ministère de l'éducation

direction des personnels enseignants
de lycées

Agrégation mathématiques

Rapport de Monsieur Edmond RAMIS
Inspecteur général de l'Instruction publique
Président du jury

1977

présentation

1. COMPOSITION DU JURY

M.	RAMIS	*Inspecteur général de l'Instruction publique, président*
M.	RICHE	*Inspecteur général de l'Instruction publique, vice-président*
M.	ARCANGELI	*Maître de conférences à l'université des Pays de l'Adour*
M.	ARTOLA	*Professeur à l'université de Bordeaux I*
M.	AUQUE	*Maître assistant à l'université de Clermont-Ferrand*
M.	BAILLE	*Maître assistant à l'université de Grenoble I*
M.	BARLET	*Maître de conférences à l'université de Nancy I*
M.	BLONDEL	*Professeur à l'université de Bordeaux I*
M.	BRODEAU	*Maître de conférences à l'université de Grenoble II*
M.	BROUE	*Chargé de recherches au Centre national de la Recherche scientifique*
M.	CAPODANNO	*Professeur à l'université de Besançon*
M.	CARPENTIER	*Professeur au lycée Carnot à Dijon*
M.	CARSIQUE	*Professeur au lycée St-Louis à Paris*
M.	CHAMBADAL	*Professeur au lycée Louis le Grand à Paris*
M.	DELASSUS	*Professeur au lycée C. Guérin à Poitiers*
Mme	DELEAU	*Professeur au lycée Descartes à Tours*
M.	DESCHAMPS	*Professeur au lycée Louis le Grand à Paris*
M.	DESQ	*Professeur à l'université de Toulouse III*
Mme	EL KAROUI	*Maître de conférences à l'université du Mans*
M.	FOREST	*Professeur au lycée St-Louis à Paris*
M.	FRAYSSE	*Professeur au lycée Fermat à Toulouse*
M.	GENET	*Professeur à l'université des Pays de l'Adour*
M.	GIORGIUTTI	*Professeur à l'université de Rennes*
M.	GOSTIAUX	*Professeur au lycée St-Louis à Paris*

M.	HEE	*Assistant à l'université de Paris XI*
M.	HELLEGOUARCH	*Maître de conférences à l'université de Caen*
M.	HELMER	*Professeur au lycée Clémenceau à Reims*
M.	KAPLAN	*Maître de conférences à l'université de Nancy I*
M.	KAROUBI	*Professeur à l'université de Paris VII*
M.	KERKYACHARIAN	*Maître assistant à l'université de Nancy I*
M.	LEBORGNE	*Professeur à l'université de Nantes*
M.	LOMBARD	*Maître assistant à l'université de Nancy I*
M.	MEUNIER	*Professeur au lycée Joffre à Montpellier*
M.	PAINTANDRE	*Professeur au lycée Fermat à Toulouse*
M.	PRADINES	*Maître de conférences à l'université de Toulouse III*
M.	REINHARD	*Maître de conférences à l'Ecole Polytechnique*
M.	RIVET	*Professeur à l'Institut national des sciences appliquées de Rennes*
M.	ROSEAU	*Professeur à l'université de Paris VI*
M.	SCHREIBER	*Maître de conférences à l'université d'Orléans*
M.	SIMON	*Professeur au lycée Louis le Grand à Paris*
M.	STERN	*Maître assistant à l'université de Paris VII*
M.	WARUSPEL	*Professeur au lycée Henri IV à Paris*
M.	WIRTH	*Professeur au lycée St-Louis à Paris*

2. CALENDRIER DES EPREUVES

2.1.Epreuves préparatoires (écrit)

- Elles ont eu lieu aux dates suivantes :

Mathématiques générales : 4 mai de 8 à 14 heures ;
Analyse : 5 mai de 8 heures à 14 heures ;
Mathématiques appliquées : 7 mai de 8 à 14 heures.

Conformément au règlement du concours, les candidats avaient dû préciser l'option de leur choix lors de leur inscription au concours : deux candidats se sont vu attribuer la note 0 à la troisième épreuve pour avoir composé dans une option différente de celle qu'ils avaient initialement choisie.

- La liste d'admissibilité a été affichée le 11 juin (34, rue de Chateaudun et lycée Montaigne).

2.2. Epreuves définitives (oral)

Elles se sont déroulées au lycée Montaigne, à Paris, du 17 juin au 20 juillet. Les résultats définitifs ont été affichés le 21 juillet.

3. STATISTIQUES DIVERSES

3.1. Résultats généraux

	1977	1976
Postes mis au concours	220	240
Candidats inscrits	2 680	2 820
Candidats présents à la première épreuve	2 237	2 382
Candidats présents à la dernière épreuve	1 936	2 130
Admissibles (l'astérisque correspond aux étrangers)	346 + 7*	470 + 5*
Admis à l'agrégation	198 + 6*	217 + 2*
Equivalences des épreuves théoriques du C.A.P.E.S.	5	4

Moyenne des points obtenus par le premier admissible : 19,4/20
Moyenne des points obtenus par le dernier admissible : 5,0/20
Moyenne des points obtenus par le premier agrégé : 18,8/20
Moyenne des points obtenus par le dernier agrégé : 8,0/20

On remarquera que le nombre des candidats ayant terminé les épreuves a diminué d'environ dix pour cent. Par ailleurs, on a enregistré 301 abandons entre la première et la dernière épreuve contre 252 en 1976 et 339 en 1975.

3.2. Répartition des notes d'écrit

Dans le tableau suivant, N (m) désigne le nombre des candidats ayant obtenu à l'écrit une moyenne, sur 20, au moins égale à m.

m	19	15	12,5	10	7,5	6,5	5,5	5	4,5	3,5	2
N (m)	2	15	35	61	136	186	280	353	401	549	931

La disparité des candidats reste grande : plus de 1 000 parmi ceux qui ont terminé l'écrit n'ont pas atteint la moyenne de 2/20, alors que 15 atteignaient ou dépassaient celle de 15/20.

Le seuil d'admissibilité (5/20) a été pratiquement le même qu'en 1976 (5,25/20).
Le rapport du nombre des candidats français admissibles à celui du nombre des postes mis au concours avait été anormalement relevé en 1976, à cause des précautions que la prudence avait imposé au jury lors de l'établissement de la mixité du concours ; il a retrouvé en 1977 une valeur voisine de 1,6 ; le tableau suivant montre son évolution :

	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977
Postes	304	304	304	320	285	240	220
Admissibles	452	474	494	500	485	470	346

3.3. Répartition entre les options

	Analyse numérique	Mécanique	Probabilités
Ont composé	903	219	814
Admissibles	157	29	167
Admis	92	13	99

3.4. Situation universitaire des candidats

Dans le tableau suivant U, J, C, F, T, correspondent aux élèves de E.N.S. : Ulm, Jourdan, Saint-Cloud, Fontenay-aux-Roses et E.N.S.E.T. Les autres abréviations sont les suivantes :

E .... Etudiants ;
I.P.E.S. ...... Elèves des I.P.E.S. ;
C.P.R. .... Stagiaires de C.P.R. ;
P.C. .... Certifiés ou bi-admissibles ;
A .... Assistants ;
C.O. .... Coopération ou détachement ;
S.N. .... Professeurs au service militaire, en congé, ou en sursis d'intégration ;
M.A. .... Maîtres auxiliaires, maîtres d'internat, maîtres d'externat, ...
P................. Enseignement privé ;
D .... Divers (ingénieurs,...).

Candidats	U	J	C	F	T	E	I.P.E.S.	C.P.R.
Inscrits	29	25	20	36	50	321	247	562
Admissibles	27	21	18	25	33	25	50	48
Admis	25	15	17	17	22	13	24	22

Candidats	P.C.	A	C.O.	S.N.	M.A.	P	D	Total
Inscrits	871	37	74	132	157	57	62	2 680
Admissibles	55	16	8	21	1	3	2	353
Admis	23	7	6	10	1	1	1	204

3.5. Répartition suivant les centres d'écrit

Centres / Candidats	Aix-Marseille	Amiens	Besançon	Bordeaux-Pau	Caen	Clermont	Dijon	Grenoble	Lille	Limoges	Lyon - St Etienne	Montpellier
Inscrits	105	79	40	72	57	24	57	108	189	29	110	70
Ayant composé (aux trois épreuves)	81	60	29	46	43	20	36	90	139	26	92	48
Admissibles	6	9	3	6	3	1	4	12	17	2	11	4
Admis	2	4	1	1	2	0	2	6	6	2	10	1

Centres / Candidats	Nancy-Metz	Nantes	Nice – Ajaccio	Orléans – Tours	Paris	Poitiers	Reims	Rennes – Brest	Rouen	Strasbourg	Toulouse	Etranger
Inscrits	116	120	75	53	803	45	34	80	84	57	101	172
Ayant composé (aux trois épreuves)	75	64	49	42	584	32	23	65	59	41	75	106
Admissibles	8	7	5	6	198	3	6	13	7	8	0	14
Admis	1	0	2	2	143	1	3	4	3	2	0	6

Les candidats mentionnés au centre de Paris sont, en fait, ceux des trois académies de CRETEIL, PARIS et VERSAILLES. Parmi eux figurent les élèves des écoles normales supérieures (qui ont fourni 160 inscrits, 124 admissibles et 96 reçus).

3.6. Affectation des agrégés de 1977

Sur les 198 candidats français admis :
9 ont été maintenus dans l'enseignement supérieur ;

5 ont obtenu des chaires de classe préparatoires aux grandes écoles ;
22 ont obtenu des chaires de classes terminales C ou E ;
1 a été nommé dans une école normale d'instituteurs ;
27 ont été maintenus ou nommés sur des chaires ordinaires (lycées ou collèges) ;
19 partiront en coopération ou au service national ;
4 ont été affectés à la D.G.R.S.T. ;
3 ont obtenu un congé pour études ;
32 suivront un stage de formation professionnelle ;
76 feront une année supplémentaire dans une E.N.S.

3.7. Influence de la mixité du concours

Le concours était mixte pour la seconde fois. Le tableau suivant semble confirmer ce que l'on avait commencé à observer l'an dernier, à savoir que la mixité est assez nettement favorable aux candidats hommes. (F et H se rapportent respectivement aux femmes et aux hommes ; τ désigne $\frac{100\,F}{F+H}$; on a tenu compte des candidats étrangers) :

	1977			1976	1975
	F	H	τ	τ	τ
Inscrits	946	1 734	35	37	36
Admissibles	94	259	26	24	36
Admis	57	147	28	28	40

On observera cependant que la proportion des candidates admissibles est meilleure qu'en 1976 et que, par ailleurs, sept d'entre elles se classent parmi les trente premiers (n° 6, 8, 18, 26, 26, 28, 29) contre trois seulement l'an dernier. Une conclusion définitive serait donc prématurée.

écrit

MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

Sujet (durée : 6 heures)

I

Soit K un corps commutatif de caractéristique différente de 2. On appelle *espace quadratique* tout couple (E , Q), où E est un espace vectoriel de dimension finie sur le corps K et Q une forme quadratique non dégénérée sur E. On notera P la forme polaire de Q. Par abus de langage, on écrira souvent E pour (E , Q).

I. 1° Soient (E , Q) et (E′ , Q′) deux espaces quadratiques. On pose $E'' = E \times E'$ et on désigne par Q″ l'application

$$Q'' : E'' \to K \qquad (x\,,\,x') \longmapsto Q\,(x) + Q'\,(x')$$

(relation abrégée en $Q'' = Q + Q'$). Montrer que le couple (E″ , Q″) est un espace quadratique que l'on appellera *somme directe* de E et E′.

I. 2° Soient π la projection canonique de E″ sur E, A un sous-espace de E″. A toute partie X de E, on associe $\overline{X} = X \times \{0\}$. On munit $\overline{E}$ de la forme quadratique $\overline{Q}$, telle que $\overline{Q}\,(x\,,0) = Q\,(x)$. On note par les signes $\perp$, $\circ$ et $\bullet$ les orthogonalités dans les espaces E″, E et $\overline{E}$. Calculer $\overline{X}^{\perp}$ en fonction de X°. Comparer $\pi\,(A^{\perp})$ et $\pi\,[(A \cap \overline{E})^{\bullet}]$. Déterminer l'orthogonal dans E″ du produit d'un sous-espace de E par un sous-espace de E′.

I. 3° Définir à l'aide de Q une notion naturelle d'*isomorphisme quadratique* entre deux espaces quadratiques de façon que toute décomposition de E en somme directe de sous-espaces orthogonaux rende E isomorphe à la somme directe (au sens du 1°) de ces sous-espaces munis de formes convenables.

I. 4° (E, Q) étant un espace quadratique, on note (abusivement) E^- le couple $(E, -Q)$. Déterminer un sous-espace L de $E \times E^-$ égal à son orthogonal $L^\perp$.

I. 5° Un espace quadratique est dit *hyperbolique* si, et seulement s'il admet un *lagrangien*, c'est-à-dire un sous-espace égal à son orthogonal.

Soient (E, Q) un espace quadratique hyperbolique et L un lagrangien de cet espace. Que peut-on dire de la dimension de E ?

On considère un supplémentaire L_0 de L, une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de L et une base $(f_1, \ldots, f_n)$ de L_0. A tout vecteur $v \in E$ on associe les matrices-colonnes X et Y dont les éléments sont respectivement les n premières et les n dernières coordonnées de v dans la base $(e_1, \ldots, f_n)$ de E. Montrer qu'il existe deux matrices carrées d'ordre n, A et B, telles que, pour tout $v \in E$

$$Q(v) = {}^t X A Y + {}^t Y B Y.$$

Montrer que la matrice A est inversible.

I. 6° Montrer que l'on peut choisir L_0 et les bases $(e_1, \ldots, e_n)$, $(f_1, \ldots, f_n)$ de façon que, pour tout $v \in E$, $Q(v) = {}^t XY$. En déduire que, L^* désignant le dual de L, (E, Q) est quadratiquement isomorphe à $(H(L), R)$, où $H(L)$ désigne $L \times L^*$ et où R est déterminé par

$$R(x, \varphi) = \varphi(x).$$

I. 7° On remplace maintenant l'hypothèse $L^\perp = L$ par l'inclusion $L \subset L^\perp$. Soit Λ un supplémentaire de L dans $L^\perp$. Déduire de la question précédente que l'on peut munir l'espace quotient $L^\perp / L$ d'une forme quadratique telle que E soit quadratiquement isomorphe à la somme directe $(L^\perp / L) \times H(L)$ ($H(L)$ est défini comme au 6°; on pourra rechercher un lagrangien de $\Lambda^\perp$).

I. 8° Soient E et E' deux espaces quadratiques tels que les espaces E' et $E \times E'$ admettent des lagrangiens notés respectivement U et T. Posant $\overline{\overline{U}} = \{0\} \times U$, montrer (avec les notations du 2°) que $\pi[(T + \overline{\overline{U}}) \cap \overline{E}]$ est un lagrangien de E.

I. 9° On dira que deux espaces quadratiques E et E' sont *équivalents* si $E \times (E')^-$ est hyperbolique. Justifier l'emploi de l'adjectif « équivalent ». Admettant que les classes d'équivalence définies par cette relation forment un ensemble, munir cet ensemble d'une addition de façon à obtenir un groupe abélien qui sera noté $W(K)$.

Montrer que $W(\mathbb{C})$ et $W(\mathbb{R})$ sont respectivement isomorphes aux groupes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}$.

II

II. 1° Soient $\mathbf{F}_q$ un corps fini commutatif de cardinal q et de caractéristique différente de 2, et (a, b) un couple d'éléments non nuls de $\mathbf{F}_q$. Dénombrer les éléments de $\mathbf{F}_q$ de la forme $1 - by^2$ et montrer que l'équation $ax^2 + by^2 = 1$ a au moins une solution $(x, y) \in \mathbf{F}_q{}^2$.

II. 2° Soit (E, Q) un espace quadratique sur $\mathbf{F}_q$. Montrer l'existence d'une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E orthogonale relativement à Q, telle que, pour $i \geqslant 2$, $Q(e_i)$ soit égal à 1. Montrer que, pour que l'on puisse imposer la condition supplémentaire $Q(e_1) = 1$, il faut et il suffit que le déterminant de Q relatif à une base quelconque soit un carré dans $\mathbf{F}_q$.

II. 3° En écrivant l'identité polynomiale

$$X^{q-1} - 1 = (X^r - 1)(X^r + 1), \quad \text{où} \quad r = \frac{q-1}{2},$$

montrer que, pour tout $a \in \mathbf{F}_q$, la condition $a^r = 1$ équivaut à l'existence d'un élément non nul $b \in \mathbf{F}_q$ tel que $a = b^2$. On examinera les cas

$$q = 4m + 1 \text{ et } q = 4m + 3.$$

II. 4° Montrer que, selon que $q = 4m + 1$ ou $q = 4m + 3$, $W(\mathbf{F}_q)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ou à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ (on pourra introduire un élément $\omega \in \mathbf{F}_q$ qui n'est pas un carré et considérer $(\mathbf{F}_q, Q)$, où $Q(x)$ désigne x^2 ou ωx^2).

III

III. 1° Soit G un groupe abélien fini noté additivement. On sait qu'il existe k nombres premiers (distincts ou non) $p_1, \ldots, p_k$ et k entiers non nuls $n_1, \ldots, n_k$ tels que, si l'on pose $q_i = p_i{}^{n_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, G soit isomorphe au produit direct $(\mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/q_2\mathbb{Z}) \times \ldots \times (\mathbb{Z}/q_k\mathbb{Z})$, la famille $(q_1, \ldots, q_k)$ étant unique à l'ordre près.

Soit $\widehat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ le groupe des homomorphismes de G dans le groupe-quotient du groupe additif de $\mathbb{Q}$ par le sous-groupe $\mathbb{Z}$.

Montrer que G et $\widehat{G}$ ont même cardinal.

III. 2° Soit χ l'application de G dans $\widehat{\widehat{G}}$ définie par les relations :

$$\chi : G \to \widehat{\widehat{G}}, \quad \chi(x) : \widehat{G} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \quad \chi(x)(\varphi) = \varphi(x).$$

Montrer que χ est un isomorphisme de groupes.

III. 3° Soit h une application de $G \times G$ dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ supposée *symétrique* (c'est-à-dire telle que $h(x, y) = h(y, x)$ pour tout couple (x, y)) et en outre *bilinéaire* (c'est-à-dire telle que $h(x + x', y) = h(x, y) + h(x', y)$

pour tout triplet (x, x', y)). On note $\tilde{h}$ l'homomorphisme défini par les relations

$$\tilde{h} : G \to \widehat{G}, \quad \tilde{h}(x) : G \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \quad \tilde{h}(x)(y) = h(x, y).$$

Montrer que $\tilde{h}$ est un isomorphisme si, et seulement si, h est *non dégénérée* (c'est-à-dire si, à tout $x \neq 0$, correspond au moins un y tel que $h(x, y) \neq 0$). On dira alors que (G, h) est un *groupe bilinéaire.* Par abus de langage, on écrira souvent G pour (G, h).

III. 4° On appliquera désormais aux groupes bilinéaires langage et notations des espaces quadratiques : on dira par exemple que les parties X et Y du groupe bilinéaire G sont orthogonales si, pour tout $(x, y) \in X \times Y$, $h(x, y) = 0$; on notera n le cardinal de G, et, pour tout nombre premier i, G_i le sous-groupe des $x \in G$ tels que $i^n x = 0$. Montrer qu'il existe un nombre premier p tel que G soit bilinéairement isomorphe au produit direct de sous-groupes $G_2 \times G_3 \times G_5 \times \ldots \times G_p$, chaque partie G_i $(i \leqslant p)$ étant orthogonale aux autres.

III. 5° L et L' étant deux sous-groupes de G, on notera $L + L'$ le sous-groupe de G engendré par $L \cup L'$. Montrer que l'orthogonal de L est un sous-groupe $L^{\perp}$ de G. Montrer que tout homomorphisme $\lambda \in \widehat{L}$ peut être prolongé en un homomorphisme $\bar{\lambda} \in \widehat{G}$. Vérifier les égalités :

$$\operatorname{card} L^{\perp} = \frac{\operatorname{card} G}{\operatorname{card} L}, \quad L^{\perp\perp} = L, \quad (L + L')^{\perp} = L^{\perp} \cap L'^{\perp},$$

$$L^{\perp} + L'^{\perp} = (L \cap L')^{\perp}.$$

III. 6° Si la restriction de h à L est non dégénérée, montrer que G est bilinéairement isomorphe au produit direct $L \times L^{\perp}$.

III. 7° On note encore (abusivement) G^{-} le couple $(G, -h)$. En supposant $L \subset L^{\perp}$, munir $L^{\perp}/L$ d'une forme bilinéaire, symétrique, non dégénérée, naturellement liée à h, telle que le groupe bilinéaire $(L^{\perp}/L) \times G^{-}$ qui s'en déduit admette un sous-groupe Γ égal à son orthogonal (on pourra considérer la surjection canonique τ de $L^{\perp}$ sur $L^{\perp}/L$ et l'ensemble des couples $(\tau(x), x)$ où $x \in L^{\perp}$).

III. 8° On dira que deux groupes bilinéaires G et G' sont *équivalents* si $G \times (G')^{-}$ admet un sous-groupe égal à son orthogonal. Montrer, en s'inspirant du I. 9°, que l'on peut définir un groupe abélien $\mathcal{W}$ analogue aux différents W (K).

III. 9° Si p est un nombre premier, on appelle *groupe p-primaire* un groupe additif G tel que $G = G_p$ (avec la notation du III. 4°). Montrer que les classes d'équivalence des groupes bilinéaires p-primaires définissent un sous-groupe $\mathcal{W}_p$ de $\mathcal{W}$. Montrer que $\mathcal{W}$ est isomorphe au sous-groupe de $\mathcal{W}_2 \times \mathcal{W}_3 \times \mathcal{W}_5 \times \ldots \times \mathcal{W}_p \times \ldots$ constitué par les suites (x_i), (i premier ; $x_i \in \mathcal{W}_i$), qui n'ont qu'un nombre fini de termes non nuls.

III. 10° Montrer que $\mathcal{W}_p$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si $p = 2$, et isomorphe à $W(\mathbf{F}_p)$ si $p \geqslant 3$ (on pourra montrer que si G est bilinéaire et s'il existe $m \geqslant 2$ tel que $p^m x = 0$ pour tout $x \in G$, alors il existe un groupe bilinéaire équivalent à G, et un entier $m' < m$ tel que $p^{m'} y = 0$ pour tout $y \in G'$).

IV

Un groupe additif abélien est dit *libre de type fini* s'il existe un entier n tel que le groupe soit isomorphe à $\mathbb{Z}^n$. Soit H un tel groupe. Nous admettrons que les sous-groupes de H sont également libres de type fini; nous noterons $H^* = \operatorname{Hom}(H, \mathbb{Z})$ le groupe des homomorphismes de H dans le groupe $\mathbb{Z}$.

IV. 1° Montrer que H et H^* sont isomorphes.

IV. 2° Soient E et F deux groupes abéliens libres de type fini et $\alpha : E \to F$ un homomorphisme. On appelle *transposé* de α l'homomorphisme ${}^t\alpha : F^* \to E^*$ défini par ${}^t\alpha(\varphi) = \varphi \circ \alpha$, et *conoyau* de α le groupe-quotient $G = \operatorname{Coker} \alpha = F/\alpha(E)$; on suppose que le conoyau de α est fini. Comme au III, on note $\widehat{G} = \operatorname{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

Montrer que ${}^t\alpha$ est injectif.

IV. 3° On considère en outre un élément $w \in \widehat{G}$. On désigne par $\beta : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $\gamma : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $\delta : F \to G$ les homomorphismes canoniques. Montrer qu'il existe des homomorphismes $v : F \to \mathbb{Q}$, $u : E \to \mathbb{Z}$ tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "u"'] & F \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "v"'] & G \arrow[d, "w"'] \\ \mathbb{Z} \arrow[r, "\beta"] & \mathbb{Q} \arrow[r, "\gamma"] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

IV. 4° Soit réciproquement $u \in E^*$. Supposant de plus α injectif, montrer qu'il existe v et w tels que le diagramme ci-dessus soit commutatif, et qu'ils sont uniques. Montrer que la correspondance définie par $u \longmapsto w$ induit un homomorphisme surjectif de E^* sur $\widehat{G}$, de noyau ${}^t\alpha(F^*)$, et que $\operatorname{Coker} {}^t\alpha$ est isomorphe à $\widehat{G}$.

IV. 5° Soit $A = (a_{ij})$ une matrice symétrique à coefficients dans $\mathbb{Z}$, de déterminant $\det A \neq 0$; soient $\alpha : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$ et $\alpha' : \mathbb{Q}^n \to \mathbb{Q}^n$ les homomorphismes représentés par A dans les bases canoniques respectives. Pour tout couple $(a, b) \in (\mathbb{Q}^n)^2$, où $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$, on pose $a \bullet b = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$. Si δ est l'homomorphisme canonique de $\mathbb{Z}^n$ sur $G = \operatorname{Coker} \alpha = \mathbb{Z}^n / \alpha(\mathbb{Z}^n)$, on définit une application bilinéaire symétrique h de $G \times G$ dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ par l'égalité $h(\delta(x), \delta(y)) = \gamma(\alpha'^{-1}(x) \bullet y)$. Montrer que (G, h) est un groupe bilinéaire.

IV. 6° Soit L un sous-groupe de G. Montrer que $\Phi = \delta^{-1}(L)$ contient $\alpha(\mathbb{Z}^n)$ et que, si $j : \Phi \to \mathbb{Z}^n$, $k : L \to G$ sont les homomorphismes canoniques, il existe des homomorphismes $s : \mathbb{Z}^n \to \Phi$, $\varepsilon : \Phi \to L$ tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}^n \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "s"'] & \mathbb{Z}^n \arrow[r, "\delta"] & G \\
 & \Phi \arrow[u, "j"] \arrow[r, "\varepsilon"] & L \arrow[u, "k"]
\end{tikzcd}$$

soit commutatif.

IV. 7° On suppose que $L \subset L^\perp$ et on note $\rho : \Phi \to \Phi^*$ l'homomorphisme défini par $\rho(x)(y) = \alpha'^{-1}(x) \bullet y$; montrer que, si e est l'isomorphisme de $\mathbb{Z}^n$ sur $(\mathbb{Z}^n)^*$ déduit de la forme bilinéaire $(a, b) \longmapsto a \bullet b$, le transposé de s est tel que

$$^t s \circ \rho = e \circ j .$$

IV. 8° On suppose $L = L^\perp$; montrer que ρ est un isomorphisme. Si $(f_1, \dots, f_n)$ engendre Φ et si B est la matrice de la forme bilinéaire $(x, y) \longmapsto \alpha'^{-1}(x) \bullet y$ dans cette base de Φ, montrer que $|\det B| = 1$.

IV. 9° Montrer que, si $n = 2$, $A = 2\,I$, L étant engendré par la classe modulo $\alpha(\mathbb{Z}^2)$ du vecteur $(1, 1)$, on se trouve dans la situation du 8°, et déterminer alors Φ, ρ, s et ε.

IV. 10° On suppose que $p_1, \dots, p_q$ sont q nombres premiers deux à deux distincts, de la forme $(4k + 1)$, et que $\det A = 2^{r_0} p_1^{r_1} \dots p_q^{r_q}$. Montrer qu'il existe des matrices S et C à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et d'ordre $2n$ telles que l'on ait les égalités :

$$\det C = 1, \quad {}^t S\, C\, S = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}.$$

RAPPORT
SUR L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES GENERALES

1. Thème du sujet

Comme il y a deux ans, le problème de mathématiques générales porte sur les formes quadratiques et, accessoirement, sur l'arithmétique.

La première partie définit la notion de groupe de Witt d'un corps comme quotient de la classe des espaces quadratiques non dégénérés par la relation :

$(E, Q) \sim (E', Q')$ si et seulement si $E \times E'$ admet une partie L égale à son orthogonal pour la forme $Q - Q'$. (La vérification du caractère transitif de cette relation demande une partie technique assez pénible) : On caractérise les groupes de Witt de $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$ comme isomorphes à $\mathbf{Z}$ (car c'est la signature d'une forme qui compte et, plus exactement, la différence $p - q$) et à $\mathbf{Z}/2\,\mathbf{Z}$ (suivant la dimension de $\mathbf{E}$).

La seconde partie, beaucoup plus courte, donne la décomposition canonique des formes quadratiques sur un corps fini $\mathbf{F}_q$, ($Q(x) = \lambda x_1^2 + \sum_2^n x_i^2$), rappelle la classique condition nécessaire et suffisante pour que (-1) soit un carré dans $\mathbf{F}_q$ et montre que le groupe de Witt de $\mathbf{F}_q$ est de cardinal 4, cyclique si $q = 4m + 3$, non cyclique si $q = 4\,m + 1$ (le cas q pair est exclu à cause de la caractéristique).

La troisième partie définit la notion de groupe de Witt. On part d'un groupe abelien fini ; après que l'on ait défini, très classiquement, les caractères du groupe et les groupes duaux et biduaux, l'extension de la notion d'orthogonalité à partir d'une forme bilinéaire non dégénérée conduit au groupe de Witt, et à son expression explicite comme produit de groupes tels que $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ou les différents groupes des corps $\mathbf{F}_p$, (le théorème fondamental de structure des groupes abéliens finis étaient admis explicitement).

La dernière partie termine le problème sur une assez curieuse propriété de matrice carrée entière. Après quelques manipulations élémentaires sur les groupes abéliens libres de type fini (on admet le théorème de transfert de cette qualité à leurs sous-groupes), la définition d'une forme bilinéaire remarquable issue d'une matrice carrée entière symétrique conduit à l'application signalée; en montrant que le groupe de Witt du groupe bilinéaire considéré ne contient que des facteurs du type $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

2. Observations des correcteurs

Bien que le problème fut original dans sa formulation (en réalité on pouvait, avec de solides connaissances en $\mathbf{K}$– théorie, reconnaître qu'il ne constituait qu'une partie vulgarisée de résultats beaucoup plus profonds), il restait suffisamment classique pour qu'un candidat, à vrai dire bon algébriste, ait réussi à en traiter l'essentiel pendant les six heures dont il disposait. Sans s'attarder sur les vérifications minutieuses et triviales qui abondaient, ce candidat a eu le courage d'attaquer les vraies questions et de les résoudre ou, en tous cas, d'indiquer chaque fois la ligne générale de la solution.

Même si une telle performance n'est pas à la portée de tous, il serait bon que chacun sache ce qu'attend le jury : vérifier languissamment des trivialités n'a aucun intérêt et n'est guère «payé» ; ce qui compte c'est résoudre les problèmes nécessitant des méthodes d'attaque non inscrites dans l'énoncé. Est-ce beaucoup demander aux candidats d'avoir deux ou trois idées en six heures et de substituer l'intelligence des mathématiques (même en faible quantité si l'on n'est pas inspiré par le sujet) à une mécanique servile ?

Que les notes soient catastrophiques s'explique assez bien ; car enfin le contenu de la copie moyenne était si faible et surtout si banal qu'on ne peut guère penser qu'il ait fallu beaucoup plus d'une heure ou deux pour en venir à bout. A quoi a servi le reste du temps ? Le résultat le plus fréquent est un amoncellement de micro-problèmes résolus à la chaîne, qui ne vaut presque rien. Que l'on comprenne bien qu'il ne s'agit là que d'étapes nécessaires prévues pour la respiration de l'exécutant (comme les pauses d'une partition de clarinette) et que les notes non infinitésimales ne sont accordées que lorsque le candidat a dû (et su) faire œuvre personnelle.

Autre amère constatation : le jury a relevé, avec une fréquence inquiétante, des confusions très graves, portant sur les définitions les plus simples : c'est ainsi qu'un

candidat sur deux croit que toute forme quadratique non dégénérée est définie positive.

Aussi étonnant que cela puisse paraître, il est certain que beaucoup d'étudiants de première année auraient obtenu de moins médiocres notes que leurs aînés à cette épreuve. Comme il n'y a aucune raison de croire que les générations soient fondamentalement différentes les unes des autres, c'est que le problème se situe ailleurs : qu'arrive-t-il aux étudiants jusqu'à leur candidature à l'agrégation ? Peut-être ceci : dépassés par les théories qu'il ne comprennent pas et dominent encore moins, il semble que, dans leur majorité, ils aient adopté une attitude entièrement passive devant les mathématiques, s'habituant à ne faire que les tâches mécaniques (ce qui suffit souvent à leur donner leurs examens d'université) et à abdiquer pour le reste.

3. Les notes (sur 60)

Nombre de copies corrigées : 2 237

Répartition des notes :

0	:	11,76 %
1 à 4	:	44,05 %
5 à 8	:	24,95 %
9 à 12	:	5,72 %
13 à 16	:	4,52 %
17 à 20	:	3,26 %
21 à 24	:	1,12 %
25 à 28	:	1,34 %
29 à 32	:	0,49 %
33 à 36	:	0,71 %
37 à 40	:	0,98 %
41 à 48	:	0,71 %
49 à 60	:	0,36 %

COMPOSITION D'ANALYSE

Sujet (durée : 6 heures)

Préambule

On tient à préciser qu'aucune démonstration faisant intervenir une convergence, une continuité, une dérivabilité sous le signe $\int$, $\left(\text{Resp. } \iint\right)$ ne sera prise en considération si les théorèmes invoqués ne sont pas énoncés avec précision au moins une fois dans la copie.

Notations

• On désigne respectivement par $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$, $\mathbb{C}$ le corps des réels, la droite réelle achevée, le corps des complexes. On identifie $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ de sorte que si (x, y) est élément de $\mathbb{R}^2$ on pose :

$$z = x + iy = (x, y)$$

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

• Dans tout le problème on considère un entier s $(s \geqslant 1)$; pour tout élément z de $\mathbb{C}$ et tout élément $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$ de $\mathbb{C}^s$ on pose :

$$P_s(z, \lambda) = z^s + \lambda_1 z^{s-1} + \ldots + \lambda_s \; .$$

et $$P'_s(z, \lambda) = s z^{s-1} + \lambda_1 (s-1) z^{s-2} + \ldots + \lambda_{s-1}.$$

Pour λ dans $\mathbb{C}^s$, on note $(r_1, \ldots, r_s)$ *la suite des racines du polynôme en* z, de sorte que :

$$P_s(z, \lambda) = \prod_{j=1}^{j=s} (z - r_j) \; ;$$

on note $Z = \{ z_1, \ldots, z_k \}$ l'*ensemble de ses racines distinctes*, de sorte que :

$$P_s(z, \lambda) = \prod_{j=1}^{j=k} (z - z_j)^{s_j}$$

où l'entier s_j $(s_j \geqslant 1)$ représente l'ordre de multiplicité de z_j.

• Soient p un entier $(p \geqslant 1)$ et F une application de $\mathbb{C}^p$ dans $\mathbb{C}$, on dit que F est de classe C^r si et seulement si F est r fois continûment différentiable *en tant qu'application de* $\mathbb{R}^{2p}$ *dans* $\mathbb{C}$; on dit que F est de classe C^∞ si et seulement si elle est de classe C^r pour tout r.

• Les opérateurs différentiels $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$ et $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$ sont notés respectivement $\dfrac{\partial}{\partial z}$ et $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$.

Pour p et q entiers naturels on pose :

$$\frac{\partial^{p+q}}{\partial z^p \, \partial \bar{z}^q} = \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^p \circ \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^q.$$

Définitions

Soit F une application de $\mathbb{C}^p$ dans $\mathbb{C}$ supposée de classe C^∞; soit a un point de $\mathbb{C}^p$, soit r un entier $(r \geqslant 0)$; on dit que F est r-plate au point a si et seulement si F s'annule en a ainsi que toutes ses différentielles jusqu'à l'ordre r inclus. On dit que F est plate en a si et seulement si, pour tout entier r, F est r-plate en a.

Soit X une partie de $\mathbb{C}^p$, on dit que F est r-plate (Resp. plate) sur X si et seulement si F est r-plate (Resp. plate) en chaque point de X.

Dans tout le problème f est une application de classe C^∞ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et g une application de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

L'objet du problème est d'établir une identité de division de f, (Resp. g) par le polynôme $P_s(z, \lambda)$, (Resp. $P_s(x, \lambda)$) et d'étudier comment le quotient et le reste définis à cette occasion dépendent de λ.

Les deux premières parties du problème sont indépendantes.

Première partie

On définit deux applications :

$$\delta : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^s \to \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \sigma : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^s \to \overline{\mathbb{R}}$$

par :

$$\forall \eta \in \mathbb{R} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^s \quad \begin{cases} \delta(\eta,\lambda) = \underset{1 \leqslant j \leqslant s}{\mathrm{Min}} \left| \eta - \mathrm{Im}\, r_j \right| \\ \sigma(\eta,\lambda) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{P'_s(x+\eta i,\lambda)}{P_s(x+\eta i,\lambda)} \right|^2 dx \end{cases}$$

et l'on considère l'ensemble :

$$\Omega = \{ (\eta, \lambda) \mid (\eta, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^s \quad \text{et} \quad \delta(\eta, \lambda) \neq 0 \}$$

Pour tout λ dans $\mathbb{C}^s$ on pourra poser

$$\| \lambda \| = \underset{1 \leqslant j \leqslant s}{\mathrm{Max}} \left| \lambda_j \right| .$$

1° Vérifier que les assertions suivantes sont équivalentes :

*a*1. $\delta(\eta, \lambda) = 0$

*a*2. $\sigma(\eta, \lambda) = +\infty$

*a*3. $\exists\, x \in \mathbb{R} \quad P_s(x + \eta i, \lambda) = 0$

*a*4. $(\exists\, j) \quad (1 \leqslant j \leqslant s) \quad$ et $\quad (\eta = \mathrm{Im}\, r_j)$

2° On se propose de démontrer que δ est continue.

a. Soit K un compact non vide de $\mathbb{C}$; on considère l'ensemble :

$$\Lambda_K = \{ \lambda \mid (\lambda \in \mathbb{C}^s) \quad \text{et} \quad (\forall\, z \in K \quad P_s(z, \lambda) \neq 0) \}$$

Démontrer que Λ_K est un ouvert de $\mathbb{C}^s$.

b. Soient ω un point de $\mathbb{C}$ et R un réel ($R > 0$), soit $\Gamma = \{ z \mid (z \in \mathbb{C}) \;\; \text{et} \;\; (\left| z - \omega \right| = R) \}$; démontrer que l'application $\Phi : \Lambda_\Gamma \to \mathbb{C}$ définie par

$$(\forall \lambda \in \Lambda_\Gamma) \quad \Phi(\lambda) = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{P'_s(\omega + Re^{i\theta},\lambda)}{P_s(\omega + Re^{i\theta},\lambda)} e^{i\theta} d\theta$$

est continue.

c. Prouver que l'application $\lambda \longmapsto \delta(0, \lambda)$ est continue sur $\mathbb{C}^s$, puis prouver la continuité de δ.

3° Démontrer que σ est continue en chaque point de l'ouvert Ω.

4° On se propose d'expliciter $\sigma(\eta, \lambda)$ en fonction de $(r_1, r_2, \ldots, r_s)$; pour cela :

a. Soient a et b deux nombres complexes distincts et non réels; calculer l'intégrale :

$$I(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x-a)(x-b)} .$$

b. On considère l'ensemble :

$$\Omega_1 = \{ (\eta, \lambda) \mid (\eta, \lambda) \in \Omega \quad \text{et} \quad \forall j\, \forall k,\ r_j - \eta i \neq \bar{r}_k + \eta i \}$$

Soit (η, λ) dans Ω_1, prouver l'existence d'entiers $\beta_{j,k}$ vérifiant :

$$\sigma(\eta,\lambda) = \left| \sum_{j,k} \beta_{j,k} \,\mathrm{Im} \left(\frac{1}{\bar{r}_k - r_j + 2\eta i} \right) \right| ;$$

les $\beta_{j,k}$ seront explicités en fonction des positions relatives de r_j et r_k par rapport à une droite.

En déduire l'encadrement :

$$\forall (\eta,\lambda) \in \Omega_1 \qquad \frac{1}{2\delta(\eta,\lambda)} \leqslant \sigma(\eta,\lambda) \leqslant \frac{s^2}{2\delta(\eta,\lambda)} .$$

c. Démontrer que cet encadrement reste vérifié pour tout couple (η, λ) de Ω.

En déduire que σ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^s$.

5° Soient α et β deux éléments de $\mathbb{N}^s$; soit γ un entier naturel, on pose :

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s), \qquad \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_s)$$

$$\text{et :} \quad |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_s, \qquad |\beta| = \beta_1 + \ldots + \beta_s,$$

$$p = |\alpha| + |\beta| + \gamma + 1 .$$

On note Δ l'opérateur différentiel $\dfrac{\partial^{p-1}}{\partial\lambda^{\alpha}\partial\bar{\lambda}^{\beta}\partial\eta^{\gamma}}$

où $\partial \lambda^{\alpha}$ (Resp : $\partial\bar{\lambda}^{\beta}$) est mis pour

$$\partial \lambda_1^{\alpha_1} \ldots \partial \lambda_s^{\alpha_s} \qquad \left(\text{Resp} : \partial \bar{\lambda}_1^{\beta_1} \ldots \partial \bar{\lambda}_s^{\beta_s} \right)$$

En posant $Q(x, \eta, \lambda) = \left| \dfrac{P'_s(x+\eta i, \lambda)}{P_s(x+\eta i, \lambda)} \right|^2$

démontrer que :

a. On a : pour tout (η, λ) dans Ω et tout x réel :

$$\Delta Q(x, \eta, \lambda) = \frac{A(x, \eta, \lambda)}{|P_s(x+\eta i, \lambda)|^{2p}}$$

où A est un polynôme en x, η, $\lambda_1, \ldots, \lambda_s, \bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_s$ dont le degré en x est au plus $2ps - 2$.

b. L'application σ est de classe C^{∞} sur Ω.

c. Pour tout compact K de $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^s$ et tout triplet (α, β, γ), il existe un réel C_K tel que :

$$\forall (\eta, \lambda) \in \Omega \cap K \qquad |\Delta \sigma(\eta, \lambda)| \leqslant C_K \left(1 + \frac{1}{\delta(\eta, \lambda)^{2ps}}\right)$$

Deuxième partie

Sauf au 4°, on a fixé λ dans $\mathbb{C}^s$ et on écrit $P(z)$ au lieu de $P_s(z, \lambda)$.

1° *a.* Soit s_0 un entier $(s_0 \geqslant 1)$; en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, démontrer qu'il existe une unique application de classe C^{∞}, notée Q_0, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, et un unique polynôme R_0 de degré au plus $s_0 - 1$, tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad g(t) = R_0(t) + t^{s_0} Q_0(t)$$

b. Démontrer qu'il existe une application de classe C^{∞} notée Q, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, et un polynôme R de degré au plus $s - 1$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad g(t) = P(t)\, Q(t) + R(t)$$

Démontrer que le couple (Q, R) est unique si et seulement si P a toutes ses racines réelles.

2° Soient m et n deux entiers $(m \geqslant 1,\ n \geqslant 1)$, démontrer que l'application $w : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \qquad w(z) = \frac{\bar{z}^{n+m}}{z^n}$$

se prolonge de manière unique en une application $w_0 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de classe C^{m-1}.

3° *a.* En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral pour une fonction d'une variable réelle, démontrer l'égalité :

$\forall z \in \mathbb{C} \quad \forall h \in \mathbb{C}$

$$f(z+h) = f(z) + \sum_{1 \leqslant p+q \leqslant r} \frac{h^p \bar{h}^q}{p!\, q!} \frac{\partial^{p+q} f}{\partial z^p \partial \bar{z}^q}(z) + (r+1) \sum_{p+q=r+1} \frac{h^p \bar{h}^q}{p!\, q!} E_{p,q}(z, h)$$

où $$E_{p,q}(z, h) = \int_0^1 (1-t)^r \frac{\partial^{r+1} f}{\partial z^p \partial \bar{z}^q}(z + th)\, dt$$

b. On suppose l'application $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ plate sur l'ensemble Z des zéros de P.

Démontrer qu'il existe une unique application de classe C^{∞}, notée Q, de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, et un unique polynôme R de degré au plus $s - 1$ tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad f(z) = P(z)\, Q(z) + R(z)$$

c. Démontrer que si f est holomorphe, Q l'est aussi.

d. Démontrer que le résultat de *b.* subsiste si l'on suppose seulement que $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ est, pour tout j $(1 \leqslant j \leqslant k)$ $(s_j - 1)$ - plate au point z_j.

4° Soit F une application de classe C^∞, de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^s$ dans $\mathbb{C}$; on suppose F plate sur l'ensemble X des couples (z, λ) vérifiant $P_s(z, \lambda) = 0$.

Démontrer que pour tout entier naturel r $(r \geqslant 1)$ l'application :

$$(z, \lambda) \longmapsto \frac{F(z, \lambda)}{(P_s(z, \lambda))^r}$$

de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^s \setminus X$ dans $\mathbb{C}$ se prolonge de façon unique en une application de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^s$ dans $\mathbb{C}$, de classe C^∞.

Indication : on commencera par démontrer que l'application :

$$\Phi : (z, \lambda_1, \ldots, \lambda_s) \longmapsto (z, \lambda_1, \ldots, \lambda_{s-1}, P_s(z, \lambda))$$

de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^s$ dans lui-même est un changement de variable C^∞, c'est-à-dire une application bijective de classe C^∞ ainsi que sa réciproque.

TROISIÈME PARTIE

Pour tout réel ξ on note : $I(\xi) = \left[\frac{1}{2}\frac{1}{1+|\xi|}, \frac{1}{1+|\xi|}\right]$

et A la partie de $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^s \times \mathbb{R}$ formée par les triplets (ξ, λ, y) tels que y appartienne à $I(\xi)$.

On note ρ_0 une application de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $[0, 1]$, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, paire, et vérifiant :

$$\forall t \in [8 s^3, +\infty] \qquad \rho_0(t) = 0$$

$$\forall t \in [0, 4 s^3] \qquad \rho_0(t) = 1$$

L'existence de ρ_0 est admise.

1° *a.* Démontrer que l'application :

$$(\xi, \lambda, \eta) \longmapsto \rho_0\left(\frac{\sigma(\eta, \lambda)}{1 + |\xi|}\right)$$

de $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^s \times \mathbb{R}$ dans $[0, 1]$ est de classe C^∞ en (λ, η) et que ses différentielles sont continues à tout ordre en (ξ, λ, η).

b. Soit Ψ l'application de A dans $\mathbb{R}^+$ définie par :

$$\forall (\xi, \lambda, y) \in A \quad \Psi(\xi, \lambda, y) = 4(1 + |\xi|) \int_y^{\frac{1}{1+|\xi|}} \rho_0\left(\frac{\sigma(\eta, \lambda)}{1 + |\xi|}\right) d\eta.$$

Démontrer que pour tout λ dans $\mathbb{C}^s$ et tout réel ξ on a :

$$\Psi\left(\xi, \lambda, \frac{1}{2(1+|\xi|)}\right) \geqslant 1.$$

Prouver que Ψ est continue, qu'elle est de classe C^∞ sur $\mathring{A}$ en (λ, y), et que ses différentielles sont continues à tout ordre en (ξ, λ, y) sur $\mathring{A}$.

2° Soit α un réel, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$; soit ρ_1 une application de $\mathbb{R}^+$ dans $[0, 1]$ de classe C^∞, vérifiant :

$$\forall t \in [0, \alpha] \qquad \rho_1(t) = 0$$

$$\forall t \in [1 - \alpha, +\infty[\qquad \rho_1(t) = 1$$

L'existence de ρ_1 est admise.

On note ρ l'application de $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^s \times \mathbb{R}$ dans $[0, 1]$ définie par :

$(\xi, \lambda, y) \longmapsto \rho(\xi, \lambda, y)$ avec :

i. ρ est paire en y

ii. si $0 \leqslant y < \frac{1}{2(1+|\xi|)}$ $\qquad \rho(\xi, \lambda, y) = 1$

iii. si $y \in I(\xi)$ $\qquad \rho(\xi, \lambda, y) = \rho_1(\Psi(\xi, \lambda, y))$

iv. si $y > \frac{1}{1+|\xi|}$ $\qquad \rho(\xi, \lambda, y) = 0$

a. Prouver que ρ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^s \times \mathbb{R}$, de classe C^∞ par rapport à (λ, y), chacune de ses différentielles étant continue par rapport à (ξ, λ, y) sur $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^s \times \mathbb{R}$.

b. Prouver l'existence d'un ouvert contenant $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^s \times \{ 0 \}$ sur lequel ρ est constante égale à 1.

Prouver que $\rho(\xi, \lambda, y)$ est nul dès que $| y \xi | \geqslant 1$.

c. Démontrer l'existence d'un ouvert contenant l'ensemble :

$$\{ (\xi, \lambda, y) \mid \xi \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{C}^s, y \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad (y, \lambda) \notin \Omega \}$$

sur lequel $\dfrac{\partial \rho}{\partial y}$ est nulle.

d. Démontrer que pour tout compact K de $\mathbb{C}^s \times \mathbb{R}$ et tout triplet (α, β, γ) de $\mathbb{N}^s \times \mathbb{N}^s \times \mathbb{N}$, il existe un réel D_K et un entier naturel q tels que :

$$\forall (\xi, \lambda, y) \in \mathbb{R} \times K \quad \left| \frac{\partial^{|\alpha| + |\beta| + \gamma} \rho}{\partial \lambda^\alpha \partial \bar{\lambda}^\beta \partial y^\gamma} (\xi, \lambda, y) \right| \leqslant D_K (1 + |\xi|^q)$$

Quatrième partie

On suppose dans cette partie que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est de classe C^∞ et est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On admet l'existence d'une fonction $\hat{g}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, continue telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad x \longmapsto | x^n \hat{g}(x) | \text{ est bornée sur } \mathbb{R}$$

$$\text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \hat{g}(\xi) \, d\xi .$$

On définit alors F de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^s$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$\forall (z, \lambda) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^s \qquad F(z, \lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\xi, \lambda, y) \, e^{iz\xi} \hat{g}(\xi) \, d\xi$$

où l'on a posé $z = x + iy$; et où ρ est l'application définie à III, 2°.

1° Démontrer que F est de classe C^∞ sur $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^s$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^s \qquad g(x) = F(x, \lambda) .$$

2° Démontrer que $\dfrac{\partial F}{\partial \bar{z}}$ est plate en tout point (z, λ) tel que $z \in \mathbb{R}$ ou $P_s(z, \lambda) = 0$.

3° Soit D le disque fermé dans $\mathbb{C}$ de centre ω et de rayon R ($R > 0$); démontrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \cap \mathring{D}, \ \forall \lambda \in \mathbb{C}^s$$

$$F(t, \lambda) = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F(\omega + Re^{i\theta}, \lambda)}{\omega + Re^{i\theta} - t} e^{i\theta} \, d\theta - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} (z, \lambda) \frac{dx\,dy}{z - t}$$

4° Prouver l'existence de polynômes $R_j(u, \lambda)$ tels que l'on ait l'identité de fractions rationnelles :

$$\frac{1}{u - z} = \frac{P_s(z, \lambda)}{P_s(u, \lambda)} \frac{1}{u - z} + \sum_{j=1}^{j=s} \frac{R_{j-1}(u, \lambda)}{P_s(u, \lambda)} z^{s-j}$$

et démontrer l'existence d'une fonction $Q : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^s \to \mathbb{C}$ de classe C^∞, et d'un polynôme en t

$$R(t, \lambda) = a_1(\lambda) t^{s-1} + \ldots + a_s(\lambda)$$

de classe C^∞ en (t, λ) sur $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^s$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^s \qquad g(t) = P_s(t, \lambda) \, Q(t, \lambda) + R(t, \lambda) .$$

RAPPORT SUR L'EPREUVE D'ANALYSE

1. Thème du sujet

● Ce problème proposait une démonstration, par des procédés longs mais très élémentaires, du théorème de préparation de MALGRANGE. Il fournissait l'occasion de vérifier l'aptitude des candidats aux techniques usuelles du calcul différentiel.

● Voici tout d'abord quelques indications sur la résolution des questions les plus délicates (bien qu'en réalité aucune ne soit vraiment difficile).

Première partie

1° a_1, a_3 et a_4 sont trivialement équivalentes.

L'équivalence de a_2 avec les trois autres résulte :

– D'une part de l'existence de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$ lorsque $f = \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est continue et lorsque $f(t) \sim k/t^2$ au voisinage de plus l'infini ou de moins l'infini (non $a_3 \Rightarrow$ non a_2).

– D'autre part du fait que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = +\infty$ lorsque $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est positive, continue sauf en un nombre fini de points et présente en l'un de ces points (et il y en a !) un pôle d'ordre 1 ($a_3 \Rightarrow a_2$).

2° a) Il suffisait, par exemple, d'écrire :

$|\mathrm{P}_s(z, \lambda) - \mathrm{P}_s(z, \lambda')| \leqslant \| \lambda - \lambda' \| (1 + \mu + ... + \mu^{s-1})$ où μ désigne la borne supérieure de $|z|$ lorsque z décrit K et d'utiliser le fait que, si $\lambda \in \Lambda_k$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout z de K, $|\mathrm{P}_s(z, \lambda)| \geqslant \alpha$.

b) Sans aucune difficulté, le théorème de LEBESGUE est même inutile puisqu'il s'agit de la continuité de $\int_a^b f(t, x)\, dt$ où $f : [a, b] \times \mathrm{E} \to \mathbf{C}$ est continue.

c) Cette question a été mal comprise par de nombreux candidats qui se sont contentés de faire appel à un pseudo-théorème de continuité des racines d'un polynôme qui, bien sûr, n'a jamais été explicité. En réalité, cette deuxième question consistait justement en une démonstration de cette propriété. Il suffisait de remarquer, d'une part que Φ représente le «nombre de racines» (comptées avec leurs ordres de multiplicité) de P_s contenues dans le disque de centre ω et de rayon R, d'autre part que Φ qui est donc à valeurs entières, et continue en tout point de l'ouvert Λ_Γ, est localement constante. Il était alors facile de montrer la continuité de $\lambda \mapsto \delta(0, \lambda)$. Celle que δ s'en déduisait immédiatement.

3° Il fallait ici citer et appliquer le théorème de LEBESGUE.
On fixait un point (η_0, λ_0) de Ω et on prenait un voisinage compact de (η_0, λ_0) contenu dans l'ouvert Ω ce qui permettait de minorer δ sur ce voisinage, mais ceci était insuffisant car il fallait aussi disposer d'une majoration uniforme au voisinage de plus l'infini ou de moins l'infini (les racines de P_s dépendent de (η, λ)).
Cette majoration s'obtenait en remarquant que, si « λ est voisin de λ_0 », alors les racines de P_s sont uniformément bornées.

4° a) et b) Ces questions, purement techniques, ont donné lieu à des réponses surprenantes. Au lieu d'appliquer une banale méthode de résidu, beaucoup de candidats se perdent dans des logarithmes complexes, après avoir séparé I (a, b) en deux intégrales divergentes !

c) On peut soit faire appel à une densité, soit, tout simplement, montrer que b) reste valable en tout point de Ω, certains β_{jk} devenant alors nuls.

5° Il fallait effectuer un raisonnement par récurrence. Rappelons qu'un tel raisonnement nécessite la formulation explicite d'une hypothèse de récurrence, ce que semblent ignorer beaucoup de candidats.
La démonstration de b) utilise des techniques analogues au 3°.

Deuxième partie

1° a) Question sans difficulté si l'on sait écrire la formule de TAYLOR avec reste intégral,puis sous la forme :

$$\frac{(b-a)^n}{(n-1)!}\int_0^1 (1-t)^{n-1} f^{(n)}(a+t(a-b))dt.$$

Le jury a découvert ici des formules de TAYLOR inédites avec reste constant, indépendant de l'ordre de la formule...

b) Consiste à appliquer a) successivement à chaque racine. Dans le cas où P n'a pas toutes ses racines réelles, il fallait montrer l'existence d'au moins deux décompositions, et non se contenter d'un contre exemple sur un cas particulier.

2° Il avait été précisé en préliminaire le sens attribué au mot de classe C^{m-1}. Il fallait donc revenir scrupuleusement à ce sens, et non se contenter d'une vague vérification formelle de dérivation par rapport à z et $\bar{z}$. Les remarques faites en I, 5° sur le raisonnement par récurrence sont valables aussi pour cette question.

3° a) De nouveau TAYLOR-intégral. De plus, dans cette formule, qui est utilisée pour des variables réelles et pour des dérivations par rapport à x et y, il fallait, par un calcul par récurrence (à nouveau !) montrer que l'on obtenait bien l'expression donnée par le texte.

b) L'unicité de Q et de R est évidente ; tout revient à montrer que Q, dont l'existence sur $\mathbf{C}\setminus\mathbf{Z}$ est immédiate, se prolonge en une application de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ de classe C^∞. En réalité, on montre que Q se prolonge en une application de classe C^n, ceci pour tout n et pour cela, n étant alors fixé, il suffit d'appliquer a) à un ordre suffisamment élevé.

c) Immédiat.

d) Un lapsus dans la formulation de cette question n'a gêné aucun candidat. En réalité on se demandait quel résultat de b) subsiste avec des hypothèses plus faibles. Il est évident que la factorisation subsiste avec : Q de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ continue ; Q peut d'ailleurs être dérivable si $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ est mieux que (s_j-1) plate en tout point z_j.

4° L'indication donnée par le texte conduisait directement à la solution, l'unique vérification, fastidieuse d'ailleurs, consistant en le transfert de la platitude dans la composition.

Troisième partie

Très technique, cette partie avait pour but de construire la fonction ρ qui intervient dans la quatrième partie. Il est difficile de donner des indications de solution car chaque question était une succession de petites vérifications faciles, mais l'ensemble était très long. Le point le plus délicat était 1° b) : il fallait penser à examiner l'ensemble des η tels que : $\rho_0\left(\frac{\sigma(\eta,\lambda)}{1+|\xi|}\right) \geqslant \frac{1}{4(1+|\xi|)}$

Dans cette partie, où de nombreuses questions demandaient de démontrer que des fonctions étaient C^∞, il fallait fréquemment raisonner par récurrence en formulant avec beaucoup de soins les hypothèses correspondantes.

Quatrième partie

1° Récurrence et LEBESGUE, enprenant le sup de deux fonctions, puisqu'il fallait distinguer le cas z réel du cas z complexe non réel.

2° Immédiat.

3° Il s'agissait d'appliquer la formule de GREEN-RIEMANN, en excluant un petit disque centré en t et en effectuant alors, avec soin, un passage à la limite.

4° C'est ici qu'intervenait tout ce qui précède,en particulier II 4° qui permettait de montrer que Q était C^∞.

2. Observations des correcteurs

A l'évidence le problème était long. Dans leur grande majorité, les candidats n'ont travaillé que sur les deux premières parties, ce qui suffisait d'ailleurs pour obtenir une bonne note.

Rappelons que l'épreuve d'analyse du concours a pour objectif :

— D'une part de tester les connaissances des candidats sur les parties fondamentales du programme (niveau propédeutique et début de maîtrise) ;

— D'autre part de juger de leur aptitude à utiliser ces résultats dans des situations simples.

Il est lassant de répéter qu'appliquer signifie non pas citer un nom de mathématicien, mais énoncer un théorème précis (avec hypothèses et conclusions) et vérifier que les dites hypothèses sont satisfaites.

Le jury attend du candidat un travail solide, sans bluff, pouvant ne porter que sur une partie limitée du sujet.

3. Les notes (sur 60)

Nombre de copies corrigées : 2 089

Répartition des notes :

0			:	7,92 %	25	à	28	:	1,84 %
1	à	4	:	50,45 %	29	à	32	:	1,93 %
5	à	8	:	13,74 %	33	à	36	:	1,07 %
9	à	12	:	7,21 %	37	à	40	:	0,54 %
13	à	16	:	4,75 %	41	à	48	:	0,58 %
17	à	20	:	4,88 %	49	à	60	:	0,76 %
21	à	24	:	4,28 %					

ANALYSE NUMÉRIQUE

Sujet (durée : 6 heures)

AVERTISSEMENT

Les candidats sont priés de respecter les notations et la numérotation de l'énoncé. Les notations ou abréviations abusives risquent de ne pas être comprises.

Les démonstrations et présentations concises, claires et soignées seront particulièrement bien appréciées.

Le problème est consacré à l'approximation des solutions d'un problème de Cauchy $\mathcal{P}$ pour une équation aux dérivées partielles de la forme $\dfrac{\partial u}{\partial t} = f\left(x\,,\, t\,,\, u\,,\, \dfrac{\partial u}{\partial x}\,,\, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$ où $u : (x\,,\, t) \longmapsto u(x\,,\, t)$ est l'inconnue.

Dans la partie 1 de caractère technique on établit des résultats utiles pour la suite. Dans la partie 2 on définit le problème approché $\mathcal{P}_h$ et on fait étudier quelques propriétés qui conduisent à un théorème d'existence et d'unicité de sa solution $\vec{U}^h$, le point essentiel étant la question ***Q. 8.*** L'approximation de u, solution de $\mathcal{P}$, par $\vec{U}^h$ résulte alors d'estimations à priori convenables (partie 3).

0. NOTATIONS ET HYPOTHÈSES

$\mathbb{R}$ est le corps des réels, T un réel positif; on définit I et Ω (resp I_0 et Ω_0) par $\mathrm{I} = [0\,,\, \mathrm{T}]$, $\Omega = \mathbb{R} \times \mathrm{I}$ (resp $\mathrm{I}_0 =]0\,,\, \mathrm{T}]$, $\Omega_0 = \mathbb{R} \times \mathrm{I}_0$). $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers algébriques, $\mathbb{N}^*$ celui des entiers strictement positifs et $\mathbb{N} = \mathbb{N}^* \cup \{0\}$. Les suites indexées par $\mathbb{Z}$ seront notées vectoriellement : $\vec{s} = \{s_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$.

Les notations Φ_t, Φ_x, Φ_{xx}, etc. désignent les dérivées partielles de la fonction $\Phi : (x, t) \longmapsto \Phi(x, t)$ respectivement du 1er ordre en t, du 1er ordre et du 2d ordre en x, etc., quand ces dérivées existent.

On considère le problème de Cauchy non linéaire :

$$\mathcal{P} \begin{cases} u_t = f(x, t, u, u_x, u_{xx}), & (x, t) \in \Omega_0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

où $\varphi : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ et $f : \Omega \times \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}$ sont des fonctions données satisfaisant à :

(0.1) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\varphi(x)| \leqslant A e^{Bx^2}$, A et B constantes positives

(0.2) $(x, t, z, p, r) \longmapsto f(x, t, z, p, r)$ est continue dans $\Omega \times \mathbb{R}^3$

(0.3) $\exists\, \eta$, η constante positive telle que,

$$\forall (x, t, z, p) \in \Omega \times \mathbb{R}^2, \qquad \forall r \text{ et } r^* \in \mathbb{R} \text{ avec } r \geqslant r^*$$

on ait

$$f(x, t, z, p, r) - f(x, t, z, p, r^*) \geqslant \eta(r - r^*)$$

(0.4) $\exists\, L$, L constante positive telle que

$$\forall (x, t) \in \Omega, \qquad \forall (z, p, r) \text{ et } (z^*, p^*, r^*) \in \mathbb{R}^3$$

on ait

$$|f(x, t, z, p, r) - f(x, t, z^*, p^*, r^*)| \leqslant L(|z - z^*| + |p - p^*| + |r - r^*|)$$

(0.5) $\forall (x, t) \in \Omega, \; |f(x, t, 0, 0, 0)| \leqslant A e^{Bx^2}$.

On définit la constante E par $4\,ELT = 1$ et on suppose dans tout ce qui suit que les hypothèses (0.1) à (0.5) ont lieu avec $B < E$.

1. PRÉLIMINAIRES

Q. 1 On considère une suite $\vec{\rho} = \{\rho_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $\rho_i \in \mathbb{R}$ telle que

(1.1) $\forall i \in \mathbb{Z}, \; \rho_{-i} = -\rho_i, \quad \rho_i < \rho_{i+1}$

(1.2) $\lim\limits_{i \to +\infty} \rho_i = +\infty$

(1.3) $\rho_i(\rho_{i+1} - \rho_{i-1}) = O(1)$ pour $i \longrightarrow +\infty$.

a. Donner un exemple de telles suites en considérant des fonctions du type : $x \longmapsto \psi(x) = x^\alpha\,|\operatorname{Log} x|^\beta$ pour $x > 0$ et en posant $\rho_i = \psi(i + 1)$ pour $i > 0$. On déterminera alors α et β pour que (1.1), (1.2) et (1.3) soient satisfaites.

b. Plus généralement, si θ est une fonction de la variable réelle x, impaire, strictement croissante, dérivable telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} \theta(x) = +\infty$, montrer que si :

la fonction $x \longmapsto \theta'(x)\;\theta(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$, alors $\rho_i = \theta(i)$ satisfait à (1.1), (1.2) et (1.3).

Q. 2 Soient C et D des constantes telles que $0 < B \leqslant C \leqslant D < E$.

On considère les fonctions G et H définies sur Ω par :

$$(x, t) \longmapsto G(x, t) = (1 - 4\,DLt)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{Cx^2}{1 - 4\,DLt}\right)$$

$$(x, t) \longmapsto H(x, t) = G(x, t) \exp\left(-\frac{1}{2}P(x) + \gamma L t\right)$$

où $P(x) = \left[\left(\frac{1}{4\,C}\right)^2 + x^2\right]^{\frac{1}{2}}$ et $\gamma = 1 + \dfrac{E}{4\,(E - D)}$,

le symbole exp désignant la fonction exponentielle $x \longmapsto e^x$.

En démontrant que, pour $x \geqslant 0$ on a

$$8\left(1 - \frac{dP}{dx}\right)Cx \leqslant 1, \quad \left(1 - \frac{dP}{dx}\right)^2 \leqslant 1 + 2\frac{d^2P}{dx^2}, \quad \frac{d^2P}{dx^2} \leqslant 4\,C$$

établir que, pour tout $(x, t) \in \Omega$:

$$(1.4) \qquad \frac{H_t}{LH} - \frac{H_{xx} + |H_x| + H}{H} \geqslant \frac{G_t}{LG} - \frac{G_{xx}}{G} \geqslant 2(D - C)(1 + 2Cx^2)$$

$$(1.5) \qquad G_{xx} \geqslant 0, \quad H_{xx} \geqslant 0.$$

Q. 3 Soit $h > 0$. On pose $x_i = h\rho_i$ où $\{\rho_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ est une suite satisfaisant aux hypothèses énoncées en ***Q. 1.***

Pour toute fonction $v : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, $x \longmapsto v(x)$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on pose $v_i = v(x_i)$ et on définit les opérateurs δ et δ^2 différence première et seconde (δ^2 ne signifiant pas ici le carré de δ) :

$$\delta \ : \delta v_i = \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

$$\delta^2 \ : \delta^2 v_i = \alpha_i^+ v_{i+1} - \alpha_i v_i + \alpha_i^- v_{i-1}$$

avec $\alpha_i^+ = \dfrac{2}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i-1})}$,

$$\alpha_i = \frac{2}{(x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)},$$

$$\alpha_i^- = \frac{2}{(x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_{i-1})}.$$

Une fonction vectorielle $\vec{V}$ de $t \in I$ et de $\vec{v} = \{v_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ définie par ses composantes $V_i(t, \vec{v})$, $i \in \mathbb{Z}$ est dite quasi monotone croissante en $\vec{v}$ pour exprimer que

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \ \forall t \in I, \ (\forall j \neq i, v_j^* \leqslant v_j \ ; \ v_i^* = v_i) \Rightarrow V_i(t, \vec{v}^*) \leqslant V_i(t, \vec{v}).$$

Dans tout ce qui suit on considérera la fonction $\vec{F}$:

$$\vec{F}(t, \vec{v}) = \{F_i(t, \vec{v})\}_{i \in \mathbb{Z}}$$

définie par

$$F_i(t, \vec{v}) = f_i(t, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}) \equiv f(x_i, t, v_i, \delta v_i, \delta^2 v_i)$$

Établir que, dans les hypothèses (0,3) et (0,4) il existe une valeur $h_0 = h_0(\eta, L, \vec{\rho}) > 0$ telle que $\vec{F}$ soit quasi monotone croissante en $\vec{v}$, pour tout $h \in]0, h_0[$.

Q. 4 Démontrer qu'il existe $h_1 = h_1(C, D, E, \vec{\rho})$ tel que l'on ait :

$$\forall t \in I, \quad \forall h \in]0, h_1[\quad \text{et} \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

$$(1.6) \qquad H_t(x_i, t) \geqslant L(H_i + |\delta H_i| + \delta^2 H_i)$$

où $H_i = H(x_i, t)$.

On admettra le résultat suivant (dont la démonstration nécessite des calculs assez longs non demandés ici) :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists h_1'(\varepsilon, C, D, E, \vec{\rho}), \qquad \forall t \in I, \quad \forall h \in]0, h_1'[$$

et $\forall i \in \mathbb{N}^*$:

$$\delta H_i - H_x(x_i, t) \leqslant \varepsilon(1 + x_i)H_i$$
$$\delta^2 H_i - H_{xx}(x_i, t) \leqslant \varepsilon(1 + x_i)^2 H_i.$$

2. PROBLÈME APPROCHÉ

Dans cette partie la notation $'$ désigne la dérivation par rapport à t.

Au problème $\mathcal{P}$ considéré on associe le problème approché $\mathcal{P}_h$:

$$\mathcal{P}_h \begin{cases} u'(x_i, t) = f_i(t, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}) & t \in I, \quad i \in \mathbb{Z} \\ u(x_i, 0) = \varphi_i \end{cases}$$

où $u_i = u(x_i, t)$ et $\varphi_i = \varphi(x_i)$.

On considère les fonctions vectorielles $t \longmapsto \vec{\omega}(t) = \{\omega_i(t)\}_{i \in \mathbb{Z}}$ telles que

$\mathcal{H}$: pour tout $i \in \mathbb{Z}$, ω_i est continue sur I, différentiable sur I_0.

Une telle fonction est dite une *sur-solution* (resp. *sous-solution*) de $\mathcal{P}_h$ si pour chaque $i \in \mathbb{Z}$ on a :

(2.1) $\omega_i(0) \geqslant \varphi_i, \quad \omega_i'(t) \geqslant f_i(t, \omega_{i-1}, \omega_i, \omega_{i+1})$

(2.2) (resp $\omega_i(0) \leqslant \varphi_i, \quad \omega_i'(t) \leqslant f_i(t, \omega_{i-1}, \omega_i, \omega_{i+1})$.

Par ailleurs on désigne par $\mathcal{G}_h^+(\mathrm{I})$ l'ensemble des fonctions $\vec{\omega}$ vérifiant $\mathcal{H}$ et

(2.3) $$\sup_{\substack{i \in \mathbb{Z} \\ t \in \mathrm{I}}} \frac{\omega_i(t)}{\mathrm{G}_i(t)} < +\infty, \quad \text{où} \quad \mathrm{G}_i(t) = \mathrm{G}(x_i, t)$$

et par $\mathcal{G}_h$ l'ensemble des fonctions $\vec{\omega}$ vérifiant

(2.4) $$\vec{\omega} \in \mathcal{G}_h^+(\mathrm{I}) \quad \text{et} \quad -\vec{\omega} \in \mathcal{G}_h^+(\mathrm{I})$$

Q. 5 Soit $\vec{\mathrm{S}}(t) = \{\mathrm{S}_i(t)\}_{i \in \mathbb{Z}}$ avec $\mathrm{S}_i(t) = \alpha(1+t)\,\mathrm{H}_i(t)$.

Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\vec{\mathrm{S}}$ soit une sur-solution de $\mathcal{P}_h$ pour h inférieur à une constante positive convenable.

Q. 6 On considère l'application $\mathcal{T}$ qui à toute sur-solution $\vec{w}$ de $\mathcal{P}_h$ (pour h assez petit) telle que $-\mathrm{S}_i \leqslant w_i$, $\forall i \in \mathbb{Z}$ (où $\vec{\mathrm{S}}$ est une sur-solution de $\mathcal{P}_h$ du type étudié en ***Q. 5***) fait correspondre $\vec{y} = \mathcal{T}\vec{w}$, $\vec{y} = \{y_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ étant défini de la manière suivante :

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad y_i' = f(x_i, t, y_i, \delta w_i, \alpha_i^+ w_{i+1} - \alpha_i y_i + \alpha_i^- w_{i-1})$$
$$y_i(0) = \varphi(x_i)$$

On notera encore $y_i' = f_i(t, w_{i-1}, y_i, w_{i+1})$ cette notation étant en accord avec la notation déjà introduite puisque pour $y_i = w_i$ on obtient $f_i(t, w_{i-1}, w_i, w_{i+1})$.

Montrer que y_i existe, est unique et vérifie $y_i \leqslant w_i$.

Établir que $-\vec{\mathrm{S}}$ est sous-solution de $\mathcal{P}_h$ et que $-\mathrm{S}_i \leqslant y_i$.

Établir également que $\vec{y}$ est une sur-solution de $\mathcal{P}_h$ appartenant à $\mathcal{G}_h^+(\mathrm{I})$.

Q. 7 $\vec{\mathrm{S}}$ étant toujours la sur-solution utilisée en ***Q. 6*** montrer que la suite des itérés définie par

$$\vec{w}^1 = \mathrm{S}, \quad \vec{w}^n = \mathcal{T}\vec{w}^{n-1}$$

est telle que, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, w_i^n converge uniformément sur I vers une fonction U_i^h .

Établir que $\vec{\mathrm{U}}^h = \{\mathrm{U}_i^h\}_{i \in \mathbb{Z}}$ est solution de $\mathcal{P}_h$ pour h assez petit et que $\vec{\mathrm{U}}^h \in \mathcal{G}_h$.

Q. 8 Soit $0 < \mathrm{C} < \mathrm{D} < \mathrm{E}$

et $\vec{u} = \{u_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{G}_h^+(\mathrm{I})$, $\quad -\vec{u}^* = \{-u_i^*\}_{i \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{G}_h^+(\mathrm{I})$

telles que

(2.5) $\forall i \in \mathbb{Z}, \quad u_i(0) \leqslant u_i^*(0)$

(2.6) $\forall i \in \mathbb{Z}, \quad \forall t \in \mathrm{I}_0,$

$u_i'(t) - f_i(t, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}) \leqslant u_i^{*\prime}(t) - f_i(t, u_{i-1}^*, u_i^*, u_{i+1}^*)$.

On pose : pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{V}_i(t) = \dfrac{u_i(t) - u_i^*(t)}{\tilde{\mathrm{H}}_i(t)}$ où $\tilde{\mathrm{H}}_i(t) = \tilde{\mathrm{H}}(x_i, t)$, $\tilde{\mathrm{H}}$ étant la fonction obtenue lorsque l'on remplace dans la définition de H la constante C par la constante $\tilde{\mathrm{C}} = \dfrac{\mathrm{C}+\mathrm{D}}{2}$

et : $\mathrm{M}_n = \max\{\mathrm{V}_i(t), \ |i| \leqslant n, \ t \in \mathrm{I}\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Soit h_2 tel que $h_2 < h_1(\tilde{\mathrm{C}}, \mathrm{D}, \mathrm{E}, \vec{\rho})$ et tel que pour tout $h \in]0, h_2[$ on ait, $\forall i \in \mathbb{Z}$, $\forall t \in \mathrm{I}$:

$$\frac{2\eta}{h\mathrm{K}} - \mathrm{L} - 2\mathrm{L}\frac{\tilde{\mathrm{H}}_{i-1}(t)}{\tilde{\mathrm{H}}_{i+1}(t)} > 0 \qquad \text{où} \qquad \mathrm{K} = \sup_{i \in \mathbb{Z}} |\rho_{i+1} - \rho_i|$$

a. Établir que si $\mathrm{M}_p > 0$ il existe $t_p \in \mathrm{I}_0$ tel que l'on ait soit $\mathrm{M}_p = \mathrm{V}_p(t_p)$ soit $\mathrm{M}_p = \mathrm{V}_{-p}(t_p)$. Pour cela on pourra supposer qu'il existe $t_0 \in \mathrm{I}_0$ et j (avec $|j| < p$) tels que $\mathrm{M}_p = \mathrm{V}_j(t_0) > 0$. En considérant $\mathrm{V}_j'(t_0)$ on montrera que l'on devrait avoir alors simultanément $\mathrm{V}_j'(t_0) \geqslant 0$ et (en utilisant 1.6) $\mathrm{V}_j'(t_0) < 0$.

b. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $M_n \leqslant 0$ pour $h \in]0, h_2[$.

c. En déduire que (2.5) et (2.6) entraînent :

(2.7) $\quad \forall i \in \mathbb{Z}, \quad \forall t \in I, \quad u_i(t) \leqslant u_i^*(t)$

(propriété de monotonie)

Q. 9 Démontrer que $\mathcal{P}_h$ a, dans $\mathcal{G}_h$, une solution unique pour h assez petit.

3. CONVERGENCE

Une fonction $u : (x, t) \longmapsto u(x, t)$ est dite appartenir à $\mathcal{G}_{C,D}(\Omega)$ si elle est définie sur Ω, si elle possède des dérivées u_t, u_x, u_{xx} continues sur Ω_0 et si elle vérifie la condition $\sup\limits_{\Omega} \dfrac{|u(x, t)|}{G(x, t, C, D)} < +\infty$ où $G(x, t, C, D)$ désigne maintenant l'expression $G(x, t)$ introduite en ***Q. 2.***

Q. 10 Sous les hypothèses (0.1) à (0.5) avec $0 < B < C < D < E$ on suppose qu'il existe u solution de $\mathcal{P}$ telle que $u \in \mathcal{G}_{B,D}(\Omega)$ et on considère $\vec{U}^h$ solution de $\mathcal{P}_h$ avec $\vec{U}_h \in \mathcal{G}_h$ pour h satisfaisant aux conditions utilisées dans la partie 2. On suppose que :

(3.1) $\quad \forall i \in \mathbb{Z}, \quad | u_x(x_i, t) - \delta u_i | \leqslant \mu_1(h)\, G(x_i, t, B, D)$

(3.2) $\quad \forall i \in \mathbb{Z}, \quad | u_{xx}(x_i, t) - \delta^2 u_i | \leqslant \mu_2(h)\, G(x_i, t, B, D)$

Montrer qu'il existe $\beta > 0$, tel que, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, pour tout $t \in I$ on ait

(3.3) $\quad | u(x_i, t) - U_i^h(t) | \leqslant \beta(\mu_1(h) + \mu_2(h))\, H(x_i, t, C, D)$,

où $H(x, t, C, D)$ désigne l'expression introduite en ***Q. 2.***

On pourra utiliser la fonction auxiliaire $\vec{\sigma} = \{ \sigma_i \}_{i \in \mathbb{Z}}$, $\sigma_i = \lambda L(1 + t)\, H_i(t)$ en choisissant λ convenable et appliquer ***Q. 6.***

Q. 11 On suppose que u est solution de $\mathcal{P}$ avec u_{xx} continue sur Ω et $u_{xxx} \exp \dfrac{-Bx^2}{1 - 4DLt}$ bornée sur Ω. Montrer qu'il en résulte que $u \in \mathcal{G}_{B,D}(\Omega)$ et établir que l'on a alors

$$| u(x_i, t) - U_i^h(t) | \exp \frac{-Cx_i^2}{1 - 4DLt} \leqslant Mh$$

pour $h \longrightarrow 0$ où M est une constante indépendante de h, i et t.

RAPPORT SUR L'EPREUVE D'ANALYSE NUMERIQUE

1. Analyse du sujet

Il s'agit de l'étude de l'approximation des solutions d'un problème de CAUCHY avec condition initiale donnée sur $\mathbb{R}$ pour une équation aux dérivées partielles non linéaire du second ordre de type parabolique. On utilise une méthode de différences à pas variable qui conduit à une famille dénombrable d'équations différentielles constituant le problème discret. Le point essentiel du problème est l'étude de ce problème discret par une méthode utilisant les notions de sur et sous-solution. La considération de sur et sous-solutions pour un problème donné n'est évidemment pas une technique récente (En 1914-1915 PERRON considérait déjà le problème de l'intégration ramené à $y' = f \quad y(o) = yo$ à partir des fonctions w et v vérifiant $W' \leqslant f,\ v' \geqslant f$) mais elle a repris de l'importance et s'est à nouveau développée depuis quelques années en Analyse Fonctionnelle dans l'étude des équations et inéquations aux dérivées partielles.

2. Observation des correcteurs

La commission qui a étudié le sujet avant de le proposer avait cru bien faire en regroupant dans une 1re partie des questions ne nécessitant que des calculs et connaissances élémentaires, ceci pour aider les candidats avant l'étude un peu spécialisée où les connaissances utilisées se rapportent aux équations différentielles et à l'analyse classique en général. (Vu le barème adopté, un candidat traitant correctement la partie 1 : préliminaires,était déjà très bien placé pour une admissibilité).

Les espoirs des correcteurs ont été déçus très rapidement : trop peu de candidats ont su faire correctement **Q1** et **Q2.** Dans le reste des copies,on a constaté l'incapacité de calculer avec des fonctions simples, de manipuler des inégalités sans difficulté spéciale et d'utiliser rigoureusement la notion d'équivalent.

L'étude de la fonction $x \mapsto x^{\alpha} |\operatorname{Log} x|^{\beta}$ (pour $x > 1$) qui était suggérée a donné lieu à des erreurs et des calculs invraisemblables. On a trouvé presque partout l'application d'un «résultat général» : si $i < \xi_i < i+1$ alors $f(\xi_i)$ est équivalent à $f(i)$ pour $i \to +\infty$ (propriété vraie d'ailleurs pour la fonction θ vu ses propriétés,mais il s'agissait justement de l'établir !)

Signalons cependant une bonne attitude : quelques candidats n'arrivant pas à faire une étude complète, définissent a priori un couple (α, β) ($\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 0$ ou $\alpha = 0, \beta > 0$) et vérifient bien que le couple convient.

Certaines inégalités en **Q2** demandaient une ligne ou deux de calculs, elles ont donné lieu à des développements compliqués qui n'aboutissent qu'au prix d'affirmations douteuses.

Au début de **Q5** la plupart des candidats affirment directement que :

$e^{\mathrm{C}x^2 - \frac{1}{2}\mathrm{P}(x)} \geqslant k\, e^{\mathrm{B}x^2}$ (k cste) puisque $\mathrm{B} \leqslant \mathrm{C}$, alors que l'on attend la précision $\mathrm{B} < \mathrm{C}$ résultant d'un raisonnement très simple qui n'est pas fait (Ce petit test fut significatif !). Cette précision est d'ailleurs fournie dans le texte en **Q 10** pour utiliser les résultats précédents. Même remarque pour **Q 4**, avec $\mathrm{C} < \mathrm{D}$.

Certes ces observations — qui traduisent une grande faiblesse en Analyse — ont déjà été faites les années précédentes et pour d'autres épreuves que celle d'Analyse Numérique, mais elles semblent d'autant plus consternantes cette année qu'il s'agissait particulièrement d'Analyse élémentaire.

Dans la deuxième partie, abordée sérieusement dans un nombre réduit de copies, on a été surpris de constater que les candidats ne pensaient pas au théorème d'ASCOLI-ARZELA (**Q7**) pour la convergence uniforme et, mis à part quelques bonnes copies, l'argumentation employée a été la suivante : «puisque $\{W_i^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante convergente de fonctions continues, il y a convergence uniforme vers une fonction continue» (résultat attribué sans hésitation à DINI).

Q8 a) était difficile et n'a pas été étudiée,cette question a donc été mise hors barême ainsi que les questions **Q10** et **Q11**.

3. Quelques indications sur la solution

Q.1 Pour vérifier (1.3) on peut écrire :

$\tau i = \rho i (\rho i+1 - \rho i-1) = \psi(i+1)\, \psi'(\xi_i)$, $i < \xi_i < i+2$ et vérifier que $\psi(i+i) \sim \psi(i)$ pour $i \to +\infty$. Puisque

$$\tau_i = \frac{\psi(i+1)}{\psi(\xi_i)}\, \psi(\xi_i)\, \psi'(\xi_i)$$

on pourra conclure en établissant que

$|\psi \psi'| \leqslant \mathrm{K}$. (Ce qui explique la condition indiquée en b).

Les conditions imposées à θ font que $\theta(i+1) \sim \theta(i)$ et on utilise le raisonnement précédent.

Q.2 G et H sont paires en x, donc G_{xx} et H_{xx} sont paires, H_x impaire, avec $\mathrm{H}_x \geqslant 0$ pour $x \geqslant 0$; il suffit donc de supposer $x \geqslant 0$ pour établir (1-4) et (1-5).

Il est intéressant d'écrire les dérivées logarithmiques pour obtenir directement les rapports indiqués.

La 1re inégalité dans (1-4) revient à constater que la différence des 2 membres est positive ou nulle ;or cette différence s'écrit :

$$\frac{-2Cx}{1\text{-}4\,DLT}\quad (1-P') + \frac{1}{4}\,[2P'' - (1-P')^2] + \gamma - \frac{3}{4}$$

et les inégalités vérifiées par P donnent la conclusion.

La 2e inégalité dans (1-4) s'obtient en explicitant $\dfrac{G_t}{LG} - \dfrac{G_{xx}}{G}$

Q.3 On remarque que $v^*_{i-1} \leqslant v_{i-1}$, $v_i^* = v_i$, $v^*_{i+1} \leqslant v_{i+1}$

entraînent $\delta^2 v_i^* \leqslant \delta^2 v_i$. On décompose alors la différence $f_i - f_i^*$ en faisant apparaître

$f(x_i, t, v_i, \delta v_i, \delta^2 v_i) - f(x_i, t, v_i, \delta v_i, \delta^2 v_i^*)$

et $f(x_i, t, v_i, \delta v_i, \delta^2 v_i^*) - f(x_i, t, v_i, \delta v_i^*, \delta^2 v_i^*)$

et on applique respectivement les propriétés (0.3) et (0.4).

Q.4 Il suffit d'établir (1.6) avec $x_i > 0$ (cf Q2)

(1.6) est l'analogue discret de :

$$(1.4)' \quad \frac{H_t}{LH} - \frac{H_{xx} + |H_x| + H}{H} \geqslant 0$$

qui se déduit de (1-4)

D'après (1-4) on a :

$$\frac{H_t\,(x_i, t)}{LH_i} - \frac{H_{xx}(x_i) + H_x(x_i) + H_i}{H_i} \geqslant 2(D-C)(1+2Cx_i^2)$$

On compare alors à (1.6) en utilisant les 2 inégalités du texte puisqu'il apparaît

$$\frac{\delta H_i - H_x(x_i)}{H_i} \quad \text{et} \quad \frac{\delta^2 H_i - H_{xx}(x_i)}{H_i}$$

Q.5 On établit d'abord que $\alpha H(x, 0) \geqslant |\varphi(x)|$

avec $\alpha = \dfrac{1}{m}$, $m = \inf\limits_{\mathbb{R}} \left\{ A^{-1} \exp[(C-B)x^2 - \frac{1}{2}P(x)] \right\} > 0$

en imposant $B < C$.

Pour l'inéquation vérifiée par S_i on applique l'inégalité discrète (1-6) et la propriété (0.5)

Q.6 L'existence et l'unicité de y_i résultent d'un théorème classique.

En posant $u_i = w_i - y_i$ on s'assure de :

$u_i(o) \geqslant 0$ et $u'_i(t) \geqslant -(1+\alpha_i)\,L\,|u|$

d'où l'on déduit : $u_i(t) \geqslant 0$.

En posant $-\vec{S} = \vec{\sigma}$ et $v_i = y_i - \sigma_i$ on constate que

$v'_i(t) \geqslant f_i(t, w_{i-1}, y_i, w_{i+1}) - f_i(t, w_{i-1}, \sigma_i, w_{i+1})$

en appliquant la propriété de quasi-monotonie (Q.3) et on se ramène au cas précédent.

La quasi-monotonie permet d'établir également que $\vec{y}$ est une sur solution.

Q.7 On peut montrer que $\sup\limits_{t \in I} |(w_i^n)'(t)| \leqslant K_1$

et $\sup\limits_{t \in I} |w_i^n(t)| \leqslant K_2$ (pour i fixé)

La famille $\{w_i^n\}$ forme donc un sous-ensemble compact dans $C^0(I)$ muni de la topologie de la convergence uniforme ;il existe donc une sous-suite qui converge uniformément sur I vers V_i^h , en fait toute la suite converge vers V_i^h d'après la monotonie.

Pour montrer que $\vec{U}_h$ est solution de $\mathcal{S}_h$ on peut considérer que w_i^n est défini par :

$$w_i^n = \varphi(x_i) + \int_0^t f_i(\tau, w_{i-1}^{n-1}, w_i^n, w_{i+1}^{n-1})\, d\tau$$

et passer à la limite sur n.

Q.8 a) On suppose $|z| \neq p$ et on établit une contradiction.

Il est facile de montrer que $V'_j(t_0) \geqslant 0$ puisque

$V_j(t) \leqslant V_j(t_0)$ pour $t < t_0$.

Pour établir que $V'_j(t_0) < 0$ on peut toujours supposer que

$V_j(t_0) \geqslant V_{j-1}(t_0)$, $V_j(t_0) > V_{j+1}(t_0)$

ou que $V_j(t_0) > V_{j-1}(t_0)$, $V_j(t_0) \geqslant V_{j+1}(t_0)$

sans changer la généralité du problème.

On a : $(u_j - u_j^*)'(t_0) = (V_j' H_j + V_j \tilde{H}_j')(t_0)$

$$\leqslant f_j(t_0, u_{j-1}, u_j, u_{j+1}) - f_j(t_0, u_{j-1}^*, u_j^*, u_{j+1}^*)$$

On décompose alors cette différence en faisant apparaître

$f(x_j, t_0, u_j, \delta u_j, \delta^2 \overset{*}{u_j} + V_j \delta^2 H_j^2)$ et on évalue

$\delta^2 u_j - \delta^2 u_j^* - V_j \delta^2 \tilde{H}_j$ pour pouvoir appliquer (0.3).

On utilise ensuite l'inégalité (1-6) prise au point t_0 .

b) On suppose $M_n > 0$ et on utilise a), la condition $\tilde{C} > C$ étant essentielle pour aboutir à une contradiction.

Q. 9 L'unicité résulte de (2-7) appliqué 2 fois.

Q. 10 On encadre U_i^h par $u_i + \sigma = w_i$ et $u_i - \sigma_i = v_i$ en utilisant le résultat de monotonie (2-7), $\vec{\sigma}$ (donc λ) étant choisi pour que (2-5) et (2-6) soient satisfaites.

On trouvera par exemple $\lambda > (\mu_1 + \mu_2)\, e^{M}$ où M est le maximum de la fonction $x \longrightarrow \frac{1}{2} P(x) - (C - B) x^2$

(L'indication du texte à la fin de **Q 10** doit évidemment se lire : appliquer **Q 8**).

Q. 11 Il s'agit d'appliquer **Q 10** après avoir vérifié 3-1 et 3-2 ce qui résulte de l'hypothèse faite sur U_{xxx} et la propriété $u \in \mathcal{G}_{B,D}(\Omega)$.

4. Les notes (sur 40)

Nombre de copies corrigées : 903
52 copies atteignent la moyenne
130 copies ont la note 0
46 % des copies ne dépassent pas 4
Moyenne : 6,8
Moyenne (sans tenir compte de la note 0) : 7,9
Répartition des notes :

0 à 4	5 à 9	10 à 14	15 à 19	20 à 24	25 à 29	30 à 34	35 à 40
419	211	151	70	24	14	8	6

MÉCANIQUE GÉNÉRALE

Sujet (durée : 6 heures)

I

Soit un système matériel (Σ) soumis à des liaisons holonomes, dont la position par rapport à un repère absolu dépend de n paramètres q_1, q_2, ..., q_n, et éventuellement à des liaisons supplémentaires non holonomes. Toutes ces liaisons seront supposées indépendantes du temps.

Quand le système (Σ) est en mouvement par rapport au repère absolu, les q_r sont des fonctions du temps t. Ces fonctions sont supposées deux fois continûment différentiables. On note $\dot{q}_r$ la dérivée première de q_r par rapport à t.

A

On pose :
$$\omega_s = \sum_{i=1}^{n} a_{si} \dot{q}_i \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

où les a_{si} sont des fonctions continûment différentiables de q_1, q_2, ..., q_n.

La matrice des a_{si} est supposée régulière; on peut alors exprimer les $\dot{q}_r$ en fonction des ω_s :
$$\dot{q}_r = \sum_{j=1}^{n} b_{rj} \omega_j \qquad (r = 1, 2, \ldots, n) ;$$

la matrice des b_{rj} est la matrice inverse de la matrice des a_{si}. Les ω_s sont appelées les *pseudo-vitesses*.

On pose également :

$$d\pi_s = \sum_{i=1}^{n} a_{si}\, dq_i \qquad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

Si les formes $d\pi_s$ sont fermées, ces relations définissent n fonctions π_s de $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Si les formes $d\pi_s$ ne sont pas fermées, les π_s n'existent pas en tant que fonctions de $q_1, q_2, \ldots, q_n$, mais on introduit conventionnellement les notations π_s et on donne aux π_s le nom de *pseudo-coordonnées*. Soit Φ une fonction numérique continûment différentiable de $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Montrer que sa différentielle $d\Phi$ peut s'écrire sous la forme :

$$d\Phi = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial \pi_s}\, d\pi_s$$

où on a posé :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \pi_s} = \sum_{r=1}^{n} b_{rs} \frac{\partial \Phi}{\partial q_r}$$

On dit que $\dfrac{\partial \Phi}{\partial \pi_s}$ *est la dérivée partielle de* Φ *par rapport à la pseudo-coordonnée* π_s.

Cette définition s'étend évidemment aux fonctions vectorielles. Ceci posé, on considère un déplacement virtuel du système matériel (Σ) compatible avec les liaisons holonomes telles qu'elles existent à l'instant t. On note $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n$ les variations virtuelles des paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Les variations virtuelles des pseudo-coordonnées π_s sont définies par :

$$\delta\pi_s = \sum_{s=1}^{n} a_{si}\, \delta q_i \qquad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

Supposant que les δq_r sont des fonctions continûment différentiables du temps (donc aussi les $\delta\pi_s$) et *admettant* la règle $(\delta q_r)^{\cdot} = \delta \dot{q}_r$, montrer que l'on a :

$$\left.\begin{array}{l} (\delta\pi_s)^{\cdot} - \delta\omega_s = \displaystyle\sum_{l=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \gamma_{lm}^{s}\, \omega_l\, \delta\pi_m \\ \text{où l'on a posé :} \\ \gamma_{lm}^{s} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial a_{sk}}{\partial q_r} - \frac{\partial a_{sr}}{\partial q_k}\right) b_{rl}\, b_{km} \end{array}\right\} \quad (s,\ l,\ m = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

Montrer que, pour s fixé, la matrice des γ_{lm}^{s} est antisymétrique.

s étant fixé, que peut-on dire des γ_{lm}^{s} quand la forme correspondante $\delta\pi_s$ est fermée ?

B

1° Soit dm un élément de masse du système (Σ), de centre d'inertie M. On désigne par $\vec{V}_M$ le vecteur vitesse de M par rapport au repère absolu, par $T = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\Sigma} \vec{V}_M^2\, dm$ l'énergie cinétique absolue de (Σ); T peut être considérée comme fonction de $q_1, q_2, \ldots, q_n, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$.

On note $\delta\vec{M}$ un déplacement virtuel du point M compatible avec les liaisons holonomes telles qu'elles existent à l'instant t. Le travail virtuel des forces appliquées à (Σ) est une combinaison linéaire des δq_r, donc des $\delta\pi_s$; on la note $\displaystyle\sum_{s=1}^{n} P_s\, \delta\pi_s$, les P_s étant des fonctions de $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Montrer que le principe des travaux virtuels se traduit par :

$$\frac{d}{dt}\int_{\Sigma} dm\, \vec{V}_M \cdot \delta\vec{M} - \delta T = \sum_{s=1}^{n} P_s\, \delta\pi_s,$$

puis, en explicitant le premier membre de cette équation, par :

$$\sum_{s=1}^{n} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_s}\right) - \frac{\partial T}{\partial \pi_s} + \sum_{r=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \gamma_{ls}^{r} \frac{\partial T}{\partial \omega_r}\, \omega_l - P_s\right] \delta\pi_s = 0.$$

2° On suppose que le système (Σ) n'est soumis qu'à des liaisons holonomes, donc que les paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_n$ sont indépendants.

Écrire les équations qui, jointes aux relations définissant les ω_s, permettent de déterminer les q_r et les ω_s en fonction du temps.

Que deviennent ces équations quand on prend :

$$\omega_s = \dot{q}_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) ?$$

3° On suppose maintenant que le système (Σ) est soumis à des liaisons supplémentaires non holonomes définies par :

$$\omega_s = \sum_{i=1}^{n} a_{si} \dot{q}_i = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, \mathrm{N}; \quad \mathrm{N} < n)$$

et que dans un déplacement virtuel compatible aussi avec ces liaisons supplémentaires, les forces imposant ces liaisons ne travaillent pas.

Écrire les $2n - \mathrm{N}$ équations permettant de déterminer $q_1, q_2, \ldots, q_n, \omega_{\mathrm{N}+1}, \omega_{\mathrm{N}+2}, \ldots, \omega_n$ en fonction du temps indépendamment de ces dernières forces.

Les diverses applications des résultats obtenus dans I *qui vont suivre sont indépendantes. Dans chacune d'elles, pour calculer, pour chaque valeur de* s, *les coefficients* γ_{lm}^{s}, *il est conseillé d'évaluer directement la différence* $(\delta\dot{\pi}_s) - \delta\omega_s$ *et de considérer que* γ_{lm}^{s} *est le coefficient de* $\omega_l\, \delta\pi_m$ *dans cette différence.*

II

Dans cette partie, (Σ) est une barre rectiligne infiniment mince AB qui glisse sans frottement sur un plan rapporté à deux axes orthonormés absolus Ox, Oy.

La position de la barre est repérée par les coordonnées x, y de l'un de ses points C et par l'angle $Ox, \overrightarrow{AB} = \theta$. On appelle m la masse de la barre, G son centre d'inertie. On désigne par d la mesure algébrique constante du vecteur $\overrightarrow{CG}$ comptée sur l'axe orienté par le vecteur $\overrightarrow{AB}$, par I le moment d'inertie de la barre AB par rapport au point C.

On pose :

$$q_1 = x \ ; \quad q_2 = y \ ; \quad q_3 = \theta$$

$$\omega_1 = -\dot{x} \sin\theta + \dot{y}\cos\theta \ ; \quad \omega_2 = \dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta \ ; \quad \omega_3 = \dot{\theta}$$

1° Calculer les γ_{lm}^{s} $(s, l, m = 1, 2, 3)$.

2° On suppose qu'une liaison impose au vecteur vitesse du point C d'avoir constamment la direction de la barre AB (c'est, par exemple, le cas d'une lame de couteau qui est guidée sur un plan sans qu'elle puisse râcler ce dernier) et que les forces imposant cette liaison ne travaillent pas dans un déplacement virtuel compatible avec elle.

On suppose en outre, que la barre AB n'est soumise à aucune autre force.

En utilisant les résultats du I, écrire le système différentiel qui permet de déterminer ω_2 et ω_3 en fonction du temps.

3° Intégrer ce système. Calculer également θ en fonction du temps.

Déterminer l'équation intrinsèque de la trajectoire du point C (c'est-à-dire la relation qui lie son arc et son rayon de courbure).

III

Dans cette partie, (Σ) est un cerceau (circonférence matérielle) homogène, de centre G, de rayon a, de masse m.

Soient Ox, Oy, Oz des axes orthonormés absolus. Le cerceau est assujetti à rester en contact bilatéral avec le plan xOy supposé matérialisé.

On désigne par x et y respectivement l'abscisse et l'ordonnée du point G. On appelle Gu, Gv, $G\zeta$ les axes orthonormés ainsi définis : Gu est parallèle à la tangente au cerceau en son point de contact avec le plan xOy, $G\zeta$ est perpendiculaire au plan du cerceau. On note ψ l'angle Ox, Gu compté positivement autour de Oz et θ l'angle Oz, $G\zeta$ compté positivement autour de Gu; θ est supposé dans la suite différent de 0 et de π. On désigne par φ la rotation propre du cerceau.

On pose :

$$q_1 = x \ ; \quad q_2 = y \ ; \quad q_3 = \theta \ ; \quad q_4 = \psi \ ; \quad q_5 = \varphi .$$

On appelle ω_1 et ω_2 les composantes de la vitesse de glissement du cerceau respectivement sur Gu et sur un axe parallèle au plan xOy et perpendiculaire à Gu et ω_3, ω_4, ω_5 les composantes du vecteur rotation instantanée du cerceau sur les axes Gu, Gv, $G\zeta$ respectivement.

1° Calculer les γ_{lm}^{s} $(s, l, m = 1, 2, 3, 4, 5)$.

Dans ce qui suit, le cerceau est assujetti à *rouler sans glisser* sur le plan xOy supposé horizontal. L'axe Oz est vertical ascendant. La pesanteur, d'intensité constante g, est prise en considération.

2° En utilisant les résultats du I, écrire les équations différentielles permettant de calculer ω_3, ω_4, ω_5 en fonction du temps.

3° Former l'équation différentielle du second ordre qui fournit ω_5 en fonction de θ, puis celle qui donne ω_5 en fonction de la variable ξ définie par

$$\cos\theta = \varepsilon(1 - 2\xi) \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

Montrer que cette dernière équation a une solution particulière — qui sera notée $\mathcal{F}(\xi)$ — holomorphe à l'origine et y prenant la valeur 1; calculer les coefficients de la série entière représentant $\mathcal{F}(\xi)$ et déterminer le rayon de convergence de cette série.

Exprimer à l'aide de $\mathcal{F}$ la solution générale de l'équation différentielle donnant ω_5 en fonction de θ.

Indiquer comment on peut ensuite achever la résolution du problème.

IV

Dans cette partie, (Σ) est un chariot à deux essieux constitué par :

a. Un pont schématisé par une tige rectiligne infiniment mince AB de longueur Δ.

b. L'essieu arrière composé d'une tige rectiligne $O_1 O_2$ infiniment mince, de longueur $2c$, de milieu A, rigidement liée au pont et perpendiculaire à AB et de deux roues schématisées par deux disques homogènes identiques, de même masse m, de même rayon r, de centres O_1 et O_2, dont les plans sont perpendiculaires à O_1O_2 et qui peuvent tourner sans frottement autour de O_1O_2.

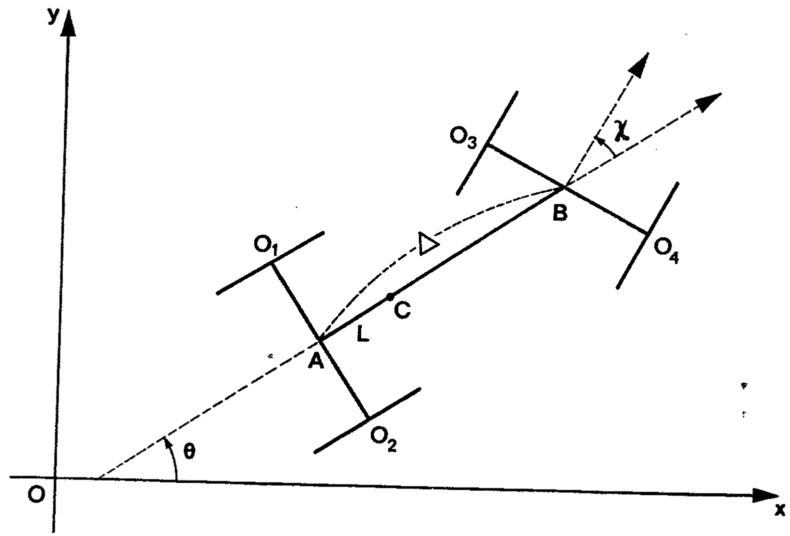
M_1, C, Θ_1 désignent respectivement la masse, le centre d'inertie et le moment d'inertie en A du solide constitué par les tiges AB et O_1O_2; le point C est sur AB à la distance L du point A.

c. L'essieu avant composé d'une tige rectiligne O_3O_4, de même longueur $2c$ que O_1O_2, assujettie par des liaisons sans frottement à tourner autour de son milieu B, supposé confondu avec son centre d'inertie, et à rester constamment dans le plan défini par AB et O_1O_2 et de deux roues identiques à celles de l'essieu arrière, de centres O_3 et O_4, dont les plans sont perpendiculaires à O_3O_4 et qui peuvent tourner sans frottement autour de O_3O_4.

M_2 et Θ_2 désignent respectivement la masse et le moment d'inertie en B de la tige O_3O_4.

Soient Ox, Oy, Oz des axes orthonormés absolus. Les quatre roues du chariot sont assujetties à rester en contact bilatéral avec le plan xOy supposé matérialisé.

(La figure donne une vue en plan du chariot.)



On prend pour paramètres l'abscisse x et l'ordonnée y du point B, l'angle $\theta = \widehat{Ox, \overrightarrow{AB}}$, l'angle χ que fait avec le vecteur $\overrightarrow{AB}$ l'axe parallèle au plan xOy et directement perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{O_3O_4}$ et les angles de rotation φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 des roues de centres respectifs O_1, O_2, O_3, O_4, φ_1, φ_2 (resp. φ_3, φ_4) étant comptés positivement autour d'un axe de même direction et de même sens que le vecteur $\overrightarrow{O_2O_1}$ (resp. $\overrightarrow{O_4O_3}$).

On pose :

$$q_1 = x\ ;\ q_2 = y\ ;\ q_3 = \theta\ ;\ q_4 = \chi\ ;\ q_{4+i} = \varphi_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

On pose également :

$$\omega_1 = -\dot{x}\sin(\theta+\chi) + \dot{y}\cos(\theta+\chi)\ ;$$

$$\omega_2 = -\dot{x}\sin\theta + \dot{y}\cos\theta - \Delta\dot{\theta}$$

ω_3 (resp. ω_4) est la composante sur un axe parallèle au plan xOy et faisant l'angle θ avec Ox de la vitesse de glissement de la roue de centre O_1 (resp. O_2) tandis que ω_5 (resp. ω_6) est la composante sur un axe parallèle au plan xOy et faisant l'angle $\theta + \chi$ avec Ox de la vitesse de glissement de la roue de centre O_3 (resp. O_4).

On introduit enfin :

$$\omega_7 = \dot{x} \cos(\theta + \chi) + \dot{y} \sin(\theta + \chi) \quad ; \quad \omega_8 = \dot{\chi} .$$

1° Montrer que la force vive du chariot peut se mettre sous la forme :

$$2\,T = (M_1 + 2\,m)\,[(-\,\omega_1 \sin\chi + \omega_7 \cos\chi)^2 + \omega_2^2] + 2\,M_1 L\,\omega_2\dot{\theta}$$
$$+ \left(\Theta_1 + 2\,mc^2 + \frac{mr^2}{2}\right)\dot{\theta}^2 + (M_2 + 2\,m)\,(\omega_1^2 + \omega_7^2)$$
$$+ \left(\Theta_2 + 2\,mc^2 + \frac{mr^2}{2}\right)(\dot{\theta} + \omega_8)^2 + \frac{mr^2}{2}\,(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_3^2 + \dot{\varphi}_4^2)$$

où $\dot{\theta}$ et les $\dot{\varphi}_i$ sont supposés exprimés en fonction de χ et des ω_s par des formules que l'on explicitera.

2° On suppose dans la suite que, d'une part, les quatre roues sont assujetties à rouler sans glisser sur le plan xOy, d'autre part que des liaisons imposent aux vecteurs vitesse des points A et B de rester constamment perpendiculaires aux tiges O_1O_2 et O_3O_4 respectivement.

On suppose également que les forces imposant ces dernières liaisons ainsi que les forces données qui peuvent éventuellement s'exercer sur le chariot ne travaillent pas dans un déplacement virtuel compatible avec toutes les liaisons envisagées.

En utilisant les résultats du I, écrire les équations du mouvement du chariot (on commencera par calculer les coefficients γ_{lm}^{s} nécessaires pour former ces équations et ceux-là seulement).

Montrer que ces équations admettent deux intégrales premières dont on donnera la signification mécanique et que la résolution du problème peut être ramenée aux quadratures.

RAPPORT SUR L'EPREUVE DE MECANIQUE GENERALE

1. Thème du sujet

On proposait aux candidats d'établir les équations dites «d'EULER-LAGRANGE» obtenues indépendamment par POINCARE, HAMEL et BOLTZMANN et de les appliquer à quelques problèmes. Bien que ces équations aient une forme plus compliquée que les équations de LAGRANGE habituelles, elles peuvent être commodes quand il est indiqué d'utiliser des paramètres de vitesse et quand le système est soumis à des liaisons non holonomes. On pourra consulter à leur sujet les ouvrages suivants : A.I. LOURIE : *Mécanique Analytique ;* G. HAMEL : *Théoretische Mechanik.*

La première partie était consacrée à l'établissement de ces équations dans le cas de liaisons indépendantes du temps. Elle était abordable par un candidat ayant compris comment on formait les équations de LAGRANGE ordinaires.

Dans II était considéré le problème simple de la «lame de couteau», dans III, le problème un peu plus compliqué du cerceau pesant roulant sans glisser sur un plan horizontal.

La quatrième partie, plus difficile, était consacrée au mouvement du chariot à deux essieux, étudié par STÜCKLER. C'est un bon exemple d'application des équations d'Euler-Lagrange, mais les calculs sont assez compliqués. En outre, une certaine liberté de manœuvre était volontairement laissée aux candidats. Cette partie était donc réservée aux meilleurs d'entre eux.

2. Résumé de la solution

I

A

$$d\Phi = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial q_r} dq_r = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial q_r}\left(\sum_{s=1}^{n} b_{rs}\, d\pi_s\right)$$

$$= \sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{r=1}^{n} b_{rs}\frac{\partial \Phi}{\partial q_r}\right) d\pi_s$$

— Utilisant la règle $\dot{\left(\delta q_r\right)} = \delta \dot{q}_r$, on trouve :

$$\dot{\left(\delta \pi_s\right)} - \delta\omega_s = \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{sk}}{\partial q_r} - \frac{\partial a_{sr}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_r\, \delta q_k$$

Il suffit de remplacer les $\dot{q}_r$ en fonction des w_l et les δq_k en fonction des $\delta\pi_m$ pour obtenir le résultat demandé.

— L'antisymétrie de la matrice des γ_{lm}^{s} pour s fixé est évidente. Si la forme $\delta\pi_s$ est fermée, les γ_{lm}^{s} sont nuls.

B

1° Le principe des travaux virtuels s'écrit :

$$\int_\Sigma dm\, \frac{d\vec{V}_M}{dt} . \delta\vec{M} = \sum_{s=1}^{n} P_s\, \delta\pi_s$$

donc :

$$\frac{d}{dt}\int_\Sigma dm\, \vec{V}_M . \delta\vec{M} - \int_\Sigma dm\, \vec{V}_M . \frac{d}{dt}\left(\delta\vec{M}\right) = \sum_{s=1}^{n} P_s\, \delta\pi_s$$

Puisque $\frac{d}{dt}\left(\delta\vec{M}\right) = \delta\vec{V}_M$ (calcul classique), la deuxième intégrale est δT, ce qui démontre la première formule.

On a :

$$\delta T = \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \omega_s}\delta\omega_s + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \pi_s}\delta\pi_s$$

D'autre part, on peut écrire :

$$\int_\Sigma dm\, \vec{V}_M . \delta\vec{M} = \int_\Sigma dm\, \vec{V}_M . \left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\vec{M}}{\partial\pi_s}\delta\pi_s\right)$$

$$= \sum_{s=1}^{n}\left[\int_\Sigma dm\, \vec{V}_M . \frac{\partial\vec{M}}{\partial\pi_s}\right]\delta\pi_s$$

De $\vec{V}_M = \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\vec{M}}{\partial\pi_s}\omega_s$, on tire $\frac{\partial\vec{V}_M}{\partial\omega_s} = \frac{\partial\vec{M}}{\partial\pi_s}$

Et par conséquent :

$$\int_\Sigma dm\, \vec{V}_M . \delta\vec{M} = \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial\omega_s}\delta\pi_s$$

Il vient donc :

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial\omega_s}\delta\pi_s\right) - \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial\omega_s}\delta\omega_s + \frac{\partial T}{\partial\pi_s}\delta\pi_s\right) = \sum_{s=1}^{n} P_s\,\delta\pi_s$$

et ensuite le résultat demandé en remplaçant ($\delta\dot{\pi}_s$) par sa valeur tirée de la formule du A

2° Les $\delta\pi_s$ sont alors indépendants, ce qui donne les équations :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\omega_s}\right) - \frac{\partial T}{\partial\pi_s} + \sum_{r=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\gamma_{ls}^{r}\frac{\partial T}{\partial\omega_r}\omega_l - P_s = 0$$

$$(s = 1, 2, \ldots, n)$$

si $w_s = q_s$, on a $d\pi_s = dq_s$, les γ_{lm}^{s} sont nuls et on retrouve les équations de Lagrange ordinaires.

3° Un déplacement virtuel compatible avec les liaisons supplémentaires est défini par $\delta \pi_1 = \ldots = \delta \pi_N = 0$. La formule finale du 1° donne, compte tenu de $w_1 = \ldots = w_N = 0$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_s}\right) - \frac{\partial T}{\partial \pi_s} + \sum_{r=1}^{n} \sum_{l=N+1}^{n} \gamma_{ls}^{r} \frac{\partial T}{\partial \omega_r} \omega_l - P_s = 0$$

$$(s = N+1, \ldots, n)$$

où les $P_{N+1}, \ldots, P_n$ ne contiennent pas les réactions supplémentaires et où on doit remplacer $w_1, \ldots, w_N$ par zéro après la formation des dérivées partielles de T.

A ces équations, on doit ajouter :

$$\dot{q}_r = \sum_{s=N+1}^{n} b_{rs}\, \omega_s \quad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

II

1° On trouve facilement $\gamma_{23}^{1} = -\gamma_{32}^{1} = \gamma_{31}^{2} = -\gamma_{13}^{2} = 1$

les autres γ_{lm}^{s} sont nuls.

2° La liaison s'exprime par $w_1 = 0$; w_2 est alors la mesure algébrique de la vitesse de C comptée sur $\overrightarrow{AB}$.

On trouve : $2T = m\left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right) + 2md\, \omega_1 \omega_3 + I \omega_3^2$

I , B , 3° donne alors :

$$\dot{\omega}_2 = d\, \omega_3^2 \quad ; \quad I \dot{\omega}_3 + md\, \omega_2 \omega_3 = 0$$

3° L'élimination de w_3 donne $\ddot{\omega}_2 = -\frac{2md}{I} \omega_2 \dot{\omega}_2$

donc : $\dot{\omega}_2 = -\frac{md}{I} \omega_2^2 + Cte$

Comme $\dot{\omega}_2 = d\, \omega_3^2$, la constante est du signe de d ; la posant égale à $\frac{md}{I} w_2^{0\,2}$, on a $\dot{\omega}_2 = \frac{md}{I}\left(\omega_2^{0\,2} - \omega_2^2\right)$ Prenant comme instant $t = 0$ celui où $w_2 = w_2^0$, on trouve :

$$\omega_2 = \omega_2^0 \,\mathrm{th}\, \frac{md\omega_2^0}{I} t \quad \text{puis} \quad \omega_3 = \dot{\theta} = \varepsilon \sqrt{\frac{m}{I}}\, \omega_2^0 \frac{1}{\mathrm{ch}\, \frac{md\omega_2^0}{I} t} \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

puis en prenant $\theta = 0$ pour $t = 0$

$$\theta = \varepsilon \sqrt{\frac{I}{md^2}}\ \mathrm{Arc\,tg}\left(\mathrm{sh}\, \frac{md\omega_2^0}{I} t\right)$$

L'arc s de la trajectoire de C est

$$s = \int_0^t \omega_2(u)\, du = \frac{I}{md} \log \mathrm{ch}\, \frac{md\omega_2^0}{I} t$$

Son centre de courbure est le centre instantané de rotation du mouvement de AB sur le plan xOy, de sorte que le rayon de courbure algébrique ρ est

$$\rho = \frac{\omega_2}{\omega_3} = \varepsilon \sqrt{\frac{I}{m}}\, \mathrm{sh}\, \frac{md\omega_2^0}{I} t$$

L'équation intrinsèque est donc :

$$e^{\frac{2md}{I} s} = 1 + \frac{m}{I} \rho^2$$

III

1° On calcule w_1 et w_2 en utilisant les axes orthonormés $Ouwz$ déduits des axes $Oxyz$ par la rotation d'angle ψ autour de Oz ; on obtient :

$$\omega_1 = \dot{x}\cos\psi + \dot{y}\sin\psi + a\omega_5$$

$$\omega_2 = -\dot{x}\sin\psi + \dot{y}\cos\psi + a\omega_3\sin\theta$$

avec :

$$\omega_3 = \dot{\theta}, \qquad \omega_4 = \dot{\psi}\sin\theta, \qquad \omega_5 = \dot{\psi}\cdot\cos\theta + \dot{\varphi}$$

On en déduit :

$$\gamma_{34}^{5} = -\gamma_{43}^{5} = 1 \; ; \quad \gamma_{34}^{4} = -\gamma_{43}^{4} = \cot\theta$$

$$\gamma_{42}^{1} = -\gamma_{24}^{1} = \gamma_{14}^{2} = -\gamma_{41}^{2} = \frac{1}{\sin\theta}$$

$\gamma_{45}^{2} = -\gamma_{54}^{2} = \dfrac{a}{\sin\theta}$; les autres γ_{lm}^{s} sont nuls.

2° Les liaisons s'expriment par $w_1 = w_2 = 0$.

La force vive du cerceau s'écrit :

$$2T = m(\omega_1^2+\omega_2^2) + \frac{3ma^2}{2}\omega_3^2 + \frac{ma^2}{2}\omega_4^2 + 2ma^2\omega_5^2 - 2ma\,\omega_1\omega_5 - 2ma\sin\theta\,\omega_2\omega_3$$

Le travail virtuel du poids est :

$$-mga\cos\theta\,\delta\pi_3$$

D'après (I), (B), 3°, on obtient :

$$\begin{cases} 3\dot{\omega}_3 - \omega_4^2\cot\theta + 4\omega_4\omega_5 = -\dfrac{2g}{a}\cos\theta \\ \dot{\omega}_4 + \omega_3\omega_4\cot\theta - 2\omega_3\omega_5 = 0 \\ 2\dot{\omega}_5 - \omega_3\omega_4 = 0 \end{cases}$$

3° Comme $\omega_3 = \dot{\theta}$, les deux dernières équations donnent :

$$2\frac{d\omega_5}{d\theta} = \omega_4 \;, \qquad \frac{d\omega_4}{d\theta} + \omega_4\cot\theta - 2\omega_5 = 0$$

Eliminant w_4, on obtient :

$$\frac{d^2\omega_5}{d\theta^2} + \frac{d\omega_5}{d\theta}\cot\theta - \omega_5 = 0$$

que le changement de variable considéré transforme en l'équation hyper-géométrique :

$$\xi(1-\xi)\frac{d^2\omega_5}{d\xi^2} + (1-2\xi)\frac{d\omega_5}{d\xi} - \omega_5 = 0$$

On en cherche une solution de la forme

$$\mathcal{F}(\xi) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n\xi^n$$

On trouve : $c_1 = 1$, $c_{n+1} = \dfrac{n^2+n+1}{(n+1)^2}c_n$, le rayon de convergence est 1.

Comme $\xi = \dfrac{1\pm\cos\theta}{2}$ on obtient

$$\omega_5(\theta) = \lambda\,\mathcal{F}\left(\cos^2\frac{\theta}{2}\right) + \mu\,\mathcal{F}\left(\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \quad (\lambda,\mu\ \text{Ctes})$$

On en déduit $w_4(\theta)$ par simple dérivation. La première équation du 2°, s'écrivant :

$$3\frac{d}{d\theta}(\omega_3^2) = -\frac{4g}{a}\cos\theta + 2\omega_4^2\cot\theta - 8\omega_4\omega_5$$

, donne $w_3(\theta)$ par quadrature. On obtient $\theta, \psi, \varphi, x, y$ par de nouvelles quadratures.

IV

w_1 (resp. w_2) est la composante de $\vec{V}_B$ (resp. $\vec{V}_A$) sur $\vec{O_4 O_3}$ (resp. $\vec{O_2 O_1}$) ;
w_7 est la composante de $\vec{V}_B$ sur la perpendiculaire à $O_4 O_3$.

On trouve :

$$\omega_3 = \dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta - c\dot{\theta} - r\dot{\varphi}_1$$

$$\omega_4 = \dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta + c\dot{\theta} - r\dot{\varphi}_2$$

$$\omega_5 = \dot{x}\cos(\theta+\chi) + \dot{y}\sin(\theta+\chi) + c(\dot{\theta}+\dot{\chi}) - r\dot{\varphi}_3$$

$$\omega_6 = \dot{x}\cos(\theta+\chi) + \dot{y}\sin(\theta+\chi) + c(\dot{\theta}+\dot{\chi}) - r\dot{\varphi}_4$$

On a aisément les formules inverses, en particulier celles qui sont demandées au 1°:

$$\dot{\theta} = \frac{1}{\Delta}\left(\cos\chi\,\omega_1 + \sin\chi\,\omega_7 - \omega_2\right)$$

$$\dot{\varphi}_1 = -\frac{1}{r}\left(\sin\chi + \frac{c}{\Delta}\cos\chi\right)\omega_1 + \frac{1}{r}\left(\cos\chi - \frac{c}{\Delta}\sin\chi\right)\omega_7 + \frac{c}{r\Delta}\omega_2 - \frac{1}{r}\omega_3$$

$$\dot{\varphi}_2 = -\frac{1}{r}\left(\sin\chi - \frac{c}{\Delta}\cos\chi\right)\omega_1 + \frac{1}{r}\left(\cos\chi + \frac{c}{\Delta}\sin\chi\right)\omega_7 - \frac{c}{r\Delta}\omega_2 - \frac{1}{r}\omega_4$$

$$\dot{\varphi}_3 = -\frac{c}{r\Delta}\omega_1\cos\chi + \frac{1}{r}\left(1 - \frac{c}{\Delta}\sin\chi\right)\omega_7 - \frac{1}{r}\omega_5 - \frac{c}{r}\omega_8 + \frac{c}{r\Delta}\omega_2$$

$$\dot{\varphi}_4 = \frac{c}{r\Delta}\omega_1\cos\chi + \frac{1}{r}\left(1 + \frac{c}{\Delta}\sin\chi\right)\omega_7 - \frac{1}{r}\omega_6 + \frac{c}{r}\omega_8 - \frac{c}{r\Delta}\omega_2$$

1° On calcule la force vive de chaque élément du chariot :

solide $O_1 O_2$, AB :

$$M_1(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + (\Theta_1 - M_1\Delta^2)\dot{\theta}^2 - 2M_1(\Delta - L)\omega_2\dot{\theta}$$

barre $O_3 O_4$:

$$M_2(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + \Theta_2(\dot{\theta}+\dot{\chi})^2$$

Roues O_1 et O_2 :

$$2m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + 2m\left(c^2 - \Delta^2 + \frac{r^2}{4}\right)\dot{\theta}^2 - 4m\Delta\omega_2\dot{\theta} + \frac{mr^2}{2}(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2)$$

Roues O_3 et O_4 :

$$2m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + 2m\left(c^2 + \frac{r^2}{4}\right)(\dot{\theta}+\dot{\chi})^2 + \frac{mr^2}{2}(\dot{\varphi}_3^2 + \dot{\varphi}_4^2)$$

On ajoute en groupant les roues et les essieux correspondants ; on remplace $\dot{x}^2 + \dot{y}^2$, coefficient de $M_2 + 2m$, par $w_1^2 + w_7^2$; le coefficient de $M_1 + 2m$ est

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2 - \Delta^2\dot{\theta}^2 - 2\Delta\omega_2\dot{\theta}$$, soit $\vec{V}_A^2$ ou $(-\omega_1\sin\chi + \omega_7\cos\chi)^2 + \omega_2^2$

en décomposant $\vec{V}_A$ suivant $\vec{AB}$ et $\vec{O_2 O_1}$. On a alors la formule de l'énoncé.

2° Les liaisons imposées s'expriment par $w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = w_5 = w_6 = 0$.
Utilisant I, B, 3°, on écrit les équations correspondant à $s = 7,8$.

Il faut donc calculer les γ^r_{78} ; on en trouve un seul non nul : $\gamma^1_{78} = 1$.
Les équations sont donc :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\omega_7}\right) - \omega_8\frac{\partial T}{\partial\omega_1} - \frac{\partial T}{\partial\pi_7} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\omega_8}\right) + \omega_7\frac{\partial T}{\partial\omega_1} - \frac{\partial T}{\partial\pi_8} = 0$$

Le calcul de $\frac{\partial T}{\partial\omega_1}$, $\frac{\partial T}{\partial\omega_7}$, $\frac{\partial T}{\partial\omega_8}$ pour $w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = w_5 = w_6 = 0$

est un peu long, mais des simplifications apparaissent.

D'autre part, on a : $\dfrac{\partial T}{\partial \pi_7} = 0$ et $\dfrac{\partial T}{\partial \pi_8} = \dfrac{\partial T}{\partial \chi}$ qu'on peut calculer en faisant $w_1 = \ldots = w_6 = 0$ dans T avant la dérivation.

On obtient ainsi les équations :

$$\begin{cases} \left(\mu + \mu_1 \sin^2 \chi\right) \dot{\omega}_7 + \mu_1 \sin \chi \cos \chi \, \omega_7 \omega_8 + \nu \sin \chi \, \dot{\omega}_8 = 0 \\ \nu \dfrac{d}{dt}\left(\sin \chi \, \omega_7 + \Delta \omega_8\right) = 0 \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} \mu = M_1 + M_2 + 6m \\ \mu_1 = \dfrac{1}{\Delta^2}\left(\Theta_1 + \Theta_2 + 6mc^2 + mr^2\right) - \left(M_1 + 3m\right) \\ \nu = \dfrac{1}{\Delta}\left(\Theta_2 + 3mc^2 + \dfrac{mr^2}{2}\right) \end{cases}$$

$\omega_8 = \dot{\chi}$ et $\dot{\theta} = \dfrac{\sin \chi}{\Delta} \omega_7$ (compte tenu de $w_1 = w_2 = 0$) permettent de remplacer la deuxième équation par $\dot{\theta} + \dot{\chi} = C^{te}$: la vitesse angulaire de l'axe de l'essieu avant reste constante.

D'autre part, l'intégrale de l'énergie cinétique existe : $2\,T$, où on fait $w_1 = \ldots = w_6 = 0$, reste constante. On voit aisément que cette équation se met sous la forme $\dot{\chi} =$ fonction de χ ; on obtient donc $\chi(t)$ par une quadrature. On a ensuite $\theta(t) = -\chi(t) +$ fonction linéaire de t. Enfin, les équations de liaison donnent les dérivées temporelles des autres paramètres en fonction de θ et de χ, donc ces paramètres par des quadratures.

3. Observations des correcteurs

Les résultats de l'épreuve de mécanique générale sont, depuis d'assez nombreuses années, très décevants ; cette année, le record de médiocrité est largement battu.

Beaucoup de candidats connaissent mal ou même ne connaissent pas du tout le principe des travaux virtuels.

Aucun candidat n'a vu que, comme pour les équations de Lagrange ordinaires, on n'avait pas le droit de simplifier la force vive à l'aide des liaisons non holonomes avant de former les équations du mouvement, de sorte qu'aucun candidat n'a obtenu les équations correctes, même dans la deuxième partie pourtant très facile.

Il semble donc utile de donner quelques précisions sur la dernière question de la première partie.

Un déplacement virtuel compatible avec les liaisons supplémentaires non holonomes vérifie $\delta \pi_1 = \ldots = \delta \pi_N = 0$. Par hypothèse, les réactions supplémentaires ne travaillent pas dans un tel déplacement virtuel. Donc, dans un déplacement virtuel respectant seulement les liaisons holonomes, le travail des réactions supplémentaires est de la forme $\lambda_1 \delta \pi_1 + \ldots + \lambda_N \delta \pi_N$. Notant $\sum\limits_{s=1}^{n} P'_s \, \delta \pi_s$ le travail des autres forces dans un tel déplacement, on a :

$$P_1 = P'_1 + \lambda_1 ; \ldots ; P_N = P'_N + \lambda_N ; P_{N+1} = P'_{N+1} ; \ldots ; P_n = P'_n .$$

On peut alors écrire les équations de I, B, 2° <u>où la force vive est calculée sans tenir compte des liaisons non holonomes.</u>

Evidemment, après avoir formé les équations, on y remplace $w_1, \ldots w_N$ par zéro et on obtient ainsi deux groupes d'équations :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \omega_i}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial \pi_i} + \sum\limits_{r=1}^{n} \sum\limits_{\ell=N+1}^{n} \gamma_{\ell i}^{r} \dfrac{\partial T}{\partial \omega_r} \omega_\ell = P'_i + \lambda_i \\ \qquad\qquad (i = 1, \ldots, N) \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \omega_s}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial \pi_s} + \sum\limits_{r=1}^{n} \sum\limits_{\ell=N+1}^{n} \gamma_{\ell s}^{r} \dfrac{\partial T}{\partial \omega_r} \omega_\ell = P'_s \\ \qquad\qquad (s = N+1, \ldots, n) \end{cases}$$

le second groupe ne contenant pas les réactions supplémentaires. C'est d'ailleurs là l'un des avantages des équations d'Euler-Lagrange : on obtient les équations du mouvement directement, sans passer par l'élimination de réactions ou de multiplicateurs.

4° Les notes (sur 40)

Un barème excessivement bienveillant a permis à un tout petit nombre de candidats d'obtenir une note voisine de la moyenne :

0	1 à 5	6 à 10	11 à 15	16 à 19	20 à 24	25 à 40
32	117	44	16	4	6	0

Nombre de copies corrigées : 219

Moyenne : 4,73 (en excluant les copies nulles : 5,55).

PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

Sujet (durée : 6 heures)

N. B. — *La troisième partie est indépendante des deuxième et quatrième parties.*

DÉFINITIONS, NOTATIONS ET RAPPELS

1° Dans tout le problème, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers strictement positifs, $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels, $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ compactifié par deux éléments à l'infini (notés ∞ et $-\infty$); $\mathbb{R}^+$ désigne l'ensemble des réels strictement positifs, et $\overline{\mathbb{R}^+}$ l'ensemble précédent compactifié par un élément à l'infini noté « ∞ ». $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ désigne la tribu des boréliens de $\overline{\mathbb{R}}$ et, plus généralement, $\mathcal{B}(\mathrm{U})$ désigne la tribu des boréliens de U, où U est un sous-ensemble de $\overline{\mathbb{R}}$.

Toute application de $\overline{\mathbb{R}}$, ou d'un sous-ensemble de $\overline{\mathbb{R}}$, mesurable relativement aux tribus boréliennes correspondantes, sera dite borélienne.

2° Désignant par $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, on appelle variable aléatoire réelle (en abrégé v.a.r.) définie sur cet espace, une application de Ω dans $\overline{\mathbb{R}}$, mesurable relativement aux tribus $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, et on dira qu'une v.a.r. est positive, si elle est à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}^+}$.

Étant donnée une v.a.r. définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on note $\sigma(X)$ la tribu engendrée par X et on rappelle que, si Y est une v.a.r. $\sigma(X)$ - mesurable, il existe une application borélienne f, telle que $Y = f(X)$.

Désignant par A la fonction de répartition de X, c'est-à-dire l'application de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $[0, 1]$ définie par

$$A(u) = P(X \leqslant u) ,$$

on notera dA la mesure-image de P par X (appelée aussi loi de X) et on utilisera couramment des expressions du type :

« L'application φ borélienne est dA - intégrable », « telle propriété est vraie dA p.s. ». On notera $\int \varphi \, dA$ l'intégrale de φ relativement à la mesure dA.

Ainsi, on peut écrire :

$$\forall B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}), \qquad P(X \in B) = \int \mathbf{1}_B \, dA$$

où $\mathbf{1}_B$ désigne la fonction indicatrice de B.

3° Étant donnée une famille de tribus $\mathcal{C}_i$ $(i \in I)$ d'un même espace Ω, on sait que leur intersection est une tribu que l'on notera $\bigwedge_{i \in I} \mathcal{C}_i$; on notera, de même, $\bigvee_{i \in I} \mathcal{C}_i$ la plus petite tribu contenant toutes les tribus $\mathcal{C}_i$, laquelle est, en général, différente de leur union.

Si les X_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont n v.a.r. définies sur le même espace probabilisé, on désigne par $\sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ la tribu $\bigvee_{1 \leqslant i \leqslant n} \sigma(X_i)$, laquelle n'est autre que la tribu engendrée par le vecteur aléatoire $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Enfin, si $(\Omega, \mathcal{A})$ et $(\Omega', \mathcal{A}')$ sont deux espaces mesurables, on désigne par $(\Omega \times \Omega', \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}')$ l'espace mesurable produit associé.

On rappelle que la tribu produit $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'$, est la tribu engendrée par les pavés, c'est-à-dire par tous les ensembles de la forme $E \times E'$, où E est un élément de $\mathcal{A}$, et E' un élément de $\mathcal{A}'$. La tribu $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \otimes \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ est aussi notée $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^2)$.

4° Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on considère une v.a.r. X, $\mathcal{A}$ - mesurable, positive ou intégrable. Si $\mathcal{B}$ est une sous-tribu de $\mathcal{A}$, le symbole $E(X \mid \mathcal{B})$ désigne l'espérance conditionnelle de la v.a.r. X par rapport à la tribu $\mathcal{B}$.

Si Y est une v.a.r., $\mathcal{B}$ - mesurable, dont la classe d'équivalence pour la relation d'égalité P - presque sûre (en abrégé, P p.s.) est $E(X \mid \mathcal{B})$, nous dirons que Y est un représentant de $E(X \mid \mathcal{B})$.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé sur lequel est définie une v.a.r. strictement positive S, dont on désigne par A la fonction de répartition. Pour tout $u \in \overline{\mathbb{R}}$, différent de $-\infty$, on désigne par $A(u^-)$ la limite de $A(v)$ lorsque v tend vers u par valeurs inférieures.

1° *a*. Quelles sont les valeurs de $A(0)$ et de $A(\infty)$?

Étant donné un élément u de $\overline{\mathbb{R}^+}$, que représente la quantité

$$A(u) - A(u^-)?$$

Peut-on avoir $A(\infty^-) < 1$?

b. On pose $c = \inf\{ u \mid u \in \overline{\mathbb{R}^+}, A(u) = 1 \}$.

Montrer que c appartient à $\overline{\mathbb{R}^+}$, que $A(c) = 1$, et que si $t < c$, $A(t) < 1$.

c. Montrer que : $S \leqslant c$ P p.s., et que, si $A(c^-) = 1$, $S < c$ P p.s.

2° Étant donné t, élément de $\overline{\mathbb{R}^+}$, on désigne par $S \wedge t$, l'application de Ω dans $\overline{\mathbb{R}^+}$, définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad (S \wedge t)(\omega) = \inf(S(\omega), t) .$$

a. Montrer que $S \wedge t$ est une v.a.r. positive et déterminer sa fonction de répartition.

Expliciter $P(S \wedge t \in B)$, où $B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}^+})$.

b. On désigne par $\mathcal{G}_t$ la tribu engendrée par $S \wedge t$.

Montrer que l'ensemble $\{ S \geqslant t \}$ appartient à $\mathcal{G}_t$, et que toute v.a.r. $\mathcal{G}_t$-mesurable est constante sur cet ensemble.

3° Soit f une application borélienne de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, supposée dA - intégrable.

a. Montrer que $f(S)$ est P-intégrable, et trouver un représentant de l'espérance conditionnelle de $f(S)$ par rapport à la tribu $\mathcal{G}_t$, lorsque t est supérieur ou égal à c.

b. Si t est strictement plus petit que c, montrer qu'un représentant de l'espérance conditionnelle de $f(S)$ par rapport à la tribu $\mathcal{G}_t$ est donné par la v.a.r.

$$n^f(t, \ S \wedge t),$$

où n^f est une application de $[0, c[\times [0, c[$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, définie par

$$n^f(t, u) = f(u) \qquad \text{si} \quad u < t,$$

$$n^f(t, u) = \frac{1}{1 - A(t^-)} \int_{[t, \infty]} f dA \qquad \text{si} \quad u \geqslant t.$$

En déduire la fonction de répartition de la loi conditionnelle de S par rapport à $S \wedge t$.

Montrer que n^f est $\mathcal{B}([0, c[) \otimes \mathcal{B}([0, c[)$-mesurable.

c. Expliciter le calcul précédent lorsque S suit la loi exponentielle de paramètre $\mu(\mu > 0)$, c'est-à-dire la loi dont la densité de probabilité est définie par :

$$u \longmapsto \mu e^{-\mu u} \quad \text{si} \quad u > 0\,; \qquad u \longmapsto 0 \quad \text{si} \quad u \leqslant 0.$$

On mettra en évidence une fonction n^f_μ de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$-mesurable, telle que $n^f_\mu(t, S \wedge t)$ soit un représentant de $E[f(S) \mid \mathcal{G}_t]$.

4° On considère une suite $(T_n\,;\, n \in \mathbb{N}^*)$ de v.a.r. indépendantes qui suivent toutes une loi exponentielle; on désigne par $\lambda_n\,(\lambda_n > 0)$ le paramètre de la loi de T_n.

On pourra poser

$$\mu_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

On note T^*_n la v.a.r. définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad T^*_n(\omega) = \inf_{1 \leqslant i \leqslant n} (T_i(\omega)).$$

a. Quelle est la loi de T^*_n?

b. Montrer que, si la série de terme général λ_n diverge, T^*_n converge dans $L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et P p.s. vers zéro.

c. Montrer que les v.a.r. T^*_{n-1} et T_n $(n > 1)$ sont indépendantes.

Montrer que, pour tout u appartenant à $\overline{\mathbb{R}}$, les ensembles

$\{T^*_n \leqslant u\}$ et $\{T_n \leqslant T^*_{n-1}\}$ sont indépendants.

En déduire l'indépendance des v.a.r. $\mathbf{1}_{\{T_n \leqslant T^*_{n-1}\}}$ et T^*_n.

d. Soit f une application borélienne de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, telle que :

$$E[\,|f(T_n)|\,] < +\infty.$$

Montrer que les v.a.r. $f(T_n)$ et $n^f_{\lambda_n}(T^*_{n-1}, T^*_n)$ ont même espérance conditionnelle par rapport à T^*_n. (La fonction $n^f_{\lambda_n}$ a été définie à la question 3°.)

En déduire $E[f(T_n) \mid T^*_n]$, et déterminer par sa fonction de répartition la loi conditionnelle de T_n par rapport à T^*_n.

DEUXIÈME PARTIE

Les notations sont les mêmes que celles de la première partie.

1° *a.* Montrer que, si s et t sont deux éléments de $\overline{\mathbb{R}^+}$ tels que

$$s < t, \quad \text{on a} : \quad \mathcal{G}_s \subset \mathcal{G}_t.$$

Montrer que $S \wedge t$ est mesurable par rapport à $\bigvee_{s<t} \mathcal{G}_s$.

En déduire que $\mathcal{G}_t = \bigvee_{s<t} \mathcal{G}_s$.

b. On pose : $\mathcal{F}_t = \bigwedge_{s>t} \mathcal{G}_s$ si $t \in \mathbb{R}^+$,

et $\mathcal{F}_\infty = \mathcal{G}_\infty$.

Montrer que les v.a.r. $\mathcal{F}_t$ - mesurables sont constantes sur l'ensemble $\{ S > t \}$, et expliciter toutes les v.a.r. $\mathcal{F}_t$ - mesurables.

c. Montrer que :
$$\mathcal{F}_t = \bigwedge_{s > t} \mathcal{F}_s \qquad (t \in \mathbb{R}^+)$$
$$\mathcal{G}_t = \bigvee_{s < t} \mathcal{F}_s \qquad (t \in \mathbb{R}^+)$$
$$\mathcal{G}_\infty = \mathcal{F}_\infty = \bigvee_{s \in \mathbb{R}^+} \mathcal{F}_s$$

et que $\mathcal{F}_\infty$ est identique à la tribu engendrée par S.

2° On considère l'espace produit $\Omega \times \overline{\mathbb{R}^+}$, muni de la tribu produit $\mathcal{F}_\infty \otimes \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}^+})$.

Soit f une application borélienne de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, dA - intégrable.

a. Montrer qu'il existe une application, N^f, de $\Omega \times \overline{\mathbb{R}^+}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, $\mathcal{F}_\infty \otimes \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}^+})$ - mesurable, telle que :

i. pour tout t de $\overline{\mathbb{R}^+}$, $N^f(\bullet, t)$ est un représentant de $E[f(S) \mid \mathcal{G}_t]$;

ii. pour tout t de $\overline{\mathbb{R}^+}$, $N^f(\bullet, t)$ est P - intégrable, et, pour tout $s < t$, $(s \in \mathbb{R}^+)$, $N^f(\bullet, s)$ est un représentant de $E[N^f(\bullet, t) \mid \mathcal{G}_s]$;

iii. il existe un élément C de $\mathcal{F}_\infty$, P - négligeable, que l'on déterminera, tel que si $\omega \notin C$, l'application

$t \longmapsto N^f(\omega, t)$ est continue à gauche sur $\overline{\mathbb{R}^+}$.

b. Montrer, de même, qu'il existe une application, M^f, de $\Omega \times \overline{\mathbb{R}^+}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, $\mathcal{F}_\infty \otimes \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}^+})$ - mesurable, telle que :

i. pour tout t de $\overline{\mathbb{R}^+}$, $M^f(\bullet, t)$ est un représentant de $E[f(S) \mid \mathcal{F}_t]$;

ii. pour tout t de $\overline{\mathbb{R}^+}$, $M^f(\bullet, t)$ est P - intégrable et, pour tout $s < t$ $(s \in \mathbb{R}^+)$, $M^f(\bullet, s)$ est un représentant de $E[M^f(\bullet, t) \mid \mathcal{F}_s]$;

iii. si $\omega \notin C$, l'application $t \longmapsto M^f(\omega, t)$ est continue à droite sur $\mathbb{R}^+$, et, pour tout t de $\overline{\mathbb{R}^+}$, $M^f(\omega, t^-) = N^f(\omega, t)$.

c. Montrer que $M^f(\bullet, t)$ converge p.s. et dans $L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ vers $f(S)$, si t tend vers c par valeurs inférieures.

3° On pose $m_f(t) = \dfrac{1}{1 - A(t)} \displaystyle\int_{]t, \infty]} f dA$ si $0 \leqslant t < c$.

Si $r \in \mathbb{R}^+$, on définit le nombre t_r par :
$$t_r = \inf \{ t \mid 0 \leqslant t < c, \ | m_f(t) | > r \},$$
si cet ensemble n'est pas vide; sinon, on pose $t_r = c$.

Par ailleurs, on suppose, dans cette question, que :
$$\forall \omega \in \Omega, \quad S(\omega) \leqslant c.$$

On désigne par M_f^* l'application de Ω dans $\overline{\mathbb{R}}$ définie par :
$$\forall \omega \in \Omega, \quad M_f^*(\omega) = \sup_{t \in \overline{\mathbb{R}^+}} | M^f(\omega, t) |$$

a. Montrer que l'ensemble $\{ M_f^* > r \}$ est la réunion des deux ensembles :
$$\{ S > t_r \} \quad \text{et} \quad \{ S \leqslant t_r \} \cap \{ | f(S) | > r \}.$$

En déduire que M_f^* est une v.a.r. $\mathcal{F}_\infty$ - mesurable.

b. Montrer que si t_r est strictement inférieur à c,
$$P(S > t_r) \leqslant \frac{1}{r} E[\mathbf{1}_{\{S > t_r\}} |f(S)|].$$

Établir ensuite que
$$P(M_f^* > r) \leqslant \frac{1}{r} E[| f(S) |].$$

c. Soit $(f_n ; n \in \mathbb{N}^*)$, une suite d'applications boréliennes de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, dA-intégrables, qui convergent vers f dans $L^1(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}), dA)$.

Montrer qu'on peut extraire de la suite $(f_n ; n \in \mathbb{N}^*)$ une sous-suite $(f_{k_n} ; n \in \mathbb{N}^*)$, telle que la suite $M_{f_{k_n}}^*$ converge P p.s. vers M_f^*, si n tend vers $+\infty$.

On note

$$\mathrm{I} = \{ \omega \mid \lim_{n \to +\infty} \mathrm{M}^*_{f_{k_n}}(\omega) \neq \mathrm{M}^*_f(\omega) \}.$$

Montrer que pour tout $\omega \notin \mathrm{I} \cup \mathrm{C}$, et pour tout $t \in \overline{\mathbb{R}^+}$:

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{M}^{f_{k_n}}(\omega, t) = \mathrm{M}^f(\omega, t) \quad \text{et}$$

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{N}^{f_{k_n}}(\omega, t) = \mathrm{N}^f(\omega, t).$$

TROISIÈME PARTIE

On rappelle que cette partie est indépendante des deuxième et quatrième parties.

On considère une suite $(\mathrm{T}_n \,;\, n \in \mathbb{N}^*)$ de v.a.r. définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, indépendantes, et de loi commune la loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un nombre strictement positif donné. (La définition de la loi exponentielle a été rappelée à la question 3° *c.* de la première partie.)

On construit alors la suite $(\mathrm{S}_n \,;\, n \in \mathbb{N})$ de v.a.r., de la façon suivante :

$$\mathrm{S}_0 = 0, \quad \mathrm{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{T}_i \qquad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Et, pour tout t de $\mathbb{R}^+$, on pose :

$$\mathrm{N}(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbf{1}_{\{\mathrm{S}_n \leqslant t\}}$$

On désigne par $\mathcal{C}_0$ la tribu $\sigma(\mathrm{S}_0)$, par $\mathcal{C}_n$ la tribu $\sigma(\mathrm{S}_0, \mathrm{S}_1, \ldots, \mathrm{S}_n)$, par $\mathcal{C}_\infty$ la tribu $\sigma(\mathrm{S}_0, \mathrm{S}_1, \ldots, \mathrm{S}_n, \ldots)$, et enfin par $\mathcal{F}_t (t \in \mathbb{R}^+)$ l'ensemble des éléments D de $\mathcal{A}$, tels que :

pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe $\mathrm{B}_n \in \mathcal{C}_n$, vérifiant :

$$\mathrm{D} \cap \{ \mathrm{N}(t) = n \} = \mathrm{B}_n \cap \{ \mathrm{N}(t) = n \}.$$

On admettra que $\mathcal{F}_t$ est une sous-tribu de $\mathcal{C}_\infty$.

1° *a.* Calculer la densité de probabilité du vecteur aléatoire

$$(\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2, \ldots, \mathrm{S}_n).$$

b. Montrer que $\mathrm{N}(t)$ est une v.a.r. $\widehat{\mathcal{F}}_t$ - mesurable qui suit la loi de Poisson de paramètre λt.

c. Dans cette question, k désigne un élément de $\mathbb{N}^*$.

Montrer que $\dfrac{\mathrm{N}(k)}{k}$ converge en loi, en probabilité et dans $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ vers λ, lorsque k devient infini.

Montrer que, dans les mêmes conditions, $\dfrac{\mathrm{N}(k) - \lambda k}{\sqrt{k}}$ converge en loi vers une loi limite que l'on précisera.

Peut-on obtenir ce dernier résultat en appliquant le théorème central limite (dit aussi théorème de convergence vers la loi de Gauss, ou encore de Moivre-Laplace)?

2° *a.* Montrer que, pour tout B_n de la tribu $\mathcal{C}_n$, pour tout t et pour tout u de $\mathbb{R}^+$:

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}_n \cap \{ \mathrm{N}(t) = n \} \cap \{ \mathrm{N}(t+u) - \mathrm{N}(t) \geqslant 1 \})$$
$$= (1 - e^{-\lambda u})\, \mathrm{E}[\mathbf{1}_{\mathrm{B}_n} \mathbf{1}_{\{\mathrm{S}_n \leqslant t\}}\, e^{-\lambda(t - \mathrm{S}_n)}]$$

En déduire que les événements $\mathrm{B}_n \cap \{ \mathrm{N}(t) = n \}$ et $\{ \mathrm{N}(t+u) - \mathrm{N}(t) \geqslant 1 \}$ sont indépendants.

b. On pose $\mathrm{R}(t) = \mathrm{S}_{\mathrm{N}(t)+1} - t$.

Déduire de *a.* que $\mathrm{R}(t)$ est une v.a.r. $\mathcal{C}_\infty$ - mesurable, indépendante de $\widehat{\mathcal{F}}_t$, qui suit la loi exponentielle de paramètre λ.

c. Montrer que, plus généralement, les v.a.r.

$$\mathrm{R}(t), \quad \mathrm{T}_{\mathrm{N}(t)+2}, \ldots, \mathrm{T}_{\mathrm{N}(t)+k}, \ldots$$

constituent une suite de v.a.r. indépendante de $\widehat{\mathcal{F}}_t$.

Montrer que c'est une suite de v.a.r. indépendantes, de même loi, ayant pour loi commune la loi exponentielle de paramètre λ.

d. On pose :

$$\overline{N}_t(u) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbf{1}_{\{ S_{N(t)+n} - t \leqslant u \}} \qquad \text{pour tout} \quad u \in \mathbb{R}^+.$$

Montrer que $\overline{N_t}(u)$ est, pour tout u de $\mathbb{R}^+$, une v.a.r. indépendante de $\widehat{\mathcal{F}}_t$, de même loi que $N(u)$, égale à $N(t+u) - N(t)$.

En déduire que si $u_1, u_2, \ldots, u_k$ sont des éléments de $\mathbb{R}^+$, les v.a.r. $N(u_1)$, $N(u_1 + u_2) - N(u_1)$, $\ldots$, $N(u_1 + u_2 + \ldots, u_k) - N(u_1 + u_2 + \ldots, u_{k-1})$ sont indépendantes.

3° On pose $L(t) = t - S_{N(t)}$.

a. Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}^+$ tel que $0 < x \leqslant t$,

$$P(t - S_{N(t)} \geqslant x) = P(R(t-x) > x).$$

En déduire que la loi de $L(t)$ est la même que celle de $T_1 \wedge t$.

b. Plus généralement, on pose, pour tout k de $\mathbb{N}^*$:

$L_k(t) = \inf \{ s \mid 0 \leqslant s \leqslant t ;\ N(t) - N(t-s) = k \}$ si $N(t) \geqslant k$,

$L_k(t) = t$ si $N(t) < k$.

Montrer que :

$$L_k(t) = \inf \{ s \mid 0 \leqslant s \leqslant t,\ N(t-s) = \sup (N(t) - k, 0) \}$$

et que : $L_k(t) = \sup (t - S_{N(t)+1-k}, 0)$.

En déduire que la loi de $L_k(t)$ est la même que celle de $S_k \wedge t$.

QUATRIÈME PARTIE

(Cette partie est indépendante de la troisième partie, mais utilise les notations et résultats des deux premières parties.)

On rappelle que S est une v.a.r. strictement positive, de fonction de répartition A. Dans toute cette partie, nous supposerons que

$$\forall\, \omega \in \Omega,\ S(\omega) < c.$$

On note B la fonction définie sur $\overline{\mathbb{R}^+}$, croissante et continue à gauche, définie par $B(u) = A(u^-)$.

1° On définit une nouvelle application borélienne de $\overline{\mathbb{R}^+}$ dans $\overline{\mathbb{R}^+}$ par :

$$\alpha(t) = \int_{]0,t]} \frac{dA}{1-B}$$

a. Montrer que α est une fonction croissante, continue à droite, et que $\alpha(t)$ est fini si $t < c$.

En déduire que α est la fonction de répartition d'une mesure positive σ-finie sur $[0, c[$.

b. Montrer que, si h est une fonction borélienne de $\overline{\mathbb{R}^+}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, positive ou dA-intégrable,

$$E[h(S)] = E\left[\int_{]0,S]} h\,d\alpha \right]$$

Calculer $E[\alpha(S)]$.

c. Considérons deux fonctions boréliennes de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, positives ou telles que $\int f^2\,dA$ et $\int h^2\,dA$ soient finis.

Montrer que

$$E[N^f(\bullet, S)\ h(S)] = E[f(S) \int_{]0,S]} h\,d\alpha]$$

où $N^f(\bullet, \bullet)$ est l'application $\mathcal{F}_\infty \otimes \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}^+})$-mesurable introduite dans la deuxième question de la deuxième partie.

2° Pour tout $u < c$, pour tout $t \in \overline{\mathbb{R}^+}$, on pose :

$$q_u(t) = \mathbf{1}_{\{u \leqslant t\}} - \alpha(t \wedge u).$$

$q_u(t)$ est la différence de deux fonctions de répartition continues à droite et croissantes, finies car $u < c$.

On désigne par $Q(\bullet, t)$ la v.a.r. définie par :

$$Q(\omega, t) = \mathbf{1}_{\{S(\omega) \leqslant t\}} - \alpha[t \wedge S(\omega)] \quad \text{pour tout } t \in \overline{\mathbb{R}^+},$$

et on note $\int_{]0,t]} f dQ(\omega, \bullet)$ la v.a.r. définie par :

$$f(S(\omega))\, \mathbf{1}_{\{S(\omega) \leqslant t\}} - \int_{]0, t \wedge S(\omega)]} f d\alpha$$

lorsque f est une fonction borélienne de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\mathbb{R}$, positive ou dA-intégrable.

a. Montrer que $\sup\limits_t E\,|\,Q(\bullet, t)\,| \leqslant 2$, et que $Q(\bullet, t)$ est une v.a.r. $\mathcal{F}_t$-mesurable, d'espérance nulle.

b. Montrer que, pour tout u de $\mathbb{R}^+$:

$$P(S > u) = E[\alpha(S) - \alpha(S \wedge u)]$$

En déduire que pour tout u de $\mathbb{R}^+$, la v.a.r. $Q(\bullet, \infty) - Q(\bullet, u)$ a une espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}_u$, qui est nulle.

Montrer ensuite que $Q(\bullet, u)$ est un représentant de $E[Q(\bullet, \infty)\,|\,\mathcal{F}_u]$ et mettre en évidence une fonction g, de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, borélienne, telle que :

$$\forall\, u \in \mathbb{R}^+,\ Q(\bullet, u) = M^g(\bullet, u)\,.$$

c. Plus généralement, si f est une application borélienne de $\overline{\mathbb{R}^+}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, dA-intégrable, montrer que l'application $\bar{f}$ de $\overline{\mathbb{R}^+}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ définie par :

$$\bar{f}(x) = f(x) - \int_{]0, x]} f d\alpha \qquad \text{si} \quad 0 < x < c$$

$$\bar{f}(x) = 0 \qquad \text{si} \quad x \leqslant 0 \quad \text{ou} \quad x \geqslant c$$

est une fonction borélienne dA-intégrable et que

$$E[f(S)\, \mathbf{1}_{\{S > u\}}] = E\left[\int_{]u \wedge S, S]} f d\alpha\right].$$

En déduire que $\int_{]0, t]} f dQ(\bullet, \bullet)$ est un représentant de l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}_t$ de la v.a.r.

$$f(S) - \int_{]0, S]} f d\alpha = \bar{f}(S)$$

puis, que, si $t < c$:

$$\frac{1}{1 - A(t)} \int_{]t, c[} f dA = \int_{]0, t]} f d\alpha.$$

3° On demande d'admettre que, pour tout t de $\overline{\mathbb{R}^+}$, $t < c$, la relation suivante est vérifiée :

$$\frac{1}{1 - A(t)} = 1 + \int_{]0, t]} \frac{dA}{(1 - A)(1 - B)}.$$

a. Soit f une application de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, dA-intégrable et satisfaisant à $\int f dA = 0$.

Utiliser le théorème de Fubini pour établir que : pour tout t de $\mathbb{R}^+$ strictement plus petit que c, $m_f(t) = \int_{]0, t]} [m_f(\bullet) - f] d\alpha$ (où m_f est la fonction introduite dans la deuxième partie, 3° *a.*).

En déduire que $M^f(\omega, t) = \int_{]0, t]} (f - m_f)\, dQ(\omega, \bullet)$.

b. Soit h une application de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, dA-intégrable.

Montrer que si, pour tout t de $\overline{\mathbb{R}^+}$,

$$\int_{]0, t]} h dQ(\bullet, \bullet) = 0 \quad \text{p.s.},$$

h est nulle dA p.s.

En déduire que si f satisfait aux hypothèses de la question *a.*, il existe une fonction g de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, dA-intégrable, unique au sens de l'égalité dA p.s., telle que : il existe un ensemble négligeable I, tel que pour tout $\omega \notin$ I et tout t de $\overline{\mathbb{R}^+}$,

$$M^f(\omega, t) = \int_{]0, t]} g dQ(\omega, \bullet)$$

c. Soit h une application borélienne de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, dA - intégrable. Pour tout $\omega \in \Omega$, calculer la discontinuité au point $S(\omega)$ de l'application qui, à tout élément t de $[0, c[$, associe

$$\int_{]0, t]} h dQ(\omega, \bullet)$$

Montrer ensuite que, si f est une application borélienne dA - intégrable satisfaisant à $M^f(\bullet, S) = N^f(\bullet, S)$, f est nulle dA p.s.

RAPPORT SUR L'EPREUVE DE PROBABILITES ET STATISTIQUES

1. Thème du sujet

L'objet du problème est d'établir que toutes les martingales par rapport à la famille de tribus engendrées par un processus ponctuel à un seul saut, s'expriment comme des intégrales par rapport à une martingale fondamentale, qui est, pour chaque un processus à variation finie.

Ce texte a été construit à partir de l'article de MM. CHOU et MEYER : «Sur la présentation des martingales comme intégrales stochastiques dans les processus ponctuels». Séminaire de Probabilités IX. Lect. Notes in Math. Springer Verlag n°465.

La troisième partie, pratiquement indépendante du reste, a été jointe par souci de ne pas défavoriser les candidats moins familiarisés avec le maniement des tribus.

2. Résumé de la solution

(Il ne s'agit que d'indications relatives à certaines questions).

PARTIE I

3° (les questions précédentes sont évidentes)

a) Si $t \geqslant c$, $S = S \wedge t$ P.p.s, et $f(S \wedge t)$ convient comme représentant.

b) Si $t < c$, $P(S \geqslant t) > 0$. La v.a.r $f(S)\, \mathbf{1}_{\{S<t\}}$ est $\mathcal{G}_t$ mesurable.

Sur $\{S \geqslant t\}$, un représentant sera constant et égal à $\dfrac{E(f(S)\, \mathbf{1}_{\{S \geqslant t\}})}{P(S \geqslant t)}$

• Par définition, la fonction de répartition de la loi conditionnelle est égale à : $n^{[\cdot,x]}_{t,S\wedge t}$,

• $n^f(t,c)$ est continue à gauche sur $[0,c[$ donc $\mathcal{B}([0,c[)\otimes\mathcal{B}([0,c[)$ mesurable tout comme $1_{\{u<t\}}, f(t), f(u)$.

4° a) Très classique : exponentielle de paramètre μ_n

b) La convergence u^1 est évidente, et entraîne ici la cv. p.s car la suite est décroissante.

c) Un calcul simple à partir des lois des v.a.r. indépendantes T^*_{n-1}, T_n montre:

$$P(T_n^*\leqslant u, T_n\leqslant T^*_{n-1}) = \frac{\lambda_n}{\mu_n}(1-\exp -\mu_n u) = P(T_n\leqslant T^*_{n-1})P(T_n^*\leqslant u)$$

(faire $u=+\infty$) , et cette relation est vraie pour tout intervalle.

La classe des intervalles étant stable par intersection (fondamental) et engendrant la tribu borélienne, le théorème d'unicité entraîne l'indépendance cherchée.

d) Les v.a. $f(T_n)$ et $n^f_{\lambda_n}(T^*_{n-1},T^*_n)$ ne diffèrent que sur $\{T^*_n\geqslant T^*_{n-1}\}$

Si g est borélienne bornée, $E(g(T^*_n)f(T_n)1_{\{T^*_{n-1}\leqslant T^*_n\}})$ s'écrit :

$$E(g(T^*_{n-1})\int_{[T^*_{n-1},+\infty]} f(y)e^{-\lambda_n y}dy)$$

$$=E(g(T^*_{n-1})\ 1_{\{T^*_{n-1}\leqslant T_n\}}\ e^{\lambda_n T^*_{n-1}}\int_{[T^*_{n-1},+\infty[}f(y)e^{-\lambda_n y}dy)$$

(indépendance de T^*_{n-1}, T_n)

$$=E(g(T^*_n)\ 1_{\{T^*_{n-1}\leqslant T^*_n\}}\ n^f_{\lambda_n}(T^*_{n-1},T^*_n))$$

On en déduit aisément d'après 4° c) que :

$$E(f(T_n)/T^*_n) = f(T^*_n)\frac{\lambda_n}{\mu_n} + \frac{\mu_{n-1}}{\mu_n}\int f(T^*_n+u)e^{-\lambda_n u}du \quad \text{P. p.s.}$$

PARTIE II

1° a) Il suffit de noter que : $S\wedge s=(S\wedge t)\wedge s$ et

si t_n croit vers t, $S\wedge t=\lim_n(S\wedge t_n)$

b) Par l'absurde : Si y, $\mathcal{F}_t$ - mesurable n'est pas constante sur $\{S>t\}$.

Il existe w et w' tels que : $y(w)\neq y(w')$ et $S(w)>t$, $S(w')>t$

Soit $s=\inf(S(w),S(w'))$. y est constante sur $\{S\geqslant s\}$ d'où la contradiction.

$1_{\{S>t\}}$, et $h(s)\ 1_{\{S\leqslant t\}}$ sont manifestement $\mathcal{F}_t$ - mesurables.

Toute v.a. $\mathcal{F}_t$ - mesurable est donc de la forme $h(S)1_{\{S\leqslant t\}}+\lambda 1_{\{S>t\}}$

c) $\mathcal{F}_u\leqslant \mathcal{G}_t\leqslant\mathcal{F}_t\leqslant\mathcal{G}_s\leqslant\mathcal{F}_s$ si $u<t<s$.

Les égalités cherchées en résultent immédiatement.

2° a) D'après I, 3° il est naturel de poser

$$N^f(\cdot\ t)=n^f(t,S\wedge t) \text{ si } t<c$$
$$=f(t\wedge S) \text{ si } t\geqslant c.$$

La seule difficulté est la continuité à gauche en c,

Si $A(c-)<1$, $n^f(t,u)$ se prolonge par continuité à gauche en c en $f(c)$.

$N^f(\cdot,t)$ est alors continue à gauche sauf sur $\{S>c\}$

Si $A(c-)=1$, sauf sur $\{S\geqslant c\}$ $N^f(w,t)$ est constante au voisinage de c.

b) L'énoncé suggère de définir M^f comme le processus des limites à droite de N^f

$$M^f(\cdot,t)=f(S)\ 1_{\{S\leqslant t\}}+1_{\{S>t\}}\frac{1}{(1-A(t))}\int_{]t,+\infty]}f\,dA \text{ si } t<c$$

$$= f(S)1_{\{S\leqslant t\}} \quad \text{si } t\geqslant c.$$

Un calcul analogue à I 3 b) montre que $M^f(\cdot\ t)$ est un représentant de

$E(f(S)/\mathcal{F}_t)$. On vérifie comme en II 2° a) que la limite à gauche de M^f en c est $N^f(\cdot,c)$ sauf sur C.

c) La convergence p.s vient d'être établie.

Pour établir la convergence L^1, on remarque que :

Si $A(c-)=1$, $E(|f(S)-M^f_t|)\leqslant 2\ E(|f(S)|\ 1_{\{c>S>t\}})$ qui tend vers zéro lorsque t tend vers c par valeurs inférieures

Si $A(c-)<1$, $E(|f(S)-M_t^f|) \leqslant P(S=c)\,|f(c) - \dfrac{E(f(S)\,1_{\{S>t\}})}{P(S>t)}|$

$$+ E|f(S)\,1_{\{c>S>t\}}| \quad + P|t<S<c) \; \frac{E(|f(S)|\,1_{\{S>t\}})}{P(S>t)}$$

3° a) Si $t_r < S$, $t_r < c$, et il existe $t<S$ t.q $|m_f(t)|>r$, donc $M_f^* > r$.

Si $t_r \geqslant S$, pour tout $t<S$, $|m_f(t)\leqslant r$ et $\{M^*_f > z\} = \{|f(S)|>r\}$

d'où le résultat est la mesurabilité.

b) Si $t_r < c$, $|m_f(t_r)| \geqslant r$ par continuité à droite. Il suffit alors d'exprimer $m_f(t_r)$.

c) Pour que l'énoncé soit tout à fait correct, il faut supposer $f \equiv 0$.

La majoration précédente montre que $M^*_{f_n}$ converge dans L^1 vers zéro.

On peut donc extraire une sous-suite qui converge p.s vers zéro, c'est-à-dire qu'en dehors de l'ensemble I, la suite $M_{f_{k_n}}(\cdot, w)$ converge uniformément vers zéro.

Il en est donc de même de $N_{f_{k_n}}$.

PARTIE III

1° Très classique. Dans tous les cours sur le processus de Poisson.

2° a) $P(B_n \cap \{N(t)=n\} \cap \{N(t+u)-N(t) \geqslant 1\})$

$= P(B_n \cap \{S_n \leqslant t\} \cap \{t-S_n < T_{n+1} \leqslant t+u-S_n\})$

$= E(1_{B_n \cap \{S_n \leqslant t\}}\,(e^{-\lambda(t-S_n)} - e^{-\lambda(t+u-S_n)})$

(T_{n+1} indépendante de $\mathscr{C}_n$)

b) Il suffit de remarquer que $\{R(t) \leqslant u\} = \{N(t+u) - N(t) \geqslant 1\}$.

c) et d) se déduisent alors facilement.

3° a) $\{R(t-x)>x\} = \{N(t) - N(t-x)\} = \{t - S_{N(t)} \geqslant x\}$ si $t>x$.

b) Les relations à établir ne sont vraies que sur $\{N(t) \geqslant k\}$. Elles sont alors évidentes.

$\{L_k(t) \geqslant x\} = \{N(t)<k\} \cup \{N(t) \geqslant k,\ N(t) - N(t-x) < k\}$

$= \{N(t) - N(t-x) < k\} \quad = \{\bar{N}_{t-x}(x) < k\}$ si $t>x$.

D'après III d) la probabilité de ce dernier événement est égale à celle de $\{S_k \leqslant x\}$.

Comme $P(L_k(t)>t) = 0$, on vérifie que $L_k(t)$ suit la même loi que $S_k \wedge t$.

PARTIE IV

1° a) Comme $B(t)<1$, si $t<c$, $\alpha(t)$ est croissante, continue à droite et finie sur $[0, c[$.

b) Si h est positive, le théorème s'établit aisément par Fubini.

On en déduit alors que si h est dA-intégrale, $h\,1_{]0,\cdot]}$ est $dA \times d\alpha$ intégrable et le calcul précédent reste valable.

D'où $E(\alpha(S)) = E(1) = 1$.

c) Même calcul à l'aide de Fubini.

Si f et h sont dans L^2, il suffit de vérifier que $N^{|f|}(S)$ est dans L^2.

Remarquons que : $N^{|f|}(S) \leqslant M^*_{|f|}$ d'après II 3° et que

$$E(M^{*}_{|f|}{}^2) \leqslant 2\int_0^\infty r P(M^*_{|f|}>r)\,dr$$

$$\leqslant 2\int_0^\infty r P(|f(S)|>r)\,dr + 2\int_0^\infty E(1_{\{S>t_r\}}|f(S)|)\,dr$$

$$\leqslant 2\; E(|f(S)|^2 + 2\; E(|f(S)|\,M^*_{|f|}) \leqslant 3\; E(|f(S)|\,M^*_{|f|})$$

car $|f(S) \leqslant M^*_f$.

Supposons f bornée, d'après l'inégalité de Schwarz $E(M^*_{|f|}{}^2) \leqslant K E(|f(S)|^2)$

Par suite, pour tout r, $E(N^{|f|\wedge r}(S)^2 \leqslant E((|f|\wedge r)(S)^2)$

Lorsque r tend vers $+\infty$ $N^{|f|\wedge r}(S)$ croit vers $N^{|f|}(S)$ et l'inégalité ci-dessus montrer que : $E(N^{|f|}(S)^2) \leqslant E(f^2(S))$

2° a) $\sup_t \mathrm{E}\,|Q(t)| \leqslant 1 + \sup_t \mathrm{E}(\alpha(t \wedge S) \leqslant 1 + \mathrm{E}(\alpha(S)) = 2$

et d'après IV 1° b) $\mathrm{P}(S \leqslant t) = \mathrm{E}(\alpha(S \wedge t))$.

b) La première formule est immédiate.

$Q(\infty) - Q(u) = 1_{\{S > u\}} - [\alpha(S) - \alpha(S \wedge u)]$ est nulle si $S \leqslant u$, et d'espérance nulle. D'après II 2° b) son espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{G}_u$ est nulle.

Il suffit de prendre $g = 1 - \alpha$.

c) Tout à fait analogue à la question précédente.

3° a) Puisque $\int f\,d\mathrm{A} = 0$, d'après Fubini,

$$-m_t^f = \int_{]0,t]} f\,d\mathrm{A} + \int_{]0,t]} f\,d\mathrm{A} \times \int_{]0,t]} \frac{d\mathrm{A}}{(1-\mathrm{A})(1-\mathrm{B})}$$

$$= \int f\,d\mathrm{A} + \int_{]0,t]} f(y)\,d\mathrm{A}(y)\left(\frac{1}{1-\mathrm{B}(y)} - 1\right)$$

$$+ \int_{]0,t]} \frac{d\mathrm{A}(x)}{1-\mathrm{B}(x)}\,\frac{1}{1-\mathrm{A}(x)} \int_{]0,x]} f\,d\mathrm{A}$$

$$= \int (f - m_f)\,d\alpha$$

et $\mathrm{M}_t^f = m_t^f\, 1_{\{t < S\}} + f(S)\, 1_{\{t \geqslant S\}}$

$$= \int_{]0,t \wedge S]} (m_f - f)\,d\alpha\; 1_{\{t<S\}} + [f(S) - m^f(S)]\; 1_{\{t \geqslant S\}}$$

$$+ 1_{\{t \geqslant S\}} \int_{]0,t \wedge S]} (m_f - f)\,d\alpha$$

b) Si $\int_{]0,t]} h\,dQ = 0$ p.s., d'après la continuité à droite l'ensemble négligeable peut être choisi indépendant de t.

$\int_{]0,t]} h\,d\alpha = 0$ et $h(s) - \int_{]0,S]} h\,d\alpha = 0$ p.s.

soit encore $\int_{]0,S[} h\,d\alpha = 0$ et donc $h(S) - \dfrac{h(S)}{1-\mathrm{B}(S)}\,(\mathrm{A}(S) - \mathrm{B}(S)) = 0$

c'est-à-dire :

$h(S) = 0$ car $\mathrm{A}(S) < 1$.

c) Le saut vaut $h(S)\,\dfrac{1-\mathrm{A}(S)}{1-\mathrm{B}(S)}$

Nous allons établir que f est $d\mathrm{A}$ p.s. constante

Posons $\hat{f} = f - \int f\,d\mathrm{A}$.

Si $\mathrm{M}^f = \mathrm{N}^f$, $\mathrm{M}^{\hat{f}} = \mathrm{N}^{\hat{f}}$. Or $\mathrm{M}^{\hat{f}} = \int h\,dQ$ avec $h = m_{\hat{f}} - \hat{f}$

Or $h \equiv 0$ $d\mathrm{A}$.p.s donc $\mathrm{M}_t^{\hat{f}} = 0$ P. p.s

mais puisque $m^{\hat{f}} = \hat{f}$ $d\mathrm{A}$p.s. $\mathrm{M}_t^{\hat{f}} = \hat{f}(S \wedge t)$ P. p.s

et donc $\hat{f}(S) = 0$ P. p.s. et f est constante $d\mathrm{A}$p.s

3. Observations générales

Les correcteurs ont constaté une amélioration des notes par rapport à celles de l'année précédente. C'est ainsi que, sur 814 candidats qui ont composé (836 en 1976), il y en a :

- 23 qui ont remis une copie blanche (108 en 1976 !) ;
- 8 qui ont mérité la note 0 (84 en 1976) ;
- 78 qui ont mérité la note 1 (162 en 1976).

La moyenne (copies blanches exclues) est de deux points supérieure à celle de 1976 (8,61 sur 40 contre 6,67 en 1976).

Il ne faudrait toutefois pas en déduire trop hâtivement que le niveau des candidats s'est fortement relevé. L'amélioration que nous constatons tient principalement au fait que les premières questions du problème étaient assez faciles et ont pu ainsi être abordées, avec plus ou moins de bonheur, dans un grand nombre de copies.

Toutefois, beaucoup de candidats ont été déroutés par la définition que l'on donnait de la fonction de répartition qui se trouvait ainsi continue à droite et non plus à gauche comme ils en avaient l'habitude. On doit pourtant pouvoir passer aisément d'une définition à l'autre.

De même, trop de candidats ne font pas la différence entre des variables aléatoires à valeurs dans R et dans $\overline{\mathrm{R}}$ et n'imaginent pas qu'il puisse y avoir une «masse de probabilités» à l'infini.

Enfin, un grand nombre de candidats «déclarent forfait» dès qu'il est question d'espérance conditionnelle et continuent le problème en grapillant de ci de là quelques questions...

4. Observations détaillées

Signalons les principales erreurs commises lors de la résolution des différentes questions.

PARTIE I

Malgré sa facilité, la question 1 a rarement été entièrement bien traitée. C'est ainsi que fort peu de candidats ont pensé à montrer que c est strictement positif (se trompant, pour la plupart, sur la définition de R^{+}).

A la seconde question, beaucoup de difficultés pour montrer que $S\Lambda t$ est une variable aléatoire : ignorance des théorèmes fondamentaux. Peu de valeurs exactes de $P\ (S\Lambda t \in B)$, sans parler des candidats pour lesquels un borélien peut toujours «se ramener» à être un intervalle.

Les difficultés sérieuses commençaient à la troisième question. Tout d'abord, la définition de l'intégrabilité est à revoir... Ensuite, on peut raisonnablement se demander combien il y aurait eu de réponses exactes à la question b) si le résultat n'avait pas été donné dans l'énoncé, la plupart des candidats se contentant (en oubliant fréquemment la G_t –mesurabilité) d'effectuer une vérification souvent peu convaincante. La notion de fonction de répartition d'une loi conditionnelle est rarement connue.

La question 4, en son début du moins, revenait à des choses plus classiques ; pourtant, beaucoup trop de candidats éprouvent des difficultés pour trouver la loi de T_n^* et n'arrivent pas à résoudre les problèmes de convergence. Peu d'entre eux ont vu que l'indépendance des ensembles demandée en c nécessitait un calcul et la plupart n'arrivent pas à en déduire correctement l'indépendance des v.a.r. qui suit. Ensuite, la question d n'a été proprement résolue dans aucune copie.

PARTIE II

Malgré l'indépendance des parties II et III, beaucoup de candidats ont tenu à traiter cette deuxième partie qui était assez délicate et, surtout, qui nécessitait une bonne maîtrise de la notion de tribu. Que de pages touffues pour écrire, souvent à l'envers, des inclusions de tribus et pour arriver, enfin, au résultat que l'énoncé avait le bon goût de formuler !

C'est dire que les correcteurs ont attribué à la première question bien peu de points comparativement au volume qu'elle occupait dans les copies !

A la deuxième question, beaucoup de candidats ont justement vu le lien entre les applications N^f et n^f. La continuité, demandée en iii, était plus délicate et aucune copie ne l'a traitée entièrement.

Pour trouver l'application M^f, il fallait pratiquement refaire le calcul de la question 3.b de la première partie et les quelques candidats qui ont traité cette question ont plus fait appel à leur intuition qu'à un raisonnement logique ; les bonnes idées ont été récompensées.

Enfin, les questions 3.a et 3.b ont été traitées correctement dans quelques copies, la question 3.c n'étant qu'abordée.

PARTIE III

Cette troisième partie, assez classique, aurait dû attirer plus de candidats qui auraient ainsi évité de perdre leur temps dans le maniement défectueux des tribus de la seconde partie.

Si l'on excepte de lourdes bévues (les S_n sont indépendantes, par exemple) probablement dues à une rédaction hâtive en fin d'épreuve, la question 1. a a été souvent bien traitée, avec toutefois une tendance fâcheuse à oublier de préciser le domaine de R^n sur lequel la densité n'est pas nulle. Quelques candidats ont su utiliser la densité obtenue pour trouver la loi de $N(t)$ mais beaucoup ont préféré admettre le résultat, là encore heureusement fourni par l'énoncé, pour traiter, fort mal en général, les problèmes pourtant classiques de convergence et étaler leur ignorance des propriétés élémentaires de la loi de Poisson.

A part le début de la seconde question, la suite de cette troisième partie n'a été traitée dans aucune copie.

PARTIE IV

Sauf dans quelques très rares copies, seule la question 1.a a été abordée et, malgré sa facilité, en général assez mal traitée. Là encore, il s'agit vraisemblablement d'un griffonnage hâtif de dernière minute...

5. Les notes (sur 40)

Nombre de copies corrigées : 814. Copies blanches : 23
Moyenne : 8,61 (copies blanches exclues)

Trois copies ont mérité la note 40, les quatre suivantes obtenant les notes 37, 36, 35 et 34.

429 notes $\geqslant$ 7 ; 263 notes $\geqslant$ 10 ; 199 notes $\geqslant$ 12.

Répartition des notes (copies blanches exclues) par classes d'amplitude 5 :

0	1 à 5	6 à 10	11 à 15	16 à 20	21 à 25	26 à 30	31 à 35	36 à 40
8	311	247	104	62	33	15	6	5

oral

1. OBSERVATIONS DU PRESIDENT DU JURY

- Les 353 candidats admissibles ont été répartis en deux sous-jurys (au lieu de trois en 1976), comportant chacun une commission d'algèbre et une commission d'analyse; la ventilation a été faite d'après les résultats de l'écrit, les candidats classés 1 et 4, 2 et 3 (modulo 4) étant respectivement affectés au premier, second sous-jury. Une rotation des examinateurs a permis d'harmoniser la conception des épreuves, ainsi que leur notation.

- Les épreuves orales ont été plus satisfaisantes que l'année précédente. Cela est dû à la diminution du nombre des admissibles, mais aussi à la solidité des préparations et au sérieux des candidats. Une ombre cependant : six ou sept élèves d'une E.N.S. (de seconde année en général), très bien classés à l'écrit, n'ont obtenu la moyenne à aucune des deux épreuves orales et ont, de ce fait, perdu entre 50 et 100 places à l'oral. S'ils font carrière dans l'enseignement supérieur, cela n'aura peut-être pas d'inconvénient pour eux, mais il n'en serait pas de même s'ils étaient amenés à poser leur candidature à une classe préparatoire, voire à une classe terminale de lycée.

Le tableau suivant montre que, comme les années précédentes, les notes (sur 80) ont été légèrement meilleures en algèbre qu'en analyse :

	Abandons	0 à 7	8 à 15	16 à 23	24 à 31	32 à 39
Algèbre	12	3	23	37	53	36
Analyse	11	7	29	46	53	41

	40 à 47	48 à 55	56 à 63	64 à 71	72 à 79	80
Algèbre	54	75	31	17	12	0
Analyse	53	56	36	11	9	1

Les conseils aux candidats qui émaillent les rapports précédents restent intégralement valables.

2 – EPREUVE D'ANALYSE, MECANIQUE, PROBABILITES

2.1. Observations générales

La plupart des candidats ont compris l'organisation technique de l'oral; les autres subissant par là même un handicap plus lourd. La note est, bien entendu, fonction des connaissances et du talent à organiser la matière sur le sujet retenu, mais aussi des qualités mathématiques et des qualités pédagogiques. On trouve encore trop de candidats à peine audibles marmonnant leur plan et leur exposé, ou (parfois les mêmes !) écrivant de façon illisible, cachant le tableau sans souci de l'auditoire. Par ailleurs, bien des candidats ont une compréhension étroite et stérile des notions qu'ils exposent, au demeurant dans les strictes limites du programme d'oral : il n'y a pas d'enseignement vivant sans recul sur la matière enseignée et sans cette assimilation assez profonde qu'elle oriente très vite dans la résolution d'un exercice assez facile.

Force est aussi de constater la multiplication des plans stéréotypés et le danger d'une certaine sclérose, due pour partie à la permanence des sujets d'une année sur l'autre. Répétons que le jury est ouvert à tout point de vue , les remarques qui suivront, comme celles des années précédentes, ont pour but de signaler des possibilités et non de définir plus explicitement dans le contenu ou la forme l'épreuve orale ; les points de vue ou les présentations originales sont bien accueillis pourvu qu'ils soient cohérents. Compte tenu des divers aspects de l'épreuve, un travail scolastique figé, ou un recueil de recettes ne peuvent servir de préparation à l'oral ; sauf sur quelques points délaissés jusque là (et qu'il est dangereux de négliger !) il s'agit d'interconnecter les connaissances acquises, de les enrichir d'applications et d'exemples et de les comparer : un travail horizontal bien plus qu'une assimilation de sujets entièrement nouveaux ; encore ceux-ci doivent-ils viser surtout à homogénéiser ce niveau de base ; il s'agit aussi d'apprendre à <u>organiser</u> en trois heures une matière <u>connue</u> autour d'un thème, ce qui dépasse en utilité la simple connaissance (moyennant documents) de quelques plans types.

Pour aider les futurs candidats à mieux comprendre l'épreuve nous allons en observer les différentes étapes.

● CHOIX DU SUJET : les couplages étaient prévus en 1977 (*) de telle sorte que les candidats disposent d'un choix réel, portant bien entendu sur le sujet lui-même (ainsi en 1977 pas de couples géométrie-cinématique) mais aussi sur le style : exposé théorique classique, synthèse, exemples... En fait trop de candidats n'ont eu aucun choix réel, du fait d'une préparation incomplète ayant délaissé des parties entières du programme. Le jury a ainsi eu la stupeur de constater qu'un candidat ayant préféré le sujet «applications des développements limités et <u>asymptotiques</u>» à «exemples de tracé de courbes $\rho = f(\theta)$» s'est limité à proposer quelques trivialités théoriques sur les développements limités, avec pour toute application la reconnaissance d'un maximum, et s'est déclaré incompétent à placer une tangente à une courbe en paramétriques proposée par la commission ! Comment se peut-il qu'à défaut de connaissances nettement mémorisées la préparation à l'oral n'ait pas appris à réunir quelque matière sur ce sujet en trois heures ? Ce cas extrême s'est révélé à la suite d'un couplage, pourtant sans malice, ayant de fait enlevé tout choix au candidat ; il est significatif d'une situation inquiétante.

(*) Il va de soi que, pour les concours ultérieurs, le jury se réserve la possibilité d'adopter d'autres règles de couplage.

Bien des candidats devraient pouvoir choisir un sujet un peu technique, demandant de la méthode et des qualités pédagogiques, plutôt qu'un sujet de topologie dont ils connaissent la matière minimale mais sans savoir l'appliquer ! Remarquons d'ailleurs que certains sujets demandent de la culture pour être correctement éclairés (ainsi par exemple (*) 7, 10, 20, 27, 39) ou quelque connaissance des fonctions de variables complexes – du reste au programme de l'écrit – (ainsi 48, 49, 50). Les sujets 38 et 51 révèlent souvent des idées confuses sur le logarithme complexe. D'ailleurs il n'est point jusqu'aux sujets sur les réels (11, 12, 13, 17, 18) qui ne soient l'occasion de déconvenues : mieux vaut avoir réfléchi à la distinction entre propriétés topologiques et métriques, au fait que $\overline{R}$ n'est pas le compactifié d'Alexandroff de R, aux diverses caractérisations et aux manipulations sur les limites supérieures... Les mécompréhensions sur de tels sujets sont fortement sanctionnées.

Les difficultés présentées par les sujets de géométrie et de cinématique sont différentes mais guère supérieures, comme en attestent les notes des quelques candidats ayant pris la peine de réfléchir sérieusement à ces questions. Le jury constate que les sujets de probabilité sont choisis presque uniquement par des candidats de l'option probabilité. Si le jury a quelque indulgence sur les sujets où l'expérience des candidats est en général légère, la géométrie, la cinématique et les probabilités ne sauraient être un refuge : on attend du candidat tout éclaircissement utile sur les notions d'analyse utilisées, et sur les rapprochements possibles avec d'autres parties du programme.

Une fois le sujet choisi, il ne saurait être question de le remplacer par un autre, même voisin ou proposé l'année précédente. Le jury, quant à lui, respecte totalement le choix du sujet, ainsi que celui du niveau auquel il est traité, étant entendu qu'en ce qui concerne les questions posées au candidat les seules limites sont celles du programme.

(*) Les numéros correspondent à la liste des sujets (cf. 2.3.)

● LES NOTES ET LEUR USAGE : le jury tient compte de la manière dont le candidat utilise ses notes. Celles-ci doivent être conçues de façon à limiter l'effort de mémoire ; elles ne peuvent dispenser de l'effort de réflexion. Ainsi, lors du plan, l'usage des notes (qui ne doit jamais être une lecture avec recopie) peut permettre d'éviter oublis et retours en arrière. On conçoit mal que des énoncés fondamentaux (de ceux que l'on recommande aux élèves d'apprendre !) soient lus mot à mot ! Bref, le contenu des notes doit être connu du candidat, celles-ci ne servant que de guide et d'aide-mémoire. Lors de l'exposé, et surtout s'il est long, elles peuvent être utilisées pour des détails techniques ; lors des questions, leur usage doit être exceptionnel, par exemple pour rechercher une précision secondaire demandée par le jury.

● USAGE DES DOCUMENTS : mettons en garde les candidats contre les absurdités auxquelles peuvent amener les mixages abusifs de plusieurs ouvrages au plan ou à la terminologie différentes. Remède pire que le mal : n'utiliser qu'un seul document ; le résultat est souvent sec, sans perspective ni personnalité.

Un exemple de ces dangers : sujet 56 (sous-variétés différentiables de R^2 et de R^3...) que trop de candidats croient pouvoir traiter en extrayant quelques pages d'ouvrages dont ils ignorent la teneur, et sans être capables d'illustrer leurs définitions (à moins qu'exemples et définitions, issus de sources différentes, ne correspondent pas !)

Les documents ne doivent d'ailleurs pas être la source exclusive : dans bien des cas le candidat pourrait faire preuve d'invention personnelle ou utiliser son expérience au moins pour les exemples, ce que le jury apprécie toujours beaucoup.

● PLAN ET PRESENTATION DU PLAN : c'est l'entrée en matière et un élément important pour juger des qualités pédagogiques. Les énoncés doivent être écrits de manière compréhensible et correcte. Le candidat doit rendre sensible l'enchaînement des idées, les explications, quoique brèves (le candidat peut supposer du jury une certaine rapidité de compréhension...), permettant de saisir la démarche adoptée.

Certains sujets (tels 28, 30, 38) ne posent pas d'autre problème que celui de la cohérence de l'ordre de présentation.

D'autres (cf. 36, 41, 49) semblent voués à être déformés, le plan laissant souvent une trop grande place à l'amont ou à l'aval du sujet proprement dit. Si le jury souhaite que le sujet soit d'une part replacé dans son contexte, d'autre part illustré par des applications, il ne faut pas que l'excès conduise, en fait, à traiter une autre question.

Les sujets de synthèse (exemples : 1, 29, 46, 47) donnent trop souvent lieu à un ramassis sans structure, ou à un classement très discutable : en fait ils demandent un sérieux travail de préparation.

Enfin le cas le plus grave reste les sujets d'exemples. Il ne s'agit pas alors d'exposer une théorie. On attend du candidat qu'il présente des exemples, éventuellement en petit nombre s'ils sont suffisamment illustratifs (ainsi les sujets de tracés de courbes peuvent reposer sur trois exemples bien choisis). Le plan peut être très bref (cinq à six minutes) mais ne doit pas consister seulement à énumérer des exemples ; inversement il ne s'agit pas de tout traiter dans le plan ! Le candidat doit expliquer les caractéristiques et l'intérêt des exemples qu'il propose. Dans bien des cas, un bon fil conducteur consistera à classer les exemples suivant la méthode d'obtention ou suivant les idées à illustrer, et à les accompagner de considérations portant sur les aspects particuliers, sur le niveau de généralité et sur les possibilités d'utilisation. On évitera, en particulier, de répéter plusieurs exemples voisins, au risque de laisser dans l'ombre des points importants de la théorie qu'il s'agit d'illustrer.

● QUESTIONS SUR LE PLAN : elles sont de deux types. Les unes sont destinées à lever les malentendus possibles, soit que le candidat ait commis un lapsus, soit que le jury l'ait mal compris et que subsiste un doute ; beaucoup de candidats n'ont pas le calme et la perspicacité nécessaires pour retrouver leurs étourderies et les corriger ou saisir exactement la question posée. Les autres questions portent sur la signification des énoncés et la terminologie utilisée, sur l'organisation logique et les notions supposées connues *a priori*, sur la trame des démonstrations, tous points sur lesquels le candidat doit avoir réfléchi auparavant. Par exemple (pour ce qui est des définitions) les intervalles de R, les notions de valeur d'adhérence, de point d'accumulation, point adhérent, donnent souvent lieu à des questions aux effets redoutables. Pour l'organisation, certains découvrent que leur ordre ne permet pas l'enchaînement des théorèmes (du moins avec les démonstrations qu'ils ont retenues), ou contient un cercle vicieux (dont l'origine peut-être dans les notions de départ).

Si le jury n'exige pas que le candidat ait en tête les démonstrations de tous ses énoncés, du moins attend-il qu'il puisse en préciser la ou les idées essentielles (sans qu'il soit nécessaire d'entrer dans les détails) faute de quoi la structure du plan n'aurait pas grande signification. Ceci ne vaut pas pour quelques théorèmes très difficiles, mais, par exemple, il doit être toujours possible de situer en quelques mots la démonstration adoptée pour le théorème de Bolzano-Weierstrass.

● EXPOSE : un grand soin doit être apporté au choix et à la préparation des exposés proposés au jury. Il n'est pas souhaitable d'en retenir un nombre excessif : se limiter à trois est en général raisonnable, si l'on veut les étudier sérieusement ; le jury constate trop souvent que les déclarations d'égale compétence sur tout point du plan sont en fait des déclarations d'égale incompétence !

Les thèmes des exposés ne doivent pas être pris au hasard : le texte officiel demande que le candidat choisisse les points «qu'il juge importants». En pratique, et dans la mesure du possible, il faut donner un échantillonnage des idées essentielles, ne pas délaisser le coeur du sujet pour ne garder que des aspects marginaux, ne pas sélectionner uniquement des points voisins (ou pire, proposer un théorème, son lemme, son corollaire comme sujets distincts... même si l'ensemble peut constituer un seul exposé). Il est possible, à côté de deux exposés substantiels (cinq à dix minutes) d'en proposer un plus bref ; rappelons aussi qu'un exposé n'est pas automatiquement composé d'une unique démonstration (certains sujets se prêtent plutôt au choix d'une tranche intéressante du plan).

De toute façon, la liste des propositions doit être prévue d'avance et fournie sans tergiverser (certains candidats hésitent et finissent par proposer un sujet qu'ils n'ont pas préparé ; malheur à eux si c'est celui que le jury choisit !)

Le soin, la clarté, l'efficacité sont des éléments importants de la notation de l'exposé, qui doit être compréhensible de manière autonome. Si le jury est amené à intervenir pour autre chose que la rectification d'une étourderie, il est rare que la note atteigne la moyenne.

● QUESTIONS : les réponses aux questions générales ont une grande importance dans la note finale ; les candidats qui par leur attitude, leur lenteur, leurs erreurs dans le plan ou l'exposé, réduisent à presque rien cette phase de l'épreuve, se pénalisent donc d'eux-mêmes.

Les questions posées ont toutes un rapport avec le sujet ou le déroulement antérieur de l'interrogation. Certaines permettent de délimiter la culture du candidat ; des petits exercices servent à contrôler l'application des notions du plan dans des situations très simples, à faire découvrir au candidat un oubli, éventuellement une erreur à propos d'un exemple ou d'un contre-exemple. Quelquefois l'exercice est traité en détails pour juger les qualités techniques ; le plus souvent on se limite aux grandes lignes, révélatrices des qualités d'analyse et d'imagination.

● Le jury souhaite que cette analyse de l'oral permette aux candidats de mieux comprendre ce qu'il attend d'eux. Si les candidats tiennent compte de tous les aspects de l'oral leur préparation sera équilibrée et, du même coup, aura un intérêt tant mathématique que pédagogique ; une préparation déséquilibrée soit vis-à-vis du programme, soit vis-à-vis de l'une des phases de l'oral peut devenir purement artificielle.

2.2. Remarques particulières sur certains sujets

Le lecteur se rapportera aux rapports précédents.

2.3. Liste des exposés d'analyse, de mécanique et de probabilités

1) Applications à l'analyse de la notion de compacité.
2) Exemples d'espaces compacts.
3) Espaces homéomorphes. Exemples et contre-exemples.
4) Connexité. Applications.
5) Théorème du point fixe. Applications.
6) Espaces métriques complets, espaces métriques compacts ; comparaison de ces notions.
7) Exemples d'approximation dans les espaces vectoriels normés.
8) Exemples d'applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés et de normes de telles applications.
9) Espaces vectoriels normés de dimension finie.
10) Géométrie dans un espace vectoriel normé (par exemple convexité, projecteurs, sous-espaces de dimension ou de codimension finie ; cas des espaces de Hilbert).
11) Donner une construction de $\mathbb{R}$; en déduire les principales propriétés de $\mathbb{R}$.
12) Une définition de $\mathbb{R}$ étant choisie, en déduire les propriétés de $\mathbb{R}$.
13) Topologie de la droite numérique $\mathbb{R}$ et de la droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$.
14) Parties connexes de $\mathbb{R}$ et applications entre de telles parties.
15) Propriétés topologiques de $\mathbb{R}^n$; exemples d'utilisation.
16) Limite d'une fonction numérique d'une variable réelle.
17) Suites de nombres réels. Exemples.
18) Limite, limite inférieure, limite supérieure d'une suite dans $\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}$
19) Approximation d'un nombre réel par des rationnels. Fractions continues.
20) Topologie et dénombrabilité : parties dénombrables denses, suites, suites extraites, suites de compacts...
21) Etude sur des exemples de suites numériques définies par une relation de récurrence.
22) Suites définies par une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction à valeurs réelles.
23) Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle ; exemples, contre-exemples.
24) Fonctions à variation bornée ; cas des fonctions croissantes. Applications.
25) Applications réciproques.
26) Fonctions implicites. Applications.
27) Fonctions convexes d'une ou de plusieurs variables réelles.
28) Fonctions convexes d'une variable réelle ; inégalités de convexité.
29) Problèmes de prolongement de fonctions ; exemples.
30) Applications différentiables. Exemples.

31) Fonctions de plusieurs variables réelles : formule des accroissements finis et applications.

32) Différentiabilité d'ordre k des applications d'un ouvert de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$; dérivées partielles.

33) Les différentes formules de Taylor.

34) Problèmes d'extremum.

35) Comparaison des fonctions au voisinage d'un point.

36) Applications des développements limités ou asymptotiques.

37) Fonction logarithme et fonction exponentielle d'une variable réelle.

38) Fonction exponentielle complexe.

39) Exemples de fonctions introduites par une équation fonctionnelle.

40) Fonctions circulaires directes et réciproques.

41) Convergence absolue et semi-convergence des séries ; sommation par paquets, réindexation.

42) Illustrer par des exemples et des contre-exemples la théorie des séries numériques.

43) Continuité, dérivabilité, intégrabilité de la somme d'une série de fonctions d'une variable réelle.

44) Comparaison d'une série et d'une intégrale.

45) Différentes notions de convergence d'une suite ou d'une suite de fonctions. Exemples.

46) Exemples d'utilisation du critère de convergence de Cauchy (suites, séries, fonctions...).

47) Exemples de problèmes d'interversion de limites.

48) Domaine de convergence d'une série entière. Propriétés de la somme d'une telle série.

49) Méthodes de développement d'une fonction en série entière. Exemples.

50) Série de Taylor.

51) Fonction $x \mapsto e^{ix}$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$; nombre π. Module et argument d'un nombre complexe.

52) Solutions maximales des équations différentielles $y' = f(x, y)$.

53) Equations différentielles linéaires. Exemples.

54) Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants ; cas d'une équation différentielle d'ordre n.

55) Etude détaillée sur un petit nombre d'exemples d'équations différentielles non linéaires ; illustrations géométriques.

56) Sous-variétés différentiables de $\mathbf{R}^2$ et de $\mathbf{R}^3$; espace tangent. Exemples.

57) Propriétés affines locales des courbes. Branches infinies. Exemples.

58) Exemples de tracé de courbes $\vec{OM} = \vec{f}(t)$.

59) Exemples de tracé de courbes $\rho = (f(\theta)$.

60) Rectification des courbes planes ; courbure ; recherche des courbes dont la courbure algébrique est une fonction donnée de l'arc.

61) Courbure et torsion des courbes en géométrie euclidienne de dimension 3. Recherche des courbes dont la courbure et la torsion sont des fonctions données de l'arc.

62) Mouvement à accélération centrale.

63) Composition des mouvements ; applications.

64) Mouvement d'un repère orthonormé ; applications à la théorie des courbes gauches et à la cinématique du solide.

65) Mouvement d'un plan sur un plan.

66) Méthodes de calcul approché des solutions des équations numériques.

67) Approximation des fonctions numériques par des fonctions polynomiales.

68) Théorèmes limites fondamentaux en calcul des probabilités.

69) Le jeu de pile ou face (variables de Bernoulli indépendantes).

70) Le conditionnement en calcul des probabilités. Exemples.

71) Loi binomiale, loi de Poisson.

3. EPREUVE D'ALGEBRE, GEOMETRIE

3.1. Observations générales

Aux exemples près, les considérations développées en 2.1 sont valables pour l'épreuve orale d'algèbre-géométrie.

3.2. Remarques particulières sur certains sujets

Nous reprenons, pour l'essentiel, des remarques déjà faites l'an dernier.

— Le jury a souvent constaté un manque de rigueur sur les points suivants :

● DIVISIBILITE : la définition d'un élément irréductible et l'énoncé du théorème de décomposition sont rarement corrects. Certains énoncés sont faux parce que le candidat a oublié le rôle particulier de l'élément nul.

● EQUATIONS LINEAIRES : la démonstration du théorème fondamental concernant l'existence des solutions est souvent floue.

● RACINES D'UN POLYNOME : de nombreux candidats parlent des racines d'un polynôme sans préciser dans quel ensemble ils les considèrent.

● VALEURS PROPRES : des phrases comme «si l'endomorphisme a toutes ses valeurs propres dans le corps» conduisent à des énoncés incorrects.
La définition du polynôme caractéristique n'est pas toujours bien donnée.

— Les candidats sont invités à illustrer leurs leçons par des exemples non triviaux :

● GROUPE : les groupes définis en algèbre binéaire ou en géométrie donnent des exemples intéressants de sous-groupes, de sous-groupes distingués, de systèmes générateurs, de groupes opérant sur un ensemble (problèmes de classification).

- ANNEAUX : il existe, dans le programme, des exemples d'anneaux non commutatifs, d'anneaux commutatifs non principaux et même d'anneaux principaux peu connus, semble-t-il, comme l'anneau des décimaux.

— Le lien entre la pratique et la théorie est souvent méconnu par le candidat.

Citons en particulier :

- FRACTIONS RATIONNELLES : s'il est nécessaire de connaître le théorème de décomposition en éléments simples, il faut aussi savoir décrire et mettre en œuvre des méthodes pratiques, permettant d'aboutir à un résultat numérique explicite.
- ESPACES VECTORIELS : il faut connaître et savoir exposer les démonstrations constructives particulières à la dimension finie.
- POLYNOMES : la structure euclidienne donne ici aussi des démonstrations constructives, en particulier celle de la factorialité (qui d'ailleurs s'énonce plus facilement en utilisant les polynômes unitaires).
- FORMES QUADRATIQUES : la méthode de Gauss doit être bien connue, car elle permet la construction effective d'une base orthogonale.
- GEOMETRIE : le jury souhaiterait que les candidats soient capables d'effectuer quelques «constructions géométriques» simples, par exemple celle du centre d'une similitude plane directe. L'étude des applications affines ne doit pas se borner à l'énoncé de quelques théorèmes d'algèbre : en particulier, la recherche des points fixes éventuels est essentielle.

— Le jury regrette que certains candidats fassent des hypothèses trop restrictives :

Par exemple :

- RACINES D'UN POLYNOME : le critère de multiplicité d'une racine ($f(a) = f'(a) = 0$) doit être énoncé sans se limiter au cas de la caractéristique 0.
- REDUCTION DES ENDOMORPHISMES : la diagonalisation ou la trigonalisation d'un endomorphisme sont liées à la factorisation de son polynôme caractéristique. L'hypothèse que le corps est algébriquement clos masque cette propriété.
- RACINES DE L'UNITE : il est regrettable de se limiter au corps des complexes ou au cas de la caractéristique 0.

3.3. Liste des exposés d'algèbre et de géométrie

1) Relations d'équivalence compatibles avec une structure algébrique. Applications.
2) Groupes finis. Exemples.
3) Groupe symétrique.
4) Sous-groupes distingués. Applications.
5) Groupe opérant sur un ensemble. Applications.

6) Parties génératrices d'un groupe. Exemples.
7) Groupe engendré par un élément.
8) Etude d'anneaux sur quelques exemples.
9) Anneaux quotients de $\mathbb{Z}$.
10) Idéaux d'un anneau unitaire.
11) Anneaux principaux.
12) Divisibilité dans les anneaux unitaires commutatifs intègres.
13) Exemples d'anneaux munis d'une division euclidienne. Applications.
14) Plus grand diviseur commun, plus petit multiple commun.
15) Nombres premiers. Applications.
16) Corps : structure et exemples.
17) Racines de l'unité.
18) Factorisation dans l'anneau des polynômes à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.
19) Anneau des polynômes à une indéterminée sur un anneau.
20) Racines d'un polynôme à une indéterminée sur un corps commutatif. Multiplicité d'une racine.
21) Polynômes symétriques.
22) Congruences dans l'anneau des polynômes à une indéterminée sur un corps commutatif.
23) Divisibilité dans les anneaux de polynômes.
24) Polynômes irréductibles à une indéterminée sur un corps commutatif.
25) Elimination. Résultant de deux polynômes.
26) Valeur d'un polynôme. Fonction polynôme.
27) Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.
28) Dérivation des polynômes.
29) Bases et dimension dans les espaces vectoriels.
30) Sous-espaces d'un espace vectoriel.
31) Hyperplans d'un espace vectoriel.
32) Rang en algèbre linéaire.
33) Groupe linéaire.
34) Dualité dans les espaces vectoriels.
35) Formes bilinéaires sur les espaces vectoriels de dimension finie.
36) Formes bilinéaires alternées, groupe symplectique (en dimension finie, sur un corps de caractéristique différente de 2).
37) Vecteurs et sous-espaces isotropes relativement à une forme bilinéaire symétrique ou alternée.
38) Formes multilinéaires alternées. Exemples.

39) Déterminants de vecteurs, d'un endomorphisme, d'une matrice. Liaisons, propriétés.
40) Applications des déterminants.
41) Equations linéaires.
42) Valeurs propres, sous-espaces propres.
43) Sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme. Applications.
44) Polynôme minimal d'un endomorphisme.
45) Expressions matricielles réduites d'un endomorphisme d'espace vectoriel de dimension finie.
46) Expressions matricielles réduites d'un endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension finie.
47) Formes quadratiques. Décomposition en carrés. Classification sur $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$.
48) Réductions d'une forme quadratique.
49) Espaces vectoriels euclidiens (en dimension finie).
50) Groupe orthogonal en dimension finie.
51) Espaces vectoriels hermitiens (en dimension finie).
52) Groupe unitaire en dimension finie.
53) Dualité dans les espaces vectoriels euclidiens en dimension finie. Adjoint d'un endomorphisme. Endomorphismes symétriques. Réduction.
54) Dualité dans les espaces vectoriels hermitiens en dimension finie. Adjoint d'un endomorphisme. Endomorphismes symétriques. Réduction.
55) Applications du produit vectoriel d'un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.
56) Droite projective. Homographies, involutions. Cas de $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$.
57) Espaces projectifs.
58) Dualité dans les espaces projectifs.
59) Barycentres.
60) Variétés linéaires affines dans un espace vectoriel de dimension finie.
61) Applications affines et groupe affine en dimension finie.
62) Etude algébrique de la notion de convexité dans un espace affine réel de dimension finie.
63) Symétries.
64) Formes réduites des isométries d'un espace affine euclidien de dimension $\leqslant 3$.
65) Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie.
66) Problèmes d'angles en géométrie métrique plane.
67) Isométries d'un espace affine euclidien de dimension $\leqslant 3$, laissant globalement invariante une partie donnée.
68) Similitudes planes directes et indirectes.
69) Torseurs.
70) Inversion plane.

71) Pôles et polaires en géométrie plane.
72) Coniques dans le plan projectif.
73) Coniques dans le plan affine réel.
74) Coniques dans le plan affine euclidien.
75) Faisceaux linéaires ponctuels de coniques.
76) Le cercle en géométrie plane.
77) Génératrices rectilignes des quadriques en dimension 3.
78) Quadriques à centre dans un espace affine euclidien de dimension 3.
79) Utilisation des nombres complexes en géométrie.

4. BIBLIOTHEQUE DE L'AGREGATION

Les candidats étaient autorisés à apporter tout livre imprimé vendu dans le commerce (à l'exclusion des textes dactylographiés ou ronéotypés) et dépourvu de notes manuscrites.

En outre, ils pouvaient consulter sur place les ouvrages suivants :

ARTIN	*Algèbre géométrique* (Gauthier-Villars)
BASS	*Cours de Mathématiques* (Masson) tomes 1 et 2
BERGER et GOSTIAUX	*Géométrie différentielle* (Colin)
BLANCHARD	*Corps non commutatifs* (Presses Universitaires)
BOURBAKI	Les tomes suivants : *Théorie des ensembles* *Algèbre* *Fonction d'une variable réelle* *Topologie générale* *Espaces vectoriels topologiques* *Intégration*
BROUSSE	*Mécanique* (Colin)
CABANNES H.	*Cours de mécanique générale* (Dunod)
CAGNAC	*Cours de mathématiques supérieures* (Masson)
CAGNAC, RAMIS et COMMEAU	*Nouveau cours de mathématiques spéciales* (Masson) *Géométrie,* Classes terminales C (Masson)
CAGNAC et THIBERGE	*Arithmétique/Algèbre* — Classes terminales (Masson)
CARTAN	*Fonctions analytiques* (Hermann) *Formes différentielles* (Hermann) *Calcul différentiel* (Hermann)
CASANOVA	*Cours de mathématiques spéciales* (Belin)

CHAMBADAL et OVAERT	*Cours de mathématiques* (Gauthier Villars) (tome 1 – tome 2, analyse (1 seulement)) *Algèbre linéaire et algèbre tensorielle* (Dunod)
CHAZEL	*Traité de mathématiques* (Hachette)
CHOQUET	*Cours d'analyse* (Masson) *L'enseignement de la géométrie* (Hermann)
CONDAMINE et VISSIO	*Mathématiques :* Terminales C et T (Delagrave)
COUTY	*Analyse* (Colin)
DIEUDONNE	*Algèbre linéaire et géométrie élémentaire* (Hermann) *Sur les groupes classiques* (Hermann) *Calcul infinitésimal* (Hermann) *Eléments d'analyse* (Gauthier Villars) tomes 1 et 2
DIXMIER	*Fondements de l'analyse* (Hermann) *Analyse MP* (Gauthier Villars)
DONEDDU	*Arithmétique générale* (Dunod) *Cours de mathématiques spéciales* (Dunod)
DUBREIL (M. et Mme)	*Leçons d'algèbre moderne* (Dunod)
DUBUC	*Géométrie plane* (Presses Universitaires)
EXBRAYAT et MAZET	*Algèbre, Analyse, Topologie*
FELLER	*And introduction to probability theory and its applications.* Viley tomes 1 et 2
FRENKEL	*Algèbre et Géométrie* *Géométrie pour l'élève professeur* (Hermann)
GODEMENT	*Algèbre* (Hermann)
GOURSAT	*Cours d'analyse* (Gauthier Villars)
GOUYON	*Précis de Mathématiques spéciales* (Vuibert)
HARDY G.H.	*A course of Pure Mathematics* (Cambridge University Press)
HENNEQUIN et TORTRAT	*Théorie des probabilités et quelques applications* (Masson)
HOCQUENGHEM et JAFFARD	*Mathématiques* (Masson) tomes 1 et 2
KREE	*Introduction aux Mathématiques appliquées* (Dunod)
KRIVINE	*Théorie axiomatique des ensembles* (Presses universitaires)
LANG	*Introduction aux variétés différentiables* (traduction française) *Algèbre –* *– Linear Algebra –*
LEFORT	*Mathématiques pour les sciences biologiques et agronomiques* (Colin)

Mme LELONG-FERRAND et ARNAUDIES	*Cours de Mathématiques,* 4 tomes (Dunod)
Mme LELONG-FERRAND	*Géométrie différentielle* (Masson)
MAC-LANE et BIRKHOFF	*Algèbre, Structures fondamentales* (traduction française) *Les grands théorèmes* (traduction française)
MAILLARD	*Classes terminales C* (Hachette)
MALLIAVIN	*Géométrie différentielle intrinsèque* (Hermann)
MARTIN P.	*Géométrie* (Colin)
METIVIER	*Introduction à la théorie des probabilités*
MUTAFIAN	*La défi algébrique* (Vuibert) tomes 1 et 2
NEVEU J.	*Bases mathématiques du calcul des probabilités* (Masson)
PISOT et ZAMANSKY	*Mathématiques générales* (Dunod) *Algèbre et Algèbre linéaire* (Dunod)
QUEYSANNE	*Algèbre* (Colin)
RAMIS, DESCHAMPS et ODOUX	*Mathématiques spéciales* (Masson) tome 1 : algèbre – tomes 3 et 4 : analyse
RIESZ et NAGY	*Leçons d'analyse fonctionnelle* (Gauthier Villars)
RUDIN	*Real and complex Analysis* (Mac Grandhill)
SAMUEL	*Théorie algébrique des nombres* (Hermann)
SCHWARTZ	*Cours d'analyse* (Hermann) tomes 1 et 2
SERRE	*Cours d'arithmétique* (Presses universitaires)
VALIRON	*Cours d'analyse* (Masson) tomes 1 et 2
VAUQUOIS	*Les probabilités* (Hermann)
WARUSFEL	*Structures algébriques finies* (Hachette)
ZAMANSKY	*Algèbre et Analyse moderne* (Dunod)
ZISMAN	*Topologie algébrique* (Colin)