indice de registre qui intervient dans le programme  $\Pi$ .

On appelle résultat de  $\Pi$  le contenu du registre  $R[0]$  à l'issue de l'exécution du programme  $\Pi$ . Ce contenu est défini conformément à la sémantique usuelle de l'affectation. On suppose les variables de  $X$  initialisées, mais non les éléments du tableau  $R$ . Ces notions sont illustrées par l'exemple 2 ci-dessous.

On définit alors la procédure *genere*, dans laquelle *decalage* est une variable externe à la procédure et de type *integer*:

```

procedure genere (a : arbre);
begin
  if a↑.categorie = externe
    then writeln ('R[' , decalage , ']:= ' , a↑.variable , ';')
    else begin
      genere (a↑.gauche); decalage := decalage + 1;
      genere (a↑.droite); decalage := decalage - 1;
      writeln ('R[' , decalage , ']:= R[' , decalage , ']' , a↑.operateur , 'R[' , decalage + 1 , ']' , ');
    end
end;

```

On définit enfin une application  $\chi$  de l'ensemble  $B(\Omega; X)$  dans l'ensemble des entiers naturels par les règles suivantes:

- si  $t$  est de taille 0, alors  $\chi(t) = 0$ ;
- si  $t$  est de taille  $\geq 1$  et si  $t_1$  et  $t_2$  sont les sous-arbres gauche et droit de  $t$  respectivement, alors:

$$\chi(t) = \max(\chi(t_1), 1 + \chi(t_2)).$$

*Exemple 2:* Le programme élémentaire suivant

```

R[0] := z;
R[1] := t;
R[0] := R[0] - R[1];
R[1] := u;
R[2] := v;
R[1] := R[1] - R[2];
R[0] := R[0] / R[1];

```

avec  $\Omega$  et  $X$  définis comme dans l'exemple 1 a pour résultat:

$$((z - t) / (u - v));$$

il utilise 2 registres. Pour l'arbre  $a$  associé à cette expression,  $\chi(a) = 2$ .

6. Donner sans démonstration le résultat du programme *genere* lorsqu'il est appliqué à l'arbre de l'exemple 1, la variable *decalage* étant initialisée à la valeur 0.

Montrer que l'exécution de la séquence

```
decalage := 0; genere (a);
```

produit un programme élémentaire dont le résultat est l'expression bien parenthésée associée à  $a$ , et qui utilise  $\chi(a)$  registres.

7. On note  $c_{n,h}^{<k,l>}$  le nombre d'éléments de  $B_n(\Omega, X)$  dont le paramètre  $\chi$  est inférieur ou égal à  $h$ , et l'on pose  $c_{n,h} = c_{n,h}^{<1,1>}$ .

Montrer que le rapport

$$\frac{c_{n,h}^{<k,l>}}{b_n^{<k,l>}}$$

est indépendant de  $k$  et  $l$ .

Déterminer les quantités  $c_{4,h}$  pour  $h=0,1,2,3,4,5,6$  (la rédaction des réponses n'est pas exigée mais on demande de dessiner les arbres correspondants à chacun des 7 cas).

Déterminer les valeurs extrémales de  $\chi$  sur  $B_n(\Omega, X)$ . On pourra commencer par considérer le cas des arbres dits *filiformes* dans lesquels tout sommet interne possède au plus un successeur gauche ou un successeur droit qui soit sommet interne.

8. Montrer que les fonctions

$$c_h(z) = \sum_{n \geq 0} c_{n,h} z^n$$

sont analytiques dans le disque de convergence de  $b(z)$ , et vérifient la récurrence:

$$c_h(z) = \frac{1}{1 - z c_{h-1}(z)} \quad (h \geq 1)$$

avec  $c_0(z) = 1$ . (On pourra pour cela reprendre un raisonnement semblable à celui utilisé pour traiter les questions 2 et 4).

9. Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes  $F_1(z), F_2(z), \dots$  vérifiant les conditions:

$$F_1(z) = 1; \quad (C1)$$

$$c_h(z) = \frac{F_{h+1}(z)}{F_{h+2}(z)} \quad (h \geq 0); \quad (C2)$$

$$c_h(z) - c_{h-1}(z) = \frac{z^h}{F_{h+1}(z)F_{h+2}(z)} \quad (h \geq 1). \quad (C3)$$

Etablir que la suite  $\{F_h(z)\}_{h \geq 1}$  vérifie une récurrence linéaire à coefficients polynomiaux en  $z$ . Montrer que le coefficient de  $z^n$  dans  $F_h(z)$  est de la forme:

$$(-1)^\alpha \binom{\beta}{\gamma}$$

pour des entiers  $\alpha, \beta, \gamma$  dépendant de  $h$  et  $n$  dont on donnera l'expression explicite.

10. Montrer que pour  $\vartheta$  n'appartenant pas à  $\{\frac{\pi}{2}\}Z$  et  $h \geq 1$ :

$$F_h\left(\frac{1}{4\cos^2\vartheta}\right) = \frac{1}{(2\cos\vartheta)^{h-1}} \frac{\sin(h\vartheta)}{\sin\vartheta}.$$

Déterminer les racines de  $F_h$  et établir pour  $n \geq 1$  et  $h \geq 1$  l'expression

$$c_{n,h} = \frac{4^{n+1}}{h+2} \sum_{1 \leq j \leq \frac{(h+1)}{2}} \sin^2\left(\frac{j\pi}{h+2}\right) \cos^{2n}\left(\frac{j\pi}{h+2}\right).$$

11. On pose  $\varphi(u) = \frac{u}{(1+u)^2}$  où  $u$  est une variable complexe. On désigne par  $\Gamma$  l'image par  $\varphi$  du cercle  $|u| = \frac{1}{100}$  parcouru dans le sens direct. Calculer l'intégrale:

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z}$$



On pose  $z = \varphi(u)$ . Exprimer en fonction de  $u$  la quantité

$$b(z) - c_h(z)$$

lorsque  $|u| \leq \frac{1}{100}$ .

12. Montrer que

$$b_n - c_{n,h} = \sum_{j \geq 1} \binom{2n}{n+1-j(h+2)} - 2 \binom{2n}{n-j(h+2)} + \binom{2n}{n-1-j(h+2)}.$$

On pourra pour cela observer que

$$b_n - c_{n,h} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} [b(z) - c_h(z)] \frac{dz}{z^{n+1}}.$$

### Partie III

#### Analyse asymptotique.

On définit les quantités  $p_{n,h}$ ,  $q_{n,h}$  et  $\bar{\chi}_n$  par:

$$p_{n,h} = \frac{c_{n,h} - c_{n,h-1}}{b_n}; \quad q_{n,h} = \frac{c_{n,h}}{b_n}$$

$$\bar{\chi}_n = \sum_{h \geq 1} h p_{n,h}.$$

On observera sans démonstration, par suite des résultats de la question 7, que  $p_{n,h}$  représente la probabilité qu'un arbre formé de  $n$  sommets internes ait un paramètre  $\chi$  de valeur  $h$ , sous l'hypothèse que les  $b_n^{<k,l>}$  arbres de  $B_n(\Omega, X)$  ont même probabilité (égale à  $\frac{1}{b_n^{<k,l>}}$ ); sous cette même hypothèse,  $\bar{\chi}_n$  représente l'espérance du paramètre  $\chi$ .

13. Montrer que:

$$\bar{\chi}_n = \sum_{h \geq 0} [1 - q_{n,h}].$$

14. Montrer que, pour tout  $x$  vérifiant  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ , on a:

$$\cos x \leq \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Etablir pour  $n \geq 1$  et  $h \geq 0$  la majoration:

$$c_{n,h} \leq \frac{1}{2} 4^{n+1} \left(\cos \frac{\pi}{h+2}\right)^{2n}.$$

Montrer qu'il existe deux constantes réelles  $K_1 > 0$  et  $\gamma_1 > 0$  telles que, pour tout  $n \geq 2$  et tout  $h$  vérifiant  $2 \leq h+2 \leq \sqrt{n} / \log n$ , on ait:

$$q_{n,h} \leq K_1 \exp(-\gamma_1 \log^2 n).$$

15. Montrer que pour tout  $x \geq 0$ , on a:

$$\frac{x}{1+x} \leq \log(1+x) \leq x.$$

On pose pour  $0 \leq j \leq n$  :

$$Q(n, j) = \frac{\binom{2n}{n}}{\binom{2n}{n-j}}$$

Etablir pour tout  $n \geq 1$  et  $0 \leq j \leq n$  l'encadrement :

$$\frac{j^2}{n+j} \leq \log Q(n, j) \leq \frac{j^2}{n-j+1}.$$

16. Montrer que pour  $n \geq 2$  et  $h \geq 1$ , on a :

$$1 - q_{n,h} \leq (n+1) \sum_{j=h+1}^n \frac{1}{Q(n, j)}.$$

Montrer qu'il existe deux constantes réelles  $K_2 > 0$  et  $\gamma_2 > 0$  telles que pour tout  $n \geq 2$  et  $h \geq \sqrt{n} \log n$ , on ait :

$$1 - q_{n,h} \leq K_2 \exp\left(-\gamma_2 \frac{h^2}{n}\right).$$

17. Montrer qu'il existe deux constantes réelles  $L_1 > 0$  et  $L_2 > 0$  telles que pour tout  $n \geq 2$ ,  $\bar{\chi}_n$  vérifie l'encadrement :

$$L_1 \frac{\sqrt{n}}{\log n} < \bar{\chi}_n < L_2 \sqrt{n} \log n.$$

18. On définit la fonction  $\Theta(x)$  pour  $x$  réel,  $x \neq 0$ , par :

$$\Theta(x) = \sum_{k \geq 1} e^{-k^2 x^2} (4k^2 x^2 - 2),$$

avec par convention  $\Theta(0) = 1$ . On admettra sans démonstration que  $\Theta(x)$  est indéfiniment différentiable sur  $[-\infty; +\infty]$ .

Montrer que la série :

$$\sum_{h \geq 1} \Theta\left(\frac{h}{\sqrt{n}}\right)$$

converge pour tout  $n \geq 1$ ; soit  $\sigma_n$  sa somme.

Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \Theta(\lambda) d\lambda.$$

est absolument convergente; soit  $K$  sa valeur.

Démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_n}{\sqrt{n}} = K.$$

19. On définit l'intégrale :

$$\Psi(s) = \int_0^{\infty} \Theta(x) x^{s-1} dx.$$

Montrer que  $\Psi(s)$  est définie et continue pour  $s$  réel,  $s > 0$ . Montrer que pour  $s > 1$ , on a :

$$\Psi(s) = (s-1)\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right),$$

où les fonctions  $\zeta(s)$  et  $\Gamma(s)$  sont définies pour  $s$  réel par:

$$\zeta(s) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^s} \quad (s > 1),$$

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \quad (s > 0).$$

Evaluer  $\Psi(1)$  et en déduire la valeur de  $K$ .

On pourra pour cela admettre les propriétés suivantes:

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} (s-1)\zeta(s) = 1$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

20. Montrer que si  $\{h_n\}_{n \geq 1}$  est une suite d'entiers positifs tels que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_n}{\sqrt{n}} = \lambda$$

pour un certain réel  $\lambda$ ,  $\lambda > 0$ , alors:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - q_{n, h_n}) = \Theta(\lambda)$$

Pour la suite du problème, on admettra sans démonstration que lorsque  $n \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{x}_n}{\sigma_n} = 1$$

## Partie IV

### Méthode d'Ershov.

On définit une application  $\rho$  de  $B(\Omega; X)$  dans l'ensemble des entiers naturels par les règles suivantes:

- si  $t$  est de taille 0, alors  $\rho(t) = 0$ ;
- si  $t$  est de taille  $\geq 1$  et si  $t_1$  et  $t_2$  sont les sous arbres gauche et droit respectivement de  $t$ , alors

$$\rho(t) = \begin{cases} \max(\rho(t_1), \rho(t_2)) & \text{si } \rho(t_1) \neq \rho(t_2) \\ 1 + \rho(t_1) & \text{si } \rho(t_1) = \rho(t_2) \end{cases}$$

On suppose que la fonction (au sens du langage de programmation Pascal)  $\rho$  de type:

**function**  $\rho(a:\text{arbre}):integer;$

retourne la valeur entière  $\rho(a)$  lorsqu'elle est appliquée à un argument  $a$  de type *arbre*. On définit alors la procédure *genere 2* par:

```

procedure genere2(a:arbre);
begin
  if a↑.categorie = externe
  then writeln('R[' ,decalage,']:=',a↑.variable)
  else
    if rho(a↑.gauche) > rho(a↑.droite)
    then begin
      genere2(a↑.gauche); decalage := decalage + 1;
      genere2(a↑.droite); decalage := decalage - 1;
      writeln('R[' ,decalage,']:=R[' ,decalage,']',a↑.operateur,'R[' ,decalage + 1,']');
    end
    else begin
      genere2(a↑.droite); decalage := decalage + 1;
      genere2(a↑.gauche); decalage := decalage - 1;
      writeln('R[' ,decalage,']:=R[' ,decalage + 1,']',a↑.operateur,'R[' ,decalage,']');
    end
  end;

```

21. Donner sans démonstration le résultat du programme *genere2* lorsqu'il est appliqué à l'arbre de l'exemple 1, la variable *decalage* étant initialisée à la valeur 0.

Montrer que l'exécution de la séquence:

*decalage* := 0; *genere2*(*a*);

produit un programme élémentaire dont le résultat est l'expression bien parenthésée associée à *a* et qui utilise  $\rho(a)$  registres.

22. On désigne par  $f_{n,v}^{<k,l>}$  le nombre d'éléments de  $B_n(\Omega, X)$  dont le paramètre  $\rho$  vaut  $v$ . Montrer que le rapport:

$$\frac{f_{n,v}^{<k,l>}}{b_n^{<k,l>}}$$

est indépendant de  $k$  et  $l$ ; soit  $r_{n,v}$  ce rapport. Montrer qu'il existe deux suites d'entiers  $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$  et  $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$  avec  $\lambda_n \leq \mu_n$  telles que:

$$r_{n,v} = 0 \quad \text{si } v \notin [\lambda_n; \mu_n]$$

$$r_{n,v} \neq 0 \quad \text{si } v \in [\lambda_n; \mu_n]$$

et déterminer explicitement les  $\lambda_n$  et  $\mu_n$ .

On pourra pour cela considérer d'abord le cas des arbres filiformes définis à la question 7 puis le cas des arbres parfaits qui sont tels que tous les chemins joignant la racine de l'arbre à un sommet externe comportent le même nombre de pointeurs.

23. On pose:

$$\bar{\rho}_n = \sum_{v \geq 0} v r_{n,v}$$

Montrer l'existence de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{\rho}_n}{\bar{\lambda}_n}$$

et évaluer cette limite.

24. Discuter l'efficacité relative de la *méthode d'allocation gauche-droite* et de la *méthode d'Ershov* vis à vis des critères suivants:

- ordre de grandeur des temps de calcul des procédures *genere* et *genere2*,
- nombre de registres utilisés par les programmes élémentaires générés par ces procédures à partir d'un arbre de taille  $n$ .

On tiendra compte dans cette discussion du temps de calcul de la procédure *rho*.

Peut-on trouver une procédure qui, étant donné un arbre  $a$  de taille  $n$ , calcule un programme élémentaire  $\Pi$  dont le résultat est l'expression bien parenthésée associée à  $a$  et telle que:

- $\Pi$  utilise  $\rho(a)$  registres;
- le temps de calcul de la procédure est  $O(n)$ ?

RAPPORT SUR L'EPREUVE  
MATHEMATIQUES DE L'INFORMATIQUE

1. Description du problème

Le problème portait sur l'étude et l'évaluation comparée de 2 méthodes d'allocation de registre en compilation. La partie I présentait les éléments de combinatoire des arbres préparant à la suite du problème (relation à la notation "polonaise" préfixe, dénombrements de base). La partie II contenait la première stratégie d'évaluation dite gauche-droite, suivie de résultats de dénombrement (avec une brève incursion dans l'analyse complexe aux questions Q.11-12). La partie III avait pour objet l'étude de la distribution et de la moyenne du coût mesuré en nombre de registres de la méthode gauche-droite (au moyen de divers encadrements d'analyse réelle). La partie IV présentait une méthode alternative découverte par Ershov vers 1958, et l'on se contentait d'extraire les bornes extrémales de son comportement vis-à-vis du nombre de registres générés, ce qui suffisait pour établir la comparaison.

Il convient d'abord de souligner que le problème traitait d'algorithmes et de programmes (écrits en Pascal) qui génèrent eux-mêmes des programmes : c'est là le rôle d'un compilateur qui doit notamment dans sa partie dite "génération de code" transformer des expressions (ici des expressions arithmétiques déjà données sous forme arborescente) en un programme élémentaire destiné à être exécuté ultérieurement. Ainsi le résultat des programmes *genere* et *genere2* est-il un *programme* qui évalue et non pas une évaluation directe. Quelques-uns des candidats qui ont abordé les questions parallèles 6 ou 21 n'ont pas perçu ce point (et l'un d'eux a même cru à une erreur d'énoncé!).

Ceci étant rappelé, l'efficacité de procédures de génération comme *genere* ou *genere2* se mesure naturellement par le nombre de registres utilisés (dans la pratique informatique le nombre de registres est limité et une mauvaise évaluation conduit lors de l'exécution à des rangements/chargements de résultats intermédiaires qui peuvent être coûteux).

Dans ce cadre, on observe - et c'était le but de la dernière question (Q.24) d'amener les candidats à cette conclusion - que :

La procédure gauche-droite (*genere*) est simple à mettre en oeuvre (Q.6), ne nécessite qu'une passe sur l'arbre, et donc possède un coût en temps linéaire  $O(n)$  en la taille  $n$  de l'arbre donné. Le nombre de registres utilisés est en moyenne  $\sim \sqrt{\pi n}$  (Q.8-20).

La procédure d'Ershov (*genere2*) utilise le calcul de la fonction  $\rho$ , d'où (voir *infra* Q.24) un coût  $O(n^2)$ . Le nombre de registres utilisés est compris dans tous les cas entre 1 et  $\sim \log_2 n$  (Q.22.23).

Comme l'a justement résumé un candidat : la méthode gauche-droite privilégie le temps de compilation alors que la méthode d'Ershov, dans sa forme *genere2*, privilégie l'exécution ultérieure du programme généré. (A noter cependant qu'une modification simple de la procédure *genere2*, opérant en 2 passes permet de concilier l'avantage du nombre de registres de la procédure *genere2* avec un temps de calcul linéaire  $O(n)$ ).

## 2. Commentaire sur les copies

Le problème comprenait environ 1/3 des questions (Q.1-3,6-7,21-24) traitant de la combinatoire et de l'algorithmique des arbres, le reste se répartissant entre questions "algébriques" (surtout Q.4-5,8-10) et "analytiques" (Q.11-20) pour les évaluations correspondantes.

Hormis les copies blanches, la plupart des candidats ont également abordé les questions non-analytiques. Il est encourageant de constater pour cette première année d'existence de l'option que les candidats n'ont pas fait les questions de nature combinatoire et algorithmique. Un certain nombre (environ 1/3 des copies notées 5) paraît avoir saisi l'esprit du problème. La partie III, plus analytique, n'a été qu'effleurée dans la plupart des copies.

Les divers groupes de questions étaient assez indépendants, et il nous semble que tout candidat connaissant les bases du programme de mathématiques du concours et des bases élémentaires de programmation (notion d'arbre et de procédure récursive) devait, s'il utilisait l'intégralité des 6 heures de l'épreuve, pouvoir obtenir une note au moins égale à 15.

Les correcteurs ont, pour la notation, tenu grand compte du soin apporté à la rédaction des copies.

La répartition des notes, sur 79 copies corrigées, est la suivante :

0	:	15 copies	20 à 24	:	7 copies
1 à 4	:	23 "	25 à 29	:	4 "
5 à 9	:	10 "	30 à 34	:	4 "
10 à 14	:	5 "	35 à 39	:	2 "
15 à 19	:	8 "	40	:	1 "

## 3. Commentaires sur les questions

### Partie I

Le nombre d'arbres de taille  $n$  vaut (pour  $k=1=1$ ) le "nombre de Catalan" :  $b_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ . On établit ce

résultat classique par la méthode des séries génératrices. Les premières questions ont pour objet de montrer qu'on peut se dégager de l'étiquetage et que la série génératrice existe en tant que fonction analytique.

Q1. Le rapport vaut  $k^{n,n+1}$  car il représente le nombre de façons d'étiqueter un arbre formé de  $n$  sommets internes (donc de  $n+1$  sommets externes, l'arbre étant binaire).

Q2. Un arbre de taille  $n \geq 1$  comporte une racine, un sous arbre gauche de taille  $j$  avec  $0 \leq j < n$  et un sous-arbre droit de taille  $n-1-j$ . Il suffit de compter les possibilités.

Q3. Les propriétés (P1) et (P2) se montrent par récurrence sur la taille des arbres. Pour l'injectivité, on peut remarquer que si  $\pi(t) = \pi(t')$ , alors  $t$  et  $t'$  ont même taille, puis raisonner par récurrence sur la taille des arbres en utilisant (P1) et (P2). On en déduit que  $b_n$  est majoré par le nombre de mots de longueur  $2n+1$  terminés par un  $x$ , d'où  $b_n \leq 2^{2n} = 4^n$  et  $R_1 = 1/4$ .

Q4. Utiliser l'égalité établie à la question Q2.

Q5. Résoudre l'équation du second degré  $b(z) = 1 + zb^2(z)$ , d'où :

$$b(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z}$$

L'autre racine doit être écartée car non analytique en 0. (Quelques candidats ont clairement justifié ce choix). On trouve l'expression de  $b_n$  par développement de  $(1-4z)^{1/2}$ , puis par la formule de Stirling :  $b_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} 4^n n^{-3/2}$ . Le rayon de convergence de  $b(z)$  est donc exactement  $1/4$ .

## Partie II

La procédure genere alloue les registres lors d'une simple lecture de gauche à droite de l'arbre d'expression. Le nombre de registres du programme généré se caractérise par un paramètre  $\chi$  des arbres binaires. Il en résulte une expression explicite des séries génératrices associées, qui sont des fractions rationnelles. De là, on obtient d'une part une forme "trigonométrique", d'autre part une forme "binomiale" des dénombrements liés au paramètre  $\chi$ .



Q6. Appliqué à l'arbre de l'exemple 1, le programme donne :

```

R[0] := x ;
R[1] := y ;
R[0] := R[0] + R[1] ;
R[1] := z ;
R[2] := t ;
R[1] := R[1] - R[2] ;
R[2] := u ;
R[3] := v ;
R[2] := R[2] - R[3] ;
R[1] := R[1] / R[2] ;
R[0] := R[0] * R[1] ;

```

On prouve simplement par récurrence sur la taille de l'arbre , l'assertion suivante :

Pour tout  $i \geq 0$  :

(a) L'exécution de la séquence :

*decalage := i; genere(a) ;* (S)

produit un programme tel qu'après exécution, le contenu du registre  $R[i]$  est l'expression bien parenthésée associée à l'arbre a.

(b) A l'issue de l'exécution de (S), *decalage* vaut  $i$  et lors de l'exécution  $decalage \geq i$ .

(c) Dans le programme obtenu seuls interviennent les registres  $R[i], R[i+1], \dots, R[i+\chi(a)]$ .

Peu de candidats ont trouvé la forme correcte de l'hypothèse de récurrence, plus générale que l'énoncé, qui nécessitait une bonne compréhension de la procédure *genere*.

Q7. Il y a 14 arbres de taille 4 (cf. Q5) et l'on trouve :

$$c_{4,0}=0, c_{4,1}=1, c_{4,2}=8, c_{4,3}=13, c_{4,h} b_4=14$$

pour  $h \geq 4$ . (Il y a eu beaucoup d'erreur sur cette question facile alors qu'on pouvait s'assurer de la cohérence avec la forme :

$$b_4 = \frac{1}{5} \binom{8}{4} \equiv 14).$$

Q8. La formule cherchée résulte de la relation de récurrence :

$$c_{n,h} = \sum_{j=0}^n c_{h,j} \cdot c_{h-1,n-1-j}$$

(un arbre de paramètre  $\chi$  au plus égal à  $h$  est formé d'un sous-arbre gauche de paramètre au plus égal à  $h$  et d'un sous-arbre droit de paramètre au plus égal à  $h-1$ ). En passant à la fonction génératrice comme précédemment, on trouve :

$$c_h(z) = 1 + z c_h(z) c_{h-1}(z).$$

Q9. La récurrence sur les  $c_h(z)$  de Q8. montre que si :

$$c_{h-1}(z) = \frac{F_h(z)}{F_{h+1}(z)} \quad \text{alors} \quad c_h(z) = \frac{F_{h+1}(z)}{F_{h+1}(z) - zF_h(z)}$$

d'où la récurrence linéaire sur les  $F_h$  :

$$F_{h+2}(z) = F_{h+1}(z) - zF_h(z)$$

On vérifie alors facilement par récurrence l'identité :

$$F_{h+1}^2 - F_h F_{h+2} = z^h$$

d'où la forme de  $c_h - c_{h-1}$ . (Les candidats ont souvent mal dégagé les hypothèses de récurrence, et mal distingué les preuves d'existence et d'unicité).

En construisant la table des coefficients des premiers  $F_h$ , on s'aperçoit que le coefficient de  $z^n$  dans  $F_h(z)$  vaut :

$$(-1)^n \binom{h-n-1}{n}$$

propriété qui se vérifie par une récurrence analogue à celle des coefficients binomiaux. Le degré de  $F_h(z)$  est :

$$\left\lfloor \frac{h-1}{2} \right\rfloor.$$

Q.10. La forme "trigonométrique" de  $F_h$  s'établit sans difficulté par récurrence sur  $h$ . On en déduit les  $\left\lfloor \frac{h-1}{2} \right\rfloor$  racines distinctes de  $F_h(z)$  qui sont :

$$\zeta_j = \frac{1}{4 \cos^2 \frac{j\pi}{h}}$$

avec  $0 < j < h/2$ .

La formule donnant les  $c_{n,h}$  s'obtient en décomposant en éléments simples la fraction rationnelle  $c_h(z)$  :

$$c_h(z) = \sum_j \frac{\gamma_{h,j}}{z - \zeta_j}$$

(il fallait calculer les  $\gamma_{h,j}$  en utilisant la forme "trigonométrique" des  $F_h$ ), puis en développant en série entière les éléments simples obtenus. Peu de candidats ont trouvé ce principe.

Q11. Soit  $\gamma$  le cercle  $|u| = 1/100$ . On a :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\phi'(u)}{\phi(u)} du = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{1-u}{1+u} \frac{du}{u}$$

et la dernière intégrale vaut 1 par le théorème des résidus.

Pour  $u$  réel et  $|u| \leq 1/100$ ,  $z = \phi(u)$  est réel avec  $|z| < 1/4$ . On trouve qu'alors  $b(z) = 1+u$ . La résolution de la récurrence linéaire des  $F_h$  montre que :

$$F_h(z) = \frac{y_1^h - y_2^h}{y_1 - y_2}$$

avec  $y_1 = \frac{1 + \sqrt{1-4z}}{2}$  et  $y_2 = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2}$ . D'où par une substitution analogue la forme de  $c_h(z)$  en fonction de  $u$  et finalement :

$$b(z) - c_h(z) = u^{h+1} \frac{1-u^2}{1-u^{h+2}}$$

(Le résultat s'étend pour  $|u| \leq 1/100$  par prolongement analytique).

Q12. Compte tenu de l'indication de l'énoncé et puisque  $\Gamma$  est d'indice 1, d'après Q11., on est ramené à évaluer l'intégrale :

$$b_n - c_{n,h} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{(1+u)^{2n} (1-2u+u^2) u^{h-n}}{1-u^{h+2}} du$$

laquelle se calcule par résidus. Par exemple :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{(1+u)^{2n} u^{h+2}}{1-u^{h+2}} \frac{du}{u^{n+1}} &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \sum_{j \geq 1} (1+u)^{2n} u^{j(h+2)} \frac{du}{u^{n+1}} \\ &= \sum_{j \geq 1} (n-j \binom{2n}{h+2}) \end{aligned}$$

(Cette question relativement difficile n'a pas été traitée).

### PARTIE III

L'utilisation de majorations élémentaires appliquées resp. aux formes trigonométriques et binomiales montre que : (a) de "petites" valeurs de  $\chi$ , inférieures à  $\sqrt{n}/\log n$ , (b) de "grandes" valeurs de  $\chi$ , supérieures à  $\sqrt{n} \log n$ , ont des probabilités exponentiellement petites. Des évaluations plus fines suggèrent l'existence d'une loi limite de distribution du paramètre  $\chi$  exprimée par une fonction "theta". On trouve alors que la moyenne de  $\chi$  sur l'ensemble des arbres de taille  $n$  vaut asymptotiquement  $\sqrt{\pi n}$ .

Q13. Il s'agit là de la forme classique de l'espérance d'une variable aléatoire discrète :

$$\bar{\chi}_n = (p_{n,1} + p_{n,2} + p_{n,3} + \dots) + (p_{n,2} + p_{n,3} + \dots) + (p_{n,3} + p_{n,4} + \dots) + \dots$$

(C'est un exemple de transformation d'Abel ou sommation par parties).

Q14. Considérer  $f(x) = \cos x \cdot e^{x^2/2}$  et observer que  $f'(x) = \cos x(x - \operatorname{tg} x)e^{x^2/2}$  est négative sur l'intervalle. (Une preuve par développement de Taylor, plus longue, était possible). La majoration de la forme trigonométrique des  $c_{n,h}$  est triviale (cosinus décroissant et sinus majoré par 1).

En lui appliquant la borne  $\cos x \leq e^{-x^2/2}$ , on trouve :

$$q_{n,h} \leq 2 \cdot \frac{4^n}{b_n} \exp\left(-\frac{n\pi^2}{(h+2)^2}\right),$$

et l'on conclut facilement avec  $\gamma_1 = 9$  en utilisant la forme asymptotique de  $b_n$ .

Q15. Partir de :

$$\log Q(n, j) = \sum_{i=1}^j \log\left(1 + \frac{j}{n+i-j}\right)$$

et appliquer à  $\log(1+x)$  les bornes élémentaires.

Q16. On utilise cette fois-ci la forme binomiale de  $b_n^{-c_{n,h}}$  et l'on observe que :

$$\frac{b_n^{-c_{n,h}}}{b_n} \leq \sum_{h=h+1}^n \left[ \frac{1}{Q(n, j(h+2)-1)} \frac{1}{Q(n, j(h+2)+1)} \right]$$

On note alors qu'avec la question Q15 :

$$\begin{aligned} 1 - q_{n,h} &\leq (n+1) \sum_{h=h+1}^n e^{-j^2/(n+j)} \leq (n+1) \sum_{j=h+1}^{\infty} d^{-j^2/(2n)} \\ &\leq (n+1) \sum_{J=h^2}^{\infty} e^{-J/(2n)} \leq (n+1) \frac{e^{-h^2/(2n)}}{1 - e^{-1/(2n)}} \end{aligned}$$

On conclut en prenant  $\gamma_2 = 1/2$ .

Q17. On décompose la forme (Q13) de  $\bar{\chi}_n$  en :

$$\bar{\chi}_n = \sum_{h < H} [1 - q_{n,h}] + \sum_{h=H}^n [1 - q_{n,h}]$$

*Borne inférieure :* On prend  $H=H_1 \equiv \sqrt{n}/\log n - 2$  ; on minore les termes de la deuxième somme par 0, ceux de la première somme en utilisant (Q14) :

$$\bar{\chi}_n \geq H_1 - K_1 n \exp(-\gamma_1 \log^2 n)$$

*Borne supérieure :* On prend  $H=H_2 \equiv \sqrt{n} \log n$  ; on majore les termes de la première somme par 1, ceux de la deuxième somme par (Q16) :

$$\bar{\chi}_n \leq H_2 + K_2 n \exp(-\gamma_2 \log^2 n)$$

Q18. La fonction  $\Theta$  est à décroissance exponentielle à l'infini d'où résulte la convergence de la somme et de l'intégrale. On observe alors que  $\sigma_n/\sqrt{n}$  est la somme de Riemann de pas uniforme  $1/\sqrt{n}$  associée à l'intégrale. La somme de Riemann tend donc vers la valeur de l'intégrale. (Décomposer l'intégrale en 2 parties).

Q19. La fonction  $\Psi(s)$  est définie car  $\Theta$  est continue en 0 et à décroissance exponentielle à l'infini. La continuité se montre par le théorème de Lebesgue. On observe que :

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} (4x^2-2)x^{s-1} dx = (s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-k^2 x^2} (4k^2 x^2-2)x^{s-1} dx = k^{-s}(s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$$

d'où par sommation sur  $k$ :

$$\Psi(s) = (s-1)\zeta(s)\Gamma(s)$$

Q20. [Indication] Soit :

$$D_{n,t} = \frac{1}{b_n} \left[ \binom{2n}{n-t+1} - 2\binom{2n}{n-t} + \binom{2n}{n-t-1} \right]$$

On trouve (cf. Q.15) que si  $t \rightarrow \infty$  avec  $t/\sqrt{n} \rightarrow \mu$

$$D_{n,t} \rightarrow e^{-\mu^2} (4\mu^2 - 2)$$

Donc chaque terme de la forme binomiale de  $1-q_{n,h}$  tend vers le terme correspondant de la somme définissant  $\Theta$ . (Cette question qui montre l'existence d'une loi limite pour la distribution du paramètre  $\chi$  n'a pas été traitée par les candidats).

#### PARTIE IV

*La méthode d'Ershov consiste à toujours évaluer en premier lieu la sous-expression la plus "complexe" (en un sens donné par le paramètre "p"). Elle conduit à une meilleure utilisation des registres.*

Q21. Le résultat de genre 2 appliqué à l'exemple est :

$$\begin{aligned} R[0] &:= v; \\ R[1] &:= u; \\ R[0] &:= R[1] - R[0]; \\ R[1] &:= t; \\ R[2] &:= z; \\ R[1] &:= R[2] - R[1]; \\ R[0] &:= R[1] - R[0]; \\ R[1] &:= y; \\ R[2] &:= x; \\ R[1] &:= R[2] + R[1]; \\ R[0] &:= R[1] \times R[0]; \end{aligned}$$

Le reste de la question se traite par une assertion du même type que pour la question 6 (remplacer  $\chi$  par  $\rho$ ).

Q22. La valeur maximum de  $\rho$  s'obtient sur les arbres binaires parfaits (dont toutes les feuilles sont à la même profondeur) ; la valeur minimale sur les arbres filiformes. D'où les valeurs extrémales : 1 et  $\lceil \log_2(n+1) \rceil$ . Toutes les valeurs intermédiaires de  $\rho$  sont prises comme on s'en aperçoit en "greffant" un arbre parfait sur une feuille d'un arbre filiforme.

Q23. Comme les valeurs extrêmes de  $\rho$  sur  $B_n(\Omega, X)$  sont 1 et  $\lceil \log_2(n+1) \rceil$ , la moyenne de  $\rho$  est comprise entre ces bornes. (On pourrait aussi utiliser une forme de l'espérance analogue à celle de la question 13). D'où :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{\rho n}}{\lambda_n} = 0 !$$

Q24. Comparaison des procédures *genere* et *genere2*

1. Temps de calcul, *genere(a)* procède en une seule passe sur l'arbre d'expression  $a$ , d'où un temps de calcul en  $O(n)$ . *genere2(a)* procède en une passe, mais en chaque sommet visité est lancé un appel à la procédure *rho* ; le temps cumulé des appels de la procédure *rho* est proportionnel à la somme des tailles de tous les sous-arbres de l'arbre  $a$ . Cette quantité est d'ordre  $O(n^2)$

2. Nombre de registres du programme généré. Il vaut  $\sqrt{n}$  en moyenne pour *genere* et  $O(\log_2 n)$  pour *genere2*. Dans le cas le pire, on a respectivement  $O(n)$  et  $O(\log_2 n)$ .

Donc la procédure *genere* est plus rapide à l'exécution, mais conduit à une moins bonne utilisation des registres. On observe alors qu'on peut définir une procédure *genere3* qui opère de la façon suivante :

*genere3(a)* construit d'abord un arbre  $b$  isomorphe à  $a$ , mais dont les sommets contiennent un champ supplémentaire *rhoval* ; par évaluation en ordre postfixe *genere3* calcule en une seule passe les valeurs de  $\rho$  associées à chaque sommet et les range dans les champs *rhoval* correspondants. Puis *genere3* procède comme *genere3* en utilisant en chaque sommet le contenu de *rhoval* au lieu de lancer un appel à la procédure *rho*.

La procédure *genere3* opère en temps linéaire (mais en deux passes) tout en construisant un programme élémentaire d'au plus  $\log_2(n+1)$  registres.

#### 4. Indications bibliographiques

Les procédures *genere* et *genere3* (amélioration décrite à la question Q24. de *genere2*) sont utilisées concurrentement dans les compilateurs. Pour une description des problèmes d'allocation, on pourra consulter :

R. Sethi, J. Ullman : The generation of optimal code for arithmetic expressions, *Journal of the Association for Computing Machinery* (J.A.C.M.), 17 (1970), pp. 715-728.

L'article original d'Ershov (Comm. ACM 1958) ne présente plus de nos jours que l'intérêt historique de montrer la difficulté de spécification d'algorithme à une période où les concepts d'arbres, structures de données et récursivité étaient encore mal dégagés.

Les parties II et III sont fondées sur l'article suivant :

N.G. De Bruijn, D.E. Knuth, S.O. Rice : The average height of planted plane trees, in *Graph Theory and Computing*, R.C. Read Ed. Academic Press (1972), pp. 15-22.

La méthode d'Ershov est analysée en détail dans :

P. Flajolet, J.C. Raoult, J. Vuillemin : The number of registers required for evaluating arithmetical expressions, *Theoretical Computer Science*, 9 (1979), pp. 99-125.

R. Kemp : The average number of registers to evaluate a binary tree optimally, *Acta Informatica*, 11 (1979), pp. 363-372.

Le premier de ces articles utilise des résultats de Delange ; le second comme l'article de De Bruijn et al. utilise la transformation de Mellin (voir la Q19).

## ORAL

Le nombre de candidats à l'agrégation de mathématiques s'est légèrement accru de 1984 à 1985, passant de 1209 à 1239, alors que, depuis plusieurs années ce nombre était en baisse sensible. Cela est dû, semble-t-il, à une augmentation du nombre des candidats étudiants, et le jury s'est réjoui de voir à l'oral quelques bons étudiants. Une autre cause de cet accroissement est sans doute l'attrait de la nouvelle option de mathématiques de l'informatique qui, pour sa première année, a connu un succès certain.

Les 302 candidats admissibles ont été répartis d'après le classement d'écrit en deux jurys comportant chacun une commission d'algèbre et une commission d'analyse. Une concertation permanente a assuré une bonne harmonisation entre les jurys.

Quelques candidats, trop rares encore, ont fait un effort pour mettre dans leurs leçons des exemples numériques, des algorithmes, des illustrations venues de l'analyse numérique, de l'informatique, de la mécanique, des probabilités, etc... Le jury souhaite que cet effort se généralise et espère entendre des mathématiques plus concrètes.

Le rôle de la bibliothèque de l'agrégation et des compléments éventuels apportés par les candidats est d'aider ceux-ci à préparer des leçons de meilleure qualité. Cette documentation n'a pas pour but de contenir des ouvrages que les candidats n'auraient qu'à recopier, sur un papier d'abord, au tableau ensuite. Le jury veillera à ce que cet esprit soit respecté.



## RAPPORT SUR L'EPREUVE ORALE D'ANALYSE

Par rapport aux années précédentes, le jury a noté une certaine diminution de la qualité des leçons, tant dans la forme que dans le fond. Il ne semble donc pas inutile de rappeler les règles de base de l'épreuve orale.

### Le plan

A l'issue des trois heures de préparation, le candidat expose au jury le plan de sa leçon. Cet exposé, d'une durée comprise entre quinze et vingt minutes, doit tenir tout entier sur un seul tableau. Le plan doit respecter *scrupuleusement* le titre de la leçon (ponctuation et syntaxe comprises) et il doit comporter des énoncés clairs et précis. La clarté du plan, son organisation, la manière dont il est exposé sont des éléments importants d'appréciation.

### L'exposé

Le candidat propose ensuite au jury au moins deux choix d'exposé (de préférence trois). Ces choix doivent concerner des points non triviaux, illustrant bien le sujet de la leçon. Le jury attend des candidats qu'ils soient capables de faire des démonstrations claires et précises (comme ils devraient le faire devant les élèves). Il est admis que les candidats peuvent consulter leurs notes, mais le jury sanctionne systématiquement les candidats qui ne font que transcrire au tableau leurs notes, elles-mêmes souvent recopiées dans un manuel (ceci vaut aussi, en partie, pour l'exposé du plan). Les candidats doivent être capables de résumer une démonstration ou au contraire d'en détailler certains passages.

Cette partie de l'épreuve orale ne doit pas dépasser quinze à vingt minutes, aussi est-il déconseillé aux candidats de choisir des exposés trop techniques. Il est souvent souhaitable de décrire, en les motivant, les grandes lignes de l'exposé.

### La discussion

qui suit l'exposé permet au jury de juger la solidité des connaissances du candidat. Le jury attend des candidats qu'ils soient capables d'illustrer par des exemples ou des applications les résultats énoncés dans le plan, ou de les utiliser pour résoudre des exercices simples. De trop nombreux candidats abordent des sujets (souvent hors programme) qu'ils ne connaissent pratiquement pas. Cela fait toujours très mauvaise impression sur le jury qui ne se laisse en général pas abuser. De même, certains candidats se placent à un niveau

très élevé, mais sont incapables de répondre à des questions élémentaires sur le sujet de la leçon ; ils sont alors sanctionnés. En règle générale, le jury cherche à apprécier la qualité de la réflexion personnelle, sans intention de piège ou d'artifice. Les candidats doivent savoir répondre, avec brièveté et clarté, à des questions souvent volontairement très simples.

#### Remarques complémentaires

1 - L'épreuve orale de l'agrégation ne s'improvise pas en trois heures. Il est donc recommandé aux candidats de s'y préparer sérieusement, de préférence en suivant une préparation organisée, ou en assistant à des oraux. A cette occasion, les candidats auront intérêt à limiter le nombre d'ouvrages qu'ils utilisent, au profit d'un approfondissement du contenu des ouvrages.

2 - Toutes les leçons doivent comporter des exemples et des applications. Certains titres de leçons commencent par "Exemples...". Il faut alors centrer la leçon sur une liste d'exemples bien choisis, représentatifs des méthodes d'usage courant, et reléguer les théorèmes fondamentaux au second plan. La qualité et l'intérêt des exemples sont alors un élément important d'appréciation.

Certaines leçons portent sur l'approximation (des nombres, des fonctions ...) et sur l'analyse numérique élémentaire (calcul approché de zéros de fonctions, d'intégrales, ...). Ces leçons doivent contenir des algorithmes utilisables (par exemple sur des calculatrices programmables).

Ainsi, se limiter à approximer  $\int_a^b f(x) dx$  par  $\frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b))$ ,

même avec une évaluation de l'erreur, est insuffisant. Il faut aussi décrire les moyens d'atteindre une précision théorique ou réelle donnée à l'avance. Enfin, de telles leçons doivent contenir des exemples numériques illustrant les méthodes présentées.

La leçon "Approximation des fonctions par des fonctions polynomiales" est, elle aussi, à interpréter en partie comme une leçon d'analyse numérique.

3 - Certains ouvrages présentent des théorèmes très fins, nécessitant des hypothèses compliquées, souvent difficiles à vérifier dans la pratique. Le jury attend des candidats qu'ils puissent prendre du recul par rapport à ces ouvrages (faciles à identifier) et qu'ils présentent des énoncés simplifiés mais cependant suffisants dans les cas usuels. On peut ainsi proposer des énoncés simples pour la méthode de Laplace (comportement asymptotique d'intégrales), la méthode de Newton (résolution de  $f(s) = 0$ )... . Il est bien préférable de donner un énoncé simple, illustré par une application bien choisie plutôt qu'un énoncé savant sans application.

4 - Rappelons, à propos des suites, qu'il est intéressant d'étudier la manière dont elles divergent (cas des suites homographiques par exemple) ou, quand elles convergent, la rapidité de convergence.

5 - Même si cela n'a pas été fait cette année, le jury se réserve la possibilité de faire des couplages qui orienteront les candidats vers les leçons concernant l'analyse numérique, la mécanique ou les équations différentielles.

6 - Les intégrales impropres interviennent dans plusieurs leçons. Le critère pratique de comparaison avec les fonctions  $t^{-a}$  est souvent oublié dans les plans de leçons théoriques sur les intégrales impropres. L'étude de la convergence d'intégrales aussi simples que  $\int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$  ou  $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$  est parfois pénible.

7 - Plusieurs candidats donnent comme exemple la constante d'Euler C, pour illustrer une leçon sur les séries, les suites ou les intégrales, et démontrent que  $0 \leq C \leq 1$ , mais ne sont pas capables d'en donner un encadrement plus fin.

Pour les leçons sur les fonctions définies implicitement, le jury attend des candidats qu'ils sachent faire des calculs élémentaires sur ces fonctions : développements limités, calculs de dérivées, tracé de courbes...

De trop nombreux candidats ne parviennent pas à expliquer simplement, par des arguments d'algèbre linéaire, la forme des solutions des relations de récurrence linéaires à coefficients constants. L'analogie avec les équations différentielles n'est pas toujours clairement perçue.

## SUJETS D'ANALYSE

- 1 Applications à l'analyse de la notion de compacité.
- 2 Exemples d'espaces compacts.
- 3 Espaces homéomorphes. Exemples et contre-exemples.
- 4 Connexité. Applications.
- 5 Théorèmes du point fixe. Applications.
- 6 Utilisation en analyse d'espaces complets. Exemples.
- 7 Sous-espaces denses. Illustration par l'approximation des fonctions.
- 8 Exemples d'applications linéaires continues d'un espace vectoriel normé dans un autre et de calcul de leurs normes.
- 9 Espaces vectoriels normés de dimension finie.
- 10 Géométrie dans un espace vectoriel normé.
- 11 Exemples d'utilisation de la dénombrabilité en topologie et en analyse (ou en probabilités).
- 12 Donner une construction de  $\mathbb{R}$  ; en déduire les principales propriétés de  $\mathbb{R}$ .
- 13 Une caractérisation de  $\mathbb{R}$  (par certaines de ses propriétés) étant connue, en déduire les autres propriétés fondamentales de  $\mathbb{R}$ .
- 14 Topologie de la droite numérique  $\mathbb{R}$  et sous-ensembles remarquables de  $\mathbb{R}$ .
- 15 Exemples de compactification d'un espace topologique ; utilisation.
- 16 Connexité dans  $\mathbb{R}$  et fonctions continues.
- 17 Propriétés topologiques de  $\mathbb{R}^n$ , exemples d'utilisation.
- 18 Limite d'une fonction numérique d'une variable réelle.
- 19 Exemples d'étude de suites de nombres réels, applications.
- 20 Etude, sur des exemples, de la rapidité de convergence d'une suite de nombres réels ; calcul approché de la limite.
- 21 Approximations d'un nombre réel.
- 22 Etudes, sur des exemples, de suites réelles ou complexes définies par divers types de relations de récurrences.
- 23 Continuité et dérivabilité de fonctions réelles d'une variable réelle ; exemples et contre-exemples.
- 24 Continuité uniforme. Applications, exemples et contre-exemples.
- 25 Fonctions à variation bornée. Applications.
- 26 Applications réciproques : théorèmes d'existence ; exemples.
- 27 Exemples d'études de fonctions définies implicitement.
- 28 Applications géométriques du théorème des fonctions implicites.
- 29 Exemples d'utilisation de changements de variables en analyse et en géométrie.
- 30 Fonctions convexes d'une ou de plusieurs variables réelles, applications.
- 31 Fonctions convexes d'une variable réelle ; inégalités de convexité.
- 32 Applications de la notion de convexité à des problèmes d'extremum.
- 33 Problèmes de prolongement de fonctions ; exemples.

- 34 Exemples d'études qualitatives des solutions ou des courbes intégrales d'une équation différentielle.
- 35 Dérivées partielles. Différentiabilité. Exemples.
- 36 Fonctions de plusieurs variables réelles : théorème des accroissements finis et applications.
- 37 Applications de classe  $C^k$  d'un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^p$ .
- 38 Différentes formules de Taylor. Majoration des restes. Applications.
- 39 Problèmes d'extremum.
- 40 Développements limités, applications.
- 41 Exemples de développements asymptotiques.
- 42 Intégrales des fonctions réelles ou complexes de variable réelle. Premières propriétés.
- 43 Intégrales impropres ; exemples.
- 44 Problèmes d'interversion d'une limite et d'une intégrale. Exemples.
- 45 Problèmes de dérivabilité en calcul intégral.
- 46 Exemples d'étude de fonctions définies par une intégrale.
- 47 Fonction exponentielle complexe. Argument d'un nombre complexe.
- 48 Exemples de calculs d'intégrales.
- 49 Méthodes de calcul approché d'intégrales.
- 50 Exemples d'intégrales multiples et applications.
- 51 Séries : Sommation par paquets, réindexation.
- 52 Illustrer par des exemples et des contre-exemples la théorie des séries numériques.
- 53 Continuité, dérivabilité, intégrabilité de la somme d'une série de fonctions d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.
- 54 Calculs approchés de sommes partielles et de restes de séries numériques.
- 55 Comparaison d'une série et d'une intégrale. Applications.
- 56 Exemples d'étude d'une fonction définie par une série.
- 57 Différentes notions de convergence d'une suite de fonctions. Exemples.
- 58 Séries de fonctions, convergence uniforme, convergence normale ; exemples.
- 59 Exemples de problèmes d'interversion de limites.
- 60 Domaine de convergence d'une série entière. Propriétés de la somme d'une telle série.
- 61 Exemples de développement d'une fonction en série entière.
- 62 Série de Taylor.
- 63 Solutions des équations différentielles  $y'=f(x,y)$  ; solutions maximales.
- 64 Exemples d'équations différentielles linéaires.
- 65 Etude détaillée, sur un petit nombre d'exemples, d'équations différentielles non linéaires ; illustrations géométriques.
- 66 Exemples de problèmes conduisant à des équations différentielles.
- 67 Divers modes de définition et de représentation des surfaces de  $\mathbb{R}^3$ . Exemples.
- 68 Propriétés affines locales des courbes. Exemples.
- 69 Propriétés métriques des courbes planes ou gauches. Exemples.
- 70 Exemples d'études de courbes planes.
- 71 Exemples de recherche et d'études d'enveloppes de droites dans le plan.
- 72 Etude locale des courbes de  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ .
- 73 Mouvement à accélération centrale. Exemples.

- 74 Mouvement d'un repère orthonormé ; applications à la théorie des courbes gauches et à la cinématique du solide.
- 75 Mouvement d'un plan sur un plan.
- 76 Méthodes de calcul approché de solutions numériques des équations  $f(x) = 0$ .
- 77 Approximation des fonctions numériques par des fonctions polynomiales.
- 78 Théorèmes limites fondamentaux en calcul des probabilités.
- 79 Le jeu de pile ou face (variables de Bernoulli indépendantes).
- 80 Probabilité conditionnelle. Exemples.
- 81 Loi binomiale, loi de Poisson.
- 82 Compactification d'un espace topologique ; exemples.
- 83 Etude locale de champs de vecteurs. Exemples.
- 84 Exemples de méthodes numériques pour le calcul approché des fonctions élémentaires.
- 85 Etude sur quelques exemples de résolution approchée d'équations différentielles.
- 86 Exemples d'équations fonctionnelles.
- 87 Fonctions périodiques.

## EPREUVE D'ALGEBRE ET DE GEOMETRIE

### RAPPORT D'ORAL

#### Observations générales

Le niveau moyen des candidats est comparable à celui des années précédentes, malgré la légère augmentation du nombre d'admissibles. Le jury tient à souligner l'important effort de préparation accompli par quelques centres de province, dont certains représentants se sont remarquablement comportés à l'oral. De tels exemples devraient encourager d'autres universités à renforcer - ou rouvrir ! - leurs préparations à l'agrégation.

Par ailleurs, les 50 places supplémentaires offertes au concours semblent avoir créé une motivation chez certains candidats qui ont ainsi cru en leur chance. Rappelons que le rôle de l'oral est considérable : chaque année certains admis définitifs se trouvaient parmi les derniers admissibles, et il n'est pas rare de voir des candidats gagner de cinquante à cent places, voire plus, à l'oral.

Dans l'ensemble les candidats connaissent les règles de l'oral, mais il n'est pas inutile de les rappeler une fois encore :

- présentation, en 15 à 20 minutes, d'un plan qui doit tenir sur le tableau,
- proposition de 2 ou 3 thèmes d'exposé (3 de préférence), et développement, en 15 minutes environ, de celui qui est choisi par le jury,
- réponses à diverses questions portant sur la leçon ou ses prolongements.

Insistons sur la nécessité de respecter ces règles, en particulier le temps consacré à chaque partie. Les candidats sont donc invités à savoir juger la longueur de leur plan et de leur exposé.

#### Le plan

Le niveau auquel il se situe est librement choisi par le candidat, étant entendu que le minimum requis est celui du premier cycle de l'enseignement supérieur. Même à ce niveau, on peut obtenir une très bonne note, car un plan ne s'enrichit pas seulement par une accumulation de connaissances, mais bien plus par un large choix d'exemples et d'applications, et une bonne réflexion sur les liens que présente le sujet avec d'autres parties du programme.

Précisons quelques points :

- Le plan doit couvrir l'ensemble du sujet de la leçon, aborder ses divers aspects, respecter l'équilibre entre eux et mentionner, par des énoncés précis, les propriétés essentielles.

- Pour les leçons dont le titre est assez général, ou les leçons d'exemples, où des choix sont nécessaires, la variété des sujets abordés est également importante.

- Le plan doit toujours comporter des exemples et des applications. C'est bien sûr vrai des leçons "Exemples de ..." où ils constituent l'essentiel du plan après un rappel bref mais précis des propriétés utilisées, mais ils représentent un enrichissement essentiel quel que soit le sujet.

- L'intérêt du sujet doit être mis en valeur, notamment par ses relations avec d'autres parties du programme. Ainsi, dans la leçon "Dualité en algèbre linéaire" on peut envisager le cadre des espaces euclidiens, hermitiens, voire projectifs.

- Les notions introduites dans le plan doivent être dominées, et le candidat doit pouvoir répondre à des questions sur tout sujet qu'il a introduit. Dans le cas où un résultat profond est énoncé sans être proposé en exposé, le candidat doit, à défaut d'en connaître la démonstration, pouvoir en citer des conséquences significatives et être capable de l'utiliser pour résoudre des exercices d'application simples.

Il va de soi que ces diverses qualités ne peuvent être obtenues en découvrant le sujet dans un livre, si bon soit-il, pendant les trois heures de préparation ; au contraire l'usage de la bibliothèque doit aider à mettre au point une leçon à laquelle on a déjà réfléchi pendant l'année.

Signalons enfin que le jury augmentera l'an prochain le nombre des leçons de synthèse et des leçons d'exemples.

### L'exposé

Le choix d'exposés proposés par le candidat est un élément important de l'appréciation : il doit mettre en évidence les points essentiels de la leçon, et refléter la diversité du sujet et le niveau auquel on s'est placé. Insistons sur le fait qu'il doit s'agir d'un vrai choix - le jury apprécie peu les artifices de "carte forcée" ! - et que chacune des propositions doit pouvoir être exposée dans les 15 minutes imparties : il peut s'agir de la démonstration, complète ou partielle, d'un théorème, de la résolution d'un ou plusieurs exercices, ou encore du développement d'un aspect particulier du sujet esquissé dans le plan ; mais la démonstration d'un théorème important ne doit pas être vidée de son contenu en admettant un lemme crucial.

L'exposé proprement dit doit être pour le candidat l'occasion de faire preuve de qualités d'aisance au tableau et de maîtrise des éléments de son plan. Trop nombreux sont ceux se contentent de recopier leurs notes tenues à la main, en s'ex-



primant d'une voix inaudible, et se trouvent désarçonnés par la moindre intervention du jury. Il est souhaitable de poser ses notes, quitte à s'y référer brièvement pour contrôler un résultat ou retrouver un détail. S'il est légitime de passer rapidement sur des calculs de routine, la démonstration doit être bien dominée, les différentes étapes et les idées directrices clairement dégagées. Insistons encore sur le danger de recopier à la hâte une démonstration prise dans un livre que l'on n'a jamais étudié auparavant : l'exposé risque fort d'achopper sur un point traité antérieurement - ou trop rapidement ! - par l'auteur ...

### Les questions

Elles ont pour but de vérifier si le candidat maîtrise convenablement le sujet et les notions qu'il a introduites : rectification éventuelle des erreurs du plan ou de l'exposé, exercices assez courts utilisant les résultats cités, questions ayant pour but de tester les connaissances du candidat sur des points liés à la leçon ou ses prolongements naturels ...

### Remarques particulières

#### *Dénombrements :*

Il faut savoir traiter directement des questions par des raisonnements combinatoires. Par ailleurs, comme toujours quand le sujet s'y prête, il n'est pas interdit de faire appel à l'analyse (séries entières notamment). D'autre part, les structures algébriques sur des ensembles finis fournissent de bons thèmes de dénombrements.

#### *Groupes :*

- A propos des groupes abéliens de type fini, il faut parler du sous-groupe de torsion et ne pas oublier les groupes abéliens finis. On doit également être capable d'étudier la structure du quotient de  $\mathbb{Z}^2$  par un sous-groupe.

- La notion de produit semi-direct, souvent introduite, doit pouvoir être illustrée et appliquée à des exemples concrets.

- Les groupes diédraux et leurs représentations en géométrie devraient être mieux connus.

- Il faut savoir décortiquer  $S_4$ , et trouver dans  $S_n$  le conjugué d'un cycle par une permutation.

- Des applications à l'algèbre linéaire et à la géométrie doivent illustrer les leçons "Groupes opérant sur un ensemble" et "Eléments conjugués dans un groupe" ; les groupes de pavages fournissent de bons exemples.

#### *Anneaux, corps, polynômes :*

- En dehors de  $\mathbb{Z}$  et de  $K[x]$ , les anneaux cités en exemple sont rarement étudiés. Aucun candidat, semble-t-il, ne s'est jamais demandé si l'anneau des décimaux est principal ...

- L'algorithme d'Euclide doit être décrit en tant qu'algorithme effectif : il n'est pas interdit d'utiliser à cette fin un langage de programmation.

- Les critères d'irréductibilité énoncés doivent être précis, et les relations entre l'irréductibilité des polynômes sur  $\mathbb{Z}$  et sur  $\mathbb{Q}$  mieux maîtrisées.

- L'irréductibilité concerne aussi les polynômes à plusieurs variables.

- On peut passer rapidement sur la construction de l'algèbre des polynômes à plusieurs indéterminées, ou du corps des fractions rationnelles.

- Il ne suffit pas d'énoncer le théorème de structure de l'algèbre des polynômes symétriques à coefficients dans un corps, encore faut-il savoir exprimer de tels polynômes à l'aide des polynômes symétriques élémentaires dans des exemples simples.

- Il faut connaître l'expression du résultant de deux polynômes en fonction des valeurs de l'un des polynômes en les racines de l'autre.

#### *Algèbre linéaire :*

- Les aspects matriciels sont souvent négligés.

- Dans plusieurs leçons, les méthodes numériques constituent un point de vue à ne pas négliger (systèmes linéaires, déterminants, valeurs propres, ...).

- Dans la leçon "Dimension des espaces vectoriels dans le cas fini", il faut parler du rang.

- La leçon "Endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie" n'est pas identique à la leçon "Valeurs propres, vecteurs propres".

- Des considérations topologiques peuvent enrichir de nombreux plans.

- Il semble que les candidats ne connaissent pas d'autre exemple de bases duales que celui fourni par l'interpolation de Lagrange. D'autre part, on devrait pouvoir préciser la signification de la phrase : "il n'y a pas d'isomorphisme canonique de  $E$  dans  $E^*$ ".

#### *Formes bilinéaires symétriques, alternées, hermitiennes :*

- Les propriétés de diagonalisation des endomorphismes normaux sont différentes sur  $\mathbb{R}$  et sur  $\mathbb{C}$ .

- Rappelons encore une fois que si les matrices symétriques réelles sont diagonalisables, il n'en va pas de même des matrices symétriques complexes.

- L'expression "on complexifie..." ne saurait constituer un raisonnement complet.

- L'étude du groupe orthogonal d'une forme quadratique non dégénérée ne se limite pas au cas euclidien.

### *Géométrie :*

Cette année encore, la géométrie a rarement eu les faveurs des candidats ; de bonnes notes ont pourtant été obtenues dans ce domaine.

- Le jury accueille favorablement toute démonstration de résultats élémentaires qui s'appuie sur de bons raisonnements géométriques expliqués sur des figures.

- La géométrie métrique plane nécessite certaines connaissances élémentaires sur le triangle.

- Les angles suscitent toujours beaucoup d'appréhension, qu'il conviendrait de surmonter une bonne fois ...

- L'utilisation de la géométrie projective, à condition de pouvoir la justifier, permet de simplifier certaines démonstrations.

- Il faut savoir déduire les groupes finis de  $O(3)$  de ceux de  $O^+(3)$ .

## LISTE DES LECONS D'ALGEBRE ET DE GEOMETRIE

- Exemples de problèmes de dénombrement.
- Groupes abéliens de type fini ; sous-groupes de  $\mathbb{Z}^n$ .
- Exemples et applications de la notion de sous-groupe distingué.
- Parties génératrices d'un groupe ; exemples ; applications à la géométrie.
- Illustrer par des exemples, notamment géométriques, la notion d'éléments conjugués dans un groupe.
- Exemples de groupes finis, tirés de l'algèbre linéaire et de la géométrie.
- Groupes opérant sur un ensemble. Applications.
- Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.
- Exemples d'idéaux d'un anneau unitaire et d'anneaux quotients.
- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Applications.
- Divisibilité et factorisation dans un anneau commutatif intègre ; exemples.
- Propriétés élémentaires des nombres premiers.
- P.g.c.d., p.p.c.m., théorème de Bezout, exemples et méthodes de calcul.
- Exemples de corps.
- Corps de rupture d'un polynôme irréductible. Applications.
- Exemples d'algèbres.
- Quaternions.
- Corps des nombres complexes.
- Groupe multiplicatif des nombres complexes ; racines de l'unité.
- Applications géométriques des nombres complexes.
- Polynômes à n indéterminées.
- Racines des polynômes à une indéterminée à coefficients complexes. Résultant. Discriminant.
- Polynômes irréductibles.
- Polynômes symétriques. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme.
- Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif ; applications.
- Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples et applications.
- Dimension des espaces vectoriels dans le cas fini.
- Endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie.
- Groupe linéaire en dimension finie.
- Matrices carrées inversibles.
- Exemples de sous-groupes du groupe linéaire.
- La dualité en algèbre linéaire ; applications ; (on se limitera au cas de la dimension finie).
- Rang d'une application linéaire et d'une matrice. Equations linéaires.
- Résolution d'un système de n équations linéaires à p inconnues.
- Matrices.
- Applications multilinéaires alternées. Déterminants.
- Applications des déterminants.
- Méthodes de calcul d'un déterminant. Exemples et applications.

- Sous-espaces vectoriels stables pour un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.
- Vecteurs propres, valeurs propres. Diagonalisation. Applications.
- Réduction de Jordan. Applications.
- Matrices semblables.
- Polynômes d'endomorphismes.
- Polynôme minimal, polynôme caractéristique.
- Formes bilinéaires symétriques ; formes bilinéaires alternées.
- Orthogonalité, isotropie pour une forme bilinéaire symétrique.
- Décomposition en carrés d'une forme quadratique. Applications.
- Applications des formes quadratiques réelles en dimension finie.
- Groupe orthogonal d'une forme quadratique non dégénérée.
- Espaces vectoriels euclidiens en dimension finie.
- Groupe orthogonal d'un espace vectoriel euclidien de dimension finie.
- Espaces vectoriels hermitiens de dimension finie sur  $\mathbb{C}$ . Groupe unitaire.
- Dualité dans les espaces vectoriels euclidiens de dimension finie. Réduction des endomorphismes normaux.
- Dualité dans les espaces vectoriels hermitiens de dimension finie. Réduction des endomorphismes normaux.
- Changements de bases et classifications de matrices.
- Convexité dans les espaces affines réels de dimension finie.
- Polyèdres convexes.
- Barycentres ; applications.
- Exemples de sous-groupes du groupe affine réel en dimension  $\leq 3$ .
- Exemple de problèmes de géométrie affine.
- Exemples de groupes d'isométries d'un espace affine euclidien en dimension  $\leq 3$ .
- Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Formes réduites, exemples en dimension  $\leq 3$ .
- Polyèdres réguliers dans un espace affine euclidien de dimension 3.
- Angles.
- Exemples de problèmes d'angles et de distances en géométrie.
- Inversion plane. Groupe circulaire.
- Cercles et sphères.
- Familles linéaires de cercles.
- Droite projective.
- Espaces projectifs. Groupe projectif.
- Coniques dans le plan affine euclidien.
- Quadriques de l'espace affine euclidien de dimension 3.
- Plongement d'un espace affine dans un espace projectif. Applications.

## BIBLIOTHEQUE DE L'AGREGATION

Pendant la préparation de l'oral, les candidats peuvent utiliser les ouvrages mis à leur disposition sur place, dont la liste figure ci-après, ou les ouvrages qu'ils ont apportés eux-mêmes, à condition qu'il s'agisse de livres imprimés, diffusés dans le commerce et dépourvus de notes manuscrites.

En outre, les Ecoles Normales Supérieures déposent un nombre important d'ouvrages à la bibliothèque de l'agrégation pendant la durée du concours : ces ouvrages peuvent être utilisés par tous les candidats et sont placés sous leur sauvegarde. A titre indicatif, on trouvera en annexe les listes des d'ouvrages contenus dans les malles des E.N.S. cette année.

La documentation utilisée par les candidats ne saurait contenir des ouvrages que ceux-ci n'auraient qu'à recopier, ce qui ôterait toute signification à l'épreuve. Le jury se réserve donc le droit de ne pas autoriser un ouvrage de ce type, même muni du dépôt légal.

D'autre part, la restriction aux ouvrages imprimés et diffusés dans le commerce répond à un souci d'équité : tout candidat doit pouvoir en principe se procurer tout document autorisé.

Pour ces raisons, le jury a notamment refusé cette année l'usage de montages "raisonnés" d'extraits photocopiés d'articles de revues ou d'encyclopédies ; l'utilisation publique de tels montages contrevient en outre aux lois sur le copyright.

Le jury attire enfin l'attention des candidats sur le fait que l'usage ou la tentative d'usage de documents non autorisés pendant la préparation des épreuves orales constitue une fraude ou une tentative de fraude à un concours public et serait sanctionné comme tel.

LISTE DES OUVRAGES CONSTITUANT LA BIBLIOTHEQUE  
DE L'AGREGATION DE MATHEMATIQUES EN 1985

ARTIN

Algèbre Géométrique (Gauthier-Villars)

BASS

Cours de Mathématiques, tomes 1 & 2 (Masson)

BERGER

Géométrie, index, tomes 1 à 5 (CEDIC-Nathan)

Problèmes de Géométrie rédigés et commentés.

BERGER & GOSTIAUX

Géométrie différentielle (Colin)

BIRKHOFF & MACLANE

Algèbre : 1. Structures fondamentales

2. Les grands théorèmes (Gauthier-Villars)

BLANCHARD

Les corps non commutatifs (P.U.F.)

BOURBAKI

Les volumes suivants : Théorie des ensembles - Algèbre -  
Fonctions d'une variable réelle - Topologie générale -  
Espaces vectoriels topologiques - Intégration (Hermann).

BOUVIER & RICHARD

Groupes (Hermann)

BROUSSE

Mécanique (Colin)

CABANNES

Cours de mécanique générale (Dunod)

CAGNAC, RAMIS, COMMEAU

Nouveau cours de Mathématiques Spéciales (Masson)

CAGNAC & THIBERGE

Géométrie, classes terminales C (Masson)

CARTAN

Fonctions analytiques - Formes différentielles - Calcul  
différentiel (Hermann)

CHAMBADAL & OVAERT

Cours de Mathématiques, tomes 1 & 2 (Gauthier-Villars)

CHOQUET

Cours d'analyse - L'enseignement de la géométrie (Hermann)

CIARLET

Introduction à l'analyse matricielle et à l'optimisation  
(Masson)

COUTY

Analyse (Colin)

CROUZEIX & MIGNOT

Analyse numérique des équations différentielles (Masson)

DIEUDONNE

Algèbre linéaire et géométrie élémentaire -- Sur les groupes  
classiques - Calcul infinitésimal (Hermann)

Éléments d'analyse, tomes 1 & 2 (Gauthier-Villars)

DIXMIER

Analyse M.P. (Gauthier-Villars)

DUBREIL

Leçons d'algèbre moderne (Dunod)

DUBUC

Géométrie plane (P.U.F.)

EXBRAYAT & MAZET

Algèbre, Analyse, Topologie

FELLER

An introduction to probability theory and its applications,  
tomes 1 & 2 (Wiley)

FLORY

Exercices de Topologie et d'Analyse, tomes 1 à 4 (Vuibert)

FRENKEL

Algèbre et Géométrie (Hermann) ) Géométrie pour l'élève  
professeur.

GENET

Mesure et intégration (Vuibert)

GODEMENT

Algèbre (Hermann)

HARDY & WRIGHT

An introduction to the theory of numbers (5th edition)

HENNEQUIN & TORTRAT

Théorie des probabilités et quelques applications (Masson)

JACOBSON

Basic algebra, tomes 1 & 2 (Freeman)

KERBRAT

Géométrie des courbes et des surfaces (Hermann)

KREE

Introduction aux mathématiques appliquées (Dunod)

KRIVINE

Théorie axiomatique des ensembles (P.U.F.)



LANG  
Introduction aux variétés différentiables - Algèbre -  
Linear Algebra

LELONG-FERRAND & ARNAUDIES  
Cours de mathématiques, tomes 1 à 4 (Dunod)

LELONG-FERRAND  
Géométrie différentielle (Masson)

MALLIAVIN  
Géométrie différentielle intrinsèque (Hermann)

MARTIN  
Géométrie (Colin)

METIVIER  
Introduction à la théorie des probabilités

MUTAFIAN  
Le défi algébrique (tomes 1 & 2) (Vuibert)

NEVEU  
Bases mathématiques du calcul des probabilités (Masson)

OVAERT & VERLEY  
Exercices et Problèmes, Classes Préparatoires et 1er cycle,  
Algèbre (vol.1) - Analyse (vol.1) (CEDIC-Nathan)

PERRIN  
Cours d'algèbre (E.N.S.J.F.)

POLYA & SZEGÖ  
Problems and theorems in analysis (tomes 1 & 2) (Springer)

QUERRE  
Cours d'algèbre (Masson)

QUEYSANNE  
Algèbre (Colin)

RAMIS, DESCHAMPS, & ODOUX  
Mathématiques spéciales (tomes 1 à 5) (Masson)

RIDEAU  
Exercices de calcul différentiel (Hermann)

RIESZ & NAGY  
Leçons d'analyse fonctionnelle (Gauthier-Villars)

RUDIN  
Real and complex analysis (Mac Graw-Hill)

SAMUEL  
Théorie algébrique des nombres (Hermann)

SCHWARTZ  
Cours d'analyse (tomes 1 & 2) - Topologie Générale et  
Analyse fonctionnelle (Hermann)

SERRE

Cours d'arithmétique (P.U.F.)

TITCHMARSH

The theory of functions (2nd edition) (Oxford)

VALIRON

Cours d'analyse (tomes 1 & 2) (Masson)

VAUQUOIS

Les probabilités (Hermann)

WARUSFEL

Structures algébriques finies (Hachette)

ZISMAN

Topologie algébrique (Colin)

LISTES DES LIVRES DEPOSES PAR LES E.N.S. EN 1985

BIBLIOTHEQUE D'AGREGATION (ENS ULM)

ACZEL

Leçons sur les équations fonctionnelles.

AMICE

Les nombres p-adiques.

APOSTOL

Modular functions and Dirichlet series in number theory.

ARNAUDIES

Les 5 polyèdres réguliers de  $R^3$  et leurs groupes.

ARTIN

The gamma function.

AVEZ

Calcul différentiel.

BEARDON

Geometry of Lie groups.

BELLMAN

Methods of non linear analysis.

BERGE

Espaces topologiques et fonctions multivoques.

BERTIN

Algèbre linéaire et géométrie classique.

BRAEMER

Géométrie des courbes et des surfaces.

BREIMAN

Probability.

BREZINSKI

Accélération de la convergence en analyse numérique.

BREZIS

Analyse fonctionnelle.

CARATHEODORY

Theory of functions of a complex variable (T1 & T2).

CARTAN

Sur les classes de fonctions définies par des inégalités portant sur leurs dérivées successives.

CASSELS  
Introduction to diophantine approximation.

CHENEY  
Introduction to approximation theory.

CHOQUET  
Topologie.

COMTET  
Analyse combinatoire (T1 et T2).

COXETER  
Regular polytopes - Introduction to geometry.

DEHEUVELS  
L'intégrale - Formes quadratiques et groupes classiques.

DELTHEIL-CAIRE  
Géométrie.

DIEUDONNE  
La théorie analytique des polynomes d'une variable.

DO CARMO  
Differential geometry of curves and surfaces.

DUPORCQ  
Géométrie moderne.

FRAISSE  
Cours de logique mathématiques (T1).

GAMELIN  
Uniform algebra.

GANTMACHER  
Théorie des matrices (T1 et T2).

GELBAUM-OLMSTED  
Counterexamples in analysis.

GRAMAIN  
Topologie des surfaces.

HARTMAN  
Ordinary differential equations.

HASSE  
Number theory.

HERVE  
Fonctions analytiques - Fonctions périodiques.

HORMANDER  
An introduction to complex analysis in several variables.

HSIUNG  
A first course in differential geometry.

JACOBSON  
Lectures in abstract algebra (T. 2)

JAMESON  
Topology and normed spaces.

KELLEY  
General topology.

KOLMOGOROV-FOMINE  
Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle.

KUIPERS NIEDERREITER  
Uniform distribution of sequences.

LANG  
Algebra - Introduction to diophantine approximation.

LEICHTNAM-SCHAUER  
Exercices corrigés (T. 1 à 4).

LOCKWOOD  
A book of curves.

LORENTZ  
Approximation of functions.

MILNOR  
Topology from the differentiable viewpoint.

MODENOV-PARKHOMENKO  
Geometric transformations.

OSTROWSKI  
Solutions of equations and systems of equations.

PARENT  
Exercices de théorie des nombres.

REINHARD  
Equations différentielles.

ROBERTS-VARBERG  
Convex functions.

RUBINSTEIN  
A first course in ordinary and partial differential equations.

RUDIN  
Analyse réelle et complexe - Functional analysis.

SAMUEL  
Anneaux factoriels

SERRE  
Représentations linéaires des groupes finis.

SIEGEL  
Topics in complex function theory (T. 1)

STEEN-SEEBACH  
Counterexamples in topology.

STEWART  
Galois theory.

STOER-WITZGALL  
Convexity and approximation.

SUZUKI  
Group theory.

TISSERON  
Géométrie affine projective et euclidienne.

VALENTINE  
Convex sets.

VAUTHIER  
Problèmes d'analyse de l'agrégation.

WILLIAMSON  
Lebesgue intégration.

ZARISKI-SAMUEL  
Commutative algebra (T. 1).

VALISE D'AGREGATION MATHÉMATIQUES N° 1

1985

ANDLER

Exercices corrigés de mathématiques I

" " " II.

Algèbre tome 3.

APOSTOL

Introduction to analytic number theory.

ARNAUDIES

Les cinq polyèdres réguliers.

ARNOLD

Ordinary differential equations - Méthodes mathématiques de la mécanique classique.

ATTALI

Géométrie, I - II - V - VI

ATIYAH

Introduction to commutative algebra.

AVEZ

Calcul différentiel.

BELLMAN et BECKENBUCH

Inégalités.

BERGER

Géométrie 3 : Convexes et polytopes - Géométrie 4 : Formes quadratiques - Géométrie Tome 2 : espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères.

BERGER-GOSTIAUX

Géométrie différentielle.

BERTIN

Calcul pour l'informatique

BILLINGSLEY

Probability and measure

BLANCHARD

Les corps non commutatifs

BRAUN

Differential equations and their applications.

BROUSSE  
Mécanique

BRUCKNER  
Différentiation of real fonctions.

BRUIJN  
Asymptotic methodes in analysis.

CAGNAC-RAMIS-COMMEAU  
Traité de mathématiques spéciales 4 : applications de l'analyse à la géométrie.

CARREGA  
Théorie des corps : la règle et le compas.

CARTAN  
Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables.

CHAMBADAL  
Algèbre linéaire et tensorielle - Cours de mathématiques 1 :  
Notions fondamentales d'algèbre et d'analyse - Cours de mathématiques 2 : Algèbre II - Exercices et problèmes résolus d'algèbre.

CHENCINER  
Courbes algébriques planes.

CIARLET  
Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation.

COMTET  
Analyse combinatoire I - Analyse combinatoire II

COTTRELL  
Exercices de probabilités

DEHEUVELS  
Formes quadratiques et groupes classiques - L'intégrale.

DELTHEIL/CAIRE  
Géométrie

DELTHEIL  
Compléments de géométrie.

DESBAZEILLE  
Exercices et problèmes de recherche opérationnelle.

DESCOMBES  
Intégration

DIEUDONNE  
Calcul infinitésimal

DIXMIER  
Topologie générale



DO CARMO  
Differential geometry of curves and surfaces

EKELAND  
Analyse convexe et problèmes variationnels

ELLISON  
Nombres premiers

FLORY  
Exercices de topologie et d'analyse : 1 : Topologie  
" " " 2 : Fonctions d'une variable réelle  
" " " : 3 : Fonctions différentiables et intégrales multiples  
" " " : 4 : Séries, équations différentielles.

Géométrie, cinématique 1.

FRENKEL  
Géométrie pour l'élève professeur.

GANTMACHER  
Théorie des matrices I - Théorie des matrices II.

GARNIER  
Cours de cinématique : 2 : Roulement et vibration (3e ed. 1956).

MARTIN  
Transformation geometry.

VALISE D'AGREGATION MATHÉMATIQUES N° 2

1985

GELBAUM/OLMSTED

Counter examples in analysis.

GEORGE

Exercices et problèmes d'intégration.

GODEMENT

Cours d'algèbre.

HARDY/WRIGHT

An Introduction to the theory of numbers - 5th. ed. 1979.

HERVE

Fonctions analytiques.

ITARD

Nombres premiers.

JACOBSON

Basic algebra.

JAMESON

Topology and normed spaces.

KOLMOGOROV

Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle.

KRICKEBERG/ZIEGOLD

Méthodes stochastiques.

KURATOWSKI

Introduction à la théorie des ensembles.

LAFON

Algèbre commutative.

LANG

Analyse réelle.

LEBORGNE

Calcul différentiel et géométrie.

LEICHTNAM/SCHAUER

Exercices corrigés de mathématiques (1 - 2 - 3 - 4)

Le livre du problème : 5 : Calcul barycentrique.

LE LONG-FERRAND/ARNAUDIES  
Cours de mathématiques Tome 3 : géométrie et cinématique.

MAC LANE/BIRKHOFF  
Algèbre I : structures fondamentales - Algèbre : solutions  
développées des exercices (1 - 2 - 3)

MARTIN  
Applications de l'algèbre.

MUTAFIAN  
Le Défi algébrique Tome 2.

Numéro spécial  $\pi$

OXTOBY  
Measure and category

PEDOE  
A course of geometry

POLYA  
Problems and theorems in analysis (1 - 2).

RAMIS/DESCHAMPS/ODOUX  
Cours de mathématiques spéciales Tome 2  
" " " Tome 3  
" " " Tome 4

RAMIS  
Exercices de géométrie et de cinématique avec solutions  
développées.

REINHARD  
Equations différentielles.

RENAULT  
Algèbre non commutative.

RIBENBOIM  
L'Arithmétique des corps.

RICHARD/BRAEMER/RIHAOUI  
Capes mathématiques, préparation à l'oral : 1ère partie,  
leçons 19-27  
" " " " : 2ème partie,  
leçons 28-35.

RIDEAU  
Exercices de calcul différentiel.

RIVLIN  
Introduction to the approximation of functions.

ROBERTS/VARBERG  
Convex functions.

ROSEAU  
Equations différentielles.

RUDIN  
Principles of mathematical analysis.

SAMUEL  
Théorie algébrique des nombres.

SCHWARTZ  
Analyse hilbertienne - Analyse mathématique I - Analyse  
mathématique II.

SERRE  
Cours d'arithmétique.

SERVIEN/LEVY-BRUHL  
Problèmes de mathématiques.

SIBONY  
Systèmes linéaires et non linéaires.

SIBONY/MARDON  
Approximations et équations différentielles II.

TISSERON  
Géométrie affine, projective et euclidienne.

TITCHMARSH  
The theory of functions (2nd éd. 1975).

VAUTHIER  
Problèmes d'analyse, agrégation de mathématiques.

VALIRON  
Fonctions analytiques (1954).

ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE JEUNES FILLES

BIBLIOTHEQUE DES SCIENCES

1, rue Maurice Arnoux

92120 MONTROUGE

ABOU-JOUANDE (S.) CHEVALIER (J.)

Cahiers de mathématiques analyse - Vol. 1, 2, 3 -

ANDLER (M.) BLOCH (J.) MAILLARD (B.)

Exercices corrigés de mathématiques :

1A - Topologie -

1B - Fonctions numériques -

2 - Suites et séries numériques -

3 - Analyse fonctionnelle -

5 - Algèbre I algèbre générale, polynomes -

6 - Algèbre linéaire -

7 - Algèbre linéaire -

ARNAUDIES

Les cinq polyèdres réguliers B3 et leurs groupes -

ARNOLD (V.)

Méthodes mathématiques de la mécanique classique -

Equations différentielles ordinaires Vol. 1, 2 -

ASTERISQUE N° 56 (1978)

ATIYAH Mac DONALD

Introduction to commutative algebra MC in 8° 397 bis.

AUBERT et PAPELIER

Exercices de géométrie analytique à l'usage des élèves de mathématiques spéciales -

AVEZ (A.)

Calcul différentiel -

BERTIN (J.E. et J.M.)

Algèbre linéaire et géométrie classique -

BILLINGSLEY (P.)

Probability and measure -

BIRKOFF (G. ROTA (G.C.)

Ordinary differential equations -

BIRKOFF (G.) Mac Lane (S.)

Algèbre solutions développées des exercices - 3 t. -

BOURBAKI (N.)  
 Espaces vectoriels topologiques - Chap. 1 à 5 -  
 Espaces vectoriels topologiques - Chap. 1 et 2 -  
 " " "  
 Algèbre - Chap. 4 à 7 -

BREZIS (H.)  
 Analyse fonctionnelle -

BROUSSE (P.)  
 Mécanique analytique -

BRAUN (M.)  
 Differential equations and their applications - 2e éd. -

BREZINSKI  
 Algorithmes d'accélération -  
 Accélération de la convergence en analyse numérique -

CALAIS (Josette)  
 Élément de théorie des groupes -

CARMO (M.P. DO)  
 Differential geometry of curves and surfaces -

CASSELS (J.W.S.)  
 An introduction to diophantine approximation -

CARREGA (J.C.)  
 Théorie des corps - La règle et le compas -

CHAMBADAL (L.)  
 Exercices résolus d'analyse -  
 Exercices résolus d'algèbre -

CHENEY (E.W.)  
 Introduction to approximation theory -

CHENCINER (A.)  
 Courbes algébriques planes -

CHOW (Y.S) TEICHER (H.)  
 Probability theory -

CIARLET (P.G.) THOMAS (J.M.)  
 Ex. d'analyse numérique matricielle et d'optimisation -

CHEVALLEY  
 Théorie of Lie Groups -

COHN (P.M.)  
 Algebra Vol. I, II -

COMBES (J.)  
 Suites et séries -

COMTET (L.)  
 Analyse combinatoire - Vol. I, 2 -

COPSON  
Asymptotic expansions -

COTTREL et DUHAMEL  
Exercices de probabilités -

COXETER (H.S.M.)  
Regular polytopes -

DACUNHA-CASTELLE et DUFLO  
Probabilités et statistiques T. 1 et 2 -  
Ex. de probabilités et statistiques T. 1 et 2 -

DAVIES et RABINOWITZ  
Methods of numerical integration -

DEHEUVELS (P.)  
Formes quadratiques et groupes classiques -  
L'Intégrale -

DELTEIL et CAIRE  
Géométrie -  
Complément de géométrie -

DESCOMBES (R.)  
Intégration -

DIEUDONNE (J.)  
La géométrie des groupes classiques -

DIXMIER  
Topologie générale -

DUGUNDJI (J.)  
Topology -

ELLISON (W.J.)  
Les nombres premiers -

ENGEL (A.)  
Mathématique élémentaire d'un point de vue algorithmique -  
L'enseignement des probabilités et de la statistique -

EXBRAYAT (J.M.) MAZET (P.)  
Analyse 1 et 2 -

FEJEL (D.) LA PRADELLE (A.)  
Exercices sur les fonctions analytiques -

FEJES TOTH (L.)  
Regular figures -

FULTON (W.)  
Algebraic curves -

GANTMACHER (F.R.)  
Applications of the theory of matrices -

GASTINEL (Noël)  
Analyse numérique linéaire -

GELBAUM (B.R.) et OLMSTED  
Counterexamples in analysis -

GEORGE (C.)  
Ex. et problèmes d'intégration -

GODBILLON  
Eléments de topologie algébrique -

GOENSTEIN (D.)  
FINITE Groups -

GRUNBAUM (B.)  
Convex polytopes -

HAAG (J.)  
Cours complet de mathématiques spéciales -

HALL (M.)  
The theory of groups -

HARDY (G.H.) WRIGHT (E.M.)  
An introduction to the theory of numbers 4e ed. -

HERVE (M.)  
Fonctions analytiques -

HONSBERGER (R.)  
Joyaux mathématiques -

JAMESON (G.J.O.)  
Topology and normed spaces -

KOLMOGOROV et FOMINE  
Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle -

KNUTH (D.E.)  
The art of computer programming T. I, II, III -

KRICKEBERG (K.) ZIFZOLD (H.)  
Méthodes stochastiques -

LAFON (J.P.)  
Algèbre commutative -

LANG (S.)  
Analysis -  
Algebra -  
Elliptic functions -

LEMAIRE (J.)  
Hypocycloïdes et epicycloïdes -

MARLE (C.M.)  
Mesures et probabilités -



MILNOR (J.)  
Morse theory -  
Topology from the differential view point -

MOULIN (H.)  
Fondation de la théorie des jeux -

NEVEU (J.) METIVIER (M.)  
Probabilités cours de l'X -

NICOLAS (J.L.)  
Article dans les "philosophies des mathématiques" N° 2

NIKIFOROV (A.) OUVAROV (V.)  
Fonctions spéciales de la physique mathématique -

PAPELIER (G.)  
Exercices de géométrie -

PARENT (D.P.)  
Exercices de théorie des nombres -

PONTRYAGIN (L.S.)  
Ordinary differential equations -

RABIER (P.) THOMAS (J.M.)  
Ex. d'analyse numérique des équations aux dérivées partielles

RAMIS (J.P.)  
Ex. d'analyse avec solutions développées -  
Ex. d'algèbre avec solutions développées -

RAVIART et THOMAS  
Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles -

REINHART (H.)  
Equations différentielles : fondement et applications -

RENYI (A.)  
Calcul des probabilités -

REVUE DE MATHEMATIQUES SPECIALES - Déc. 1978 - Mars 1981 -  
Fév. 1982 - Oct. 1982 - Jan. 1983 - Mai 1983.

REVUZ (G.)  
Le cours A.P.M. Tomes 1, 2, 3 -

RIBENBOIM (P.)  
L'arithmétique des corps -

RIVAUD (J.)  
Ex. d'algèbre à l'usage des candidats aux grandes écoles -

ROBERTS (A.W.) VALBERG (D.E.)  
Convex functions -

ROSEAU (M.)  
Equations différentielles -

RUDIN (W.)  
Analyse réelle et complexe -  
Functional analysis -  
Real and complex analysis (5e ed.) -

SAMUEL (P.)  
Anneaux factoriels -

SCHWARTZ (L.)  
Analyse mathématique -

SIBONY (M.) MARDON (J.L.)  
Analyse numérique tomes 1, 2 -

SPIVAK (M.)  
Calculus on manifolds -  
A Comprehensive introduction to differential geometry t. 2

STEWART (I.) TALL (D.O.)  
Algebraic number theory -

STEWART (I.)  
Galois theory -

TISSERON (Claude)  
Géométrie affine projective et euclidienne -

TITCHMARSH (E.C.)  
The theory of functions -

QUERRE (J.)  
Cours d'analyse -

VALENTINE (F.A.)  
Convex sets -

VAN DER WAERDEN (B.L.)  
Modern algebra -

VAUTHIER (J.)  
Problèmes d'analyse, agrégation de mathématiques -

WASHINGTON (L.C.)  
Introduction to cyclotomic field -

WALDESCHMIDT (Michel)  
Nombres transcendants -

WALKER (Robert J.)  
Algebraic curves -

WARUSFEL (André)  
Structures algébriques finies -

YOSIDA (K)  
Functional analysis -

**UNIVERSITE de NANCY I**  
**Département de Mathématiques**  
**BIBLIOTHEQUE**