MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION

DIRECTION DES LYCÉES

Agrégation Mathématiques

Rapport de MM. RAMIS et RICHE
Inspecteurs généraux de l'Instruction publique
Présidents du jury masculin et du jury féminin

1974

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE ET DE DOCUMENTATION PÉDAGOGIQUES

AGREGATION DE MATHEMATIQUES

Session de 1974

I – DEROULEMENT DES CONCOURS

I.1. COMPOSITION DES JURYS

I.1.1. AGREGATION HOMMES

M.	RAMIS,	*Inspecteur général de l'Instruction publique, Président ;*
M.	BERRARD,	*Inspecteur général de l'Instruction publique, Vice-président ;*
M.	CAPODANNO,	*Professeur à l'Université de Besançon ;*
M.	GASTINEL,	*Professeur à l'Université de Grenoble ;*
M.	KAROUBI,	*Professeur à l'Université de Paris VII ;*
M.	KREE,	*Professeur à l'Université de Paris VI ;*
M.	LAURENT,	*Professeur à l'Université de Grenoble ;*
M.	LEBORGNE,	*Professeur à l'Université de Nantes ;*
M.	RIVET,	*Professeur à l'I.N.S.A. de Rennes ;*
M.	ZISMAN,	*Professeur à l'Université de Paris VII ;*
M.	CONZE,	*Maître de conférence à l'Université de Rennes ;*
M.	RAOULT,	*Maître de conférence à l'Université de Rouen ;*
M.	ROUGEE,	*Maître de conférence à l'Université de Paris XIII ;*
M.	RUGET,	*Maître de conférence à l'Université de Paris VII ;*
M.	SOUBLIN,	*Maître de conférence à l'Université de Marseille ;*
M.	GEORGE,	*Chargé de cours à l'Université de Nancy I ;*
M.	EXBRAYAT,	*Maître-assistant à l'Université de Paris VI ;*
M.	ARNAUDIES,	*Professeur au Lycée Kléber de Strasbourg ;*
M.	GARPENTIER,	*Professeur au Lycée Carnot de Dijon ;*
M.	DABLANC,	*Professeur au Lycée Pasteur de Neuilly ;*
M.	DESCHAMPS,	*Professeur au Lycée Louis-le-Grand à Paris ;*
M.	FLORY,	*Professeur au Lycée Louis-le-Grand à Paris ;*
M.	FOREST,	*Professeur au Lycée Saint-Louis à Paris ;*
M.	FRABOUL,	*Professeur au Lycée G. Clémenceau de Nantes ;*
M.	FRAYSSE,	*Professeur au Lycée P. de Fermat de Toulouse ;*
M.	GONTARD,	*Professeur au Lycée du Parc à Lyon ;*
M.	PAINTANDRE,	*Professeur au Lycée P. de Fermat de Toulouse ;*
M.	WARUSFEL,	*Professeur au Lycée Louis-le-Grand à Paris.*

I.1.2. AGREGATION FEMMES

M.	BAILLE,	*Maître-Assistant à l'Université de Grenoble ;*
Mme	BAUMONT,	*Professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée du Parc à Lyon;*
M.	BLANCHARD,	*Professeur de Mathématiques Supérieures au Lycée Saint-Louis à Paris ;*
M.	BOUSQUET,	*Professeur honoraire de Mathématiques Spéciales ;*
M.	CAPODANNO,	*Professeur à l'Université de Besançon ;*
M.	COEURE,	*Professeur à l'Université de Nancy ;*
M.	DESQ,	*Professeur à l'Université de Toulouse ;*
M.	GASTINEL,	*Professeur à l'Université de Grenoble ;*
M.	HEE,	*Assistant à l'Université de Paris-Sud (Centre d'Orsay) ;*
M.	KAPLAN,	*Maître-Assistant à l'Université de Nancy ;*
M.	LETAC,	*Maître de Conférences à l'Université de Toulouse ;*
M.	MARTIN,	*Professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée du Parc à Lyon ;*
M.	MAZET,	*Maître-assistant à l'Université de Paris VI ;*
M.	MONESTIER,	*Professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Chaptal à Paris ;*
Mme	RAOULT,	*Professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Condorcet à Paris ;*
M.	RICHE,	*Inspecteur général de l'Instruction publique ; Président du jury ;*
M.	ROBERT,	*Maître de Conférences à l'Université de Grenoble ;*
M.	ROUGEE,	*Maître de Conférences à l'Université de Paris XIII ;*
M.	SCHIFFMANN,	*Professeur à l'Université de Strasbourg ; Vice-président du jury ;*
M.	VAN CUTSEM,	*Maître de Conférences à l'Université de Grenoble.*

I.2 – CALENDRIER DES EPREUVES

I.2.1. EPREUVES PREPARATOIRES (écrit)

- Elles ont eu lieu aux dates suivantes :
  Mathématiques générales : mercredi 8 mai de 8 à 14 heures ;
  Analyse : jeudi 9 mai de 8 à 14 heures ;
  Mathématiques appliquées : samedi 11 mai de 8 à 14 heures.

(Conformément au règlement du concours, les candidats avaient dû préciser l'option de leur choix lors de leur inscription au concours).

- Les listes d'admissibilité ont été affichées :
  – le 19 juin pour l'agrégation masculine (Ministère et Lycée Saint-Louis) ;
  – le 12 juin pour l'agrégation féminine (Ministère et Lycée Montaigne).

I.2.2. EPREUVES DEFINITIVES (oral)

Elles se sont déroulées à Paris :

– du 27 juin au 25 juillet, au Lycée La Fontaine pour l'agrégation masculine,
– du 20 juin au 23 juillet, au Lycée Montaigne pour l'agrégation féminine.

Les résultats définitifs ont été affichés respectivement le 26 juillet vers 20 heures (candidats) et le 25 juillet vers 12 heures (candidates).

I.3 – STATISTIQUES DIVERSES

I.3.1. RESULTATS GENERAUX

	Candidats	Candidates
Postes mis au concours	179	141
Candidats inscrits (l'astérisque correspond aux étrangers)	1 675+36*	1 026
Candidats présents à la première épreuve	1 447	852
Candidats présents à la dernière épreuve	1 310	788
Admissibles	326+5*	174
Admis à l'agrégation	140+2*	95
Equivalences des épreuves pratiques du C.A.P.E.S.	7	5
Equivalences des épreuves complètes du C.A.P.E.S.	0	0

I.3.2. REPARTITION ENTRE LES OPTIONS

	Analyse numérique		Mécanique		Probabilité	
	Hommes	Femmes	Hommes	Femmes	Hommes	Femmes
Ont composé	620	360	207	77	483	351
Admissibles	169(54)	76(24)	37(6)	14(1)	125(20)	84(29)
Admis	87(40)	51(20)	12(5)	6(1)	43(11)	38(18)

(entre parenthèses est indiqué le nombre des candidats appartenant aux Grandes Ecoles).

I.3.3. STATISTIQUE SUR LES ADMISSIBLES AYANT PRESENTE DES CONCOURS ANTERIEURS

Concours masculin : Parmi les candidats non admis, 46 étaient admissibles pour la seconde fois en 1974, 18 étaient admissibles pour la troisième fois, au moins.

Concours féminin : 18 candidates sont devenues biadmissibles après la session de 1974 ; 4 professeurs biadmissibles ont été reçus

I.3.4. SITUATION UNIVERSITAIRE DES CANDIDATS

Les candidats et candidates sont séparés en 11 groupes désignés par les abréviations suivantes :

U ou J : Elèves de l'E.N.S., Ulm, ou de l'E.N.S. Jourdan ;
C ou F : Elèves de l'E.N.S. Saint-Cloud ou de l'E.N.S. Fontenay ;
T : Elèves de l'E.N.S.E.T. ;
A : Assistants de Faculté ;
P.C. : Professeurs certifiés ;
C.O. : Professeurs ou assistants en congé ou au Service national ;
C.P.R. : Professeurs stagiaires de C.P.R. ;
I.P.E.S. : Elèves des I.P.E.S. ;
E : Etudiants ;
D : Personnel autre que les certifiés et enseignement privé ;
Et. : Etrangers ou D.O.M.

Candidats	U	C	T	A	PC	CO	CPR	IPES	E	D	Et	Total
Inscrits	30	15	45	65	500	73	389	156	219	183	36	1 711
Admissibles	30	15	35	26	47	12	57	55	39	10	5	331
Admis	26	12	18	11	11	2	21	20	15	4	2	142

Candidates	J	F	T	A	PC	CO	CPR	IPES	E	D	Et	Total
Inscrites	24	32	9	13	262	14	314	138	107	90	23	1 026
Admissibles	24	25	5	2	23	5	31	31	14	9	5	174
Admises	18	18	3	2	12	1	20	14	6	0	1	95

I.3.5. REPARTITON SUIVANT LES CENTRES D'ECRIT

Centres / Candidats	Aix-Marseille	Amiens	Besançon	Bordeaux	Caen	Clermont	Dijon	Grenoble	Lille	Limoges	Lyon	Montpellier	Nancy-Metz
Inscrits	77	29	31	77	37	34	38	70	163	17	64	58	66
Ayant composé	62	25	25	74	35	30	35	63	134	17	60	48	57
Admissibles	8	4	6	11	8	4	5	8	15	0	12	7	10
Admis	5	1	0	3	3	3	1	3	4	0	5	0	3

Centres / Candidats	Nantes	Nice	Orléans	Paris	Poitiers	Reims	Rennes	Brest	Rouen	Strasbourg	Toulouse	Etranger et D.O.M.
Inscrits	57	54	31	411	45	42	33	24	49	50	53	65
Ayant composé	44	38	25	358	33	35	23	20	39	45	43	40
Admissibles	10	7	4	153	7	8	7	6	4	6	10	11
Admis	2	2	3	90	3	1	1	1	1	0	4	3

Centres / Candidates	Aix-Marseille	Amiens	Besançon	Bordeaux	Caen	Clermont	Dijon	Grenoble	Lille	Limoges	Lyon	Montpellier	Nancy-Metz
Inscrites	35	30	12	25	17	13	19	68	60	12	44	31	33
Ayant composé	31	17	10	24	15	11	14	63	47	12	37	26	24
Admissibles	3	3	2	5	4	0	2	10	6	1	7	2	2
Admises	1	2	0	4	0	0	1	6	4	0	2	1	1

Centres / Candidates	Nantes	Nice	Orléans	Paris	Poitiers	Reims	Rennes-Brest	Rouen	Strasbourg	Toulouse	Etranger et D.O.M.
Inscrites	23	19	25	364	18	11	35	29	32	48	23
Ayant composé	19	16	18	302	17	8	30	24	27	45	15
Admissibles	2	2	2	99	0	1	4	6	2	4	5
Admises	2	1	1	63	0	1	0	2	0	2	1

I.3.6. AFFECTATIONS DES AGREGES 1974

Sur les 140 candidats et 95 candidates français admis

40 + 25... feront une année supplémentaire dans une E.N.S. ;

17 + 4... ont été maintenus ou détachés dans l'enseignement supérieur ;

6 + 5... ont obtenu des chaires préparatoires aux grandes écoles ;

31 + 21... ont obtenu des chaires de T.C., T.E. ou T.S. dans les lycées ;

2 + 6... ont été nommés dans des écoles normales d'instituteurs ;

18 + 16... ont été nommés sur des chaires ordinaires de lycées ;

11 + 5... sont partis en coopération ou au service national ;

12 + 13... suivront un stage de formation professionnelle ;

2 + 0... ont opté pour l'enseignement privé ;

1 + 0... a obtenu un sursis d'intégration.

II - ÉPREUVES ÉCRITES

II.1 TEXTE DE L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES GENERALES

Durée : 6 heures

Notations. — *Dans les parties* I, III, IV, *on désigne par* K *un corps commutatif de caractéristique différente de* 2; *dans la partie* II *le corps de base est* **R**; *dans la partie* V *le corps de base est* **C**.

Si E *désigne un* K*-espace vectoriel, l'ensemble des sous-espaces vectoriels de* E *de dimension donnée* r *est noté* $\mathcal{G}_r(\mathrm{E})$; *le sous-espace vectoriel engendré par une partie donnée* A *de* E *est noté* $\mathcal{V}(\mathrm{A})$; *le groupe linéaire de* E *est noté* $\mathrm{GL_K(E)}$.

Avertissement. — *Les parties* III, IV *et* V *sont indépendantes de la partie* II.

I

Soit V un K-espace vectoriel de dimension 4, et soit p un entier $\geqslant 2$; on note Λ'_p le K-espace vectoriel des formes p-linéaires et alternées sur V, et Λ_p le dual de Λ'_p. Donner la dimension de Λ_2, et celle de Λ_4.

A deux éléments quelconques x, y de V on associe l'élément de Λ_2, noté $x \wedge y$, défini par :

$$[\forall f \in \Lambda'_2] \qquad [(x \wedge y)(f) = f(x,y)]$$

1° Prouver que l'application $(x, y) \longmapsto x \wedge y$ est bilinéaire alternée de $\mathrm{V \times V}$ dans Λ_2. L'image de cette application est notée $\mathcal{D}$.

2° Soit $\alpha = x_1 \wedge x_2$ un élément non nul de $\mathcal{D}$. Montrer que les solutions dans $\mathrm{V \times V}$ de l'équation $x \wedge y = \alpha$ sont les couples

$$(x = \lambda x_1 + \lambda' x_2 \,,\, y = \mu x_1 + \mu' x_2),$$

avec $(\lambda, \lambda', \mu, \mu') \in \mathrm{K}^4$ et $\lambda\mu' - \lambda'\mu = 1$.

Comparer $\mathcal{V}(x, y)$ et $\mathcal{V}(x_1, x_2)$. En déduire une bijection naturelle δ de $\mathcal{G}_2(\mathrm{V})$ sur l'ensemble des droites vectorielles de Λ_2 contenues dans $\mathcal{D}$.

3° Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base ordonnée de V.

Montrer que la famille

$$\tilde{\mathcal{B}} = (e_1 \wedge e_2,\ e_1 \wedge e_3,\ e_1 \wedge e_4,\ e_3 \wedge e_4,\ e_4 \wedge e_2,\ e_2 \wedge e_3)$$

est une base ordonnée de Λ_2.

Expliciter les coordonnées de $x \wedge y$ dans la base $\tilde{\mathcal{B}}$ lorsque x et y sont donnés par leurs coordonnées $(\xi_i)_{1 \leq i \leq 4}$ et $(\eta_i)_{1 \leq i \leq 4}$ dans la base $\mathcal{B}$.

II

Dans cette partie, l'espace $\mathbf{R}^3$ est muni de l'orientation et de la structure euclidienne dans lesquelles la base canonique est directe et orthonormale. La notation $\vec{u} \wedge \vec{v}$ (resp. $\vec{u} \cdot \vec{v}$) désigne le produit vectoriel (resp. le produit scalaire) dans cet espace.

Soit E_4 le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$, d'élément générique $\begin{pmatrix} a \\ \vec{x} \end{pmatrix}$ et E_6 le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$, d'élément générique $\begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{bmatrix}$.

On définit sur E_4 l'opération $\top$, à valeurs dans E_6, par :

$$\begin{pmatrix} a \\ \vec{x} \end{pmatrix} \top \begin{pmatrix} b \\ \vec{y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a\vec{y} - b\vec{x} \\ \vec{x} \wedge \vec{y} \end{bmatrix}$$

et on appelle cône $\mathcal{C}$ l'ensemble des composés ainsi obtenus dans E_6.

1° Démontrer :

$$\left(\begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{bmatrix} \in \mathcal{C} \right) \Leftrightarrow (\vec{u} \cdot \vec{v} = 0).$$

2° Soit $\vec{p}$ un élément donné de $\mathbf{R}^3$. Montrer que l'image H de l'application de $\mathbf{R}^3$ dans E_6 définie par :

$$\vec{u} \longmapsto \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{p} \wedge \vec{u} \end{bmatrix}$$

est un sous-espace vectoriel de E_6 contenu dans $\mathcal{C}$.

Soit $\vec{m}$ un élément donné de $\mathbf{R}^3$. Montrer que l'image L de l'application de $\mathbf{R}^3$ dans E_6 définie par :

$$\vec{v} \longmapsto \begin{bmatrix} \vec{v} \wedge \vec{m} \\ \vec{v} \end{bmatrix}$$

est un sous-espace vectoriel de E_6 contenu dans $\mathcal{C}$.

Montrer que tout élément de L est le composé de deux éléments de E_4 de la forme $\begin{pmatrix} a \\ \vec{x} \end{pmatrix}$ avec $a = \vec{m} \cdot \vec{x}$.

3° On se propose d'étudier tous les sous-espaces vectoriels de E_6 de dimension trois, contenus dans $\mathcal{C}$. Lorsque $\begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{bmatrix}$ décrit un tel sous-espace W, $\vec{u}$ décrit un sous-espace vectoriel $s(\mathrm{W})$, et $\vec{v}$ décrit un sous-espace vectoriel $t(\mathrm{W})$.

a. Si $t(\mathrm{W})$ est de dimension 3, montrer qu'à toute base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathbf{R}^3$ correspondent des réels a, b, c et un sous-espace vectoriel F de E_4 vérifiant les propriétés suivantes :

i. $\quad \mathrm{F} = \mathcal{V}\left(\begin{pmatrix} a \\ \vec{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ \vec{j} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ \vec{k} \end{pmatrix} \right)$

ii. W est l'ensemble des composés des éléments de F deux à deux.

b. Reprendre l'étude dans le cas où $t(\mathrm{W})$ est de dimension 1, en cherchant F de la forme $\mathcal{V}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vec{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ \vec{j} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ \vec{k} \end{pmatrix} \right)$ et vérifiant *ii.*

c. Examiner le cas où $t(\mathrm{W})$ est de dimension paire et $s(\mathrm{W})$ de dimension 3.

III

On reprend ici l'étude générale amorcée au I.

1° Soit α, β des éléments de $\mathcal{D}$ et $(x_i)_{1 \leq i \leq 4}$ des éléments de V tels que $x_1 \wedge x_2 = \alpha$ et $x_3 \wedge x_4 = \beta$. Soit φ un élément de Λ'_4; montrer que le scalaire $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ ne dépend que de α et β; on le note $\bar{\varphi}(\alpha, \beta)$. On désigne par $\alpha \vee \beta$ la forme linéaire sur Λ'_4 telle que :

$$[\forall \varphi \in \Lambda'_4] \qquad [(\alpha \vee \beta)(\varphi) = \bar{\varphi}(\alpha, \beta)]$$

Établir que l'application $(\alpha, \beta) \longmapsto \alpha \vee \beta$ de $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ dans Λ_4 se prolonge de façon unique en une application bilinéaire symétrique de $\Lambda_2 \times \Lambda_2$ dans Λ_4, que l'on écrira encore $(\alpha, \beta) \longmapsto \alpha \vee \beta$.

2° Soit $\mathcal{B}$ une base ordonnée de V et $\tilde{\mathcal{B}}$ la base de Λ_2 associée à $\mathcal{B}$ (notations de I,3°). On définit l'élément $e \in \Lambda_4$ par :

$$[\forall \varphi \in \Lambda'_4] \ [e(\varphi) = \varphi(e_1, e_2, e_3, e_4)] \ ;$$

(e) est une base de Λ_4. Soit $q_{\mathcal{B}}$ la forme bilinéaire symétrique sur Λ_2 qui, à tout couple $(\alpha, \beta) \in \Lambda_2 \times \Lambda_2$, associe la coordonnée de $\alpha \vee \beta$ sur e.

Écrire la matrice de $q_{\mathcal{B}}$ dans la base $\tilde{\mathcal{B}}$. Quel est le rang de $q_{\mathcal{B}}$? Lorsque $K = \mathbf{R}$, quelle est la signature de $q_{\mathcal{B}}$? Reprenant K quelconque, soit $\mathcal{B}'$ une autre base de V. Quelle relation y a-t-il entre $q_{\mathcal{B}}$ et $q_{\mathcal{B}'}$?

3° Soit α un élément de Λ_2. Démontrer :

$$[\alpha \in \mathcal{D}] \Leftrightarrow [\alpha \vee \alpha = 0].$$

4° Un sous-espace vectoriel de Λ_2 sera dit *$\mathcal{D}$-isotrope* s'il est contenu dans $\mathcal{D}$. Soit α, β deux éléments linéairement indépendants de Λ_2, et $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant 4}$ des éléments de V tels que $x_1 \wedge x_2 = \alpha$ et $x_3 \wedge x_4 = \beta$.

a. Montrer que, pour que $\mathcal{V}(\alpha, \beta)$ *ne soit pas* $\mathcal{D}$-isotrope, il faut et il suffit que les plans $\mathcal{V}(x_1, x_2)$ et $\mathcal{V}(x_3, x_4)$ soient des sous-espaces supplémentaires de V.

b. Montrer que si $\mathcal{V}(\alpha, \beta)$ est $\mathcal{D}$-isotrope, on peut trouver trois éléments x, x', x'' de V tels que $x \wedge x' = \alpha$ et $x \wedge x'' = \beta$.

IV

On désigne par Ω le groupe des automorphismes $u \in GL_K(\Lambda_2)$ tels que :

$$[\forall \alpha \in \Lambda_2] \ [\forall \beta \in \Lambda_2] \ [u(\alpha) \vee u(\beta) = \alpha \vee \beta]$$

et par G le sous-groupe des $u \in \Omega$ tels que $\det(u) = 1$.

Un sous-espace vectoriel E de Λ_2 est dit *$\mathcal{D}$-isotrope maximal* si la relation « F est un sous-espace $\mathcal{D}$-isotrope et $E \subset F$ » implique : « $E = F$ ».

1° *a.* Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant 4}$ une base de V; prouver que pour tout i $(1 \leqslant i \leqslant 4)$, les sous-espaces $H_i(\mathcal{B}) = \mathcal{V}((e_i \wedge e_j)_{j \neq i})$ et $L_i(\mathcal{B}) = \mathcal{V}((e_j \wedge e_k)_{j \neq i, k \neq i})$ sont $\mathcal{D}$-isotropes maximaux.

b. Soit E un sous-espace $\mathcal{D}$-isotrope de dimension 3. Montrer qu'on est dans l'un des cas suivants :

(1) E est de la forme $H_i(\mathcal{B})$

(2) E est de la forme $L_i(\mathcal{B})$,

et que ces cas s'excluent mutuellement.

On appelle $\mathcal{H}$ l'ensemble des sous-espaces $\mathcal{D}$-isotropes qui relèvent du cas (1), et $\mathcal{L}$ l'ensemble de ceux qui relèvent du cas (2).

2° Montrer que tout sous-espace $\mathcal{D}$-isotrope est contenu dans un sous-espace élément de $\mathcal{H}$ ou de $\mathcal{L}$.

3° *a.* Pour tout élément $d \in \mathcal{G}_1(V)$, on note H_d l'ensemble des $x \wedge y$, où x parcourt d et où y parcourt V; prouver que $d \longmapsto H_d$ est une bijection de $\mathcal{G}_1(V)$ sur $\mathcal{H}$.

Pour tout élément $\Pi \in \mathcal{G}_3(V)$, on note L_Π l'ensemble des $x \wedge y$, où (x, y) parcourt $\Pi \times \Pi$; prouver que $\Pi \longmapsto L_\Pi$ est une bijection de $\mathcal{G}_3(V)$ sur $\mathcal{L}$.

b. Soit E et E′ deux sous-espaces $\mathcal{D}$-isotropes distincts de dimension 3; prouver que, pour que E et E′ soient tous deux éléments de $\mathcal{H}$, ou tous deux éléments de $\mathcal{L}$, il faut et il suffit que :

$$\dim_K (E \cap E') = 1.$$

Que se passe-t-il lorsque $E \in \mathcal{H}$ et $E' \in \mathcal{L}$?

4° *a.* Soit ω un automorphisme de V, et soit $\tilde{\omega}$ l'unique automorphisme de Λ_2 tel que :

$$[\forall x \in V] \ [\forall y \in V] \ [\tilde{\omega}(x \wedge y) = \omega(x) \wedge \omega(y)].$$

Justifier brièvement l'existence de $\tilde{\omega}$; calculer $\det(\tilde{\omega})$ en fonction de $\det(\omega)$.

b. Soit $GL_K^2(V)$ le sous-groupe de $GL_K(V)$ formé des automorphismes dont le déterminant *est un carré* dans K :

$$[\forall \omega \in GL_K^2(V)] \ [\exists r \in K] \ [\det(\omega) = r^2].$$

Prouver : $r^{-1} \tilde{\omega} \in G$.

5° *a.* Soit M_1 et M_2 deux sous-espaces $\mathcal{D}$-isotropes maximaux de Λ_2; montrer que si $M_1 \in \mathcal{H}$ et $M_2 \in \mathcal{H}$, ou si $M_1 \in \mathcal{L}$ et $M_2 \in \mathcal{L}$, il existe $u \in G$ tel que $u(M_1) = M_2$; montrer que si $M_1 \in \mathcal{H}$ et $M_2 \in \mathcal{L}$, il existe $u \in \Omega$ tel que $u(M_1) = M_2$.

b. Chaque $u \in \Omega$ induit une bijection de l'ensemble $\mathcal{H} \cup \mathcal{L}$ sur lui-même; on note G′ le sous-groupe des $u \in \Omega$ pour lesquels cette bijection laisse stable chacun des ensembles $\mathcal{H}$ et $\mathcal{L}$. Prouver que G′ est un sous-groupe d'indice 2 de Ω.

6° *a.* Soit u un élément de G′. Montrer l'existence de $\omega \in GL_K^2(V)$ et de $r \in K$ tels que :

$$r^{-1}\tilde{\omega} = u, \quad \text{et} \quad \det(\omega) = r^2.$$

En déduire qu'on a :

$$G' = G.$$

b. Soit J le sous-groupe distingué de G égal à $\{ Id, \ -Id \}$, où Id désigne l'application identique de Λ_2. Pour tout $\omega \in GL_K^2(V)$, on note $\hat{\omega}$ la classe modulo (J) de $r^{-1}\tilde{\omega}$, classe qui ne dépend que de ω (et non du scalaire r tel que $\det(\omega) = r^2$). Établir que $\omega \longmapsto \hat{\omega}$ est un homomorphisme surjectif du groupe $GL_K^2(V)$ sur le groupe quotient G/J : préciser le noyau de cet homomorphisme.

V

Dans cette dernière partie, où l'on suppose $K = \mathbb{C}$, on conserve les notations V et Λ_2 des parties I, III, IV, et l'on appelle $\mathfrak{P}(V)$ et $\mathfrak{P}(\Lambda_2)$ les espaces projectifs respectivement issus de V et de Λ_2.

1° La bijection δ du I,2°, induit une bijection Δ de l'ensemble des *droites projectives* de $\mathfrak{P}(V)$ sur l'ensemble D des points de $\mathfrak{P}(\Lambda_2)$ issus des droites vectorielles de Λ_2 contenues dans Ω. Vérifier que D est une *quadrique propre* de $\mathfrak{P}(\Lambda_2)$.

Interpréter dans le langage de la géométrie projective les résultats des questions IV, 1°, 2°, 3°.

2° On donne une *conique propre* Γ tracée sur D, dont le plan est noté P(Γ). Montrer qu'en général l'application Δ^{-1} envoie Γ sur l'ensemble des génératrices de l'un des deux systèmes d'une quadrique propre Q(Γ) dans $\mathfrak{P}(V)$. Quels sont les cas d'exception? Que se passe-t-il alors?

3° *a.* Soit Γ_1 et Γ_2 deux coniques propres distinctes tracées sur D, telles que les quadriques $Q(\Gamma_1)$ et $Q(\Gamma_2)$ soient propres. Montrer que l'on a : $Q(\Gamma_1) = Q(\Gamma_2)$ si, et seulement si, les plans $P(\Gamma_1)$ et $P(\Gamma_2)$ sont des sous-espaces *conjugués* par rapport à D. Réciproquement, prouver que toute quadrique propre de $\mathfrak{P}(V)$ est de la forme Q(Γ).

b. Soit S une variété linéaire projective de dimension 3 dans $\mathfrak{P}(\Lambda_2)$, rencontrant D suivant une *quadrique propre* Σ de S. Montrer qu'il existe deux droites d_1 et d_2 non coplanaires dans $\mathfrak{P}(V)$ telles que $\Delta^{-1}(\Sigma)$ soit l'ensemble des droites de $\mathfrak{P}(V)$ rencontrant d_1 et d_2. Réciproque?

II.2. RAPPORT SUR L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES GENERALES

II.2.1. THEME DU SUJET

1°) Soit K un corps commutatif, de caractéristique différente de deux. Les groupes linéaires et les groupes orthogonaux des K- espaces vectoriels de dimension finie sont reliés, pour les petites dimensions, par des isomorphismes remarquables. Citons les deux exemples importants :

• Soient V un K- espace vectoriel de dimension 4, et q une forme quadratique non dégénérée sur V, d'indice 2. On a l'isomorphisme

(1) $\quad PSO(q) \rightleftarrows PGL(2, K) \times PGL(2, K),$

que l'on peut mettre en évidence en utilisant les propriétés homographiques d'une quadrique propre en dimension 3.

• Soient E un K- espace vectoriel de dimension 6, et q une forme quadratique non dégénérée sur E, d'indice 3. Désignant par $PGL^{(2)}(4, K)$ le sous-groupe de PGL(4, K) issu des automorphismes dont le déterminant est un carré dans K*, on a l'isomorphisme

(2) $\quad PSO(q) \rightleftarrows PGL^{(2)}(4, K).$

Le sujet du problème était la mise en évidence de ce dernier isomorphisme.

2°) Les parties I et III étaient destinées à fournir le minimum de résultats de calcul extérieur indispensables à une présentation intrinsèque de la question : les espaces $\Lambda_2(V)$ et $\Lambda_4(V)$ ne sont autres que les puissances extérieures seconde et quatrième de V, et les lire :

$$(x, y) \mapsto x \wedge y, \qquad V \times V \to \Lambda_2(V)$$

$$\text{et} \quad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \vee \beta, \qquad \Lambda_2(V) \times \Lambda_2(V) \to \Lambda_4(V)$$

s'identifient à la multiplication extérieure classique.

La «forme» quadratique $q : \alpha \to \alpha \vee \alpha$, $\Lambda_2(V) \to \Lambda_4(V)$ est non dégénérée et d'indice 3 ; elle définit une quadrique propre D dans l'espace projectif $\mathfrak{P}(\Lambda_2(V))$.

L'application δ définie au I induit une bijection Δ de la grassmannienne $G_1(\mathfrak{P}(V))$ (ensemble des droites projectives de $\mathfrak{P}(V)$ sur D ; ce fait bien connu permet de ramener la géométrie des droites de $\mathcal{P}(V)$ à celle des points de la quadrique D.

Les variétés projectives maximales contenues dans D sont des plans ; ils se répartissent en deux familles * H et L que l'on obtient de la manière suivante :

(a) Si $M \in \mathcal{P}(V)$, l'ensemble des points $m \in D$ tels que $M \in \Delta^{-1}(m)$ forme un plan projectif P_M ; en faisant varier M, on obtient ainsi la famille H.

(b) Si Π est un plan projectif de $\mathcal{P}(V)$, l'ensemble des points $m \in D$ tels que $\Delta^{-1}(m) \subset M$ forme un plan projectif Q_M ; en faisant varier Π, on obtient la famille L.

Le début de la partie IV était consacré à cette étude.

3°) Venons-en maintenant à l'explication de l'isomorphisme (2) qui était le point central du problème ; (fin de la partie IV).

On voit d'abord que le groupe $PO(q)$ s'identifie à un sous-groupe du groupe Γ des homographies de $\mathcal{P}(\Lambda_2(V)$ laissant D invariante ; d'ailleurs $PO(q)$ est distingué dans Γ, et le groupe quotient $\Gamma / PO(q)$ est isomorphe à $K^*/(K^*)^2$; $PO(q)$ opère sur les familles H et L.

$PSO(q)$ est le sous-groupe de $PO(q)$ laissant stable chaque famille H et L, tandis que tout élément de $PO(q) \setminus PSO(q)$ échange H et L.

Puis on voit que si $u \in PGL(V)$, l'application

$$\Theta_u : m \mapsto \Delta u \Delta^{-1}(m), \quad D \to D$$

est une bijection de D qui se prolonge de manière unique en un élément de Γ. Le théorème qui nous occupe peut alors s'énoncer comme suit :

L'application : $u \mapsto \Theta_u$, $PGL_K^{(2)}(V) \to \Gamma$

est une isomorphisme de $PGL_K^{(2)}(V)$ sur $PSO(q)$

* Voici une signification précise de cette phrase : la grassmannienne $G_2(\mathcal{P}(\Lambda_2(V)))$ est une sous-variété projective $\mathcal{S}$ de l'espace projectif $\mathcal{P}(\Lambda_3(\Lambda_2(V)))$; cela étant, les variétés projectives maximales contenues dans D forment une sous-variété algébrique $\mathcal{T}$ de $\mathcal{S}$ qui a exactement deux composantes irréductibles (les deux familles).

II.2.2. REMARQUES GENERALES

Très peu de candidats ont maîtrisé le sujet, aucun ne l'a dominé. Il est vrai que seule la partie V permettait d'éclairer la question sous son jour projectif, plus naturel. Mais on attendait une meilleure compréhension de la fin du IV, et de la manière dont le groupe G (= $SO(q)$) opère sur les ensembles $\mathcal{H}$ et $\mathcal{L}$; c'est ainsi que personne n'a établi la surjectivité de l'application $\omega \mapsto \hat{\omega}$ du IV, 6°), a).

Il faut constater aussi que les sous-espaces totalement isotropes d'une forme quadratique sont manipulés avec maladresse par presque tous les candidats, et que la notion d'indice d'une forme quadratique est inconnue. C'est là un reproche important, en égard aux nombreuses copies où l'on invoque un vague et lointain «théorème de Witt» dont on ne connaît manifestement pas même l'énoncé.

Enfin, nous devons ici critiquer fermement la tendance des candidats à «glaner» des points. On conçoit que l'on puisse sauter une question délicate non résolue pour passer à la suite ; mais il faut que l'idée générale d'une séquence de questions soit comprise. Il est inadmissible de voir des candidats incapables de résoudre les questions les plus simples (II, III, début du IV) se lancer dans les débuts de questions difficiles (IV, 5° ; IV, 6°), qui les dépassent visiblement, dans l'espoir qu'en paraphrasant le texte ils obtiendront çà et là un demi-point.

II.2.3. REMARQUES PARTICULIERES

Voici une liste, non exhaustive, des fautes graves le plus souvent commises.

Partie I

On donne des dimensions fantaisistes : $2^{2p-1} - 2$ pour Λ_p ; 10, 12 et 17 pour Λ_2 ; 8, 15, 28, 124, voire 35 ! pour Λ_4.

Dans 30 % des copies, $\mathcal{D}$ engendre Λ_2

Partie II

Pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$ donnés, l'équation $\vec{x} \wedge \vec{u} = \vec{v}$ possède une solution unique (très fréquent) ; si $\vec{v}$ et $\vec{v}.\vec{w}$ sont donnés, alors $\vec{w}$ est déterminé.

$\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel.

Partie III

On attribue à la matrice $J = \begin{bmatrix} O & I_3 \\ I_3 & O \end{bmatrix}$ le rang 1 ou le rang 3.

On propose (3,0), (4,5) ou (6,0) pour signature de la forme quadratique $q_{\mathcal{B}}$, quand ce n'est pas -1, «parce que det (J) $= -1$».

Dans la moitié des copies on parle du déterminant d'un système de quatre vecteurs sans préciser la base choisie.

Les questions d'indépendance linéaire ont été l'occasion de fautes que l'on n'accepterait pas d'un candidat au baccalauréat. Citons :

– les vecteurs $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant 4}$ sont indépendants puisqu'ils le sont deux à deux ;

– si le système (x_1, x_2, x_3, x_4) est lié, alors l'un des systèmes (x_1, x_2, x_3) ou (x_1, x_2, x_4) est lié ;

– si les systèmes (x_1, x_2, x_3, e_1), (x_1, x_2, x_3, e_2) et (x_1, x_2, x_3, e_3) sont liés, les trois sous-espaces qu'ils engendrent sont liés.

Notons enfin que rares sont les candidats qui ont compris III, 1°, les autres n'ayant même pas vu qu'il y avait un problème de compatibilité sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$.

Partie IV

Les fautes les plus marquantes concernent les sous-espaces totalement isotropes, que l'énoncé appelle $\mathcal{D}$ - isotropes. De nombreux candidats commettent des cercles vicieux, admettant implicitement :

– soit que tout sous-espace $\mathcal{D}$ - isotrope maximal appartient à $\mathcal{H}$ ou à $\mathcal{L}$;

– soit que tout sous-espace $\mathcal{D}$ - isotrope maximal est de dimension 3 (ce qui est vrai, mais nullement évident).

II.2.4. LES NOTES (sur 60)

Candidats : 1 447 copies

0	2,28 %	25 à 28	8,43 %
1 à 4	5,87 %	29 à 32	4,98 %
5 à 8	12,79 %	33 à 36	2,90 %
9 à 12	17,28 %	36 à 40	0,62 %
13 à 16	16,24 %	41 à 44	0,41 %
17 à 20	15,76 %	45 à 48	0,35 %
21 à 24	11,82 %	49 à 60	0,28 %

Candidates :

0	18	26 à 30	80
1 à 5	47	31 à 35	69
6 à 10	127	36 à 40	39
11 à 15	180	41 à 50	25
16 à 20	146	51 à 60	3
21 à 25	118		

II.3 TEXTE DE L'EPREUVE D'ANALYSE

DURÉE : 6 heures

Dans ce qui suit α désigne un nombre réel donné une fois pour toutes et tel que $\alpha > -\frac{1}{2}$. Toutes les fonctions considérées sont à valeurs dans le corps **C** des nombres complexes. Pour simplifier l'écriture on convient que dans une intégrale du type

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{F}(x)\,(1-x^2)^{\alpha}\,dx\,.$$

on remplacera le symbole $(1-x^2)^{\alpha}dx$ par $d\sigma(x)$; on écrira ainsi cette intégrale

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{F}(x)\,d\sigma(x)$$

Si f et g sont deux fonctions continues sur l'intervalle fermé $\mathrm{I} = [-1, 1]$, on pose :

$$(f \mid g) = \int_{-1}^{1} f(x)\,\overline{g(x)}\,d\sigma(x)\,.$$

I

A. Pour toute fonction f deux fois dérivable sur I on pose :

$$(\mathrm{L}f)(x) = (1-x^2)f''(x) - 2(\alpha+1)\,xf'(x) \quad ; \qquad |x| \leqslant 1$$

1° Montrer que si f et g sont deux fois continûment dérivables sur I, on a

$$(\mathrm{L}f \mid g) = (f \mid \mathrm{L}g)$$

2° Pour tout entier $n \geqslant 0$, soit E_n l'ensemble des restrictions à I des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n. On convient des abus de notation suivants :

— un polynôme et la fonction qu'il définit, ainsi que la restriction de celle-ci à I, sont désignés par le même symbole;

— pour tout entier $s \geqslant 0$, on note x^s la fonction $x \longmapsto x^s$, $(|x| \leqslant 1)$.

Ceci étant, montrer : $L(E_n) \subset E_n$. En déduire que si P est un polynôme de degré n tel que $(x^s \mid P) = 0$ pour $0 \leqslant s \leqslant n-1$, alors $LP + \lambda_n P = 0$, où λ_n est un nombre réel qu'on déterminera.

3° On pose :

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)}(1-x^2)^{-\alpha}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x^2)^{n+\alpha}].$$

Montrer que P_n est un polynôme de degré n.

Vérifier :

$$\begin{cases} P_n(1) = 1 \\ (P_n \mid P_m) = 0 \quad \text{si } n \neq m \\ LP_n + \lambda_n P_n = 0 \end{cases}$$

B. Pour tout $(a, \lambda) \in \mathbf{R}^2$, le symbole a_+^λ représente le réel égal à 0 si $a \leqslant 0$, égal à a^λ si $a > 0$. Si x, y et z sont des points de $\mathring{I} =]-1, 1[$ on pose :

$$H(x,y,z) = \frac{(1-x^2-y^2-z^2+2xyz)_+^{\alpha-1/2}}{(1-x^2)^\alpha(1-y^2)^\alpha(1-z^2)^\alpha}.$$

1° A l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tout entier $s \geqslant 0$ l'intégrale

$$\int_{-1}^{1} H(x,y,z)\, z^s\, d\sigma(z)$$

est un polynôme en x et y dont on précisera le degré en x et le degré en y.

2° Que peut-on dire de l'intégrale

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} H(x,y,z)\, P_n(y)\, P_m(z)\, d\sigma(y)\, d\sigma(z)$$

lorsque $n \neq m$?

3° Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$ il existe une constante C_n telle que, quels que soient les points x et y de $\mathring{I}$, on ait

$$\int_{-1}^{1} H(x,y,z)\, P_n(z)\, d\sigma(z) = C_n\, P_n(x)\, P_n(y).$$

Montrer que C_n ne dépend pas de n.

Dans la suite on note C la valeur commune des C_n.

II

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions continues sur I, et si $f \in \mathcal{C}$ on pose :

$$\|f\| = \int_{-1}^{1} |f(x)|\, d\sigma(x)$$

Si x, y et z sont des points de $\mathring{I}$, on pose :

$$K(x,y,z) = \frac{1}{C} H(x,y,z)$$

1° Quelle est la valeur de l'intégrale

$$\int_{-1}^{1} K(x,y,z)\, d\sigma(z) \quad ?$$

En utilisant le résultat de I-B-3°, en déduire que $|P_n(x)| \leqslant 1$ pour $x \in I$.

2° Si f et g appartiennent à $\mathcal{C}$, montrer qu'il existe un élément de $\mathcal{C}$, qu'on note $f * g$, tel que pour tout $x \in \mathring{I}$ on ait :

$$(f * g)(x) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} K(x,y,z)\, f(y)\, g(z)\, d\sigma(y)\, d\sigma(z).$$

Montrer que $\|f * g\| \leqslant \|f\|\,\|g\|$. Étudier $P_n * P_m$.

3° A tout élément f de $\mathcal{C}$ on associe l'application $\hat{f}$ de l'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers naturels dans $\mathbf{C}$, définie par $\hat{f}(n) = (f \mid P_n)$.

Si f, g et k sont des éléments de $\mathcal{C}$, montrer que :

i. $\widehat{f * g} = \hat{f} . \hat{g}$

ii. $\hat{f} = 0$ entraîne $f = 0$

iii. $(f * g) * k = f * (g * k)$

4° Soit χ une application de $\mathcal{C}$ dans $\mathbf{C}$ telle que, quels que soient les éléments f et g de $\mathcal{C}$ et les nombres complexes λ et μ, on ait

$$\chi(\lambda f + \mu g) = \lambda\chi(f) + \mu\chi(g) \quad , \quad \chi(f * g) = \chi(f)\,\chi(g).$$

On suppose de plus que si (f_i) est une suite d'éléments de $\mathcal{C}$ telle que $\lim_i \|f_i\| = 0$, alors $\lim_i \chi(f_i) = 0$.

Montrer que, si χ n'est pas identiquement nulle, il existe un entier $n \geqslant 0$ et un seul tel que $\chi(f) = \hat{f}(n)$ pour tout $f \in \mathcal{C}$.

III

Dans toute la suite du problème on suppose que $\alpha = 0$.

1º Soit V l'ouvert obtenu en privant $\mathbf{C}$ du segment I. Montrer que pour tout $x \in V$ il existe un et un seul $z \in V$ tel que

$$|z| > 1 \text{ et } x = \frac{1}{2}(z + z^{-1}).$$

Dans ce qui suit x et z sont ainsi liés.

2º Pour x fixé dans V, on considère le cercle orienté Γ que décrit le nombre complexe ξ défini par $(*)\ \dfrac{\xi - 1}{\xi - x} = \dfrac{z-1}{z-x} e^{i\theta}$ lorsque θ décrit le segment $[-\pi, \pi]$.

Pour tout nombre complexe $\omega \neq x$ on pose :

$$h(\omega) = \frac{1}{2} \frac{\omega^2 - 1}{\omega - x}$$

Montrer que :

$$P_n(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma [h(\xi)]^n \frac{d\xi}{\xi - x}$$

3º Calculer $h(z)$ et $h'(z)$. Montrer que la droite passant par -1 et par z passe aussi par le centre du cercle Γ.

Montrer que $|z+1| > |x+1|$, puis que, si $\xi \in \Gamma$ et $\xi \neq z$, on a $|h(\xi)| < |h(z)|$.

4º Montrer qu'on peut mettre $P_n(x)$ sous la forme :

$$P_n(x) = -\frac{z^n}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} [G(\theta)]^n \varphi(\theta)\, d\theta$$

où $G(\theta) = z^{-1} h(\xi)$, ξ et θ étant liés par la relation $(*)$. Sans chercher à expliciter G et φ, on donnera les valeurs de $\varphi(0)$ et du coefficient b tel que $G(\theta) = 1 - b\,\theta^2 + o(\theta^2)$, lorsque θ tend vers zéro. En déduire qu'il existe un nombre $\gamma > 0$ tel que

$$|G(\theta)| \leqslant e^{-\gamma\theta^2}$$

pour $0 \leqslant |\theta| \leqslant \pi$.

5º Montrer que pour tout $x \in V$, on a :

$$\lim_n \left(n^{1/2} z^{-n} P_n(x)\right) = \frac{z}{\sqrt{\pi}} (z^2 - 1)^{-1/2}$$

où la détermination de $(z^2-1)^{-1/2}$ dans l'ouvert V est celle qui est réelle lorsque z est réel et supérieur à 1.

IV

1º Soit $a = (a_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de nombres réels telle que $a_n \geqslant 1$, et $a_n \leqslant a_r a_s$ lorsque $n \leqslant r + s$.

Montrer que $\rho = \lim_n (n^{-1} \log a_n)$ existe et est fini.

Que peut-on dire de la position de $n^{-1} \log a_n$ par rapport à ρ ?

2º Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $\omega_n^{-1} = (P_n \mid P_n)$.

Une suite $a = (a_n)_{n \geqslant 0}$ du type considéré en IV-1º étant fixée, on désigne par $\mathcal{C}_a$ l'ensemble des fonctions f continues sur I, telles que $\|f\|_a < \infty$, où l'on pose :

$$\|f\|_a = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n a_n |\hat{f}(n)|.$$

Montrer que si $f \in \mathcal{C}_a$ et $x \in I$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n f(n) P_n(x).$$

3º Montrer qu'il existe des nombres $c_{n,m,k}$ (n, m et k étant des entiers $\geqslant 0$) tels que $c_{n,m,k} = 0$ si $k > n + m$ et

$$P_n P_m = \sum_{k=0}^{\infty} c_{n,m,k} P_k$$

On admettra sans démonstration que $c_{n,m,k} \geqslant 0$, quels que soient n, m et k.

4º Montrer que si f et g appartiennent à $\mathcal{C}_a$ on a :

$$fg \in \mathcal{C}_a \text{ et } \|fg\|_a \leqslant \|f\|_a \|g\|_a .$$

5º Soit Φ une application de $\mathcal{C}_a$ dans $\mathbf{C}$ telle que, quels que soient les éléments f et g de $\mathcal{C}_a$ et les nombres complexes λ et μ, on ait :

$$\Phi(\lambda f + \mu g) = \lambda \Phi(f) + \mu\, \Phi(g)$$

$$\Phi(fg) = \Phi(f) . \Phi(g)$$

On suppose de plus que $\Phi(P_0) \neq 0$, et que $\lim_i \Phi(f_i) = 0$ si $\lim_i \| f_i \|_a = 0$.

a. Montrer que si $\rho = 0$ (cf. la question IV-1° pour la définition de ρ) il existe un point x_0 de I et un seul tel que $\Phi(f) = f(x_0)$ pour tout $f \in \mathcal{C}_a$.

b. Si $\rho > 0$, montrer qu'on peut étendre le domaine de définition de tout élément $f \in \mathcal{C}_a$ en posant encore :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \widehat{f}(n)\, P_n(x)$$

pour tout nombre complexe x appartenant à la partie compacte $\mathcal{E}$ de $\mathbf{C}$ délimitée par l'ellipse de foyers 1 , — 1 et de demi-grand axe égal à ch ρ.

En déduire alors qu'il existe un point x_0 et un seul de $\mathcal{E}$ tel que $\Phi(f) = f(x_0)$ pour tout $f \in \mathcal{C}_a$.

II.4. RAPPORT SUR L'EPREUVE D'ANALYSE

II.4.1. THEME DU SUJET

Le problème s'inspire d'un article de I.I. Hirshman «harmonic analysis and ultra-sphérical polynomials» dans lequel sont repris des résultats obtenus par B. Levitan (The application of generalized displacement operators to linear differential equations of the second order – Usp. Mat. Nauk (NS) vol. 4 n° 1 – 1949). Dès 1938, J. Delsartes avait traité un problème analogue (une extension nouvelle de la théorie des fonctions presque-périodiques de Bohr – Acta. Mat. vol. 69) Pour $\alpha = n - 1/2$, n entier, l'algèbre étudiée en II n'est autre que celle des fonctions centrales du groupe $SO\,(n+2)$.

II.4.2. REMARQUES GENERALES

Le sujet proposé aux candidats, tout en revêtant un aspect facile sinon plaisant, a dérouté la majorité d'entre eux. Les correcteurs constatent, une fois de plus, que trop de candidats sont incapables de surmonter des difficultés de calcul. Comme cela a été fait l'année dernière, ils rappellent qu'une écriture illisible, des abréviations saugrenues, des figures tracées en dépit du bon sens et des interversions abusives dans l'ordre des questions ne peuvent que les indisposer. La floraison des expressions «on voit que», «et ainsi de suite», «en itérant», «par récurrence il est clair que», etc. les amène à privilégier des copies où des démonstrations correctes sont proposées.

Ceci concerne en particulier les questions I.A. 3° et I.B. 1°. Des erreurs fréquentes ont été relevées à propos de la théorie de l'intégration. Les noms de Lebesgue et Fubini ne sauraient être invoqués comme des incantations magiques, d'autant que le problème se bornait volontairement à la considération d'intégrales du type $\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)^{\alpha}\,dx$, où f était continue sur $I = [-1, 1]$, et $\alpha > -1$. Encore convenait-il, dès le début, de justifier correctement la convergence de ces intégrales. A ce propos, signalons que l'énoncé précisait bien que $d\sigma(x)$ était considéré comme un symbole facilitant l'écriture des formules ; les discours filandreux sur les mesures absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue étaient parfaitement oiseux.

III.4.3. REMARQUES PARTICULIERES

I.A.1° – Peu de candidats ont noté que

$$L\,f(x) = (1-x^2)^{-\alpha} \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^{\alpha+1} f'(x)\right]$$

ce qui, joint au fait que $\alpha + 1 > 0$, entraîne immédiatement le résultat au moyen d'une intégration par parties. Certains candidats décomposent f et g en leurs parties réelles et imaginaires ! On pourrait quand même espérer que les règles de calcul des intégrales de fonctions complexes sont connues de tous.

I.A.2° – En notant que la restriction de $(f, g) \mapsto (f/g)$ à E_n^2 est un produit hermitien et que si $P \in E_n \setminus E_{n-1}$ est orthogonal à E_{n-1}, il en est de même pour LP d'après la question précédente, on en déduit immédiatement que LP est proportionnel à P. Le calcul de λ_n s'effectue alors en examinant le coefficient de x^n. Ce calcul, pourtant simple, a donné lieu à un nombre non négligeable d'erreurs.

I.A.3° – A l'étonnement des correcteurs, cette question a constitué une difficulté majeure, parfois insurmontable pour ceux des candidats – les deux tiers environ – qui n'ont pas dépassé la note 3 sur 20. En écrivant que $(1-x^2)^{n+\alpha} = (1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\alpha}$ et en utilisant la formule de dérivation de Leibnitz on voit que $\frac{d^p}{dx^p}(1-x^2)^{n+\alpha}$ est nul pour $x = \pm 1$ lorsque $0 \leqslant p \leqslant n-1$, que P_n est un polynôme de degré au plus n et que $P_n(1) = 1$. La première remarque permet alors de prouver, par des intégrations par parties successives que $(Q \mid P_n) = 0$ lorsque Q est un polynôme de degré strictement inférieur à n. Enfin, comme on ne peut avoir $(P_n \mid P_n) = 0$ puisque $P_n(1) = 1$, on a bien $d^\circ P_n = n$. D'autres démonstrations nécessitent d'introduire la notation $P_{k,\alpha}$ et de supposer le résultat acquis pour tout α lorsque $k < n$. Trop de copies font allusion au «degré» de $\dfrac{d^p}{dx^p}(1-x^2)^{n+\alpha}$, sans égard au fait que α n'est pas forcément entier.

En ce qui concerne cette partie A, on peut s'étonner qu'alors que l'étude des espaces de Hilbert est au programme de l'agrégation, des candidats ne semblent avoir fait aucun exercice sur les polynômes orthogonaux, ce qui les aurait familiarisé avec les techniques bien connues évoquées plus haut.

I.B.1° – Comme la précédente, cette question n'a pas été appréciée par les candidats, alors que sa difficulté était bien loin d'être insurmontable. Dans un premier temps il convient d'étudier sur $\mathring{I}$ le signe du trinôme $z \mapsto 1 - x^2 - y^2 - z^2 + 2xyz$, (où $0 < x, \text{et } y < 1$). En notant que, pour $z = \pm 1$, ce trinôme vaut $-(x \mp y)^2$ et que ses racines sont $xy \pm \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$, on voit qu'il faut en réalité intégrer entre celles-ci. Il est tout de même difficile d'admettre que ce raisonnement est hors de portée d'un candidat à l'agrégation ! Trouver à partir de là que le changement de variable suggéré est $z = xy + t\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$ ne semble pas requérir des trésors d'astuce. D'ailleurs un bon nombre de candidats a trouvé ce changement de variable. Seulement voilà, avant d'obtenir l'intégrale

$$\int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\alpha - 1/2} \left(xy + t\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right)^s dt$$

il fallait franchir deux redoutables écueils : ne pas se tromper dans les calculs... et trouver les nouvelles bornes d'intégration ! Les quelques-uns qui arrivèrent à bon port n'eurent aucune peine à montrer qu'en développant $\left(xy + t\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right)^s$ à l'aide de la formule du binôme, des considérations élémentaires de parité prouvent que $\int_{-1}^{1} H(x,y,z)\, z^s \, d\alpha(z)$ est un polynôme en x et y, de degré au plus s par rapport à chacune des variables. Un peu plus de soin donnait le degré égal à s.

I.B.2° – Cette question était facile et beaucoup de candidats qui n'avaient pas su faire la précédente l'ont néanmoins résolue.

I.B.3° – La formule qu'on demandait de démontrer est due à Gergenbauer. Trop de candidats qui abordent cette question tiennent des discours invraisemblables sur $\mathbb{C}[X][Y]$, etc. au lieu de se contenter d'appliquer I.B.2°, l'égalité $d^\circ P_n = n$ et l'orthogonalité des P_n. En écrivant que

$$\int_{-1}^{1} H(x,y,z)\, P_n(z)\, d\alpha(z) = \sum_{0 \leq r,s \leq n} \gamma_{r,s}\, P_r(x)\, P_s(y)$$

le résultat s'obtient aisément. Il est un peu plus difficile de prouver que C_n ne dépend pas en réalité de n. On peut noter qu'en vertu d'un calcul fait précédemment, pour $x \in \mathring{I}$, on a

$$C_n[P_n(x)] = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\alpha - 1/2}\, P_n(x^2 + t(1-x^2))\, dt.$$

Il faut alors montrer, ce qui n'est pas difficile, que cette formule est encore vraie pour $x = 1$, et se rappeler que $P_n(1) = 1$.

II.1° – En faisant $n = 0$ dans la formule de Gegenbauer on obtient que $\int_{-1}^{1} K(x,y,z)\, d\sigma(z) = 1$. Encore fallait-il observer qu'avec les notations de l'énoncé cette formule s'écrit

$$P_n(x)\, P_u(y) = \int_{-1}^{1} K(x,y,z)\, P_n(z)\, d\sigma(z).$$

En utilisant toujours cette même formule, il vient $|P_n(x)|^2 \leq \sup_{|z| \leq 1} |P_n(z)|$ lorsque $x \in \mathring{I}$ et donc ainsi pour $x \in I$ ce qui donne le résultat. Cette question a été généralement bien traitée.

III.2° – La possibilité de prolonger $f * g$ en une fonction continue sur I a donné lieu à des considérations stupéfiantes, comme la continuité de K !! Il faut là encore noter que pour $|x| < 1$.

$$(f*g)(x) = \int_{-1}^{1} f(y)\, d\sigma(y) \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\alpha - 1/2}\, g\left(xy + t\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right) dt$$

et que la première intégrale est une fonction continue de x et de y sur I^2. L'utilisation du théorème de Fubini dans ce cas, comme dans ceux qui suivent, ne pose aucun problème puisque si M_1 et M_2 désignent les bornes supérieures de $|f|$ et $|g|$ sur I on a

$$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} |K(x,y,z) f(y) g(z)| \, d\sigma(y)\, d\sigma(z) \leqslant M_1 M_2 \int_{-1}^{1} d\sigma(y) \int_{-1}^{1} K(x,y,z)\, d\sigma(z)$$

$$= M_1 M_2 \int_{-1}^{1} d\sigma(y) \leqslant \infty$$

Encore fallait-il le noter ! On peut aussi procéder de la façon suivante : la formule de Gegenbauer montre que $f * g$ est un polynôme lorsque f et g sont des polynômes ; on effectue alors un passage à la limite dans le cas général en utilisant le théorème de Weierstrass. L'inégalité $\|f * g\| \leqslant \|f\| . \|g\|$ a été démontrée par de nombreux candidats, compte tenu de ce qui a été dit concernant l'utilisation du théorème de Fubini. La formule de Gegenbauer entraîne que $P_n * P_m = (P_n \mid P_m) P_n$ (et non $P_n * P_m = \delta_{n,m} P_n$ comme l'ont écrit certains).

II.3° – La partie i) a été bien traitée. Quant à ii) beaucoup de candidats ont admis dès le départ que les P_n forment une base de $L^2 \ (I, d\sigma)$. D'autres font allusion à la densité des P_n ; dans quoi ? mystère ! Ce qui est surtout navrant, c'est qu'un certain nombre de candidats pressentent qu'il faut utiliser le théorème de Weierstrass sans toutefois parvenir à mettre en forme la démonstration. Il n'est peut-être pas inutile de rappeler comment on opère dans un tel cas : on observe que $(f \mid Q) = 0$ pour tout polynôme Q ; si $\epsilon > 0$ est donné il existe un polynôme Q tel que $|f(x) - Q(x)| \leqslant \epsilon$ pour $x \in I$ et par suite

$$(f \mid f) = (f \mid f - Q) \leqslant \epsilon \int_{-1}^{1} |f(x)| \, d\sigma(x),$$

ce qui prouve que $(f \mid f) = 0$, donc que $f = 0$ puisque la fonction f est continue. De nombreux candidats n'ont pas vu que iii) résulte immédiatement de i) et ii). Ils ont invoqué des considérations incorrectes sur les symétries de K.

II.4° – Cette question n'est abordée que dans quelques-unes des meilleures copies. Il faut tout d'abord indiquer que les polynômes sont denses dans $\mathcal{C}$ muni de la norme $\| \cdot \|$, de sorte que les $\chi_n = \chi(P_n)$ ne peuvent être tous nuls ;

comme $\chi_n \chi_m = (P_n \mid P_m) \chi_n$ il existe un entier n tel que $\chi_m = 0$ si $m \neq n$ et $\chi_n = (P_n \mid P_n)$. En d'autres termes $\chi(P) = \hat{P}(n)$ pour tout polynôme P. On passe au cas général en utilisant l'argument indiqué plus haut.

III.1° – Cette question élémentaire a réservé des surprises. Ainsi des candidats confondent-ils la condition $|z| = 1$ avec $z = \pm 1$. D'autres passent aux parties réelles et imaginaires et obtiennent évidemment un système d'équations dont ils ne savent que faire.

III.2°, 3°, 4° et 5° – Il s'agit d'obtenir une évaluation asymptotique lorsque $n \to \infty$ de $P_n(x)$, où P_n est le n-ième polynôme de Legendre et $x \notin I$. Cette évaluation est classique. On en trouve par exemple trois démonstrations dans l'ouvrage de G. Szegö, «Orthogonal polynomials», dans le cas plus général des polynômes de Jacobi. Afin de n'avoir à faire démontrer aucune des formules classiques qu'utilisent ces démonstrations (telle l'intégrale de Laplace) l'énoncé proposait une méthode s'inspirant de celle dite «du col».

La formule de Cauchy permet d'écrire que

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left[\frac{\xi^2 - 1}{2(\xi - x)} \right]^n \frac{d\xi}{\xi - x}$$

lorsque Γ est un lacet tel que Ind $(x ; \Gamma) = 1$. La fonction $h(\omega) = \frac{1}{2} \; \frac{\omega^2 - 1}{\omega - x}$ ayant une dérivée qui s'annule pour $\omega = z$ (ce qu'on voit aisément en dérivant $(\omega - x)\, h(\omega) = \frac{1}{2} \; (\omega^2 - 1)$, après avoir observé que $h(z) = z$), la méthode du col conduit à choisir une courbe Γ passant par z. Pour simplifier l'étude de $|h(\xi)|$ sur cette courbe il est intéressant de choisir celle-ci de sorte que $\left| \frac{\xi - 1}{\xi - x} \right|$ y soit constant, ce qui amène à considérer le cercle de l'énoncé. Encore faut-il calculer Ind $(x ; \Gamma)$, ce qui peut être fait à l'aide de considérations géométriques (mais peu de candidats en sont encore capables), ou en observant que la relation $\frac{d\xi}{\xi - 1} - \frac{d\xi}{\xi - x} = i\, d\theta$ implique que Ind $(1, \Gamma)$ – Ind $(x, \Gamma) = 1$; Or Γ étant le lien des points dont le rapport des distances à 1 et à x est $\left| \frac{z - 1}{z - x} \right| = \left| \frac{2z}{z + 1} \right| \geqslant \frac{2|z|}{|z| + 1} > 1$, on a Ind $(1, \Gamma) = 0$, d'où Ind $(x, \Gamma) = -1$ (ce qui explique le signe moins dans l'expression de $P_n(x)$). Ceci étant, comme $|h(\xi)|$ est proportionnel à $|\xi+1|$ sur Γ et que $h'(z)=0$, la distance de -1 à un point de ce cercle est extremum en z, ce qui signifie que la droite passant par -1 et z passe aussi par le centre de Γ. Enfin de $\left|\frac{z+1}{x+1}\right| = \left|\frac{2z}{z+1}\right| > 1$ on déduit que -1 et x sont du même côté par rapport à la tangente en z à Γ ; x étant situé à l'intérieur de Γ on en conclut que $|\xi+1| < |z+1|$, et donc que $|h(\xi)| < |h(z)|$, lorsque $\xi \in \Gamma$ et $\xi \neq z$. Le calcul de $\varphi(0)$ et de b est facile, à condition de le bien mener. Pour cela, il faut noter que $\frac{d\xi}{\xi - x} = \varphi(\theta)\, d\theta$, $-\frac{x-1}{(\xi-x)^2}\, d\xi = i\,\frac{z-1}{z-x}\, e^{i\theta} d\theta$, d'où

$$\varphi(0) = -i\,\frac{z-1}{x-1} = -\frac{2i\,z}{z-1}$$

En dérivant la relation $(\omega - x)\,h'(\omega) + h(\omega) = \omega$ et en faisant $\omega = z$, il vient (compte tenu de $h'(z)=0$) : $h''(z) = \frac{1}{z-x}$. On a donc au voisinage de zéro

$$G(\theta) = 1 + \frac{z-x}{2z}\ \varphi(0)^2\,\theta^2 + 0(\theta^2) = 1 - \frac{z+1}{z-1}\ \theta^2 + 0(\theta^2).$$

Lorsque $|z| > |$, «l'angle sous lequel on voit depuis z le segment I» est aigu, donc $\beta = \mathrm{Re}\,\frac{z+1}{z-1} > 0$.

Un calcul simple montre que $\log|G(\theta)| = -\beta\theta^2 + 0(\theta^2)$ et de là, par un argument classique, on prouve que $|G(\theta)| \leqslant e^{-\gamma\theta^2}$ pour $0 \leqslant |\theta| \leqslant \pi$, où $0 < \gamma$ (car $\log|G(\theta)| < 0$ pour $0 < |\theta| < \pi$). En écrivant que

$$n^{1/2}\, z^{-n}\, P_n(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi\sqrt{n}}^{\pi\sqrt{n}} G\!\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}}\right)\varphi\!\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}}\right) d\theta,$$

le théorème de Lebesgue de la convergence dominée permet de conclure que

$$\lim\ n^{1/2}\, z^{-n}\, P_n(x) = \frac{z}{\pi(z-1)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z+1}{z-1}\theta^2}\, d\theta$$

Le deuxième membre est une fonction analytique de z dans l'ouvert $|z| > 1$, qui est égale à $\frac{z}{\sqrt{\pi}}\,(z^2-1)^{-1/2}$ lorsque z est réel et > 1. La formule est donc complètement démontrée. Dans quelques bonnes copies on a su observer que $|h(\xi)|$ est proportionnel à $|\xi+1|$ sur Γ. Un seul candidat a abordé sérieusement ces questions. Aucun n'a su mener à bien le calcul de $\varphi(0)$ et de b. Enfin un nombre impressionnant de candidats ayant prouvé que $h(z) = z$ en déduisent ... que $h'(z) = 1$!!

IV.1° – Cet exercice bien classique n'a semble-t-il jamais été traité par l'écrasante majorité des candidats.

IV.2° – Comme $a_n \geqslant 1$ et $|P_n(x)| \leqslant 1$ pour $x \in I$, la série $g(x) = \sum_{n \geqslant 0} \omega_n\, \hat{f}(n)\, P_n(x)$ converge uniformément sur I ; on en déduit que $\hat{f}(n) = \hat{g}(n)$ pour tout $n \geqslant 0$, et, par suite, que $f = g$.

IV.3° – Question très facile, négligée par trop de candidats. On trouve la démonstration des inégalités $C_{n,m,k} \geqslant 0$ dans H-Y-Hsü, «Certains integrals and infinite senes involving ultraspherical polynomials and Bessel functions», Duke Math. Jour, vol. 4 (1938).

IV.5° – Il est tout d'abord facile de montrer que

$$\sum_{n \geqslant 0} \omega_n\, a_n\, |\widehat{fg}(n)| \leqslant \sum_{r,s,n} \omega_r\, \omega_s\, |\hat{f}(r)|\,|\hat{g}(s)|\, a_n\, c_{r,s,n}$$

Il faut ensuite observer que $C_{r,s,n} \neq 0$ implique $a_n \leqslant a_r\, a_s$ et que $\sum_n C_{r,s,n} = 1$.

IV.6° – Il faut tout d'abord observer que $\|\,.\,\|_a$ est une norme sur $\mathcal{C}_a$ et que si $f \in \mathcal{C}_a$ ou a $f = \sum_n \omega_n\, \hat{f}(n)\, P_n$ au sens de cette norme. En posant

$x = \Phi\,(P_i\,)$ on montre en premier lieu que $\Phi\,(P) = P\,(x)$ pour tout polynôme P (c'est là qu'on utilise le fait que Φ n'est pas identiquement nulle) et par suite que $\Phi(f) = \sum\limits_n \omega_n\,\hat{f}(n)\,P_n\,(x)$ pour $f \in \mathcal{C}\,a$. Comme Φ est continue il existe une constante M telle que $|\,\Phi(f)\,| \leqslant M\,\|\,f\,\|\,a$ (en fait on peut prendre $M = 1$, mais cela importe peu dans la suite). Ainsi $|P_n\,(x)\,| \leqslant M_{a\,n}$

Si $x = \frac{1}{2}\,(z + z^{-1})$, $|\,z\,| > 1$, on déduit de l'évaluation asymptotique de $P_n\,(x)$ effectuée en IV que $\log |\,z\,| \leqslant \rho$. Si $\rho = 0$ la réponse à la question a) est alors facile. Lorsque $\rho > 0$, on note que z parcourt la couronne $1 < |\,z\,| \leqslant e^{\rho}$ lorsque x parcourt $\xi - I$ et quelques calculs montrent qu'alors

$$|\omega_n\,\hat{f}\,(n)\,P_n\,(x)\,| = \bar{O}\,(\,n^{-1/2}\;\omega_n a_n\,|\,\hat{f}\,(n)\,|\,)$$

ce qui permet d'étendre le domaine de définition de f à ξ et de conclure aisément.

II.4.4. LES NOTES (sur 60)

Candidats : 1 386 copies

0	4,18 %	25 à 28	2,31 %
1 à 4	40,55 %	29 à 32	1,59 %
5 à 8	20,35 %	33 à 36	1,59 %
9 à 12	13,28 %	37 à 40	0,94 %
13 à 16	6,28 %	41 à 44	0,29 %
17 à 20	6,06 %	45 à 48	0,14 %
21 à 24	2,24 %	49 à 60	0,22 %

Candidates :

0	32	26 à 30	18
1 à 5	361	31 à 35	19
6 à 10	172	36 à 40	9
11 à 15	112	41 à 50	7
16 à 20	53	51 à 60	5
21 à 25	35		

II. 5 - TEXTE DE L'EPREUVE D'ANALYSE NUMERIQUE

I

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

On désigne par :

1º $H^0[a, b]$ (ou simplement H^0) l'ensemble des (classes de) fonctions y à valeurs réelles, définies sur $[a, b]$ et de carré sommable sur $[a, b]$:

$$\int_a^b [y(t)]^2\,dt < +\infty.$$

Muni des lois usuelles d'addition et de multiplication par un scalaire réel:

$$(1)\quad \begin{cases} \forall t \in [a, b] & & [y_1 + y_2](t) = y_1(t) + y_2(t) \\ \forall t \in [a, b] & \forall \lambda \in \mathbf{R} & [\lambda . y](t) \quad = \lambda . y(t), \end{cases}$$

H^0 est un espace vectoriel sur **R**. Muni, de plus, du produit scalaire habituel :

$$< y_1\,, y_2 >_0 = \int_a^b y_1(t)\; y_2(t)\; dt$$

et de la norme associée $\|\,y\,\|_0 = [< y, y >_0\,]^{1/2}$,

H^0 est un espace de Hilbert réel.

2º $H^2\,[a, b]$ (ou simplement H^2) l'ensemble des fonctions x, définies sur $[a, b]$, à valeurs réelles, admettant sur $[a, b]$:

— une dérivée première absolument continue,

— une dérivée seconde définie presque partout sur $[a, b]$ et de carré sommable :

$$\int_a^b [x''(t)]^2\,dt < +\infty.$$

Muni, comme en (1), des lois usuelles d'addition et de multiplication par un scalaire réel, H^2 est un espace vectoriel sur **R**.

On munit H^2 du produit scalaire :

$$< x_1\,, x_2 >_2 = \int_a^b [x_1(t)\; x_2(t) + x'_1(t)\; x'_2(t) + x''_1(t)\; x''_2(t)]\; dt$$

et de la norme associée

$$\|\,x\,\|_2 = [< x, x >_2\,]^{1/2}.$$

H^2 est ainsi un espace de Hilbert réel.

3° Soient alors, pour toute la suite, $n + 2$ valeurs réelles

$$t_0, t_1, ..., t_n, t_{n+1} \text{ telles que :}$$

$$t_0 = a < t_1 < t_2 < ... < t_n < b = t_{n+1}$$

(on suppose que $n \geqslant 2$).

On considère l'ensemble S des fonctions s, définies sur $[a, b]$, à valeurs réelles, telles que :

a. Dans tout intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, s coïncide avec un polynôme de degré $\leqslant 3$:

$$\forall t \in [t_i, t_{i+1}] \qquad s(t) = \gamma_i^3 t^3 + \gamma_i^2 t^2 + \gamma_i^1 t + \gamma_i^0.$$

b. Dans chacun des deux intervalles $[a, t_1]$ et $[t_n, b]$, s coïncide avec un polynôme de degré $\leqslant 1$:

$$\forall t \in [a, t_1] \qquad s(t) = \gamma_0^1 t + \gamma_0^0$$

$$\forall t \in [t_n, b] \qquad s(t) = \gamma_n^1 t + \gamma_n^0$$

(Les γ_i^j sont des réels).

c. s, s', s'' sont définies et continues sur $[a, b]$.

Q 1 *Montrer que* S *est un sous-espace vectoriel de* H^2, *de dimension finie.*

Pour tout réel α on pose $[\alpha]_+ = \sup(\alpha, 0) = \begin{cases} \alpha \text{ si } \alpha \geqslant 0 \\ 0 \text{ si } \alpha < 0 \end{cases}$

Q 2 *Montrer qu'un élément s de* H^2 *appartient à* S *si et seulement si*

$$\forall t \in [a, b] \qquad s(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \sum_{i=1}^{n} \delta_i \frac{[(t - t_i)^3]_+}{3!}$$

où $\alpha_0, \alpha_1, \delta_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ *sont des réels tels que*

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{n} \delta_i = 0 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{n} \delta_i t_i = 0.$$

En déduire la dimension de S *dans* H^2.

On désigne par $\mathcal{B}$ l'application de H^2 dans H^0 qui à tout x de H^2 fait correspondre sa dérivée seconde :

$$\mathcal{B}(x) = x''$$

On note c l'application de H^2 dans $\mathbf{R}^n$ qui à tout x de H^2 fait correspondre le vecteur des valeurs de x en $t_1, \ldots, t_n$:

$$c(x) = (x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_n))$$

On note d l'application de S dans $\mathbf{R}^n$ qui à tout s de S fait correspondre le vecteur de $\mathbf{R}^n$:

$$d(s) = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$$

où δ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ représente le saut de la dérivée troisième de s en t_i.

On remarquera à ce propos que, s coïncidant avec un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 sur tout intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, la dérivée troisième de s est définie et constante sur $]t_i, t_{i+1}[$ $\quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

On note $<\,,\,>$ le produit scalaire usuel sur $\mathbf{R}^n$:

$$u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbf{R}^n, \qquad v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbf{R}^n$$

$$< u, v > = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n$$

On note $\|\ \|$ la norme associée sur $\mathbf{R}^n$:

$$\| u \| = [\sum_{i=1}^{n} u_i^2]^{1/2} = < u, u >^{1/2}$$

Q 3 *Montrer que $\mathcal{B}$, c et d sont linéaires et continues. Sont-elles surjectives?*

Q 4 *Montrer que pour tout x dans* H^2 *et tout s dans* S *on a :*

$$(3) \qquad < \mathcal{B}(x), \mathcal{B}(s) >_0 = < c(x), d(s) >$$

Q 5 *Montrer que pour tout $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ dans* $\mathbf{R}^n$, *il existe un élément σ unique dans* S *tel que :*

$$(4) \qquad c(\sigma) + d(\sigma) = z$$

Q 6 *Montrer que l'élément σ défini à la question précédente vérifie :*

$$(5) \quad \| \mathcal{B}(\sigma) \|_0^2 + \| c(\sigma) - z \|^2 = \operatorname*{Min}_{x \in H^2} (\| \mathcal{B}(x) \|_0^2 + \| c(x) - z \|^2)$$

Soit Z_0 le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$, de dimension $n-2$ formé des vecteurs $z = (z_1, \ldots, z_n)$ tels que :

$$\sum_{i=1}^{n} z_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} z_i t_i = 0.$$

On désigne par (γ_j) $(j = 1, \ldots, n-2)$ une base de Z_0.

On pourra par exemple prendre pour γ_j le vecteur de composantes γ_{ji} suivantes :

$$\gamma_{ji} = \begin{cases} \dfrac{1}{(t_j - t_{j+1})\ (t_j - t_{j+2})} & \text{si } i = j, \\ \dfrac{1}{(t_{j+1} - t_j)\ (t_{j+1} - t_{j+2})} & \text{si } i = j+1, \\ \dfrac{1}{(t_{j+2} - t_j)\ (t_{j+2} - t_{j+1})} & \text{si } i = j+2, \\ 0 & \text{si } i < j \text{ ou si } i > j+2. \end{cases}$$

On rappelle que pour tout $x \in \mathrm{H}^2$ on a (développement de Taylor) :

$$x(t) = x(a) + (t - a)\, x'(a) + \int_a^b \left[(t-\xi)\right]_+ x''(\xi)\, d\xi$$

Q 7 *Montrer que pour tout j $(j = 1, 2, \ldots, n-2)$ il existe une fonction $\beta_j \in \mathrm{H}^0$ telle que pour tout $x \in \mathrm{H}^2$ on ait :*

$$< \gamma_j, c\,(x) > \; = \; < \beta_j, \mathcal{B}\,(x) >_0 .$$

Expliciter les fonctions β_j pour le choix de vecteurs γ_j proposé ci-dessus (montrer en particulier que β_j vérifie alors $\beta_j\,(t) = 0$, lorsque $t \notin [t_j, t_{j+2}]$).

Soit $s \in \mathrm{S}$ arbitraire. D'après la question Q 2, il existe des réels μ_j $(j = 1, \ldots, n-2)$ tels que :

$$d(s) = \sum_{j=1}^{n-2} \mu_j \gamma_j$$

Q 8 *Montrer que l'on a alors :*

$$\mathcal{B}(s) = \sum_{j=1}^{n-2} \mu_j \beta_j$$

On se propose de déterminer numériquement l'élément $\sigma \in \mathrm{S}$ qui vérifie $c\,(\sigma) + d\,(\sigma) = z$. Pour cela on calcule d'abord $\mathcal{B}(\sigma) = \sigma'' \in \mathrm{H}^0$ et $c\,(\sigma) = (\sigma(t_1), \sigma(t_2), \ldots, \sigma(t_n)) \in \mathbf{R}^n$.

Q 9 *Montrer que l'on a :*

$$\mathcal{B}(\sigma) = \sum_{j=1}^{n-2} \mu_j \beta_j$$

$$c(\sigma) = z - \sum_{j=1}^{n-2} \mu_j \gamma_j$$

où les μ_j $(j = 1, \ldots, n-2)$ sont solutions du système d'équations linéaires :

$$\sum_{j=1}^{n-2} \omega_{kj}\, \mu_j = \eta_k \qquad (k = 1, \ldots, n-2)$$

avec

$$\omega_{kj} = < \beta_k, \beta_j >_0 + < \gamma_k, \gamma_j >$$

et

$$\eta_k = < z, \gamma_k > .$$

II

Soient X, Y, Z trois espaces de Hilbert réels. On note

$<, >_{\mathrm{X}}$ et $\| \;\|_{\mathrm{X}}$ le produit scalaire et la norme sur X

$<, >_{\mathrm{Y}}$ et $\| \;\|_{\mathrm{Y}}$ le produit scalaire et la norme sur Y

$<, >_{\mathrm{Z}}$ et $\| \;\|_{\mathrm{Z}}$ le produit scalaire et la norme sur Z.

Soient b et c deux applications linéaires et continues de X ***sur*** Y et Z respectivement.

On se propose de trouver, pour z donné dans Z, un élément σ de X tel que

$$(6) \qquad \| b(\sigma) \|_{\mathrm{Y}}^2 + \| c(\sigma) - z \|_{\mathrm{Z}}^2 = \underset{x \in \mathrm{X}}{\mathrm{Min}} \left(\| b(x) \|_{\mathrm{Y}}^2 + \| c(x) - z \|_{\mathrm{Z}}^2\right)$$

On désigne par $\mathrm{P} = \mathrm{Y} \times \mathrm{Z}$ l'espace vectoriel produit de Y et Z, muni du produit scalaire :

$$< p_1, p_2 >_{\mathrm{P}} = < y_1, y_2 >_{\mathrm{Y}} + < z_1, z_2 >_{\mathrm{Z}}$$

[avec $p_1 = (y_1, z_1)$ dans P $(y_1 \in \mathrm{Y};\ z_1 \in \mathrm{Z})$

$p_2 = (y_2, z_2)$ dans P $(y_2 \in \mathrm{Y};\ z_2 \in \mathrm{Z})$]

et de la norme associée :

$$\forall p \in \mathrm{P} \qquad \| p \|_{\mathrm{P}} = [< p, p >_{\mathrm{P}}]^{1/2}$$

P est un espace de Hilbert réel.

On désigne par a l'application de X dans P définie par

$$\forall x \in \mathrm{X} \qquad a\,(x) = (b(x), c(x)) \in \mathrm{P}$$

Q 10 *Montrer que a est une application linéaire et continue.*

Q 11 *Montrer que le problème (6) revient à chercher s'il existe, dans un certain sous-espace vectoriel* V *de* P *à préciser, un élément* v_0 *à distance minimum d'un certain élément* p_0 *de* P *que l'on précisera également. Expliciter la relation existant entre* σ *et* v_0.

Q 12 *Montrer que si* V *est fermé, alors pour* z *quelconque dans* Z *l'existence d'une solution au problème* (6) *est assurée.*

On note b' et c' les applications adjointes de b et c respectivement :

$$\forall x \in X, \quad \forall y \in Y \qquad <b(x), y>_Y = <x, b'(y)>_X$$

$$\forall x \in X, \quad \forall z \in Z \qquad <c(x), z>_Z = <x, c'(z)>_X$$

On note :

$$Im(b') = b'(Y) \subset X$$

$$Im(c') = c'(Z) \subset X$$

Q 13 *Montrer que si l'ensemble :* $Im(b') + Im(c')$ *est fermé dans* X *alors pour* z *quelconque dans* Z *l'existence d'une solution au problème* (6) *est assurée.*

On désigne par $\mathcal{N}(b)$ et $\mathcal{N}(c)$ les noyaux des applications b et c :

$$\mathcal{N}(b) = \{x \in X : b(x) = 0\}$$

$$\mathcal{N}(c) = \{x \in X : c(x) = 0\}$$

D'autre part, si W est un sous-espace vectoriel de X, $W^\perp$ désigne son supplémentaire orthogonal :

$$W^\perp = \{x \in X : \forall w \in W, <x, w>_X = 0\}$$

Q 14 *Montrer que l'existence, pour* z *quelconque dans* Z, *d'une solution au problème* (6) *est assurée lorsque l'une des quatre conditions suivantes est vérifiée :*

$\mathcal{N}(b)$ de dimension finie dans X

$\mathcal{N}(c)$ de dimension finie dans X

$\mathcal{N}(b)$ de co-dimension finie dans X

$\mathcal{N}(c)$ de co-dimension finie dans X

Q 15 *On suppose que le problème* (6) *admet au moins une solution pour tout* z *dans* Z.

Montrer que la condition

$$(7) \qquad \mathcal{N}(b) \cap \mathcal{N}(c) = \{0\}$$

est alors une condition nécessaire et suffisante *d'unicité de cette solution.*

Q 16 *Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément* σ *de* X *soit solution de* (6) *est que*

$$(8) \qquad \forall x \in X \qquad <b(\sigma), b(x)>_Y + <c(\sigma) - z, c(x)>_Z = 0$$

Q 17 *Montrer que la condition* (8) *s'écrit aussi*

$$a'(a(\sigma)) = c'(z)$$

où a' *désigne l'adjointe de* a.

On définit le sous-espace vectoriel suivant de X :

$$S = \{s \in X : \forall x \in \mathcal{N}(c), <b(s), b(x)>_Y = 0\}$$

On supposera dans toute la suite que $Im(b') + Im(c')$ est fermé et que $\mathcal{N}(b) \cap \mathcal{N}(c) = \{0\}$.

Q 18 *Montrer que* c'^{-1} *existe.*

On pose alors $d(s) = c'^{-1} \circ b' \circ b(s)$, *pour* $s \in S$.

Q 19 *Montrer que, pour tout* z *donné dans* Z, *il existe* σ *unique dans* S *tel que :*

$$c(\sigma) + d(\sigma) = z.$$

On définit alors :

$$X_0 = Im(b') \cap Im(c')$$
$$Y_0 = [b(\mathcal{N}(c))]^\perp$$
$$Z_0 = [c(\mathcal{N}(b))]^\perp$$

[Y_0 et Z_0 sont respectivement, dans Y et dans Z, les supplémentaires orthogonaux de $b(\mathcal{N}(c))$ et $c(\mathcal{N}(b))$].

Q 20 *Prouver que* $\quad X_0 = b'(Y_0) = c'(Z_0)$.

On suppose dorénavant que $\mathcal{N}(b)$ est de dimension finie q, que $Z = Im(c)$ est de dimension finie n et que la condition

$$\mathcal{N}(b) \cap \mathcal{N}(c) = \{0\}$$

est assurée.

Q 21 *Donner un exemple explicite de cette situation, s'inspirant de la partie I.*

Q 22 *Montrer qu'alors* X_0, Y_0, Z_0 *sont de dimension* $n-q$.
Soient alors (α_j), (β_j), (γ_j) $(j = 1, 2, \ldots, n-q)$ *des bases de* X_0, Y_0, Z_0 *respectivement, telles que*

$$\alpha_j = b'(\beta_j) = c'(\gamma_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-q)$$

Q 23 *Montrer que* $\mathcal{N}(a')$ *est de dimension* $n-q$ *dans* P *et en expliciter une base.*

Q 24 *Montrer alors qu'un élément* σ *de* X *vérifie* (6) *si et seulement s'il existe des réels* $\mu_1, \ldots, \mu_{n-q}$ *tels que :*

$$(9) \quad \begin{cases} b(\sigma) = \sum_{j=1}^{n-q} \mu_j \beta_j \\ c(\sigma) = z - \sum_{j=1}^{n-q} \mu_j \gamma_j \end{cases}$$

Montrer que les réels μ_j *vérifiant* (9) *sont solutions du système d'équations linéaires*

$$\sum_{j=1}^{n-q} \omega_{kj}\, \mu_j = \eta_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-q)$$

avec

$$\omega_{kj} = <\beta_k , \beta_j>_Y + <\gamma_k , \gamma_j>_Z$$
$$\eta_k = <z , \gamma_k>_Z$$

Q 25 *Établir le rapprochement entre les résultats généraux établis dans la deuxième partie et ceux obtenus dans la première partie.*

II. 6. RAPPORT SUR L'EPREUVE D'ANALYSE NUMERIQUE

Le sujet d'analyse numérique était entièrement consacré à la notion de fonction-spline. Le mot anglais «spline» désigne une tige flexible pouvant servir à tracer une courbe lisse passant par des points donnés. Vers 1946, I.J. SCHOENBERG a appelé fonction-spline des fonctions formées de morceaux de polynômes se raccordant correctement entre eux, du fait que de telles fonctions sont des solutions approchées du problème d'élasticité correspondant à la tige flexible du dessinateur. De nombreuses extensions et généralisations du problème précédent ont été étudiées par la suite et les auteurs ont souvent appelé «spline» les solutions correspondantes. Le problème posé concernait plus précisément les fonctions-spline d'ajustement

(ou de lissage) pour lesquelles il n'est pas exigé que la fonction passe exactement par les points donnés, mais seulement au voisinage de ceux-ci ; plus exactement, on réalise un compromis entre le caractère lisse de la fonction (représenté par $\int_a^b (x''(t))^2\, dt)$ et l'approximation des points donnés (représentée par $\sum_{i=1}^{n} (x(t_i) - z_i)^2$). Signalons tout d'abord que le jury a constaté avec étonnement qu'un seul candidat a parlé de fonction spline (le mot n'était pas mentionné dans le sujet) alors que certains d'entre eux ont très probablement reconnu cette notion qui commence à être très utilisée en calcul numérique.

Le sujet comportait explicitement deux parties que l'on pouvait traiter de façon indépendante, mais qui étaient très liées quant à la matière. La première conduisait à la définition et aux propriétés essentielles d'une fonction-spline élémentaire formée de morceaux de polynômes, avec en plus l'idée d'un algorithme pour la calculer. Les difficultés étaient de nature plutôt technique ou calculatoire. La deuxième partie concernait une généralisation de la notion précédente dans des espaces de Hilbert. On retrouvait ainsi par d'autres méthodes, mais en suivant un chemin assez parallèle, les propriétés générales des fonctions-spline dans un cadre plus abstrait et aussi une généralisation de l'algorithme de calcul. Cette deuxième partie, plus simple au point de vue technique, faisait surtout appel aux connaissances d'analyse fonctionnelle des candidats. La 25e et dernière question que quelques candidats ont bien traitée, demandait précisément d'établir correctement le parallèle entre les deux parties du problème.

Les deux premières questions, concernant la forme des éléments de S et sa dimension, étaient assez techniques et ont été, en général, très mal traitées. Très peu de candidats ont donné une solution courte et élégante. On a trouvé pour la dimension de S les quantités les plus diverses ; citons : 2, 3, 4, $n-2$, n, $n+1$, $n+2$, $3n+4$, 2^{2n}, $2^{2(n+1)}$, $4 \times 3^{n-1}$, 4^n, etc. . L'erreur la plus spectaculaire a été l'affirmation : $\dim(S) < \dim(H^2) < \infty$ .... Plusieurs candidats ont tenté de montrer que S est de dimension finie par des arguments de compacité de boule unité...

La question 3 a été souvent bien traitée, sauf la continuité de c : il s'agissait pourtant là d'une question importante et classique. Très peu (3 ou 4) ont trouvé les majorations qui montrent la continuité de la fonctionnelle $x \in H^2 \to x(t_i)$.
Par contre tous les degrés d'absurdité ont été représentés pour tenter de répondre à cette seule question ; citons :

«toute application linéaire est continue»

«c et d sont continues car à valeurs dans $\mathbb{R}^n$»

«c est continue parce que les fonctions de H^2 le sont» «la convergence dans H^0 entraine la convergence simple»

«c est non surjective sinon H^2 serait de dimension finie»

« $\sum_{i=l}^{n} (x(t_i))^2 \leqslant \lambda \int (x(t))^2 dt$»

« $|x(t)| \leqslant \int_a^b |x(s)| ds$» etc.

La question 4 était facile et bon nombre de candidats sont parvenus à la résoudre. Les solutions proposées ont seulement varié en longueur et en clarté. Notons que 2 candidats ont astucieusement montré la continuité de c en utilisant la question 4.

La question 5, bien que facile également, a donné lieu à beaucoup d'erreurs. La plupart des candidats ont posé le système linéaire de $n+2$ équations $n+2$ inconnues, mais moins de la moitié se sont préoccupés du déterminant. Ceux qui ont tenté de montrer directement que ce déterminant était non nul n'y sont, en général, pas parvenu. Par contre, environ un quart des candidats ont bien montré, en utilisant la question précédente, que l'équation

$$c(\sigma)+d(\sigma) = 0$$

admettait la seule solution $\sigma = 0$. Les fautes les plus caractéristiques ont été les suivantes :

« c bijectif entraine $c+d$ bijectif»

« c et d surjectifs entraine $c+d$ surjectif»

« $c(\sigma)+d(\sigma) = z$ est équivalent à $\|c(\sigma)+d(\sigma)\|^2 = \|z\|^2$ »

Dans la question 6, on demandait d'établir que σ vérifiait une condition d'extrémalité. Dans la deuxième partie, au contraire, on partira de cette condition d'extrémalité et on montrera qu'avec des hypothèses convenables, elle admet une solution unique. Les candidats qui ont sérieusement essayé de traiter cette question y sont en général parvenu.

Les questions 7, 8 et 9 sont en fait des étapes pour aboutir à une méthode de calcul de la fonction-spline σ. Bon nombre d'étudiants ont préféré laisser ces questions pour traiter les premières questions de la deuxième partie.

Cette deuxième partie, qui était, rappelons-le, consacrée à l'étude des fonctions-spline dans des espaces de Hilbert, commençait de façon très progressive par des questions faciles que beaucoup de candidats ont su traiter. C'est le cas pour les questions 10, 11 et 12. On a toutefois relevé souvent l'erreur grossière : $V = Im(B) \times Im(c)$ et des affirmations telles que :

«tout sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert est compact» ;

«un fermé forné d'un Hilbert est compact» ;

«l'image d'un fermé par une application continue est un fermé» ;

«toute fonction continue atteint sa borne inférieure sur un fermé».

Les questions 13 et 14 concernaient l'existence de la solution du problème de minimisation (6). La question 13 qui utilisait le fait que $Im(a') = Im(b') + Im(c')$ et le théorème de l'image fermée ($Im(a')$ fermé si et seulement si $Im(a)$ est fermé) a été assez peu traité. Notons que deux candidats ont donné une démonstration directe de la question 13 contenant implicitement le théorème de l'image fermée ! La question 14 qui était pourtant assez élémentaire, n'a été pratiquement pas abordée même dans les meilleures copies (2 ou 3 réponses correctes seulement).

La question 15, très facile, concernait l'unicité. La plupart de ceux qui l'ont étudiée, l'ont correctement résolue.

Les questions 16 et 17 étaient relatives à la caractérisation de la solution du problème (6). Il s'agit d'appliquer le théorème de projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel dans l'espace $Y \times Z$ et d'utiliser ensuite quelques propriétés élémentaires de l'adjointe.

Les questions 18 et 19 rejoignaient la question 5 de la première partie. La démonstration de la question 19 suggérée par les questions précédentes était bien sûr la suivante : pour l'existence de σ on utilise le théorème d'existence de Q13 et la condition nécessaire de Q16 ; pour l'unicité, on utilise la condition suffisante de Q16 et le théorème d'unicité de Q15.

La question 20, sans doute une des plus difficile, n'a été traitée correctement que dans un tout petit nombre de copies.

Enfin, les questions 21 à 24 étaient consacrées à une généralisation directe de la méthode de calcul obtenue dans les questions 7, 8 et 9. Les procédés de démonstration suggérés sont différents, mais le parallèle entre les questions 9 et 24, renforcé par des notations identiques, est tout à fait frappant.

La question 25, annoncée par la question 21, permettait de conclure en établissant le parallèle entre la première et la seconde partie. Quelques candidats, sans traiter absolument toutes les questions, ont bien compris le problème et ont notamment traité correctement cette dernière question. Un seul candidat a traité correctement le problème dans son intégralité.

Dans l'ensemble, il nous a semblé que ce problème a été assez sélectif. Il a donné lieu à un étalement maximum des notes (de 0 à 40) et un nombre appréciable (10 %) de candidats sont parvenus à un stade assez avancé dans sa résolution. Les notes se sont réparties de la façon suivante (entre 0 et 40) :

Agrégation masculine (620 candidats) :

$0 \leqslant n \leqslant 4$	219	$20 \leqslant n \leqslant 24$	30
$5 \leqslant n \leqslant 9$	172	$25 \leqslant n \leqslant 29$	14
$10 \leqslant n \leqslant 14$	112	$30 \leqslant n \leqslant 34$	3
$15 \leqslant n \leqslant 19$	68	$35 \leqslant n \leqslant 40$	2

Agrégation féminine (362 candidates)

$0 \leqslant n \leqslant 4$	134	$20 \leqslant n \leqslant 24$	14
$5 \leqslant n \leqslant 9$	90	$25 \leqslant n \leqslant 29$	3
$10 \leqslant n \leqslant 14$	66	$30 \leqslant n \leqslant 34$	3
$15 \leqslant n \leqslant 19$	52	$35 \leqslant n \leqslant 40$	0

II.7. TEXTE DE L'EPREUVE DE MECANIQUE GENERALE

Il sera tenu le plus grand compte de la présentation et de la rédaction des copies; en particulier, les abréviations abusives risquent de ne pas être comprises.

Les candidats sont priés de respecter les notations de l'énoncé.

Les unités de longueur, de masse et de temps sont supposées fixées; l'unité d'angle est le radian; le temps est désigné par t.

Le produit vectoriel du vecteur $\vec{u}$ par le vecteur $\vec{v}$ est représenté par $\vec{u} \times \vec{v}$.

$O_1x_1y_1z_1$ est un repère orthonormé direct considéré comme absolu. Tout ce qui se rapporte à ce repère sera qualifié d'absolu. La dérivée temporelle absolue d'un vecteur mobile $\vec{w}(t)$ sera notée $\dfrac{d\vec{w}}{dt}$.

On considère un solide S, pouvant se réduire à un point matériel, qui se déplace par rapport à $O_1x_1y_1z_1$ et *qui perd de sa masse de façon continue au cours du temps.* On désigne par $S(t)$ la position de S à l'instant t, par $S(t, \Delta t)$ l'ensemble des particules de S éjectées entre les instants t et $t + \Delta t$, Δt étant une quantité positive qui sera considérée comme un infiniment petit.

Soit une telle particule, occupant la position M à l'instant t. On suppose qu'après éjection, son vecteur vitesse absolue à l'instant $t + \Delta t$ est de la forme :

$$\vec{V}_M(t) + \vec{W}_M(t) + \vec{o}\,(1)$$

où $\vec{V}_M(t)$ est le vecteur vitesse absolue à l'instant t du point M considéré comme lié à S, $\vec{W}_M(t)$ une fonction vectorielle continue de t dépendant du processus d'éjection, dite *vitesse relative d'éjection* de la particule, $\vec{o}(1)$ une fonction vectorielle tendant vers zéro quand Δt tend vers zéro.

On admet que les interactions des particules de $S(t, \Delta t)$ entre elles et avec le solide S sont négligeables.

I

Dans cette partie I, le solide S se réduit à un point matériel M, de masse variable $m(t)$, $m(t)$ étant une fonction positive, décroissante, dérivable de t. Soit $\vec{R}(t)$ la résultante des forces agissant sur M à l'instant t.

A

Montrer que le mouvement absolu de M est régi par l'équation :

$$m(t)\,\frac{d\vec{V}_M(t)}{dt} = \vec{R}(t) + \frac{dm}{dt}\,\vec{W}_M(t)$$

(On pourra considérer la quantité de mouvement absolue de M à l'instant t et la résultante à l'instant $t + \Delta t$ des quantités de mouvement absolues du système constitué à cet instant par M et les particules éjectées entre les instants t et $t + \Delta t$).

B

On considère deux points matériels P et O de masses respectives $m(t)$ et $\lambda m(t)$, $m(t)$ étant une fonction positive, décroissante, dérivable de t et λ une constante positive.

Ils s'attirent mutuellement suivant la loi de Newton : l'attraction exercée par O sur P est représentée par le vecteur $-\dfrac{\lambda m^2}{r^3}\,\vec{OP}$, où r désigne la distance OP. Les deux points ne sont soumis à aucune autre force.

Soient $\vec{V}_P$ et $\vec{V}_O$ les vecteurs vitesse absolue de P et de O à l'instant t. On suppose que pour chacun des points, la vitesse relative d'éjection est l'opposée de la vitesse absolue du point : $\vec{W}_P = -\vec{V}_P$; $\vec{W}_O = -\vec{V}_O$.

1º Que peut-on dire du mouvement du centre d'inertie des deux points?

On se propose d'étudier le mouvement de P autour de O.

2º Montrer que la trajectoire de P dans ce mouvement est située dans un plan passant par O et que les équations de ce mouvement admettent une intégrale première analogue à l'intégrale des aires.

3º Soit θ l'angle du vecteur $\vec{OP}$ avec un axe de direction fixe situé dans le plan de la trajectoire de P.

Montrer que r considéré comme fonction de θ satisfait à l'équation différentielle :

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{\lambda + 1}{c^2} m^3$$

où c est une constante dont on précisera la signification et qu'on supposera positive.

4° On suppose qu'à l'instant $t = 0$, on ait $\theta = 0$ et on appelle m_0 la valeur de $m(t)$ à cet instant.

Montrer que le rayon vecteur de la trajectoire correspondant à la masse constante m_0 et aux mêmes conditions initiales que celles du mouvement de P est, pour chaque valeur de θ, inférieur à OP.

II

Dans cette partie II, on considère un système matériel Σ holonome constitué par un nombre *fini* de points matériels M_k, de masse variable $m_k(t)$ [les m_k sont des fonctions positives, décroissantes, dérivables de t], de vitesse absolue $\vec{V}_{M_k}(t)$ à l'instant t, dont la position par rapport au repère absolu dépend de n paramètres $q_1, q_2, ..., q_n$ et du temps t. On suppose que pour chacun des points, la vitesse relative d'éjection est l'opposée de sa vitesse absolue : $\vec{W}_{M_k}(t) = -\vec{V}_{M_k}(t)$.

1° On désigne par $T = \frac{1}{2}\sum_k m_k V^2_{M_k}$ l'énergie cinétique absolue du système Σ et par $\sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i$ le travail des forces appliquées à Σ dans un déplacement virtuel compatible avec les liaisons.

Montrer que le mouvement de Σ est régi par les équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

où q'_i désigne la dérivée de $q_i(t)$ par rapport au temps.

2° *Application.*

On reprend le problème de la question I, B. On suppose que P et O se déplacent dans le plan $x_1O_1y_1$ et on prend comme paramètres les coordonnées absolues ξ et η du centre d'inertie des deux points, $OP = r$ et $(O_1x_1, \vec{OP}) = \theta$. Retrouver les résultats du I, B, 1°, 2°, 3° en utilisant les équations de Lagrange.

3° On revient au système matériel Σ envisagé au II, 1° et on suppose en outre que les liaisons imposées au système sont indépendantes du temps.

Comment se modifie le théorème de l'énergie?

4° Les conditions sont celles de la question précédente II, 3°. On admet en outre que les masses varient proportionnellement, donc que l'on peut poser $m_k(t) = \mu_k f(t)$ où les μ_k sont des constantes positives, et que le travail réel des forces qui agissent sur Σ est nul.

Démontrer qu'il existe une intégrale première de l'énergie.

III

Dans cette partie III, on considère un solide S perdant de sa masse de façon continue au cours du temps.

1° Soit $m(t)$ sa masse à l'instant t [celle de S(t)], $m(t)$ étant une fonction positive, décroissante, dérivable de t. On désigne par G le centre d'inertie de S, en général variable dans S, par $\vec{R}(t)$ la résultante du torseur des forces extérieures appliquées à S à l'instant t.

Raisonnant comme pour le point matériel [voir I, A], démontrer que le théorème de la résultante cinétique se traduit par l'équation vectorielle :

$$m(t)\,\vec{\Gamma}_e(G) = \vec{R}(t) - \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\int_{S(t,\,\Delta t)} \vec{W}_M(t)\,dm$$

où $\vec{\Gamma}_e(G)$ est le vecteur accélération absolue du point lié à S qui, à l'instant t, coïncide avec G et où dm désigne l'élément de masse entourant la particule M.

2° Soient O un point lié à S, σ_0 le tenseur d'inertie en O de S, en général variable avec le temps, $\vec{\Omega}$ le vecteur rotation instantanée de S.

On désigne par $\vec{L}_0(t)$ le moment en O du torseur des forces extérieures appliquées à S à l'instant t.

Montrer que le théorème du moment cinétique se traduit par l'équation vectorielle :

$$\sigma_0 \frac{d\vec{\Omega}}{dt} + \vec{\Omega} \times \sigma_0\,\vec{\Omega} = \vec{L}_0(t) - m(t)\,\vec{OG} \times \vec{\Gamma}_0(t) - \lim_{\Delta t \to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{S(t,\,\Delta t)} \vec{OM} \times \vec{W}_M(t)\,dm$$

où $\vec{\Gamma}_0(t)$ est le vecteur accélération absolue de O à l'instant t et où $\sigma_0\vec{\Omega}$ et $\sigma_0 \frac{d\vec{\Omega}}{dt}$ sont les vecteurs transformés par σ_0 de $\vec{\Omega}$ ($\sigma_0\,\vec{\Omega}$ est donc le moment cinétique de S en O dans le mouvement autour de O à l'instant t) et de $\dfrac{d\vec{\Omega}}{dt}$ respectivement.

3° *Première application.*

On suppose dans cette question III, 3° que le processus d'éjection est tel que la vitesse relative d'éjection d'une particule est l'opposée de sa vitesse absolue $\left[\vec{W}_M(t) = -\vec{V}_M(t)\right]$, que le centre d'inertie G reste invariablement lié à S et que l'ellipsoïde d'inertie de S en G reste homothétique à lui-même par rapport à G.

Les axes centraux d'inertie Gx, Gy, Gz restent alors liés à S. Les moments centraux d'inertie seront notés respectivement $A\,F(t)$, $B\,F(t)$, $C\,F(t)$, A, B, C étant des constantes positives et $F(t)$ une fonction positive, décroissante, dérivable de t. Enfin, on suppose que le torseur des forces extérieures appliquées à S est nul.

a. Que peut-on dire du mouvement absolu du point G?

b. Étudier le mouvement de S autour de son centre d'inertie G. Appelant p, q, r les composantes de $\vec{\Omega}$ sur les axes Gx, Gy, Gz respectivement, achever les calculs dans le cas particulier suivant : S est une plaque plane située dans le plan Gxy et admettant constamment Gx et Gy comme axes centraux d'inertie; $A = 2B$; $F(t) = \dfrac{1}{2}(1 + e^{-2\omega t})$; à l'instant $t = 0$, p, q, r ont pour valeur, 0, $\omega\sqrt{3}$, ω respectivement (ω constante positive donnée).

4° *Deuxième application.*

Dans cette question III, 4°, on considère un solide S formé :

α. d'un solide $\mathfrak{S}$, de masse constante μ, de centre d'inertie G, géométriquement et dynamiquement de révolution autour d'un axe Gz; $Gxyz$ étant un repère orthonormé lié à S, on appelle A, A, C les moments d'inertie de $\mathfrak{S}$ par rapport aux axes Gx, Gy, Gz respectivement (A, C, constantes positives données);

β. d'un nombre fini de points matériels M_k, liés à $\mathfrak{S}$, de même masse variable, fonction positive, décroissante, dérivable de t, situés sur la circonférence de centre G, de rayon R, intersection du plan Gxy et de la surface limitant $\mathfrak{S}$ et disposés aux sommets d'un polygone régulier de centre G. On désigne par $m(t)$ la masse de S à l'instant t.

On admet que la vitesse relative d'éjection de chaque point M_k est $\vec{W}_{M_k}(t) = -\alpha\,\vec{\Omega} \times \vec{GM}_k$, où $\vec{\Omega}$ est le vecteur rotation instantanée de S et α une constante positive.

On suppose enfin que S peut tourner librement et sans frottement autour du point G fixe dans le repère absolu et qu'il n'est soumis à aucune force extérieure autre que la réaction en G.

a. Écrire le système différentiel permettant de calculer en fonction du temps les composantes p, q, r de $\vec{\Omega}$ sur les axes Gx, Gy, Gz.

b. Étudier le mouvement de S dans le cas où $m(t)$ est une fonction linéaire du temps : $m(t) = \mu + \mu_0 - \mu_1 t$ (μ_0, μ_1 constantes positives données) et où $\alpha = 2$.

IV

Par rapport au repère absolu $O_1x_1y_1z_1$ se déplace un système matériel Θ constitué par :

α. Un solide S perdant de sa masse de façon continue au cours du temps. Le processus d'éjection est tel que le centre d'inertie G et les axes centraux d'inertie Gx, Gy, Gz de S restent invariablement liés au solide et que celui-ci est constamment dynamiquement de révolution autour de l'axe Gz.

On suppose que S peut tourner librement et sans frottement autour du point G fixé en O_1.

β. Un solide $\mathfrak{T}$, de masse constante, de même centre d'inertie G que S, dynamiquement de révolution autour de l'axe Gz. Par rapport à S, $\mathfrak{T}$ est assujetti par des liaisons sans frottement à tourner autour de Gz.

Soit $\vec{z}$ le vecteur unitaire de l'axe Gz.

On désigne par p, q, r les composantes sur Gx, Gy, Gz respectivement du vecteur rotation instantanée absolue $\vec{\Omega}$ de S, par $\rho\vec{z}$ le vecteur rotation instantanée de $\mathfrak{T}$ par rapport à S, par $\mathcal{A}(t)$, $\mathcal{A}(t)$, $\mathcal{C}(t)$ les moments centraux d'inertie du *système* Θ [$\mathcal{A}$, $\mathcal{C}$ fonctions positives, décroissantes de t], par J le moment d'inertie, constant, de $\mathfrak{T}$ par rapport à Gz.

On suppose que :

— le moment par rapport à Gz du torseur des forces extérieures appliquées à $\mathfrak{T}$ (autres que les réactions de S) est nul;

— le moment en G du torseur des forces extérieures appliquées au système Θ est de la forme $\mathcal{L}(t)\,\vec{z}$;

— le vecteur [Voir III, 2°]

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{S(t,\, \Delta t)} \overrightarrow{GM} \times \vec{W}_M(t)\, dm$$

est de la forme $\mathcal{M}(t)\vec{z}$;

— $\mathcal{L}(t)$ et $\mathcal{M}(t)$ sont des fonctions continues de t.

1° Mettre en équations le problème du mouvement du système Θ. Calculer p, q, r, ρ en fonction du temps (les formules obtenues contiennent des symboles d'intégration).

2° Montrer que parmi les mouvements possibles de Θ existent des rotations autour de l'axe Gz fixe par rapport au repère absolu.

Montrer que ces rotations sont stables.

3° Montrer que tout autre mouvement du système Θ est instable.

II.8. RAPPORT SUR L'EPREUVE DE MECANIQUE

II.8.1. THEME DU SUJET – OBSERVATIONS GENERALES

Le programme de Mécanique de l'Agrégation de Mathématiques est pratiquement celui du premier cycle des Facultés ; il s'agit donc de la Dynamique du corps solide.

Cet important chapitre de la Mécanique Rationnelle a été particulièrement étudié pendant plus de deux siècles, puis a été abandonné au profit de la Mécanique des Milieux Continus, de la théorie de la Relativité, etc. ; mais le lancement des satellites artificiels, les grands voyages célestes lui ont donné, ces dernières années, un nouvel essor.

L'auteur du sujet a donc proposé aux candidats à l'Agrégation le problème du mouvement d'un solide de masse variable qui a fait, et fait encore, l'objet de nombreux travaux.

Le problème pouvait certainement surprendre les candidats, mais cela ne saurait justifier les très mauvais résultats qu'ils ont obtenus.

Beaucoup connaissent mal les principes de la Mécanique, commettent de grossières erreurs en cinématique. Un trop grand nombre d'entre eux, espérant peut-être tromper la vigilance du correcteur, essaient de retrouver les formules

données dans l'énoncé en accumulant fautes de signe, erreurs de calcul, erreurs de raisonnement leur permettant de «retomber sur leurs pattes».

Ainsi, malgré un barème généreux, quelques candidats seulement sur les 284 qui ont effectivement composé en Mécanique, ont obtenu une note supérieure ou égale à la moyenne.

II.8.2. RESUME DE LA SOLUTION

Question I.A

La quantité de mouvement absolue de M à l'instant t est $m(t)\, \vec{V}_M(t)$;

à l'instant $t + \Delta t$, $\Delta t > 0$, la résultante des quantités de mouvement absolues du système formé par les mêmes particules peut évidemment s'écrire

$$m(t+\Delta t)\, \vec{V}_M(t+\Delta t) + [m(t) - m(t+\Delta t)][\vec{V}_M(t) + \vec{W}_M(t) + \vec{0}(1)]$$

Puisqu'on néglige les actions des particules éjectées avant l'instant t et après l'instant $t + \Delta t$, le principe fondamental s'écrit :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ m(t+\Delta t)\, \vec{V}_M(t+\Delta t) + [m(t) - m(t+\Delta t)][\vec{V}_M(t) + \vec{0}(1)] - m(t)\, \vec{V}_M(t) \right\} = \vec{R}(t)$$

donc :

$$m(t) \frac{d\vec{V}_M(t)}{dt} = \vec{R}(t) + \frac{dm}{dt} \vec{W}_M(t)$$

Question I.B

1°) Des relations :

$$\frac{d}{dt}[m(t)\, \vec{V}_P(t)] = -\frac{\lambda m^2}{r^3} \overrightarrow{OP} \ ; \ \frac{d}{dt}[\lambda m(t)\, \vec{V}_0(t)] = \frac{dm^2}{r^3} \overrightarrow{OP}$$

on tire, par addition, pour le centre d'inertie G des deux points :

$$m(t)\, \vec{V}_G = \text{vecteur constant}$$

G décrit donc une droite et son mouvement est accéléré.

2°) $\vec{V} = \vec{V}_P - \vec{V}_0$ satisfait à l'équation : $\dfrac{d}{dt}(m\vec{V}) = -\dfrac{(\lambda+1)\, m^2}{r^3} \overrightarrow{OP}$

on en déduit $\overrightarrow{OP} \times m\vec{V} =$ vecteur constant : le mouvement de P autour de O s'effectue dans un plan passant par O et utilisant des coordonnées polaires dans cepplan, on a $m\,r^2 \dfrac{d\theta}{dt} = Cte$

3°) Projetant sur OP l'équation vectorielle, on obtient :

$$m\,(r'' - r\theta'^2) + m'\,r' = -\frac{(\lambda+1)\,m^2}{r^2}$$

et un calcul analogue à celui qui conduit, dans le cas d'une masse constante, à la seconde formule de Binet donne le résultat demandé.

4°) Appelant $\bar{r}\ (\theta)$ le rayon vecteur correspondant à la masse constante m_0, on a :

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\bar{r}}\right)}{d\theta^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\bar{r}}\right) = \frac{\lambda+1}{c^2}\ [\,m^3(t) - m_0^3\,]$$

soit $\varphi\ (\theta)$ la fonction figurant dans le second membre supposée exprimée en fonction de θ à l'aide des équations du mouvement de P. On a : $\varphi(0) = 0$; $\varphi(\theta) \leqslant 0$; $\varphi(\theta)$ décroissante (car $c > 0$)

L'intégration de l'équation différentielle par la méthode de la variation des constantes donne, compte tenu des conditions initiales :

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{\bar{r}} = \int_0^{\theta} \varphi(\xi)\ \sin\,(\theta - \xi)\ d\xi$$

$\varphi\ (\xi)$ est décroissante sur $[\,0\,,\theta]$ et $\sin\ (\theta - \xi)$ est intégrable ; la seconde formule de la moyenne (forme de Werestrass) donne alors :

$$\int_0^{\theta} \varphi(\xi)\ \sin\ (\theta - \xi)\ d\xi = \varphi(\theta) \int_0^{\theta_1} \sin\,(\theta - \xi)\,d\xi\ \ (0 \leqslant \theta_1 \leqslant \theta)$$

$$= [\,1 - \cos\,(\theta - \theta_1)\,]\ \varphi\ (\theta) \leqslant 0$$

de sorte que :

$$\bar{r}\ (\theta) \leqslant r\,(\theta)$$

Question II

1°) $\vec{R}_k\ (t)$ désignant la résultante des forces agissant sur M_k à l'instant t, on a ici :

$$\frac{d}{dt}\ (m_k\ \vec{V}_{M_k}) = \vec{R}_k$$

Si $\delta \vec{M}_k = \sum\limits_i \dfrac{\delta \vec{M}_k}{\delta qi}\ \delta q_i$ est un déplacement virtuel de M_k compatible avec les liaisons, on a :

$$\sum_k \frac{d}{dt}\ (m_k\ \vec{V}_{M_k})\ \delta \vec{M}_k = \sum_k \vec{R}_k\ \delta \vec{M}_k = \sum_i Q_i\,\delta q_i$$

et on vérifie sans difficulté que le premier membre se transforme comme dans le cas des masses constantes.

3°) on a :

$$\sum_i \left(\frac{d}{dt}\ \left(\frac{\delta T}{\delta q'_i}\right) - \frac{\delta T}{\delta q_i} \right) q'_i = \sum_i Q_i\,q'_i$$

Un calcul analogue au calcul classique donne, quand les liaisons sont indépendantes du temps.

$$\frac{dT}{dt} = \text{puissance réelle des } \vec{R}_k - \frac{1}{2} \sum_k \frac{dm_k}{dt}\ \vec{V}_{M_k}^2$$

Ce résultat est valable si les liaisons dépendent du temps comme le montre le calcul direct de $\dfrac{dT}{dt}$ combiné avec l'équation $\dfrac{d}{dt}\ (m_k\ \vec{V}_{M_k}) = \vec{R}_k$

4°) On trouve facilement l'intégrale première $f(t)$. T= constante

Question III

Le théorème de la résultante cinétique s'écrit évidemment :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{S(t+\Delta t)} \vec{V}_M(t+\Delta t)\,dm + \int_{S(t,\Delta t)} [\,\vec{V}_M(t) + \vec{W}_M(t) + \vec{0}(1)\,]\,dm - \int_{S(t)} \vec{V}_M(t)\,dm \right\} = \vec{R}(t)$$

ou encore :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \int_{S(t)} \frac{\vec{V}_M(t+\Delta t) - \vec{V}_M(t)}{\Delta t}\,dm - \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{S(t,\Delta t)} [\,\vec{V}_M(t+\Delta t) - \vec{V}_M(t) - \vec{0}\,(1)\,]\,dm + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{S(t,\Delta t)} \vec{W}_M(t)\,dm = \vec{R}(t)$$

Le premier terme est $\displaystyle\int_{S(t)} \vec{\Gamma}_M(t)\,dm$, où $\vec{\Gamma}_M(t)$ est l'accélération à l'instant t de M considéré comme lié à S ; le second est nul, car

$$\vec{\mathrm{V}}_{\mathrm{M}}(t+\Delta t) - \vec{\mathrm{V}}_{\mathrm{M}}(t) - \vec{0}\,(1) = \vec{0}\,(1) \quad \text{et} \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\mathrm{S}(t,\Delta t)} dm = -\frac{dm}{dt}$$

On a donc :

$$\int_{\mathrm{S}(t)} \vec{\Gamma}_{\mathrm{M}}(t)\, dm = \vec{\mathrm{R}}(t) - \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\mathrm{S}(t,\Delta t)} \vec{\mathrm{W}}_{\mathrm{M}}(t)\, dm$$

On a de même, O_1 étant l'origine des axes absolus et $\vec{\mathrm{L}}_{\mathrm{o}_1}(t)$ le moment en O_1 des forces extérieures :

$$\int_{\mathrm{S}(t)} \overrightarrow{\mathrm{O}_1\mathrm{M}}(t) \times \vec{\Gamma}_{\mathrm{M}}(t)\, dm = \vec{\mathrm{L}}_{\mathrm{o}_1}(t) - \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\mathrm{S}(t,\Delta t)} \overrightarrow{\mathrm{O}_1\mathrm{M}}(t) \times \vec{\mathrm{W}}_{\mathrm{M}}(t)\, dm$$

Par conséquent, on peut supposer que S garde la masse et les éléments d'inertie qu'il possède à l'instant t à condition d'ajouter au torseur des forces extérieures, le torseur de résultante $-\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\mathrm{S}(t),\Delta t)} \vec{\mathrm{W}}_{\mathrm{M}}(t)\, dm$ et de moment en O_1

$$-\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\mathrm{S}(t,\Delta t)} \overrightarrow{\mathrm{O}_1\mathrm{M}}(t) \times \vec{\mathrm{W}}_{\mathrm{M}}(t)\, dm$$

1°) Ainsi $\int_{\mathrm{S}(t)} \vec{\Gamma}_{\mathrm{M}}(t)\, dm$ est $m(t)\, \vec{\Gamma}_e\,(\mathrm{G})$ (et non le produit par $m(t)$ de l'accélération absolue de G) ; d'ailleurs on peut le voir par un calcul en remplaçant $\vec{\Gamma}_{\mathrm{M}}(t)$ par $\vec{\Gamma}_0(t) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \overrightarrow{\mathrm{OM}} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \overrightarrow{\mathrm{OM}})$

2°) On peut considérer le repère d'origine O à axes parallèles à $0_1\, x_1\, y_1 z_1$ comme absolu à condition d'ajouter au torseur des forces extérieures le torseur

des $-dm\, \vec{\Gamma}_0(t)$; le moment en O de ce torseur est

$$\int_{\mathrm{S}(t)} \overrightarrow{\mathrm{OM}} \times -dm\, \vec{\Gamma}_0(t) = -m(t)\, \overrightarrow{\mathrm{OG}} \times \vec{\Gamma}_0(t)$$

Donc, si $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$ est l'opérateur de dérivation temporelle absolue effectuée en laissant masse et éléments d'inertie par rapport à des axes liés au solide constants, on a :

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\sigma_0\, \vec{\Omega}) = \vec{\mathrm{L}}_0(t) - m(t)\, \overrightarrow{\mathrm{OG}} \times \vec{\Gamma}_0(t) - \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\mathrm{S}(t,\Delta t)} \overrightarrow{\mathrm{OM}} \times \vec{\mathrm{W}}_{\mathrm{M}}(t)\, dm$$

et le premier membre est bien $\sigma_0 \frac{d\,\Omega}{dt} + \vec{\Omega} \times \sigma_0\, \Omega$

3°) a. Ici G est le centre d'inertie de $\mathrm{S}(t,\Delta t)$ et $\vec{\Gamma}_e\,(\mathrm{G})$ est son accélération absolue.

Alors :

$$-\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\mathrm{S}(t,\Delta t)} \vec{\mathrm{W}}_{\mathrm{M}}(t)\, dm = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} - \int_{\mathrm{S}(t,\Delta t)} \vec{\mathrm{V}}_{\mathrm{M}}(t)\, dm = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\mathrm{S}(t,\Delta t)} [\,\vec{\mathrm{V}}_{\mathrm{G}}(t) + \vec{\Omega} + \overrightarrow{\mathrm{GM}}\,]\, dm = -\frac{dm}{dt}\, \vec{\mathrm{V}}_{\mathrm{G}}(t)$$

D'où $m\, \vec{\mathrm{V}}_{\mathrm{G}} =$ vecteur constant et le mouvement de G est rectiligne accéléré.

b. On a :

$$\sigma_{\mathrm{G}} \frac{d\,\vec{\Omega}}{dt} + \vec{\Omega} \times \sigma_{\mathrm{G}}\, \vec{\Omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\mathrm{S}(t,\Delta t)} \overrightarrow{\mathrm{GM}} \times (\vec{\Omega} \times \overrightarrow{\mathrm{GM}})\, dm$$

L'intégrale du second membre est la variation de $\sigma_{\mathrm{G}}\, \vec{\Omega}$ quand on suppose $\vec{\Omega}$ fixé ; donc le second membre est le vecteur de composantes $-\mathrm{AF}'(t)\,p$ $\mathrm{BF}'(t)\,q$, $-\mathrm{CF}'(t)\,r$ sur les axes centraux d'inertie de S.

Le mouvement de S autour de G est donc défini par l'équation $\mathrm{AF}\,p' + (\mathrm{C}-\mathrm{B})\,\mathrm{F}q\,r = -\mathrm{AF}'p$ et les deux analogues, qui expriment que $\sigma_{\mathrm{G}}\, \vec{\Omega}$ est un vecteur constant dans le repère absolu.

Posant $\vec{\Omega}^* = \mathrm{F}(t)\,\Omega$ et $\tau = \int_0^t \frac{du}{\mathrm{F}(u)}$, on obtient l'équation

$A \frac{dp^*}{d\tau} + (C-B)\, q^* r^* = 0$ et les deux analogues : ce sont les équations d'Euler-Poinsot.

Dans l'application envisagée, où $A = 2B$ et $C = 3B$, les deux intégrales premières classiques donnent :

$$r^* = \sqrt{\frac{3\omega^2 - p^{*2}}{3}} \quad ; \quad q^* = \sqrt{3w^2 - p^{*2}}$$

Portant dans $\frac{dp^*}{d\tau} + q^*, r^* = 0$, on obtient en intégrant :

$$p^* = -\omega\sqrt{3}\; th\, \omega\tau$$

puis :

$$q^* = \frac{\omega\sqrt{3}}{ch\, \omega\tau} \quad ; \quad r^* = \frac{\omega}{ch\, \omega\tau}$$

4°) a. Si les M_k sont au nombre de N et si la masse de chacun d'eux est $\tilde{m}(t)$,

on a : $m(t) = \mu + N\tilde{m}(t)$, donc $\frac{d\tilde{m}}{dt} = \frac{1}{N}\frac{dm}{dt}$

G étant évidemment le centre d'inertie de S, on a :

$$\sigma_G \frac{d\vec{\Omega}}{dt} + \vec{\Omega} \times \sigma_G \vec{\Omega} = -\alpha \frac{d\tilde{m}}{dt} \sum_k \vec{GM}_k \times (\vec{\Omega} \times \vec{GM}_k)$$

Des relations :

$$\sum_k \tilde{m} x_k^2 = \sum_k \tilde{m} y_k^2 = \frac{1}{2} \sum_k \tilde{m}\,(x_k^2 + y_k^2) = \frac{R^2}{2} \sum \tilde{m} = \frac{(m-\mu) R^2}{2}$$

On tire :

$$\sigma_G = \begin{pmatrix} A + \frac{(m-\mu)R^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & A + \frac{(m-\mu)R^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & C + (m-\mu)R^2 \end{pmatrix}$$

et les composantes $\frac{NR^2}{2} p$, $\frac{NR^2}{2} q$, $NR^2 r$ de $\sum_k \vec{GM}_k \times (\vec{\Omega} \times \vec{GM}_k)$

On en déduit les équations du mouvement :

$$\begin{cases} \left[A + (m-\mu)\frac{R^2}{2}\right] p' + \left[C - A + (m-\mu)\frac{R^2}{2}\right] q r + \alpha m' \frac{R^2}{2} p = 0 \\ \left[A + (m-\mu)\frac{R^2}{2}\right] q' - \left[C - A + (m-\mu)\frac{R^2}{2}\right] r p + \alpha m' \frac{R^2}{2} q = 0 \\ \left[C + (m-\mu) R^2\right] r' + \alpha m' R^2 r = 0 \end{cases}$$

4°) b. On trouve immédiatement $r = r_0 \left[\frac{C + \mu_0 R^2}{C + (\mu_0 - \mu_1 t) R^2}\right]^2$

$\omega = p + i q$ satisfait à l'équation :

$$\left[A + (\mu_0 - \mu_1 t)\frac{R^2}{2}\right] \omega' - i \left[C - A + (\mu_0 - \mu_1 t)\frac{R^2}{2}\right] r \omega - \mu_1 R^2 \omega = 0$$

qui, compte tenu de la valeur de r, s'intègre sans difficulté. Après l'instant $t_1 = \frac{\mu_0}{\mu_1}$, $m = \mu$ et le mouvement est le mouvement de Poinsot pour le solide de révolution $\mathcal{S}$.

Question IV

1°) Le théorème du moment cinétique appliqué à $\mathcal{T}$ (de masse constante) en projection sur G_z donne $J(r' + \rho') = 0$. Le théorème du moment cinétique en G dans le mouvement autour de G appliqué à $\mathcal{T}$ et à S (de masse variable) donne, par addition :

$$\begin{cases} \mathcal{A} p' + (\mathcal{C} - \mathcal{A})\, q r + J \rho q = 0 \\ \mathcal{A} q' - (\mathcal{C} - \mathcal{A})\, r p - J \rho p = 0 \\ \mathcal{C} r' + J \rho' = \mathcal{L}(t) - \mathcal{M}(t) \end{cases}$$

D'où :

$$r(t) = \int_0^t \frac{\mathcal{L}(\tau) - \mathcal{M}(\tau)}{\mathcal{C}(\tau) - J}\, d\tau + r_0 \quad ; \quad \rho(t) = r_0 + \rho_0 - r(t)$$

Passant par l'intermédiaire de $\omega = p + iq$, on trouve ensuite en posant

$$f(t) = \frac{[\mathcal{C}(t) - \mathcal{A}(t)]\, r(t) + \mathrm{J}\rho(t)}{\mathcal{A}(t)} \quad ; \quad \varphi(t) = \int_0^t f(r)\,dr + \varphi_0$$

$$p = \sqrt{p_0^{\,2} + q_0^{\,2}}\ \cos\varphi(t) \quad ; \quad q = \sqrt{p_0^{\,2} + q_0^{\,2}}\ \sin\varphi(t)$$

2°) $p_0 = q_0 = 0$ entraîne $p = q = 0$: S et $\mathcal{T}$ tournent alors autour de G_z fixe par rapport aux axes absolus.

Soit :

$$\bar{p}(t) = 0 \ ; \ \bar{q}(t) = 0 \ ; \ \bar{r}(t) = \int_0^t \frac{\mathcal{L}(\tau) - \mathcal{M}(\tau)}{\mathcal{C}(\tau) - \mathrm{J}}\,d\tau + r_0 \ ; \ \bar{\rho}(t) = \bar{r}_0 + \bar{f}_0 - \bar{r}(t)$$

un tel mouvement. Pour étudier sa stabilité, on pose :

$$p = \bar{p} + u \quad ; \quad q = \bar{q} + v \quad ; \quad r = \bar{r} + w \quad ; \quad \rho = \bar{\rho} + w'$$

On trouve immédiatement :

$$w = r_0 - \bar{r}_0 \quad ; \ w' = \rho_0 - \bar{\rho}_0 \ ; \ u = \sqrt{p_0^2 + q_0^2}\ \cos\varphi(t) \ ; \ v = \sqrt{p_0^2 + q_0^2}\ \sin\varphi(t)$$

Pour rendre $|u|, |v|, |w|, |w'| < \epsilon$, il suffit de prendre $|r_0 - \bar{r}_0|$, $|\rho_0 - \bar{\rho}_0| < \epsilon$ et $|p_0|, |q_0| < \dfrac{\epsilon}{\sqrt{2}}$. D'où la stabilité (par rapport aux vitesses).

3°) Le mouvement non troublé est défini par :

$$\bar{p}(t) = \sqrt{p_0^{\,2} + q_0^{\,2}}\ \cos\bar{\varphi}(t) \ ; \ \bar{q}(t) = \sqrt{p_0^{\,2} + q_0^{\,2}}\ \sin\varphi(t) \ ;$$

$$\bar{r}(t) = \int_0^t \frac{\mathcal{L}(r) - \mathcal{M}(r)}{\mathcal{C}(r) - \mathrm{J}}\,dr + \bar{r}_0 \ ;$$

$$\bar{\rho}(t) = \bar{r}_0 + f_0 - \bar{r}(t), \quad \text{avec } \bar{\varphi}(t) = \int_0^t \frac{[\mathcal{C}(r) - \mathcal{A}(r)]\,\bar{r}(t) + \mathrm{J}\bar{\rho}(t)}{\mathcal{A}(t)}\,dr + \bar{\varphi}_0$$

Pour le mouvement troublé, on pose $p = \bar{p} + u$, etc.

On trouve pour u

$$u = 2\sqrt{\bar{p}_0^{\,2} + \bar{q}_0^{\,2}}\ \sin\frac{\varphi + \bar{\varphi}}{2}\ \sin\frac{\varphi - \bar{\varphi}}{2} + \left(\sqrt{p_0^2 + q_0^2} - \sqrt{\bar{p}_0^{\,2} + \bar{q}_0^{\,2}}\right)\cos\varphi$$

Or :

$$\varphi(t) - \bar{\varphi}(t) = (r_0 - \bar{r}_0)\int_0^t \frac{\mathcal{C}(\tau) - \mathcal{A}(\tau)}{\mathcal{A}(\tau)}\,d\tau - (\rho_0 - \bar{\rho}_0)\int_0^t \frac{\mathrm{J}}{\mathcal{A}(\tau)}\,d\tau + \varphi_0 - \bar{\varphi}_0$$

Comme $\dfrac{1}{\mathcal{A}(\tau)}$ est positive et croissante, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{J}}{\mathcal{A}(\tau)}\,d\tau$ est divergente.

Donc $|\varphi(t) - \bar{\varphi}(t)|$ ne peut être rendu aussi petit que l'on veut quel que soit $\rho_0 - \bar{\rho}_0$, donc aussi $|u|$. D'où l'instabilité du mouvement non troublé sur l'intervalle de temps $[0, +\infty]$. Cependant la stabilité serait assurée sur un intervalle de temps fini.

II.8.3. LES NOTES (sur 40)

Candidats : 207 copies ; candidates : 77 copies

	0	1 à 5	6 à 10	11 à 15
Candidats	29	49	36	72
Candidates	20	28	11	9

	16 à 20	21 à 25	26 à 30	30 à 40
Candidats	13	8	0	0
Candidates	4	3	2	0

II.9 – TEXTE DE L'EPREUVE DE PROBABILITES ET STATISTIQUES

La deuxième et la troisième partie de ce problème peuvent se traiter indépendamment.

Notations et terminologie

1° Dans tout le problème on considère une suite d'espaces mesurables $((\Omega_n, \mathcal{A}_n))$; on appelle :

— *suite adaptée d'événements* toute suite (A_n) où, pour tout n, A_n appartient à $\mathcal{A}_n$;

— *suite adaptée de probabilités* toute suite (P_n) où, pour tout n, P_n est une probabilité définie sur l'espace mesurable $(\Omega_n, \mathcal{A}_n)$;

— *suite adaptée d'applications* toute suite (φ_n) où, pour tout n, φ_n est une application mesurable de $(\Omega_n, \mathcal{A}_n)$ dans $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ (où $\mathcal{B}$ désigne la tribu borélienne sur $\mathbf{R}$).

2° Étant donnés deux espaces mesurables $(\Omega, \mathcal{A})$ et $(\Omega', \mathcal{A}')$, une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et une application mesurable f de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\Omega', \mathcal{A}')$, on note fP la *probabilité* (sur $(\Omega', \mathcal{A}')$), *image* de P par f.

3° Étant donnés un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$ et une mesure μ (à valeurs réelles de signe quelconque) sur $(\Omega, \mathcal{A})$, on note $\| \mu \| = 2 \sup_{A \in \mathcal{A}} | \mu(A) |$.

4° On dit qu'une suite (M_n) de probabilités sur $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ *converge faiblement* vers une mesure M sur $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$, si et seulement si, pour tout x tel que $M(\{x\}) = 0$, on a

$$\lim_{n \to \infty} M_n(]-\infty, x[) = M(]-\infty, x[) ;$$

si de plus la mesure M est elle-même une probabilité, on dit que la suite (M_n) *converge étroitement* vers M.

Première partie

Définition.

Soient deux suites adaptées de probabilités, (P_n) et (Q_n); (P_n) est dite *contiguë* à (Q_n) si et seulement si, pour toute suite adaptée d'événements, (A_n), vérifiant $\lim_{n \to \infty} Q_n(A_n) = 0$, on a aussi $\lim_{n \to \infty} P_n(A_n) = 0$.

I. *Généralités sur la contiguïté.*

1° Démontrer que la contiguïté est une relation de préordre (c'est-à-dire réflexive et transitive) sur l'ensemble des suites adaptées de probabilités.

2° Exemples.

a. Soit, pour tout n, $(\Omega_n, \mathcal{A}_n) = (\mathbf{R}, \mathcal{B})$; soient (a_n) et (b_n) deux suites convergentes de nombres réels, vérifiant la condition $(\forall n \in \mathbf{N}) \quad a_n < b_n$.

Soit, pour tout n, P_n la probabilité uniforme sur le segment $[a_n, b_n]$ et Q_n la probabilité uniforme sur le segment $[0, 1]$; dans quel cas la suite (P_n) est-elle contiguë à la suite (Q_n)?

b. Soit, pour tout n, $(\Omega_n, \mathcal{A}_n) = (\mathbf{R}, \mathcal{B})$; soient (α_n) et (β_n) deux suites de nombres réels et soit, pour tout n, P_n (resp. Q_n) la probabilité de Laplace-Gauss (autrement dit normale) de moyenne α_n (resp. β_n) et variance 1.

Étudier la contiguïté de (P_n) à (Q_n) dans chacun des cas particuliers suivants :

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = \lim_{n \to \infty} (-\beta_n) = +\infty ;$$

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = \lim_{n \to \infty} \beta_n \quad (\in \mathbf{R}).$$

3° Cas particuliers.

Soit, pour tout n, $(\Omega_n, \mathcal{A}_n) = (\Omega, \mathcal{A})$.

a. Soient, sur $(\Omega, \mathcal{A})$, deux probabilités P et Q; démontrer que la contiguïté de la suite constante (P) à la suite constante (Q) équivaut à l'absolue continuité de la probabilité P par rapport à la probabilité Q (c'est-à-dire à la propriété :

$$(\forall A \in \mathcal{A}) \quad [Q(A) = 0 \Rightarrow P(A) = 0])$$

b. Soit une probabilité Q sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et soit, pour tout n, une probabilité P_n absolument continue par rapport à Q; démontrer que la contiguïté de la suite (P_n) à la suite constante (Q) équivaut à l'uniforme absolue continuité des probabilités P_n par rapport à Q (c'est-à-dire à la propriété :

$$(\forall \varepsilon > 0) \ (\exists \eta > 0) \ (\forall A \in \mathcal{A}) \ (\forall n \in \mathbf{N}) \quad [Q(A) < \eta \Rightarrow P_n(A) < \varepsilon]).$$

II. *Contiguïté et convergence.*

1° Démontrer que la contiguïté de la suite (P_n) à la suite (Q_n) équivaut à la propriété suivante : pour toute suite adaptée d'applications, (φ_n), si la suite $(\varphi_n\, Q_n)$ (de probabilités sur $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$) converge étroitement vers la probabilité concentrée en 0, il en est de même de la suite $(\varphi_n\, P_n)$.

2° Soient un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et, pour tout n, deux applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\Omega_n, \mathcal{A}_n)$, f_n et g_n. On pose $P_n = f_n P$ et $Q_n = g_n P$.

Démontrer que, dans ce cas, la contiguïté de (P_n) à (Q_n) équivaut à la propriété suivante : pour toute suite adaptée d'applications, (φ_n), si la suite $(\varphi_n \circ g_n)$ converge stochastiquement (autrement dit « en probabilité »), pour la probabilité P, vers 0, il en est de même pour la suite $(\varphi_n \circ f_n)$.

III. *Contiguïté et norme de la convergence en moyenne.*

1° Soient, sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$, une mesure σ-finie μ et deux probabilités P et P′, toutes deux absolument continues par rapport à μ; soit p (resp. p') une densité de P (resp. P′) par rapport à μ. Démontrer que $\| P - P' \| = \int_\Omega | p - p' \mid d\mu$.

2° Soient deux suites adaptées de probabilités, (P_n) et (Q_n).

a. Démontrer que, si $\lim\limits_{n \to \infty} \| P_n - Q_n \| = 0$, chacune des deux suites est contiguë à l'autre.

b. On suppose que (P_n) est contiguë à (Q_n); soient deux autres suites adaptées de probabilités, (P'_n) et (Q'_n), telles que :

$$\lim_{n \to \infty} \| P_n - P'_n \| = \lim_{n \to \infty} \| Q_n - Q'_n \| = 0 \;;$$

démontrer que (P'_n) est contiguë à (Q'_n).

b. Soit une probabilité Q sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et soit, pour tout n, une probabilité P_n absolument continue par rapport à Q; démontrer que la contiguïté de la suite (P_n) à la suite constante (Q) équivaut à l'uniforme absolue continuité des probabilités P_n par rapport à Q (c'est-à-dire à la propriété :

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \eta > 0)\ (\forall A \in \mathcal{A})\ (\forall n \in \mathbf{N})\quad [Q(A) < \eta \Rightarrow P_n(A) < \varepsilon]).$$

II. *Contiguïté et convergence.*

1° Démontrer que la contiguïté de la suite (P_n) à la suite (Q_n) équivaut à la propriété suivante : pour toute suite adaptée d'applications, (φ_n), si la suite $(\varphi_n\, Q_n)$ (de probabilités sur $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$) converge étroitement vers la probabilité concentrée en 0, il en est de même de la suite $(\varphi_n\, P_n)$.

b. Soit N un nombre entier tel que, pour tout n supérieur à N, on ait $P_n(S_n) > 0$; on définit la suite (P'_n) de la manière suivante :

pour tout $n \leqslant N$, $P'_n = Q_n$,

pour tout $n > N$, P'_n est la probabilité P_n conditionnée par l'événement S_n (on note $P'_n = P_n{}^{S_n}$).

Démontrer que la suite (P'_n) satisfait bien aux conditions imposées.

Deuxième partie

Définitions.

Soient données, sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$, deux probabilités P et Q, et une mesure σ-finie μ, par rapport à laquelle P et Q sont toutes deux absolument continues; soit p (resp. q) une densité de P (resp. Q) par rapport à μ.

On appelle *vraisemblance logarithmique* de P par rapport à Q toute application mesurable φ, de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$, telle que, pour tout ω vérifiant $p(\omega) > 0$ et $q(\omega) > 0$, on ait

$$\varphi(\omega) = \operatorname{Log} p(\omega) - \operatorname{Log} q(\omega).$$

On appelle *représentation logarithmique* du couple (P, Q) toute probabilité, sur $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$, qui est l'image de P par une vraisemblance logarithmique de P par rapport à Q.

I. *Généralités sur les représentations logarithmiques.*

1° Démontrer que l'ensemble des représentations logarithmiques d'un couple (P, Q) ne dépend pas du choix de la mesure μ par rapport à laquelle P et Q sont toutes deux absolument continues.

2° On suppose P absolument continue par rapport à Q.

a. Démontrer que, si φ est une vraisemblance logarithmique de P par rapport à Q, $\exp(\varphi)$ est une densité de P par rapport à Q.

b. Démontrer qu'il existe une unique représentation logarithmique du couple (P, Q).

II. *Contiguïté et suites tendues de représentations logarithmiques.*

Une suite (M_n) de probabilités sur $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ est dite *tendue* si et seulement si elle vérifie la condition suivante :

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists c > 0)\ (\forall n \in \mathbf{N})\qquad M_n([-c, +c]) > 1 - \varepsilon.$$

1° Soient deux suites adaptées de probabilités, (P_n) et (Q_n); on suppose que *toute* suite (M_n) où, pour tout n, M_n est une représentation logarithmique du couple (P_n, Q_n) est tendue. On va démontrer qu'il en résulte que (P_n) est contiguë à (Q_n).

Soit, pour tout n, μ_n une mesure σ-finie sur $(\Omega_n, \mathcal{A}_n)$, par rapport à laquelle P_n et Q_n sont toutes deux absolument continues, et soit p_n (resp. q_n) une densité de P_n (resp. Q_n) par rapport à μ_n ; on pose

$$S_n = \{ \omega_n \in \Omega_n \; ; \; p_n(\omega_n) > 0 \text{ et } q_n(\omega_n) > 0 \} .$$

a. Démontrer que $\lim\limits_{n \to \infty} P_n(S_n) = 1$.

b. Soit, pour tout n, φ_n une vraisemblance logarithmique de P_n par rapport à Q_n, définie, en tout ω_n appartenant à S_n, par

$$\varphi_n(\omega_n) = \operatorname{Log} p_n(\omega_n) - \operatorname{Log} q_n(\omega_n);$$

soit (A_n) une suite adaptée d'événements, vérifiant $\lim\limits_{n \to \infty} Q_n(A_n) = 0$.

Démontrer que, pour tout c strictement positif, on a

$$\lim_{n \to \infty} P_n(A_n \cap S_n \cap \{ \omega_n \; ; \; |\varphi_n(\omega_n)| \leqslant c \}) = 0.$$

c. En déduire que (P_n) est contiguë à (Q_n).

2° Soient deux suites adaptées de probabilités, (P_n) et (Q_n), et soit (M_n) une suite de représentations logarithmiques des couples (P_n, Q_n). On suppose que (P_n) est contiguë à (Q_n).

a. Démontrer que, pour toute suite (c_n) de nombres réels vérifiant $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = +\infty$, on a :

$$\lim_{n \to \infty} M_n(]-\infty, -c_n]) = 0 \text{ et } \lim_{n \to \infty} M_n([c_n, +\infty[) = 0.$$

b. En déduire que la suite (M_n) est tendue.

III. *Contiguïté et suites séquentiellement relativement compactes de représentations logarithmiques.*

Une suite (M_n) de probabilités sur $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ est dite *séquentiellement relativement compacte* (s.r.c.) si et seulement si, de toute suite extraite de (M_n), on peut extraire une suite étroitement convergente.

1° Démontrer que, pour qu'une suite (M_n) de probabilités sur $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ soit s.r.c., il faut et il suffit qu'elle soit tendue (pour la condition suffisante, on pourra commencer par démontrer que, si une suite (M'_n) de probabilités sur $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$, qui converge faiblement vers une mesure M', est tendue, la limite M' est nécessairement une probabilité).

2° Il résulte de II et de III, 1° que, pour qu'une suite (P_n) soit contiguë à une suite (Q_n), il faut et il suffit que les suites (M_n) de représentations logarithmiques des couples (P_n, Q_n) soient toutes s.r.c..

Soit, pour tout n, P_n (resp. Q_n) la probabilité de Laplace-Gauss de moyenne α_n (resp. β_n) et variance σ_n^2 (on suppose σ_n non nul); on remarque que, pour tout n, P_n et Q_n sont absolument continues l'une par rapport à l'autre, et que donc il existe une unique représentation logarithmique M_n du couple (P_n, Q_n).

Démontrer que M_n est aussi une probabilité de Laplace-Gauss (éventuellement dégénérée) dont on déterminera la moyenne et la variance.

En déduire une condition nécessaire et suffisante, portant sur la suite des triplets $(\alpha_n, \beta_n, \sigma_n)$, de contiguïté de (P_n) à (Q_n).

IV. *Contiguïté mutuelle.*

Soient ici deux suites adaptées de probabilités, (P_n) et (Q_n) telles que pour tout n, P_n et Q_n soient chacune absolument continue par rapport à l'autre; soit, pour tout n, M_n (resp. M'_n) la représentation logarithmique du couple (P_n, Q_n) (resp. (Q_n, P_n)).

Soit s l'application de $\mathbf{R}$ dans lui-même définie par

$$(\forall x \in \mathbf{R}) \quad s(x) = -x.$$

1° Démontrer que, pour tout n, sM'_n est absolument continue par rapport à M_n, et admet pour densité par rapport à M_n l'application $x \rightsquigarrow \exp(-x)$.

2° Une probabilité M sur $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ est dite *séquentiellement adhérente* à la suite (M_n) si et seulement si il existe une suite extraite de (M_n) admettant M pour limite étroite.

On suppose que chacune des suites (P_n) et (Q_n) est contiguë à l'autre (on dit qu'elles sont *mutuellement contiguës*).

a. Démontrer que toute probabilité M séquentiellement adhérente à la suite (M_n) vérifie :

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists c > 0) \quad \int_{-c}^{+c} \exp(-x) \; M(dx) > 1 - \varepsilon \; ;$$

en déduire la valeur de

$$\int_{\mathbf{R}} \exp(-x) \; M(dx).$$

b. Démontrer que, si M est une probabilité de Laplace-Gauss séquentiellement adhérente à la suite (M_n), sa moyenne est égale à la moitié de sa variance.

3° Réciproquement, on suppose vérifiées les deux conditions suivantes :

(P_n) est contiguë à (Q_n),

toute probabilité M séquentiellement adhérente à la suite (M_n) vérifie $\int_{\mathbf{R}} \exp(-x)\, M(dx) = 1$.

Démontrer qu'alors (P_n) et (Q_n) sont mutuellement contiguës.

Troisième partie

Définition.

Soient données, sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$, deux probabilités P et Q; pour tout α appartenant au segment $[0, 1]$, on note Φ_α l'ensemble des applications φ, mesurables de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]})$, vérifiant $\int_\Omega \varphi\, dQ \leqslant \alpha$. On appelle *fonction de discrimination* de Q contre P l'application S, de [0, 1] dans lui-même, définie par

I. *Généralités sur la fonction de discrimination.*

1° Soit une mesure σ-finie μ, sur $(\Omega, \mathcal{A})$, par rapport à laquelle P et Q sont toutes deux absolument continues; soit p (resp. q) une densité de P (resp. Q) par rapport à μ.

Pour tout couple (k, γ), appartenant à $[0, +\infty[\times [0, 1]$, on note $\varphi_{k,\gamma}$ l'application de Ω dans [0, 1] définie par :

$$\begin{array}{lll} \text{si} & p(\omega) > kq(\omega), & \varphi_{k,\gamma}(\omega) = 1, \\ \text{si} & p(\omega) = kq(\omega), & \varphi_{k,\gamma}(\omega) = \gamma, \\ \text{si} & p(\omega) < kq(\omega), & \varphi_{k,\gamma}(\omega) = 0. \end{array}$$

a. Démontrer qu'étant donné $\alpha \in [0, 1]$ on peut choisir (k, γ) de telle sorte que $\varphi_{k,\gamma}$ vérifie

$$\int_\Omega \varphi_{k,\gamma}\, dQ = \alpha.$$

b. (k, γ) étant choisi comme il est indiqué en *a.*, démontrer que, pour tout φ appartenant à Φ_α, on a

$$\int_\Omega (\varphi_{k,\gamma} - \varphi)\,(p - kq)\, d\mu \geqslant 0.$$

c. Démontrer que $S(\alpha) = \int_\Omega \varphi_{k,\gamma}\, dP$.

2° Démontrer que, pour tout A appartenant à $\mathcal{A}$, on a $S(Q(A)) \geqslant P(A)$.

II. *Contiguïté et suite des fonctions de discrimination.*

Étant données deux suites adaptées de probabilités, (P_n) et (Q_n), soit, pour tout n, S_n la fonction de discrimination de Q_n contre P_n.

Démontrer que la contiguïté de la suite (P_n) à la suite (Q_n) équivaut à la propriété suivante : pour toute suite (α_n) de nombres réels compris entre 0 et 1, vérifiant $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, on a $\lim_{n\to\infty} S_n(\alpha_n) = 0$.

II.10 – RAPPORT SUR L'EPREUVE DE PROBABILITES ET STATISTIQUES

II.10.1. ANALYSE DU SUJET

Ce problème est consacré à la notion de contiguïté, qui constitue une forme de généralisation, aux couples de suites de probabilités, de la notion d'absolue continuité (qui, elle, est relative aux couples de probabilités).

Cette notion a été introduite, à fin d'étude des propriétés asymptotiques locales des tests, par L. Le Cam en [2] (où étaient en fait considérés des couples de suites de probabilités dont chacune était, au sens que nous étudions ici, contiguë à l'autre) ; le lecteur intéressé pourra trouver de bons exemples d'application de la contiguïté à l'étude des tests de rang, présentés par J. Hájek et Z. Sidak dans [1] ; enfin G.G. Roussas a rédigé un ouvrage de présentation d'ensemble du concept de contiguïté et de son utilisation en statistique ([5]).

Dans la première partie du problème, consacrée aux propriétés élémentaires de la contiguïté, on étudie tout d'abord (1) quelques exemples et cas particuliers de suites contiguës : les seuls outils nécessaires sont ici certaines lois de probabilité élémentaires (uniforme, de Laplace-Gauss ([4], I, 6^e alinéa)), la notion d'absolue continuité d'une probabilité par rapport à une autre ([3]), II, 2 (sous la forme «théorème de Radon-Nikodym»), et la définition était rappelée dans l'énoncé), ainsi que les propriétés de «convergence sous le signe somme» ([3]), II, 3) (ici, de préférence, le théorème de convergence dominée de Lebesgue).

On fait obtenir ensuite (II) deux définitions équivalentes de la contiguïté faisant intervenir l'une la convergence étroite des suites de probabilités (rappelée en introduction de l'énoncé, de manière à faire apparaître son lien avec la convergence en loi des suites de variables aléatoires ([4], III, 1^er alinéa)), l'autre la convergence stochastique des suites de variables aléatoires ([4], III, 2^e alinéa).

Enfin (III), on fait intervenir, pour chacun des couples de probabilités considérés, une mesure σ-finie par rapport à laquelle ces probabilités sont toutes deux absolument continues, et on effectue des calculs sur leurs densités (notions relevant, ici encore, de [3] , II, 2) ; on s'en sert en particulier pour démontrer qu'une suite de probabilités, contiguë à une autre, peut être «un peu» modifiée de manière à ce que chacun de ses éléments devienne une probabilité absolument continue par rapport à la probabilité correspondante dans l'autre suite ; cette modification se fait par conditionnement par rapport à un événement de probabilité non nulle ([4], II, 1er alinéa).

La deuxième partie du problème vise à caractériser la contiguïté des couples de suites de probabilités à l'aide de propriétés de suites de probabilités sur (R, β) qui leur sont attachées : les suites de «représentations logarithmiques», dont la définition et les propriétés élémentaires (1) font intervenir, une fois encore, le théorème de Radon-Nikodym (leur présentation aurait pu être simplifiée par l'usage de la notion de probabilités orthogonales (ou étrangères) et du théorème de décomposition dit de Lebesgue (ou de Lebesgue-Nikodym) ; mais ce théorème ne figure pas explicitement au programme de l'Agrégation).

La première de ces caractérisations de la contiguïté se fait (II) à l'aide du caractère «tendu» de la suite des représentations logarithmiques, dont la définition est donnée dans l'énoncé, et dont l'étude ne fait intervenir aucune connaissance particulière, mais seulement l'emploi judicieux de techniques de majoration usuelles en calcul Intégral (afin de démontrer la convergence vers 0 de certaines suites d'intégrales).

La seconde caractérisation (III), fondée sur la compacité séquentielle relative pour la topologie de la convergence étroite, se déduit de la première à l'aide de techniques classiques en Analyse (extraction de sous-suites) et de l'usage du théorème de compacité faible de l'ensemble des mesures de masse totale inférieure ou égale à 1 ([3], II, 2, où il est énoncé en termes de topologie vague ; l'équivalence entre différents types de convergence, citée en [4], III, 1er alinéa, doit permettre de faire le lien avec la topologie faible) ; c'est ici qu'on obtient aisément une caractérisation complète de la contiguïté dans le cas de probabilités de Laplace-Gauss ayant deux par deux même variance, ce qui généralise l'exemple vue en première partie (1 2 b) ; il est pour cela utile de savoir utiliser les propriétés de l'image d'une probabilité par une application affine, à savoir l'effet sur la moyenne et sur la variance, ainsi que la conversation du caractère gaussien ([4], I, 5e alinéa, sous la forme «types de variables aléatoires»).

Enfin (IV), on s'intéresse au cas (originellement étudié par Le Cam ([2]) où chacune des deux suites de probabilités considérées est contiguë à l'autre ; l'étude suppose ici encore la connaissance de l'équivalence entre la convergence de la suite des intégrales d'une même fonction continue bornée et la convergence faible, telle qu'elle est définie dans l'énoncé.

La troisième partie du problème fournit un exemple d'application de la contiguïté à la statistique et, plus précisément, à la théorie des tests ([4], IV, où sont évoqués les tests du χ^2 et de Student, mais où ne figure pas explicitement le théorème de Neymam-Pearson, qu'on fait donc redémontrer ici (I 1)).

II.10.2. OBSERVATIONS

Première partie

I. 1° Question extrêmement facile, traitée correctement par quasiment tous les candidats, quoique souvent de manière inutilement longue.

I. 2° Quoique élémentaire, cette question a été très rarement correctement traitée ; voici une liste des principaux défauts qui en sont la cause (et qui tous, sauf celui noté A, ont souvent vicié de nombreuses autres questions dans la suite) :

A. Confusion entre la probabilité uniforme sur le segment $[a_n , b_n]$ et la restriction à $[a_n , b_n]$ de la mesure de Lebesgue (autrement dit, oubli du «facteur de normalisation» $b_n - a_n$)

B. Fautes dans le maniement des limites de suites de nombres réels (en voici deux exemples caractéristiques :

– affirmer que, si $\lim_{n\to\infty} a_n \geqslant 0$, il existe N tel que, pour tout $n \geqslant$ N, $a_n \geqslant 0$;

– nier que la suite (a_n) admet une limite nulle sous la forme $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$)

C. Utilisation de la limite de la suite de boréliens (A_n) ; ou bien cette notion de «limite ensembliste» était introduite sans que le candidat paraisse bien en connaître la signification, ou bien elle était correctement définie (par égalité des limites inférieure et supérieure), mais alors le candidat ne semblait pas s'être aperçu que l'intérêt même de la notion de contiguïté tient en particulier à ce qu'elle porte sur toute suite adaptée d'événements, qu'elle ait ou non une limite (notion qui, de toute façon, n'a de sens que dans le cas particulier où, comme ici, tous les espaces (Ω_n, $\mathcal{A}_n$) sont confondus).

D. Illusion selon laquelle toute propriété démontrée pour la classe génératrice d'une tribu (ici, par exemple, pour les demi-droites du type $]-\infty, x[$ «passerait» à la tribu elle-même (ici $\mathcal{B}$) ; dans le cas présent, il est faux que si, pour toute suite (x_n) vérifiant $\lim_{n\to\infty} Q_n (]-\infty, x_n[) = 0$, on a $\lim P_n (]-\infty, x_n[) = 0$ il en résulte que, pour toute suite (A_n) de boréliens vérifiant $\lim_{n\to\infty} Q_n (A_n) = 0$ on a $\lim_{n\to\infty} P_n (A_n) = 0$.

E. Erreurs logiques : on n'a donné souvent la démonstration que d'un seul des deux aspects «nécessaire» et «suffisant» de la condition demandée (et qui est : $0 \leqslant \lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n \leqslant 1$) ; parfois même il est difficile de les distinguer l'un de l'autre dans la rédaction proposée ; on a un peu l'impression que la rédaction de l'énoncé («dans quel cas... ? ») a eu pour effet que des candidats ne sont crus autorisés à plus de laxisme dans la rédaction que si on avait demandé : «donnez une condition nécessaire et suffisante pour que...».

I.2° b. Remarquons tout d'abord que, contrairement àl'année précédente, les candidats connaissent en général correctement l'expression d'une probabilité de Laplace-Gauss.

Dans le premier cas considéré ($\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} (-\beta_n) = +\infty$), il n'y a pas contiguïté, et on le vérifie aisément à l'aide d'un contre-exemple, à choisir aussi simple que possible ; par exemple, si F désigne la fonction de répartition de la probabilité de Laplace-Gauss de moyenne 0 et variance 1, on a $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n\,(\,]0,+\infty[\,) = \lim\limits_{n\to\infty} (1 - F(-\beta_n)) = 0$

alors que $\lim\limits_{n\to\infty} P_n\,(\,]0,+\infty[\,) = \lim\limits_{n\to\infty} (1 - F(-\alpha_n)) = 1$.

La majorité des démonstrations fournies ont été inutilement compliquées, et faisant souvent intervenir des majorations de $\exp\left(-\dfrac{(x-\alpha_n)^2}{2}\right)$ et $\exp\left(-\dfrac{(x-\beta_n)^2}{2}\right)$ qui étaient la plupart du temps faussés (en raison d'erreurs «de valeur absolue», du type : si $x-\alpha_n \leqslant x-\beta_n$, alors $(x-\alpha_n)^2 \leqslant (x-\beta_n)^2$).

Dans le deuxième cas ($\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n \in \mathbb{R}$), il y a contiguïté, et donc il y a lieu de vérifier qu'on a bien l'implication

« $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n\,(A_n) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} P_n\,(A_n) = 0$ »

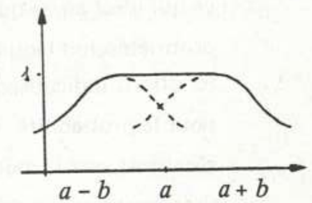
pour toute suite de boréliens (A_n) (et non pour les seules suites $(\,]-\infty, x_n[\,)$ (voir ci-dessus, en cas 2° a, la remarque D), ni non plus pour les seules suites constantes (A)). En fait, de nombreux candidats ont plus ou moins nettement vu qu'on a ici la propriété plus forte

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \left| \exp\left(-\frac{(x-\alpha_n)^2}{2}\right) - \exp\left(-\frac{(x-\beta_n)^2}{2}\right) \right| dx = 0$$

mais ont commis, dans sa démonstration, des erreurs dont voici les plus courantes :

A. Mauvaise justification de la «convergence sous le signe somme» ; par exemple, on invoquait le fait que $\left[\exp\left(-\dfrac{(x-\alpha_n)^2}{2}\right) - \exp\left(-\dfrac{(x-\beta_n)^2}{2}\right)\right]$ tend uniformément vers 0, ce qui est insuffisant puisqu'on intègre sur tout $\mathbb{R}$, et pas seulement sur une partie bornée (certains candidats s'en tiraient cependant en décomposant l'intégrale en somme des intégrales sur $]-\infty, a[$, $[-a,+a]$ et $]a,+\infty[$, où a est choisi «assez grand» ; bien sûr, une telle démonstration exige une mise en forme correcte qui était rarement atteinte).

B. On invoquait bien le théorème de convergence dominée de Lebesgue, mais sans prouver qu'il s'applique bien ici, ou en le justifiant par des majorations de la valeur absolue de la différence de $\exp\left(-\dfrac{(x-\alpha_n)^2}{2}\right)$ et $\exp\left(-\dfrac{(x-\beta_n)^2}{2}\right)$ extrêmement longues à établir (parfois plus d'une page de calculs, dans lesquels il était rare que ne se glisse pas une erreur ici ou là) ; sans doute cela est-il dû en grande partie.au fait que les candidats recherchaient de telles majorations «en aveugles», alors qu'un simple schéma du type ci-dessous permet de voir que le plus «naturel» est d'établir que, étant donné $b > 0$, on a, dès que α_n appartient à l'intervalle $[a-b, a+b]$, un majorant intégrale commun à toutes les fonctions $\exp\left(-\dfrac{(x-\alpha_n)^2}{2}\right)$ qui est la fonction f définie par :



si $x \leqslant a-b$, $f(x) = \exp\left(-\dfrac{(x-(a-b))^2}{2}\right)$

si $a-b < x < a+b$, $f(x) = 1$

si $a+b \leqslant x$, $f(x) = \exp\left(-\dfrac{(x-(a+b))^2}{2}\right)$

(et que donc, si on pose $a = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \left| \exp\left(-\frac{(x-\alpha_n)^2}{2}\right) - \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2}\right) \right| dx = 0,$$

et de même en remplaçant α_n par β_n).

I.3° a Cette question repose sur l'équivalence entre deux définitions de l'absolue continuité d'une part celle rappelée ici $((\forall A \in \mathcal{A})\ [Q(A)=0 \Rightarrow P(A)=0])$, et d'autre part $(\forall \epsilon > 0)\ (\exists \eta > 0)\ (\forall A \in \mathcal{A})\ [Q(A) \leqslant \eta \Rightarrow P(A) \leqslant \epsilon]$

Certains candidats ont cité cette équivalence comme un résultat connu (encore qu'il ne figure pas au programme d'Agrégation, et que l'énoncé incite à le redémontrer) ; d'autres ont essayé de le prouver, et ont souvent commis certaines des fautes suivantes

A. Usage de l'événement $\lim\limits_{n \to \infty} A_n$, qui n'avait aucune raison d'exister ;

B. Usage d'implications erronées du type

$$\lim_{n \to \infty} Q(A_n) = 0 \Rightarrow Q(\limsup_{n \to \infty} A_n) = 0$$

ou bien $\quad P(\liminf\limits_{n \to \infty} A_n) = 0 \Rightarrow \lim P(A_n) = 0$;

C. Usage du théorème de Borel-Cantelli (alors que les événements A_n n'ont aucun lieu d'être indépendants).

En fait, il faut, dans cette démonstration, extraire de la suite (A_n) une sous-suite (A_{n_p}) telle que $Q(A_{n_p})$ tende vers O suffisamment vite quand p tend vers l'infini (c'est-à-dire telle que $\sum\limits_{p=0}^{\infty} Q(A_{n_p}) < \infty$), ce qui n'est autre que la mise en évidence, dans ce cas particulier, de la propriétéselon laquelle que, de toute suite de variables aléatoires (ici les fonctions indicatrices des A_n), convergeant stochastiquement (ici vers 0, pour la probabilité Q), on peut extraire une suite qui converge presque sûrement vers la même limite. Remarquons qu'on pouvait également s'en tirer (certains candidats s'y sont essayés) en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, mais avec la seule hypothèse de convergence stochastique (ici de la suite des fonctions indicatrices des A_n), et non celle de convergence presque sûre.

I. 3° b. Seule la démonstration du fait que la contiguïté entraîne l'uniforme absolue continuité présente quelque difficulté, s'agissant du maniement des limites. Rares sont les candidats qui ont vu l'importance de l'hypothèse selon laquelle, pour tout n, P_n est absolument continue par rapport à Q_n ; dans les copies faisant intervenir correctement cette hypothèse, on trouve essentiellement l'une ou l'autre des deux méthodes de démonstration que voici :

A. Démontrer que la contiguïté, à elle seule, entraîne que
$(\forall \epsilon > 0)\ (\exists \eta' > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n > N)\ (\forall A \in \hat{\mathcal{A}})\ [Q(A) < \eta' \Rightarrow P_n(A) < \epsilon]$

et prendre finalement $\eta = \inf(\eta_1, \dots, \eta_N, \eta')$ où, pour tout $i \leqslant N$, η_i est obtenu grâce à l'absolue continuité de P_i par rapport à Q.

B. Supposer (P_n) non uniformément absolument continue par rapport à Q, et en déduire l'existence de $\epsilon > 0$, et de deux suites (A_p) et (n_p) telles que $\lim\limits_{p \to \infty} Q(A_p) = 0$, $(\forall p \in \mathbb{N})\ P_{n_p}(A_p) > \epsilon$ et enfin $\lim\limits_{p \to \infty} n_p = +\infty$;

c'est cette dernière propriété qui est assurée grâce à l'absolue continuité de chacune des probabilités P_n par rapport à Q.

En règle générale, la manière dont est traitée cette question traduit un manque total de rigueur ; l'imprécision de la pensée s'y marque souvent par des écritures absolument sans aucun sens, et en particulier par l'accumulation de «signes logiques» (quantificateurs, implication, ...) et de lambeaux de propositions qui constituent un «message» totalement impossible à décrypter : il y a là un défaut très grave pour des candidats à des fonctions d'enseignement.

Signalons aussi la faute fréquente consistant à croire que la proposition

$$(\forall (A_n))\ [\lim_{n \to \infty} Q_n(A_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} P_n(A_n) = 0]$$

équivaut à

$$(\forall \epsilon > 0)\ (\ N \in \mathbb{N})\ (\forall n > N)\ [Q_n(A_n) < \epsilon \Rightarrow P_n(A_n) < \epsilon]$$

II.1°. La démonstration du fait que la contiguïté implique la propriété proposée ici est élémentaire dès lors qu'on a lu attentivement la définition de la convergence étroite donnée en introduction ; c'est cette attention qui semble avoir fait défaut à plusieurs candidats : l'énoncé exact de la convergence d'une suite (M_n) de probabilités sur $(\mathbb{R}, \beta)$, vers la probabilité concentrée en 0, qui est

«si $x < 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} M_n(]-\infty, x[) = 0$ et, si $x > 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} M_n(]-\infty, x[) = 1$», était fréquemment remplacé par l'un des énoncés erronés suivants :

A. Si $x \leqslant 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} M_n(]-\infty, x[) = 0$ et, si $x > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} M_n(]-\infty, x[) = 1$;

B. $(\forall x \in \mathbb{R})\ \lim\limits_{n\to\infty} M_n\ (]-\infty, x[) = 0$;

C. $(\forall A \in \mathcal{B}\ [0 \in A \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} M_n(A) = 1]$;

D. $(\forall A \in \mathcal{B})\ \lim\limits_{n\to\infty} M_n\ (A) = 0.$

La réciproque nécessite le choix, étant donnée une suite adaptée d'événements (A_n), d'une suite adaptée d'applications (φ_n), à laquelle on peut appliquer l'hypothèse faite (par exemple, on peut prendre la suite des fonctions indicatrices des A_n) ; de nombreux candidats ont commis la faute logique consistant à parler de la suite (φ_n)» comme si elle était donnée a priori (et n'ont donc rien pu dire de correct sur une suite ainsi imprécisée) ; d'autres ont introduit la suite (φ_n) par des conditions du type « $(n \in \mathbb{N})\ \varphi_n(A_n) =]0,+\infty[$ », qui n'ont aucune raison de pouvoir être réalisées.

II. 2° La convergence stochastique d'une suite (f_n) de variables aléatoires vers f est connue de nombreux candidats ; cependant, certains la remplacent souvent par la notion bien plus forte suivante : $(\forall\ A \in \mathcal{A})\ \lim\limits_{n\to\infty} P[f_n \in A] = P[f \in A]$

Même dans des copies où cette question est correctement traitée, il est rare qu'il ait été vu qu'on pouvait se servir de la question précédente, grâce aux théorèmes classiques liant convergence en loi et convergence stochastique.

III. 1° Question rarement bien traitée. Certains candidats ont été gênés par le fait que l'énoncé omet de préciser explicitement que la mesure σ -finie μ est ici (comme dans tous les cas analogues par la suite) positive (c'est en fait assez évident). D'autre part, de nombreux candidats ont été déroutés par la présence du facteur 2 dans la définition de $\| P - P' \|$, et ont de ce fait souvent rédigé de longs calculs qui «tournaient en rond» ; la présence de ce facteur tient à l'égalité

$$\int_{[p-p' \geqslant 0]} (p-p')\, d\mu = - \int_{[p-p' \leqslant 0]} (p-p')\, d\mu\ ,$$

qui entraîne $\int_\Omega |p-p'|\, d\mu = 2 \int_{[p-p' \geqslant 0]} (p-p')\, d\mu$

III.2° Question élémentaire, souvent traitée par des candidats qui avaient laissé de côté nombre de celles qui précèdent ; deux erreurs s'y rencontraient cependant assez souvent (en b) :

A. Croire que, si (P_n) est contiguë à (Q_n), on a $\lim\limits_{n\to\infty} \| P_n - Q_n \| = 0$ (c'est-à-dire la réciproque (fausse) de la propriété démontrée en a) ;

B. Faire comme si, étant données deux suites de nombres réels (x_n) et (y_n), vérifiant $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$, on avait $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ (alors que ces limites n'existentpas nécessairement) ; bien sûr, si on sait de plus que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$; c'est ce qui sert ici.

III. 3° Le *a* a été en général bien traité par les candidats l'ayant abordé, mais non le *b*.

En particulier, dans la démonstration de l'absolue continuité de P'_n (pour $n > N$) par rapport à Q_n, de nombreux candidats ont cru que, de l'égalité $Q_n\ (A_n) = 0$, ils pouvaient déduire que $A_n \cap S_n = \theta$ (on ne peut en déduire que $\mu_n\ (A_n \cap S_n) = 0$, ce qui entraîne bien la nullité de $P_n (A_n \cap S_n) = 0$, ce qui entraîne bien la nullité de $P_n (A_n \cap S_n)$, et donc aussi de $P_n^{S_n} (A_n))$.

D'autre part, de nombreux candidats, après avoir correctement démontré que, pour toute suite (A_n), on a $\lim\limits_{n\to\infty} | P_n (A_n) - P'_n (A_n) | = 0$, ont omis de justifier pourquoi cela implique que $\lim\limits_{n\to\infty} \| P_n - P'_n \| = 0.$

Deuxième partie

La plupart des candidats n'ayant pratiquement pas abordé cette partie (mises à part quelques réflexions, en général insuffisantes, en I), nous ne donnons que quelques commentaires sur les erreurs principales, et renvoyons le lecteur intéressé aux paragraphes 3 et 5 du chapitre I de [5], d'où les résultats présentés ici ont été extraits.

I. Les rédactions fournies ici par les candidats se limitaient en général à des calculs, non accompagnés de raisonnements valables, et consistant essentiellement en de simples réécritures d'égalités du type $\frac{dP}{d\mu} = \frac{dP}{d\mu'}\frac{d\mu'}{d\mu}$.

En particulier, très peu de candidats ont vu que toute la difficulté tient ici au fait que les densités ne sont définies qu'à des égalités presque sûres près, et qu'il faut bien préciser par rapport à quelle mesure sont à chaque fois considérées ces égalités presque sûres ; voici deux cas essentiels où cette difficulté était éludée par les candidats :

A. En 1°, on a à considérer des égalités presque sûres par rapport à diverses mesures μ relativement auxquelles P et Q sont toutes deux absolument continues ; de deux quelconques de telles mesures (soient μ et μ'), aucune n'est nécessairement absolument continue par rapport à l'autre, mais (remarque à laquelle les candidats n'ont en général pas pensé), il existe toujours μ'', par rapport à laquelle μ et μ' sont à leur tour toutes deux absolument continues.

B. En 2°, on a à utiliser l'hypothèse d'absolue continuité de P par rapport à Q pour démontrer la P- presque sûre égalité de toutes les vraisemblances logarithmiques, et donc l'identité de toutes les images de P qu'elles définissent.

Signalons que certains candidats ont pu être gênés ici par le fait que, en 2° a, il y a seulement coincidence sur $\{\omega\ ;\ p(\omega) > 0\}$ (et non, comme l'énoncé l'affirmait à tort, égalité) de $\exp(\varphi)$ avec une densité de P par rapport à Q (les incorrections provoquées par cette gêne n'ont évidemment pas été pénalisées).

II. Nombre des fautes commises ici relèvent d'une lecture trop superficielle de l'énoncé ; en voici deux exemples fréquemment rencontrés :

A. En 1° a, recourir à la question III 3° a de la première partie, où la conclusion était la même ($\lim_{n\to\infty} P_n(S_n) = 1$), mais non les hypothèses (en fait, il fallait voir ici le caractère essentiel de l'hypothèse selon laquelle <u>toute</u> suite (M_n) de représentations logarithmiques est tendue, et considérer, par exemple, celle associée aux vraisemblances logarithmiques φ_n telles que, pour tout n, φ_n prenne sur $(S_n$ la valeur n).

B. Echanger, dans l'usage de la définition des suites tendues, les quantificateurs $(\ c > 0)$ et $(\ n \in \mathbb{N})$, ce qui ramène à une propriété vérifiée par n'importe quelle suite de probabilités sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

D'autre part, la seule question nécessitant ici un maniement un peu délicat de l'analyse élémentaire, à savoir le 2° b (où il était en particulier essentiel d'utiliser le fait, démontré en 2° a, que, pour <u>toute</u> suite (c_n), on a $\lim_{n\to\infty} M_n([-c_n, +c_n]) = 1)$ appelle le même type de remarque sur le manque de rigueur que celle faite à propos du I 3° b de la première partie.

III et IV. Il est satisfaisant de constater que quelques candidats ont mené à bien les calculs sur les probabilités de Laplace-Gauss qui interviennent ici (et, par exemple, vu que la condition de contiguité qui est demandée à la fin de III 2° est que la suite $\left(\frac{\alpha_n - \beta_n}{\sigma_n}\right)$ soit bornée).

Troisième partie

I. Un certain nombre de candidats, ayant eu ou pas du tout traité la deuxième partie, ont considéré cette question. S'ils ont souvent correctement étudié les 1° b, 1° c et 2°, ils n'ont en général pas vu que le 1° a repose sur les propriétés de la fonction de répartition, pour la probabilité Q, de la variable aléatoire $\frac{p}{q}$ (à valeurs dans $[0, +\infty]$, et non définie, mais c'est sans importance, sur $\{\omega\ ;\ p(\omega) = q(\omega) = 0\}$) ; en particulier, ils n'ont en général pas précisé quel doit être k (qui doit en fait être choisi de façon à vérifier $Q[p > kq] \leqslant \alpha$ et $Q[p \geqslant kq] \geqslant \alpha$), et ont seulement affirmé que, si $Q[p = kq] \neq 0$, on doit prendre $\gamma = \alpha - Q[p > kq] / Q[p = kq]$, sans s'assurer si on a bien alors $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$.

II. Il est évident que la propriété présentée ici sur la suite des fonctions de discrimination est une condition suffisante de contiguité ; démontrer que c'est une condition nécessaire est assez simple également, mais nécessite cependant un peu de précautions, rarement présentes dans les copies, pour établir l'implication suivante : si $\lim_{n\to\infty} \gamma_n Q_n(A_n) = 0$ (avec, pour tout n, $0 \leqslant \gamma_n \leqslant 1$), alors $\lim_{n\to\infty} \gamma_n P_n(A_n) = 0$).

CONCLUSION

Comparées à celles des années antérieures, les copies de cette année font apparaître plutôt moins d'ignorances graves sur les notions de base du Calcul des Probabilités. Par contre le type de problème proposé a mis en évidence de très graves insuffisances dans le maniement de l'analyse la plus élémentaire (or, ici, à part quelques considérations de compacité, tout tournait autour de la seule notion de limite d'une suite de nombres réels), liées à un manque de rigueur, ou même de simple de cohérence du discours, qui ont été extrêmement préjudiciables à la plupart des candidats.

II.10.3. BIBLIOGRAPHIE

[1] HÁJEK (J.) and SIDAK (Z.), *Theory of Rank Tests,* Academic Press (New York and London) and Academia (Prague), 1967.

[2] LE CAM (L.), Locally asymptotically normal families of distributions, *Univ. California Publ. Statist. 3* (1960), 37.98.

[3] PROGRAMMES des épreuves écrites et orales des Agrégations de Mathématiques (candidats et candidates) pour la session de 1970, *Composition d'Analyse,* Note du 24 septembre 1969, *Bull. Off. Ed. Nat.* n° 37 (2-10-1969) (reconduits pour 1974 par la note du 25 juin 1973, *Bull. Off. Ed. Nat.* n° 27 (5-6-1973)).

[4] PROGRAMMES des épreuves écrites et orales des Agrégations de Mathématiques (candidats et candidates) pour la session de 1970, *Probabilités et Statistique,* note du 24 septembre 1969, *Bull. Off. Ed. Nat.* n° 37 (2-10-1969) (reconduits pour 1974 par la note du 25 juin 1973, *Bull. Off. Ed. Nat.* n° 27 (5-6-1973)).

[5] ROUSSAS (G.G.), *Contiguity of probability measures, some applications in statistics*, Cambridge University Press, n° 63, 1972.

II.10.4. RENSEIGNEMENTS STATISTIQUES

Agrégation masculine

Nombre de copies corrigées : 483

Moyenne : 9,4 (sur 40)

Quantiles supérieurs :

– d'ordre 2 (médiane) : 9 (236 notes ⩾ 9)

– d'ordre 3 : 12 (170 notes ⩾ 12)

– d'ordre 4 : 14 (124 notes ⩾ 14)

– d'ordre 5 : 15 (104 notes ⩾ 15)

Agrégation féminine

Nombre de copies corrigées : 351

Moyenne : 7,77 (sur 40)

Quantiles supérieurs :

– d'ordre 2 (médiane) : 7 (177 notes ⩾ 7)

– d'ordre 3 : 10 (126 notes ⩾ 10)

– d'ordre 4 : 11 (999 notes ⩾ 11)

– d'ordre 5 : 12 (74 notes ⩾ 12)

Répartition des notes par classes d'amplitude 5 :

	0	1 à 5	6 à 10	11 à 15	16 à 20
Candidats	11	160	124	108	43
Candidates	5	145	103	62	24

	21 à 25	26 à 30	31 à 35	36 à 40
Candidats	28	6	1	2
Candidates	9	2	1	0

(1 copie a obtenu la note 40)

III - ÉPREUVES ORALES

CANDIDATS

III. 1 – REMARQUES GENERALES

- Comme les années précédentes, les candidats ont été répartis, en fonction des résultats de l'écrit, entre deux demi-jurys comprenant chacun une commission d'analyse et une commission d'algèbre. Une rotation des examinateurs a permis d'harmoniser les notes attribuées par ces deux demi-jurys.

- Si – ainsi qu'on le verra ci-dessous – les candidates ont su, en général, profiter des remarques et suggestions formulées dans les précédents rapports d'agrégation, il n'en a pas été de même pour les candidats. Le président du jury ne peut donc que recommander aux futurs candidats de lire attentivement le présent rapport.

- Il attire par ailleurs leur attention sur le fait que le programme du concours de 1975 (publié dans le B.O.E n° 25 du 20-6-74) comporte :

  – un certain nombre de modifications de rédaction du programme de mathématiques générales ;

  – une addition au programme de l'épreuve à option (en mécanique générale) ;

  – une innovation consistant en l'introduction (pour les épreuves orales seulement) d'un programme obligatoire de Probabilités.

III. 2 – EPREUVE D'ANALYSE, TRIGONOMETRIE, MECANIQUE

III.2.1. OBSERVATIONS GENERALES

Nombre de candidats n'ont toujours pas compris la nature exacte des exposés d'oral, ni assimilé les dispositions réglementaires les concernant. La plupart des exposés constituent des «leçons de composition». Cela signifie que le candidat doit, le plus vite possible, dépasser les généralités, définitions, rappels, pour donner un exposé cohérent et construit des connaissances réelles qu'il possède sur les mathématiques se rapportant à son sujet. Ainsi, par exemple, un plan interminable sur «limites», ne comprenant que la définition du symbole : $\lim_{x \to a} f$, et ses variantes lorsque source, but sont métriques, normés etc..., et les propriétés algébriques de ce symbole, ne peut conduire qu'à une très mauvaise note. Les théorèmes importants où l'on fait usage de limites sont suffisamment nombreux pour permettre de composer une infinité de leçons différentes, toutes intéressantes, intitulées : «limites».

Certes, le jury n'est pas en droit d'exiger que le candidat soit capable de démontrer tous les résultats cités dans le plan ; mais il est normal qu'il connaisse au moins le mécanisme de démonstration des théorèmes principaux : autrement

dit, le plan doit refléter les connaissances réelles du candidat, et non le résultat d'une compilation fiévreuse de quelques ouvrages pendant les trois heures réservées à la préparation ; c'est ainsi que, par exemple, il est préférable de s'abstenir d'écrire, dans la formule de Taylor, une expression du type $f^{(3)}(a)(h^3)$ lorsque l'on est incapable de l'expliciter pour une application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$!

Rares sont les candidats faisant appel aux connaissances qui auraient dû être assimilées pour l'épreuve d'écrit, concernant l'intégration, les fonctions analytiques, les séries de Fourier etc. Et pourtant presque toutes les leçons d'analyse, même celles qui par leur nature propre comportent une certaine part d'abstraction, gagneraient considérablement à être illustrées par des exemples puisés à ces sources toujours disponibles de la mathématique.

Enfin le jury a constaté avec regret que les exposés de géométrie différentielle et de cinématique étaient presque toujours écartés par les candidats qui leur préféraient, souvent à tort, des sujets nettement plus difficiles, qu'ils s'avéraient incapables de maîtriser. Certes, il y a quelques années, on pouvait considérer que ces sujets comportaient des pièges, en ce sens que l'intuition semblait y jouer un rôle plus important que la rigueur. Mais aujourd'hui, les candidats ont à leur disposition des outils qui peuvent leur permettre, grâce à un peu de réflexion et de travail, d'acquérir les bases théoriques sur lesquelles ils peuvent fonder des exposés agréables, riches en exemples simples, et, tout compte fait, assez faciles.

III.2.2. REMARQUES PARTICULIERES SUR CERTAINS SUJETS D'ANALYSE

- **Propriétés topologiques des espaces $\mathbb{R}^n$ et leur utilisation en analyse.** Cette question ne doit pas être assimilée à l'exposé **Espaces vectoriels normés de dimension finie.** Pour la première, il semble nécessaire de donner une définition intrinsèque de la topologie de $\mathbb{R}^n$, comme topologie produit à l'aide des pavés ou de la norme du sup. Les notions de connexité et compacité doivent être développées en vue des applications, qui peuvent aller jusqu'à des résultats sur l'approximation ou le prolongement d'applications continues ; signalons aussi une propriété importante des ouverts de $\mathbb{R}^n$: tout tel ouvert est réunion d'une suite exhaustive de compacts, etc. Enfin, faut-il ajouter que la topologie de $\mathbb{R}^n$ est la seule qui fait de $\mathbb{R}^n$ un espace vectoriel topologique séparé sur $\mathbb{R}$? ou que quelques résultats fins sur la topologie de $\mathbb{R}^2$, obtenus, par exemple, à l'aide de la théorie des fonctions d'une variable complexe, peuvent permettre à un candidat brillant ou même moyen d'aider à confirmer sa valeur ?

Quant au second exposé, il est indispensable de préciser ce qui est connu ; l'exposé est en effet très différent selon que l'on suppose connue ou non la topologie de $\mathbb{R}^n$. L'aspect géométrique de cette leçon doit être, en tout cas, bien mis en évidence : boule unité, jauge, propriétés des convexes, théorème de Hahn-Banach dont la démonstration est immédiate dans le «cas» où la norme est issue d'un produit scalaire (ce cas n'étant pas vraiment un cas particulier grâce au théorème d'équivalence des normes). Il est peut-être aussi utile de faire remarquer que la notion de borné de $\mathbb{R}^n$ est une notion «topologique», qu'il existe des espaces normés sur $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{C}$, mais que sur $\mathbb{Q}^2$ toutes les normes ne sont pas équivalentes.

● **Théorème du point fixe ; applications.** Il s'agit là du type même d'une leçon de composition. Si le théorème principal est effectivement assez réduit, il n'est pas sans intérêt de donner un théorème du point fixe avec paramètre, et des propriétés de continuité, de différentiabilité de la fonction solution suivant les hypothèses faites ; il est bien entendu que ce second théorème est en fait un corollaire du premier, mais que, même considéré comme tel, il doit faire l'objet d'un énoncé séparé. En ce qui concerne les applications, un exemple explicite de calcul numérique n'est pas interdit, dessin à l'appui ; cependant, les applications théoriques les plus importantes, (théorème d'inversion locale et théorème d'existence de solutions d'équations différentielles), doivent être présentées avec précision : hypothèses pour le problème étudié, et *construction explicite* de l'espace métrique complet considéré, de l'application contractante, et de la constante de contraction, ce qui exige quelques précautions...

● **Etude, sur des exemples, de divers types de suites définies par une relation de récurrence.** Voici une leçon de composition qui ne devrait être choisie que par des candidats très sûrs de l'étendue de leurs connaissances. Il y a d'autres suites définies par des relations de récurrence que les cas classiques $u_{n+2} + a\, u_{n+1} + b\, u_n = 0$, et leurs variantes. Et même alors, il faut savoir expliquer comment il se fait que, lorsque a et b sont entiers, ainsi que u_0 et u_1, le terme général, qui est donc un entier, s'exprime parfois comme combinaison linéaire de racines carrées de nombres complexes ! Il est indispensable d'introduire des calculs sur les séries entières (ou mieux formelles) par exemple pour résoudre des équations différentielles à coefficients analytiques, ou des équations du type :

$\exp\left(\sum_{n>0} a_n \frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{n\geqslant 0} b_n \frac{x^n}{n!}$. Citons aussi les relations de récurrence liant les $S_{n,p} = 1^p + \dots + n^p$ entre eux, et les relations qui les lient aux nombres de Bernouilli, etc.

● **Fonctions croissantes.** Beaucoup d'exposés sur ce sujet ont été placés à un niveau trop élémentaire. Le jury souhaiterait entendre des résultats concernant la fonction de sauts d'une fonction croissante, les fonctions à variation bornée, la caractérisation des intégrales indéfinies des fonctions croissantes, ainsi que des théorèmes de limite monotone (intégrales, séries...). Certains candidats pourront également, s'ils sont assez sûrs de leurs connaissances, donner des théorèmes liant monotaire et théorie de la mesure, etc.

● **Exemples de problèmes d'interversion de limites.** Le jury n'attend pas du candidat la liste exhaustive des énoncés des théorèmes du programme où intervient une interversion de limites (théorèmes sur la continuité, la dérivation, l'intégration de la limite d'une suite de fonctions, de l'intégrale d'une fonction dépendant d'un paramètre, de

la somme d'une série dont le terme général dépend d'un paramètre etc.). Il considère comme indispensable que soient dégagés d'abord des principes généraux (*Par exemple,* si $u_{\alpha,\beta}$ est une suite numérique double (indexée par $\mathbb{N}^2$), on pourra définir la notion de limite de cette suite lorsque α et β tendent vers $+\infty$, puis énoncer des conditions générales sous lesquelles on a :

$\lim_{\alpha}(\lim_{\beta} u_{\alpha,\beta}) = \lim_{\beta}(\lim_{\alpha} u_{\alpha,\beta})$.). Ensuite, ces principes généraux seront illustrés dans des cas particuliers et par des exemples.

● **Série de Taylor.** Contrairement aux apparences l'exposé est difficile. Ceux des candidats dont la culture mathématique est assez vaste pour leur permettre d'aborder avec fruit le sujet peuvent évoquer (outre les théorèmes usuels) la notion de fonction analytique réelle ou complexe, la caractérisation locale desdites fonctions, l'utilisation du reste intégral (théorème de Bernstein...), le problème du prolongement analytique d'une fonction série entière dans $\mathbb{C}$, et donner quelques exemples et résultats non triviaux (théorème de Borel ; fonction réelle de classe C^∞, analytique en aucun point de la droite ; fonctions complètement (resp. absolument) monotones...).

● **Fonctions circulaires directes et inverses.** Cet exposé peut se tracter à deux niveaux très différents. On peut rester très élémentaire, comme dans une classe de terminale ; mais alors il ne s'agit pas de définir ces fonctions à l'aide de l'exponentielle complexe, ni d'oublier des relations du type Arc sin x + Arc cos x = ... , ou :

Arc sin $\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ = ... , ou des inégalités fort utiles comme :

$\sin x > \frac{2}{\pi} x$ pour $0 < x < \pi/2$, ou l'expression de primitives usuelles faisant intervenir ces fonctions. Si l'on veut, par contre, se placer à un niveau supérieur, ne pas oublier le rôle que jouent les fonctions circulaires dans la théorie des séries de Fourier !

● **Fonction logarithme, fonction exponentielle d'une variable réelle.** Cet exposé classique, portant sur un sujet bien traité par la plupart des ouvrages, n'aurait pas eu en principe à faire l'objet d'un commentaire. Cependant le jury a constaté que trop de candidats parmi ceux qui ont opté de faire leur exposé au niveau d'une classe de terminale — ce qui est tout à fait concevable — ignorent qu'il suffit d'imposer la continuité ou la monotonie (et non la dérivabilité) de la fonction f vérifiant $f(xy) = f(x) + f(y)$ pour obtenir que f est un logarithme ! Lorsque l'on introduit le logarithme supérieur à l'aide de la primitive de $\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ nulle en 1, et l'exponentielle comme fonction réciproque du logarithme, il ne faut pas oublier de vérifier que l'on a : $\exp(x) = (\exp 1)^x$ pour x entier. Il s'agit de savoir, avant d'être interrogé par le jury, si, pour x rationnel, cette relation est une définition ou un théorème !

● **Equations différentielles linéaires à coefficients constants.** La faute la plus communément commise consiste à démontrer l'existence des solutions de : $x'(t) = A.x(t)$, où A est une application linéaire à coefficients constants en appliquant le théorème général sur les équations différentielles satisfaisant à une condition de Lipschitz. Ce dernier en effet ne permet d'affirmer que l'existence d'une solution locale alors qu'ici l'on sait que les solutions sont analytiques sur $\mathbb{R}$ tout entier ! Il est donc préférable de montrer directement que les solutions s'expriment toutes à l'aide de exp $(t\,A)$. Alors vient une partie purement algébrique (réduite de Jordan...) ayant pour but d'expliciter l'application linéaire exp $(t\,A)$ (en n'oubliant pas que, si l'on fait la théorie dans un espace vectoriel réel, le résultat doit être lui aussi réel). Mais, au delà de l'expression algébrique de ces solutions, le mathématicien doit surtout s'intéresser à leur forme, penser en terme de dynamique et étudier la stabilité des trajectoires. Dans cet esprit, et dans le cas où A est une matrice 2 x 2, une étude, suivant les valeurs propres de A, de la limite des points de la trajectoire lorsque t tend vers $\pm\infty$ serait la bienvenue. Remarquons enfin que lorsque le candidat ajoute un «second membre» B, il n'y a aucune raison de considérer que B est constant : la recherche des solutions se ramène à des quadratures même lorsque B varie, et selon la forme particulière de B, il y a intérêt à expliciter soigneusement la solution générale de l'équation avec second membre.

III.2.3. LISTE DES SUJETS D'ANALYSE

1. *Applications à l'analyse de la notion de compacité.*
2. *Application à l'analyse de la notion de connexité.*
3. *Espaces métriques complets. Théorème du point fixe.*
4. *Théorème du point fixe. Applications.*
5. *Espaces métriques complets ; espaces métriques compacts. Comparaison.*
6. *Produit d'espaces topologiques. Exemples et applications.*
7. *Espaces vectoriels normés ; espaces de Banach. Sous-espaces denses.*
8. *Espace vectoriel normé de dimension finie.*
9. *La notion d'espace vectoriel normé ; son utilisation en analyse et en géométrie.*
10. *Définition et propriétés de $\mathbb{R}$.*
11. *Topologie de la droite numérique $\mathbb{R}$. Droite numérique achevée.*
12. *Propriétés topologiques de $\mathbb{R}^n$; leur utilisation en analyse.*
13. *Limites.*
14. *Applications continues.*
15. *Suites numériques. Limite, limite supérieure, limite inférieure.*
16. *Utilisation des suites en topologie.*
17. *Exemples de suites définies par une relation de récurrence.*
18. *Fonction réelle d'une variable réelle ; continuité, dérivabilité.*
19. *Fonctions croissantes.*
20. *Fonctions réciproques. Fonctions implicites.*
21. *Fonctions implicites. Applications géométriques.*

22. *Fonctions convexes d'une ou plusieurs variables réelles.*
23. *Fonction différentiable.*
24. *Fonction de plusieurs variables réelles : formule des accroissements finis, formule de Taylor.*
25. *Les diverses formules de Taylor.*
26. *Application du calcul différentiel aux problèmes d'extremum.*
27. *Applications des formules des accroissements finis et de Taylor aux problèmes de calcul numérique.*
28. *Comparaison des fonctions au voisinage d'un point.*
29. *Fonction logarithmique, fonction exponentielle d'une variable réelle.*
30. *Fonction exponentielle complexe.*
31. *Extension de la notion de fonction exponentielle.*
32. *Fonctions circulaires directes et réciproques.*
33. *Intégration des fonctions d'une variable réelle.*
34. *Primitives et intégrales.*
35. *Recherche des primitives ; calcul des intégrales.*
36. *Intégrales impropres.*
37. *Fonctions définies par une intégrale.*
38. *Calcul approché d'une intégrale.*
39. *Séries à termes réels ou complexes.*
40. *Séries à termes réels ; exemples et contre-exemples.*
41. *Liaison entre la théorie de l'intégrale et celle des séries.*
42. *Opérations sur les séries à termes réels ou complexes.*
43. *Continuité, dérivabilité, intégrabilité de la somme d'une série de fonctions d'une variable réelle.*
44. *Les différentes notions de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions.*
45. *Exemple d'utilisation du critère de convergence de Cauchy (suites, séries, fonctions, intégrales).*
46. *Exemples de problèmes d'interversion de limites (séries, intégrales,...)*
47. *Séries entières.*
48. *Développement d'une fonction en série entière.*
49. *Série de Taylor.*
50. *Fonction $x \to e^{ix}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$; nombre r ; module et argument d'un nombre complexe.*
51. Equations différentielles linéaires ; exemples.
52. *Equations différentielles linéaires à coefficients constants.*
53. *Surface ; plan tangent ; exemples.*
54. *Etude locale des courbes ; propriétés affines (resp. métriques) ; exemples.*

55. *Tracé des courbes planes* $\vec{OM} = \vec{f}(t)$. *Exemples.*

56. *Tracé des courbes planes* $r = f(\theta)$. *Exemples.*

57. *Centre de courbure en un point d'une courbe plane ; développée ; développantes.*

58. *Mouvement à accélération centrale.*

59. *Mouvement relatif ; changement de repère ; applications.*

60. *Cinématique du solide.*

61. *Mouvement d'un repère orthonormé ; applications (courbes gauches, cinématique du solide).*

62. *Mouvement d'un plan sur un plan.*

III. 3 – EPREUVE D'ALGEBRE, GEOMETRIE

III.3.1. OBSERVATIONS GENERALES

● Beaucoup de candidats apprécient mal la nature de l'épreuve : ils allongent l'exposé de leur plan bien au-delà du quart d'heure souhaité, en y incluant des préliminaires aussi indigestes qu'imprécis (dans une leçon sur les espaces vectoriels, on ne saura jamais si le corps est commutatif...). Le jury leur en voudra d'autant plus que cela raccourcit la durée de sa conversation avec le candidat, à laquelle il tient essentiellement. Plutôt que réciter une leçon-type en oubliant parfois de tourner la première page du manuel), le candidat devrait s'attacher à fournir des exemples et des exercices non triviaux : il peut d'ailleurs ainsi orienter à sa guise l'entretien avec le jury au cours duquel il aura, de toute façon, à résoudre de petits exercices.

Il va de soi qu'il faut avoir réfléchi aux exemples que l'on propose : il est dangereux d'avancer à la légère $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ comme exemple d'anneau non principal, ou d'affirmer que l'équation $X^2 + 1 = 0$ admet six racines dans le corps des quaternions, ou, après avoir donné $\mathcal{P}$ (E) comme exemple d'espace vectoriel sur F_2, de ne pas savoir calculer sa dimension lorsque E est fini. De même, lorsque le candidat propose un sujet d'exposé qui n'est pas tautologique, il arrive souvent qu'il s'interrompe prématurément dans sa démonstration – ce qui détériore gravembt la note – alors que la lecture, même rapide, d'un livre bien choisi lui aurait fourni une argumentation complète.

Enfin, il est déconseillé d'évoquer une question dont on ne maîtrise pas au moins les rudiments : à quoi rime de prétendre démontrer le théorème de Wedderburn sur la commutativité des corps finis si on est incapable de fournir une liste de ces corps !

● Les relations entre l'algèbre et la géométrie d'une part, le calcul différentiel et intégral d'autre part sont mal perçues, voire ignorées. Il est étrange d'entendre dire

que la tangente en un point à une conique n'est rien de plus que la polaire de ce point, ou que les tangentes à une courbe algébrique en un point double n'existent que par leur équation : quelques exercices sur ce thème (branches de la courbe,...) enrichiraient fort la leçon sur la formule de Taylor.

Il faut savoir que le déterminant n'intervient pas seulement par un signe et son éventuelle annulation ; c'est ainsi que, pour citer un exemple, les calculs de volume lui doivent beaucoup. De même, le problème de la mesure des angles a quelque lien avec la longueur des arcs de cercle... et même avec la surface et le poids des parts de fromage.

Enfin, il n'est pas mauvais de connaître quelques notions de géométrie algébrique et de savoir , par exemple, ce que sont les points à l'infini que l'on adjoint à une courbe algébrique d'un plan affine.

● Le problème de la désaffection des candidats pour la géométrie devient d'année en année plus préoccupant. L'essentiel est, dans ce domaine, d'avoir une idée synthétique et concrète des divers aspects de la géométrie et de savoir les utiliser simultanément. Ces aspects sont essentiellement les suivants :

1) Etude des endomorphismes et automorphismes de la structure géométrique étudiée (bases privilégiées, sous-espaces invariants, etc.) ;

2) Etude du groupe de ces automorphismes comme groupe opérant sur un ensemble (le groupe orthogonal opère simplement et transitivement sur les bases orthonormales, etc.) ;

3) Etude de ce groupe comme groupe abstrait (générateurs, sous-groupes, groupes quotient, centre, groupe dérivé, simplicité, parfois cardinal) ou comme groupe topologique (connexité...) ;

4) Etude du groupe de matrices associé (réduction, calcul par blocs, reconnaissance des matrices du groupe). Il est utile d'avoir perçu la plupart des relations matricielles comme des systèmes d'identités polynomiales (en les coefficients), ce qui sert, notamment, lorsqu'on veut remplacer le corps de base par un anneau quelconque.

D'autre part il faut savoir illustrer ces théories par de petits problèmes classiques : isométries laissant stable un polyèdre régulier, géométrie du triangle, théorème de Pascal, lieu des points d'où l'on voit un segment sous un angle donné, condition pour que quatre points de $\mathbb{C}$ soient cocycliques, etc.

III.3.2. REMARQUES PARTICULIERES SUR CERTAINS SUJETS D'ALGEBRE ET DE GEOMETRIE

● **Nombres premiers.** Cette leçon doit comporter quelques résultats non élémentaires. Par exemple : nombres de Mersenne et de Fermat, nombres premiers réductibles dans l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$, étude des carrés de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, tout entier est somme de quatre carrés, etc.

- **Polynômes.** Recommandons aux candidats de :

— Utiliser la factorialité des anneaux de polynômes, par exemple pour calculer un déterminant de Vandermonde.

— Ne pas confondre l'irréductibilité d'un polynôme en une variable et son absence de racines.

— Dans le cas réel ou complexe, savoir placer les racines d'un polynôme et montrer à quoi cela sert. Savoir résoudre lucidement une équation de degré trois ou quatre.

— Ne pas avoir peur du résultat, et utiliser les fonctions symétriques élémentaires (par exemple pour l'étude des entiers algébriques).

- **Groupes abstraits.** Une majorité de candidats ne savent pas définir correctement la signature d'une permutation sur un ensemble fini E, indépendamment de telle ou telle identification de E à $\{1, 2, ..., n.\}$

Dans la leçon «sous-groupes, groupes quotients», on peut avantageusement passer sous silence la question de l'équivalence des diverses définitions d'un sous-groupe, d'une loi quotient et d'une relation compatible, pour pouvoir illustrer ces concepts, à l'aide notamment de la théorie de Galois, ou bien à l'aide des groupes classiques de la géométrie (cf. ci-dessus).

- **Algèbre linéaire et multilinéaire.** La leçon sur les sous-espaces vectoriels met rarement en évidence le point délicat que constitue l'étude de la dimension des sous-espaces : cette question, ainsi que celle des supplémentaires, gagnerait à une évocation du cas des modules, par exemple des groupes abéliens. Par ailleurs, il pourrait être bon de compléter cette leçon en donnant des informations :

— sur les grassmaniennes et leurs paramétrages ;
— sur des problèmes topologiques (sous-espaces denses, conditions de finitude) ;
— sur le calcul homologique.

La notion de transposition est mal assimilée ; il est dommage que la question du rang d'une application transposée se réduise à une manipulation aveugle de «mineurs extraits».

A une exception près, les candidats veulent ignorer l'emploi du produit tensoriel, ce qui nuit peu aux leçons sur la complexification, mais davantage aux leçons sur les fonctions multilinéaires : celles-ci ne devraient pas consister en la juxtaposition d'une autre sur les formes bilinéaires symétriques.

Même correctes mathématiquement, les leçons sur les systèmes d'équations linéaires ont été souvent jugées mauvaises, car les candidats n'avaient aucun souci des méthodes pratiques de résolution (certains classent sous cette rubrique les règles de Cramer !). De plus, ils ne songeaient pas, ou, lorsqu'ils y songeaient, ils éprouvaient bien des difficultés à présenter un problème linéaire, à en soupeser la solution par des raisonnements dimensionnels, puis à trouver une base adéquate pour sa mise en équations.

La réduction des endomorphismes réels, ou des matrices orthogonales, est très régulièrement ignorée, ou abandonnée, à mi-chemin, dans les limites du complexifié. Le jury souhaiterait même qu'on lui explique la décomposition d'un endomorphisme en somme d'un diagonalisable et d'un nilpotent commutant, dans le cas complexe, voire la décomposition analogue dans le cas réel.

- **Notion d'angle.** Cette leçon est devenue prétexte à une étude sans intérêt sur les couples de vecteurs, à l'issue de laquelle le candidat ne peut prouver que «la somme des angles d'un triangle est de cent quatre vingt degrés».

- **Barycentre.** Dans cette leçon, les rappels sur l'axiomatique des espaces affines doivent se réduire au strict minimum, et le formalisme doit être suffisamment maniable pour rendre limpide le calcul barycentrique (formule d'associativité notamment) : on peut suggérer de se ramener, d'une façon ou d'une autre, au calcul vectoriel.

Sur ce sujet, comme sur beaucoup de ceux qui ne sont pas évoqués ici, le lecteur pourra consulter utilement le rapport sur le concours de 1973.

III.3.3. LISTE DES SUJETS D'ALGEBRE ET DE GEOMETRIE

1. *Ensembles dénombrables.*
2. *Analyse combinatoire. Applications.*
3. *Relations d'ordre. Exemples. Applications.*
4. *Structures algébriques quotients. Exemples.*
5. *Sous-groupes. Groupe quotient. Exemples. Applications.*
6. *Exemples de groupes. (La théorie des groupes est supposée connue).*
7. *Groupes cycliques.*
8. *Groupe symétrique.*
9. *Systèmes de générateurs d'un groupe. Exemples.*
10. *Groupe opérant sur un ensemble. Exemples. Applications.*
11. *Idéaux d'un anneau. Exemples. Applications.*
12. *Anneauxpprincipaux. Exemples.*
13. *Divisibilité dans un anneau intègre. Exemples.*
14. *Anneaux commutatifs intègres : corps des fractions.*
15. *Anneau des classes résiduelles modulo n.*
16. *Nombres premiers.*
17. *Numération ; bases. Représentation (décimale) d'un réel.*
18. *Corps, sous-corps, corps , corps premier, caractéristique. Exemples.*
19. *Corps des nombres complexes.*
20. *Algèbres sur un corps commutatif. Exemples.*
21. *Polynômes à une indéterminée.*

22. *Polynômes à plusieurs indéterminées. Dérivation.*
23. *Formule de Taylor pour un polynôme. Applications.*
24. *Divisions dans une algèbre de polynômes sur un corps commutatif. Applications.*
25. *Divisibilité dans une algèbre de polynômes sur un corps commutatif.*
26. *Racines d'un polynôme ; multiplicité. Exemples.*
27. *Fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Décomposition. (La théorie du corps des fractions d'un anneau intègre est supposée connue).*
28. *Polynômes symétriques.*
29. *Résultant de deux polynômes. Elimination.*
30. *Espaces vectoriels : bases.*
31. *Sous-espaces d'un espace vectoriel.*
32. *Notion de rang en algèbre linéaire. Applications.*
33. *Dualité en algèbre linéaire. Applications.*
34. *Applications multilinéaires. Exemples.*
35. *Déterminant d'un endomorphisme et déterminant d'une matrice carrée. Propriétés.*
36. *Applications des déterminants.*
37. *Systèmes d'équations linéaires.*
38. *Complexification d'un espace vectoriel réel, d'une application linéaire. Applications.*
39. *Polynôme minimal d'un endomorphisme. Applications.*
40. *Réduite de Jordan d'une matrice carrée sur un corps algébriquement clos.*
41. *Réduction d'un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.*
42. *Sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme. Applications.*
43. *Formes bilinéaires en dimension finie. Applications.*
44. *Formes quadratiques. Conjugaison. Noyau. Eléments isotropes.*
45. *Vecteurs conjugués par rapport à une forme quadratique. Décompositions en carrés.*
46. *Groupe orthogonal. Matrices orthogonales (réelles) ; réduction.*
47. *Groupe unitaire. Matrices unitaires ; réduction.*
48. *Relation entre espace vectoriel hermitien et espace vectoriel euclidien. Applications.*
49. *Dualité dans les espaces euclidiens. Adjoint d'un endomorphisme. Endomorphismes symétriques. Réduction.*
50. *Dualité dans les espaces hermitiens. Adjoint d'un endomorphisme. Endomorphismes auto-adjoints. Réduction.*
51. *Groupe des rotations du plan euclidien. Angle de deux vecteurs non nuls. Angle de deux droites.*

52. *Espace euclidien orienté de dimension 3 : produit mixte, produit vectoriel. Applications.*
53. *Espaces affines. Applications affines. Sous-espaces affines. Repères affines.*
54. *Etudes d'intersections de variétés linéaires affines. Parallélisme. Projecteurs affines.*
55. *Groupe affine (dimension finie).*
56. *Barycentres. Applications.*
57. *Convexité dans les espaces affines réels. Applications.*
58. *Projection orthogonale dans un espace affine euclidien. Problèmes d'angles et de distances.*
59. *Isométries de l'espace affine euclidien de dimension n. Déplacements. Antidéplacements.*
60. *Isométries de l'espace affine euclidien de dimension 2 et 3. Formes réduites.*
61. *Exemples de groupes d'isométries laissant globalement stable une partie de l'espace affine euclidien de dimension 2 ou 3.*
62. *Similitudes planes directes et indirectes. Formes réduites. Groupe des similitudes.*
63. *Groupe circulaire du plan.*
64. *Espaces projectifs. Sous-espaces projectifs ; intersection. Repères projectifs.*
65. *Dualité dans les espaces projectifs.*
66. *Droite projective. Homographies ; involutions.*
67. *Liaison entre géométrie projective et géométrie affine. Eléments à l'infini.*
68. *Torseurs.*
69. *Sphères orthogonales.*
70. *Pôles et polaires.*
71. *Quadriques dans un espace projectif de dimension n.*
72. *Propriétés projectives des coniques non dégénérées.*
73. *Propriétés affines des coniques ; liaison avec la géométrie projective.*
74. *Propriétés métriques des coniques ; foyers et directrices.*
75. *Faisceaux linéaires ponctuels de coniques.*
76. *Eléments de symétrie d'une quadrique.*

IV- ÉPREUVES ORALES

CANDIDATES

IV.1 – REMARQUES GENERALES

Le jury a pu constater, avec satisfaction, le souci de nombreuses candidates de tenir compte des suggestions et de suivre les conseils formulés à leur intention dans les rapports des années précédentes. Les rappels qui suivent nous offrent l'occasion de les compléter, à l'intention des candidats au prochain concours.

Copier hâtivement, pendant trois heures de préparation, quelques pages de manuels ne constitue pas le moyen le plus efficace de satisfaire un jury plus sensible à l'esprit de synthèse et à l'effort de réflexion qu'à la récitation, trop souvent approximative d'ouvrages classiques.

Proposer, selon les recommandations d'usage, deux ou trois sujets d'exposés ne saurait impliquer une ignorance totale des justifications des autres parties du plan. Le choix du candidat ne doit pas non plus consister à écarter ou à éviter les démonstrations délicates de théorèmes importants. Un trop grand souci de sécurité ne manque pas, à juste titre, d'inquiéter le jury quant aux raisons d'une telle attitude.

Il appartient au candidat de décider du niveau auquel il situera le niveau de son exposé. Il est inadmissible de traiter une leçon intitulée «Critères de convergence des suites numériques», au niveau d'une classe terminale C ou D ; mais dans un exposé concernant l'Intégration, il est préférable d'adopter le point de vue de Riemann, si l'on craint de ne pas dominer suffisamment celui de Lebesgue. Il est dangereux d'improviser et vain de tenter d'élaborer un plan à partir d'idées mal assimilées.

Un candidat ne doit pas se fier aveuglément à un ouvrage. Il doit justifier, voire défendre, son point de vue et non celui d'un auteur ou d'un manuel.

Enfin, bien qu'il sache que la plupart des candidats ne peuvent se réclamer d'une longue pratique de l'enseignement, le jury déplore que certains d'entre eux rendent sa tâche malaisée par un comportement et une présentation matérielle difficilement tolérable : écriture illisible, balbutiements, phrases inachevées – tous défauts qui, dans un concours de recrutement de professeurs, pourraient, sans son extrême indulgence, être considérés comme rédhibitoires.

IV.2 – EPREUVE D'ANALYSE, TRIGONOMETRIE, MECANIQUE

IV.2.1. OBSERVATIONS GENERALES

Le niveau moyen des leçons d'analyse est sensiblement plus élevé que celui de l'an dernier. Ce progrès n'est pas étranger à la vitalité des Ecoles et de certains centres

qui assurent la préparation au concours avec beaucoup d'efficacité. Les échecs de certains professeurs en exercice dont les efforts sont souvent méritoires semblent généralement imputables à leur isolement et à leur difficulté de bénéficier du soutien et des conseils des animateurs de tels centres.

Les plans proposés sont, dans leur ensemble, acceptables. Certains sont excellents. A ce stade de l'épreuve les candidats qui se sont astreints à une préparation méthodique évitent manifestement d'improviser pour présenter avec assurance un plan retrouvé et soigneusement mis au point durant les heures qui précèdent l'épreuve. La crainte d'un début de «bachotage» conduit progressivement le jury à se montrer plus exigeant sur la qualité de l'exposé ainsi que sur celle des réponses aux questions posées.

L'exposé est trop souvent décevant. Parmi les quelques 170 exposés, moins de quarante ont été jugés satisfaisants. Trop de démonstrations sont récitées sans souci d'en dégager les articulations essentielles ; dans ces conditions, toute demande de précisions du jury prend le candidat au dépourvu et le met généralement dans l'impossibilité d'achever son exposé.

Rappelons que tout candidat doit être capable :

– de définir avec précision les termes qu'il utilise ;

– de donner une idée des démonstrations de tous les énoncés qu'il mentionne et de justifier l'ordre suivant lequel ils se succèdent. Un plan dans lequel certains énoncés sont qualifiés abusivement de corollaires et certaines applications ne sont pas à leurs places est toujours de très mauvaise augure.

Notons une nette tendance à situer la leçon à un niveau sensiblement plus élevé que celui du programme d'oral et souvent très proche de celui du programme d'écrit : cette attitude comporte beaucoup de risques si l'on ne dispose pas de connaissances suffisamment précises pour rester à un tel niveau.

Cette mise en garde ne concerne pas certaines leçons «élémentaires» (séries numériques, développements limités...). Comme l'indique le dernier rapport, ces leçons doivent comporter des exemples d'un intérêt certain. Elles ne doivent pas consister en une sèche énumération d'énoncés triviaux assortis d'exemples d'une banalité affligeante.

Les techniques de l'analyse au sens classique du terme (majoration, minoration, découpage d'un réel strictement positif ϵ) sont l'occasion de nombreuses maladresses qui dénotent un manque évident d'entraînement dans ce domaine. Le jury déplore aussi que la théorie des fonctions analytiques d'une variable réelle soit trop souvent négligée pour ne pas dire ignorée, même par des candidats dont le niveau est honorable.

Les leçons de Géométrie différentielle sont, en général, dédaignées. Pourtant, elles ne paraissent guère plus délicates que d'autres et peuvent être assorties d'exemples intéressants. En tout état de cause, certaines leçons («fonctions implicites», «problèmes d'extremums»...) doivent comporter des interprétations géométriques.

VI.2.2. REMARQUES PARTICULIERES SUR CERTAINS SUJETS D'ANALYSE

— **Théorie de l'intégration.** Si l'on tente de présenter la théorie de Lebesgue, il convient d'aller jusqu'aux théorèmes de passage à la limite inclusivement. Bien entendu un exposé détaillé de l'intégrale de Riemann peut parfaitement convenir.

— **Primitives et intégrales.** Il est abusif de limiter l'étude des primitives au cas des fonctions continues.

— **Suites, séries.** Ces leçons comportant peu de résultats théoriques, le jury souhaite un plan construit autour de quelques exemples bien choisis, susceptibles d'illustrer et de mettre en valeur les critères essentiels.

— **Suites de Cauchy ; exemples et applications.** Outre les parties purement topologiques, le plan doit mentionner de façon explicite les applications à l'analyse classique.

— **Limites monotones.** Ne pas omettre de mentionner certains critères de comparaison concernant séries et intégrales.

— **Développements limités.** Rappelons qu'il existe des développements limités à plusieurs variables.

— **Etude sur des exemples de méthodes de résolution d'équations différentielles.** Il est suggéré de choisir deux ou trois types classiques (variables séparées, homogènes,...) que l'on étudie soigneusement, éventuellement sur des exemples. Il convient, après avoir précisé le sens du mot solution, de dégager, sans omission, toutes les solutions de l'équation considérée.

IV.2.3. REPARTITION DES NOTES (sur 80)

] 0, 10]	25	] 50, 60]	25
] 10, 20]	29	] 60, 70]	12
] 20, 30]	22	] 70, 80]	5
] 30, 40]	32	Absences	2
] 40, 50]	22		

IV.2.4. LISTE DES SUJETS D'ANALYSE

1. *Espaces métriques compacts, espaces métriques complets.*
2. *Exemples d'espaces compacts.*
3. *Application à l'analyse de la notion de compacité.*
4. *Suites de Cauchy : exemples et applications.*
5. *Espaces homéomorphes : exemples et contre-exemples.*
6. *Connexité.*
7. *Le corps des nombres réels : une construction et les propriétés fondamentales.*

8. *Caractérisations de $\mathbb{R}$*
9. *Etude à partir d'exemples des critères de convergence des suites numériques.*
10. *Approximation des nombres réels.*
11. *Propriétés topologiques de $\mathbb{R}^n$.*
12. *Utilisation des suites en topologie.*
13. *Distances équivalentes, normes équivalentes.*
14. *Applications linéaires continues d'un espace vectoriel normé dans un autre, exemples.*
15. *Exemples, tirés de l'analyse, d'espaces vectoriels normés.*
16. *Le nombre π.*
17. *Applications du théorème de la limite monotone.*
18. *Parties connexes de $\mathbb{R}$ et applications continues entre celles-ci.*
19. *Fonctions réciproques.*
20. *La fonction exponentielle réelle et ses diverses généralisations.*
21. *Logarithme complexe.*
22. *L'exponentielle complexe.*
23. *Fonctions circulaires.*
24. *Inégalités de convexité.*
25. *Fonctions convexes.*
26. *Fonctions monotones.*
27. *Utilisation des développements limités.*
28. *Séries numériques.*
29. *Interversion des limites en analyse.*
30. *Suites et séries de fonctions.*
31. *Différentes notions de convergence des suites de fonctions.*
32. *Topologie sur des espaces de fonctions.*
33. *Une théorie de l'intégration.*
34. *Primitives et intégrales.*
35. *Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre, exemples.*
36. *Comparaison et liaison entre la théorie des séries et la théorie des intégrales impropres.*
37. *Théorème du point fixe et applications.*
38. *Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.*
39. *Etudier sur des exemples des méthodes de résolution d'équations différentielles du premier ou du second ordre (la théorie des systèmes différentiels linéaires à coefficients constants ne sera pas développée).*
40. *Les différentes formules de Taylor.*
41. *Théorème des accroissements finis et applications.*

42. *Applications géométriques de la formule de Taylor.*
43. *Etude locale d'une surface.*
44. *Problèmes d'extrêmum.*
45. *Théorème des fonctions implicites et applications.*
46. *Applications géométriques du théorème des fonctions implicites.*
47. *Propriétés métriques des courbes planes.*
48. *Propriétés métriques des courbes gauches.*
49. *Mouvement à accélération centrale.*
50. *Prolongement des fonctions.*

IV.3 – EPREUVE D'ALGEBRE, GEOMETRIE

IV.3.1. OBSERVATIONS GENERALES

Il importe que le plan proposé contienne les définitions et les énoncés précis des principaux théorèmes de la leçon. Sans être trop détaillé, il doit, néanmoins, faire ressortir les idées essentielles et comporter des applications intéressantes susceptibles de les mettre en valeur.

Sans y attacher une importance excessive, le jury est sensible à une présentation matérielle décente : débit normal, écriture lisible, disposition claire. Il est regrettable que certains candidats semblent ignorer les exigences d'une épreuve orale au point d'être inaudibles ou de ne pas daigner achever leurs phrases.

Les deux ou trois points proposés comme sujets d'exposés doivent être indiqués avec précision et concerner certaines idées ou applications importantes, soulignées dans le plan. Il n'est pas raisonnable de ne proposer que des démonstrations de résultats évidents ou d'importance mineure. En revanche, le jury est toujours disposé à accueillir avec intérêt et satisfaction toute présentation d'exercices judicieusement choisis.

L'exposé doit être irréprochable. Le candidat doit dégager avec netteté les articulations de sa démonstration et les résultats dont elle est tributaire – résultats pour chacun desquels il est prudent de connaître, dans ses grandes lignes, une justification.

Certaines leçons ternes et ennuyeuses témoignent, de la part de leurs auteurs, d'une recherche trop systématique de sécurité. Un apport d'exemples ou d'exercices intéressants pourrait, à défaut d'idées originales, les rendre plus vivantes.

IV.3.2. REMARQUES PARTICULIERES SUR LES SUJETS D'ALGEBRE ET DE GEOMETRIE.

– **Analyse combinatoire.** Le jury attend des définitions précises, utilisant exclusivement les notions d'ensemble et de fonction, et des applications plus originales que celle qui consiste à étudier les «combinaisons avec répétitions» ; utilisation du principe d'inclusion-exclusion, applications aux probabilités, évaluations asymptotiques.

– **Numération, anneau des décimaux.** Il est difficile d'obtenir une démonstration satisfaisante de la périodicité du développement propre d'un rationnel. Le jury souhaite une justification du fait que l'anneau des décimaux est principal ainsi qu'une généralisation de sa construction quand on remplace $\mathbb{Z}$ par un anneau commutatif et l'ensemble $\{2^{\alpha} 5^{\beta}\}$ par un ensemble multiplicatif.

– **Corps.** Le candidat qui présente un exposé sur les quaternions pourrait épargner au jury de suivre une laborieuse démonstration de l'associativité. Celle-ci pourrait être remplacée par une interprétation géométrique. Il est important de pouvoir signaler l'existence de corps finis.

– **Systèmes d'équations linéaires.** Il faut indiquer et justifier les théorèmes relatifs aux matrices principales et aux matrices «bordantes» et proposer des méthodes de résolution autres que celle qui conduit aux formules de Cramer..

Espaces projectifs ; homographies. Sur ces sujets, les leçons sont généralement satisfaisantes lorsqu'il s'agit d'un corps commutatif $\mathbb{K}$ quelconque. Notons toutefois qu'il n'existe pas d'hyperplan à l'infini canonique dans un espace projectif. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il importe d'insister, notamment dans le cas de la droite, sur les homographies qui n'admettent pas de points invariants.

Groupes opérant sur un ensemble. Les exemples proposés ne sont pas assez nombreux et manquent d'intérêt. Des emprunts à la géométrie rendraient cette leçon plus vivante.

– **Formes quadratiques.** Certaines définitions sont mal comprises – telle celle des sous-espaces isotropes – Certains résultats importants ne sont pas mentionnés (f non dégénérée $\Rightarrow$ $F = F^{\circ\circ}$, ...). Sous-espaces vectorielles. Sous variétés affines. Il convient de ne pas omettre certains résultats intéressants, relatifs aux dimensions (relation de Grassmann, ...).

Endomorphismes. Le jury attend une définition satisfaisante du polynôme caractéristique et souhaite que la présentation du polynôme minimal ne soit pas restreinte au cas où le corps considéré est algébriquement clos.

IV.3.3. REPARTITION DES NOTES (sur 80)

] 0, 10]	5	] 30, 40]	28	] 60, 70]	21
] 10, 20]	22	] 40, 50]	35	] 70, 80]	2
] 20, 30]	26	] 50, 60]	35	Absence	1

IV.3.4. LISTE DES SUJETS D'ALGEBRE

1. *Applications d'un ensemble fini dans lui-même.*
2. *Analyse combinatoire.*
3. *Relation d'équivalence compatible avec une structure algébrique.*
4. *Structures algébriques quotients.*
5. *Groupes finis ; exemples.*
6. *Groupe symétrique.*
7. *Sous-groupes distingués ; exemples.*
8. *Groupes opérant sur un ensemble ; applications.*
9. *Structure d'anneau ; exemples.*
10. *Anneaux quotients de $\mathbb{Z}$.*
11. *Idéaux d'un anneau commutatif.*
12. *Anneaux principaux.*
13. *Divisibilité dans les anneaux intègres.*
14. *Structure de corps ; caractéristique. Exemples.*
15. *Corps des nombres complexes.*
16. *Numération, bases, critères de divisibilité. Anneau des nombres décimaux.*
17. *Anneau des polynômes à une indéterminée sur un corps commutatif : factorisation et applications.*
18. *Anneau des polynômes à une ou plusieurs indéterminées sur un corps commutatif.*
19. *Polynômes à une indéterminée sur un corps commutatif ; racines.*
20. *Polynômes symétriques à plusieurs indéterminées.*
21. *Polynômes à une indéterminée sur un corps commutatif ; division euclidienne, congruences.*
22. *Divisibilité dans les anneaux de polynômes.*
23. *Division des polynômes suivant les puissances croissantes ; applications.*
24. *Corps des fractions rationnelles à une indéterminée.*
25. *Applications linéaires ; espaces vectoriels quotients.*
26. *Bases et dimension dans les espaces vectoriels ; applications*
27. *Sous-espaces d'un espace vectoriel.*
28. *Le rang en algèbre linéaire.*
29. *Groupe linéaire.*
30. *Dualité dans les espaces vectoriels.*
31. *Formes multilinéaires alternées ; exemples.*
32. *Formes bilinéaires sur un espace vectoriel de dimension finie.*
33. *Déterminant d'un endomorphisme et déterminant d'une matrice carrée.*

34. *Applications des déterminants.*
35. *Résolution des systèmes d'équations linéaires.*
36. *Valeurs propres, sous-espaces propres.*
37. *Sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme ; applications.*
38. *Expressions matricielles réduites d'un endomorphisme d'espace vectoriel de de dimension finie.*
39. *Polynôme minimal d'un endomorphisme.*
40. *Formes quadratiques. Décomposition en carrés. Cas réel.*
41. *Réduction d'une forme quadratique.*
42. *Espaces vectoriels euclidiens.*
43. *Groupe orthogonal en dimension finie.*
44. *Espaces vectoriels hermitiens.*
45. *Groupe unitaire en dimension finie.*
46. *Dualité dans les espaces euclidiens. Adjoint d'un endomorphisme. Endomorphismes symétriques. Réduction.*
47. *Dualité dans les espaces hermitiens. Adjoint d'un endomorphisme. Endomorphismes auto-adjoints. Réduction.*
48. *Espace affine de dimension finie. Barycentre. Groupe affine.*
49. *Liaison entre géométrie affine et géométrie projective.*
50. *Espaces projectifs. Sous-espaces projectifs. Intersection. Repères projectifs.*
51. *Groupe projectif dans l'espace de dimension n.*
52. *Dualité dans les espaces projectifs.*
53. *Groupe projectif d'une droite projective complexe.*
54. *Homographies d'un plan projectif réel dans lui-même.*
55. *Homographie d'une droite projective réelle sur elle-même.*
56. *Homographies d'un plan projectif dans son dual.*
57. *Groupe affine en dimension finie.*
58. *Sous-groupes et groupes quotients du groupe affine d'un espace affine de dimension finie.*
59. *Variétés affines d'un espace affine de dimension finie.*
60. *Isométries dans un plan affine euclidien.*
61. *Isométries dans l'espace affine euclidien de dimension 3.*
62. *Isométries dans l'espace affine euclidien de dimension finie.*
63. *Isométries d'un plan affine euclidien laissant globalement invariante une figure donnée.*
64. *Isométries d'un espace affine euclidien de dimension trois laissant globalement invariante une figure donnée.*
65. *Espace euclidien orienté de dimension 3 ; produit mixte ; produit vectoriel ; applications.*

66. *Projection orthogonale dans un espace affine euclidien ; problèmes d'angles et distances.*
67. *Similitudes directes et inverses dans un plan affine euclidien.*
68. *Similitudes dans un espace affine euclidien de dimension finie.*
69. *Pôles et polaires en géométrie plane.*
70. *Pôles et polaires en dimension trois.*
71. *Propriétés projectives des coniques ; dualité.*
72. *Coniques dans le plan projectif réel.*
73. *Propriétés affines des coniques.*
74. *Coniques dans le plan affine réel.*
75. *Propriétés métriques des coniques ; liaison avec la géométrie projective.*
76. *Propriétés métriques des coniques. Foyers.*
77. *Faisceaux linéaires ponctuels de coniques.*
78. *Inversion plane, groupe circulaire.*

V – BIBLIOTHEQUE DE L'AGREGATION

Les candidats étaient autorisés à apporter tout livre imprimé vendu dans le commerce (à l'exclusion des textes dactylographiés ou ronéotypés), et dépourvu de notes manuscrites.

En outre, ils pouvaient consulter sur place les ouvrages suivants :

ARTIN	: – Algèbre géométrique (Gauthier-Villars)
BASS	: – Cours de Mathématiques (Masson)
BERGER-GOSTIAUX	: – Géométrie différentielle (Colin)
BLANCHARD	: – Corps non commutatifs (Presses Universitaires)
BOURBAKI	: Les tomes suivants : – Théorie des ensembles – Algèbre – Fonction d'une variable réelle – Topologie générale – Espaces vectoriels topologiques – Intégration
BROUSSE	: – Mécanique (Colin)
CABANNES H.	: – Cours de mécanique générale (Dunod)
CAGNAC	: – Nouveau cours de mathématiques spéciales (Masson) – Cours de Mathématiques supérieures (Masson)
CAGNAC et THIBERGE	: – Géométrie. Classes terminales C (Masson) – Arithmétique ; Algèbre – Classes terminales (Masson)

CARTAN	: – Fonctions analytiques (Hermann) – Formes différentielles (Hermann) – Calcul différentiel (Hermann)
CASANOVA	: – Cours de mathématiques spéciales (Belin)
CHAMBADAL et OVAERT	: – Cours de mathématiques (Gauthier Villars) (tome I, tome II, algèbre ; tome II, analyse) – Algèbre linéaire et algèbre tensorielle (Dunod)
CHAZEL	: – Traité de mathématiques (Hachette)
CHOQUET	: – Cours d'analyse (Masson) – L'enseignement de la géométrie (Hermann)
CONDAMINE et VISSIO	: – Mathématiques : Terminales C et T (Delagrave)
COUTY	: – Analyse (Colin)
DIEUDONNE	: – Algèbre linéaire et géométrie élémentaire (Hermann) – Sur les groupes classiques (Hermann) – Calcul infinitésimal (Hermann) – Eléments d'analyse (Gauthier Villars) (tomes 1 et 2)
DIXMIER	: – Fondements de l'analyse (Hermann) – Analyse M.P. (Gauthier Villars)
DONEDDU	: – Arithmétique générale (Dunod) – Cours de mathématiques spéciales (Dunod)
DUBREIL (M. et Mme)	: – Leçons d'algèbre moderne (Dunod)
DUBUC	: – Géométrie plane (Presses Universitaires)
EXBRAYAT et MAZET	: – Algèbre, Analyse, Topologie
FRENKEL	: – Algèbre et Géométrie – Géométrie pour l'élève professeur (Hermann)
GODEMENT	: – Algèbre (Hermann)
GOURSA	: – Cours d'analyse (Gauthier Villars)
GOUYON	: – Précis de Mathématiques spéciales (Vuibert)
G.H. HARDY	: – A course of Pure Mathématics (Cambridge University Press)
HOCQUENGHEM et JAFFARD	: – Mathématiques (Masson)
KREE	: – Introduction aux Mathématiques appliquées (Dunod)
KRİVINE	: – Théorie axiomatique des ensembles (Presses universitaires)
LANG	: – Introduction aux variétés différentiables (traduction française) – Algebra – Linear Algebra
LEFORT	: – Mathématiques pour les sciences biologiques et agronomiques (Colin)

MAC-LANE et BIRKHOFF : — Algèbre, Structures fondamentales (traduction française)
— Les grands théorèmes (traduction française)

Mme LELONG-FERRAND et ARNAUDIES : — Tomes 1, 2, 4 (Dunod)

Mme LELONG-FERRAND : — Géométrie différentielle (Masson)

MAILLARD : — Classes terminales C (Hachette)

MALLIAVIN : — Géométrie différentielle intrinsèque (Hermann)

MARTIN P. : — Géométrie (Colin)

PISOT et ZAMANSKY : — Mathématiques générales (Dunod)
— Algèbre et algèbre linéaire (Dunod)

QUEYSANNE : — Algèbre (Colin)

RIESZ et NAGY : — Leçons d'Analyse fonctionnelle (Gauthier Villars)

RUDIN : — Réal and complex Analysis (Mac Granhill)

SAMUEL : — Théorie algébrique des nombres (Hermann)

SCHWARTZ : — Cours d'analyse (Hermann)

SERRE : — Cours d'arithmétique (Presses universitaires)

VALIRON : — Cours d'analyse (Masson)

ZAMANSKY : — Algèbre et analyse moderne (Dunod)

ZISMAN : — Topologie algébrique (Colin)