Probabilités et Statistiques

Propriétés, Notations, Définitions, Rappels.

Dans la suite n, p, q ou q' désigneront des nombres entiers naturels non nuls.

1. Dans tout le problème les variables aléatoires (notées de manière abrégée v.a., on notera aussi v.a.r. pour des variables aléatoires réelles) sont définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, un espace probabilisé tel que si X est une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, il existe une v.a. X' de même loi que X et indépendante de X; on note alors $\mathbb{P}_X$ la loi du vecteur aléatoire X.

2. L'espérance d'une variable aléatoire réelle ou vectorielle Z est notée $\mathbb{E}Z$ lorsqu'elle peut être définie. On note L^p l'espace des classes de v.a.r. (presque sûrement égales) X définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et telles que $\mathbb{E}|X|^p < \infty$. Soient X, Y deux v.a.r. de carré intégrable, on définit leur covariance par $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. On définit aussi la variance de X par $\mathrm{Var}X = \mathrm{Cov}(X,X)$.

3. On note $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$ l'ensemble des parties boréliennes de $\mathbb{R}^p$.

4. On admettra qu'une loi P quelconque sur $\mathbb{R}^p$ est intérieurement régulière: pour tout borélien B de $\mathbb{R}^p$ et tout $\epsilon > 0$, il existe un compact K inclus dans B tel que $P(K) > P(B) - \epsilon$.

5. On rappelle l'énoncé du théorème de Fubini pour une fonction positive. Soit $(E_i, \mathcal{E}_i, m_i)$, $i = 1, 2$, un couple d'espaces mesurés, et soit f une fonction numérique positive et mesurable sur $(E_1 \times E_2, \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2)$, alors les applications

$$f_1 : x_1 \to \int_{E_2} f(x_1, x_2) m_2(dx_2), \qquad f_2 : x_2 \to \int_{E_1} f(x_1, x_2) m_1(dx_1)$$

sont mesurables et de plus

$$\int_{E_1 \times E_2} f dm_1 \otimes m_2 = \int_{E_1} f_1 dm_1 = \int_{E_2} f_2 dm_2$$

6. Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une fonction bornée, on note $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^p} |f(x)|$. Soit $C(\mathbb{R}^p)$ l'ensemble des fonctions numériques continues sur $\mathbb{R}^p$, on note $C_b(\mathbb{R}^p)$ le sous ensemble de $C(\mathbb{R}^p)$ formé des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}^p$. De plus $C^n(\mathbb{R}^p)$ (resp. $C_b^n(\mathbb{R}^p)$) désigne pour tout entier $n \geq 1$ le sous ensemble de $C(\mathbb{R}^p)$) (resp. de $C_b(\mathbb{R}^p)$) formé des fonctions dont toutes les dérivées partielles existent jusqu'à l'ordre n et sont dans $C(\mathbb{R}^p)$ (resp. $C_b(\mathbb{R}^p)$).

7. On admettra qu'un couple de variable aléatoires (X, Y) de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ est indépendant si et seulement si $\mathrm{Cov}(f(X), g(Y)) = 0$ pour toutes fonctions f et g de $C_b^1(\mathbb{R}^p)$ et $C_b^1(\mathbb{R}^q)$.

8. On note $\mathcal{M}(\mathbb{R}^p)$ l'ensemble des fonctions mesurables $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ et croissantes par rapport à chaque coordonnée, c'est à dire que pour tout $x \in \mathbb{R}^p$ et tout entier $j \in [1, p]$, l'application $f_{x,j} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante, où l'on a posé $f_{x,j}(t) = f(x_1, ..., x_{j-1}, t, x_{j+1}, ..., x_p)$ si $x = (x_1, ..., x_p)$.

9. Soient x et y deux vecteurs de $\mathbb{R}^p$, on note $x \geq y$ (resp. $x > y$) si $x_i \geq y_i$ (resp. $x_i > y_i$) pour tout entier $1 \leq i \leq p$. Rappelons que cet ordre n'est pas total.
10. On note $\mathcal{S}(\mathbb{R}^p)$ l'ensemble des fonctions indicatrices d'ensembles fermés de $\mathbb{R}^p$ (i.e. $f(x) = 1$ pour $x \in A$ et $f(x) = 0$ pour $x \notin A$, si A est fermé dans $\mathbb{R}^p$: on posera $f = \mathbb{1}_A$), ces fonctions sont dites simples sur $\mathbb{R}^p$. On note, de plus, $\mathcal{M}_c(\mathbb{R}^p) = C_b(\mathbb{R}^p) \cap \mathcal{M}(\mathbb{R}^p)$ et $\mathcal{M}_s(\mathbb{R}^p) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^p) \cap \mathcal{M}(\mathbb{R}^p)$.

Le vecteur aléatoire X de $\mathbb{R}^p$ est dit associé si pour tout couple de fonctions (f, g) de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^p)$,

$$\mathbb{E}(f^2(X) + g^2(X)) < \infty \Rightarrow \mathrm{Cov}(f(X), g(X)) \geq 0. \tag{1}$$

De façon plus générale, la suite de variables aléatoires réelles $X = (X_n)_{n \geq 0}$ est dite associée si, pour tout nombre entier p, le vecteur aléatoire $(X_0, ..., X_{p-1})$ de $\mathbb{R}^p$ est associé.

L'objet du problème est l'étude de telles suites. Les résultats prouvés dans les préliminaires sont utiles dans toute la suite. Les parties I et II sont essentiellement indépendantes, les résultats de la partie IV reposent sur ceux de la partie III.

Préliminaires.

1. Soient X et Y des variables aléatoires réelles de carré intégrable et positives.
a) Montrez que

$$\mathbb{E}XY = \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{P}(X > x, Y > y)dxdy.$$

b) En déduire que

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \int_0^\infty \int_0^\infty (\mathbb{P}(X > x, Y > y) - \mathbb{P}(X > x)\mathbb{P}(Y > y))dxdy.$$

2. Soient X et Y des variables aléatoires réelles quelconques de carré intégrable. Montrer l'identité suivante, dite de *Hoeffding*:

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (\mathbb{P}(X > x, Y > y) - \mathbb{P}(X > x)\mathbb{P}(Y > y))\, dxdy.$$

3. Soient $f, g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables; on note $f << g$ si $g - f$ et $g + f$ sont dans $\mathcal{M}(\mathbb{R}^p)$.
Soit X un vecteur associé de $\mathbb{R}^p$. Soient f_1, f_2, g_1 et g_2 des fonctions mesurables telles que $f_1(X), f_2(X), g_1(X)$ et $g_2(X)$ soient de carré intégrable; montrez que si $f_1 << f_2$ et $g_1 << g_2$ alors

$$|\mathrm{Cov}(f_1(X), g_1(X))| \leq \mathrm{Cov}(f_2(X), g_2(X)).$$

4. Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles associées de carré intégrable et soient f et g dans $C_b^1(\mathbb{R})$. Montrez que

$$|\mathrm{Cov}(f(X),g(Y)))| \leq \|f'\|_\infty \|g'\|_\infty \mathrm{Cov}(X,Y).$$

5. Plus généralement, soient $X = (X_1, ..., X_p)$ et $Y = (Y_1, ..., Y_q)$ des vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ dont les composantes sont de carré intégrable et tels que le vecteur (X, Y) soit associé. Soient f et g deux fonctions numériques dans $C_b^1(\mathbb{R}^p)$ et $C_b^1(\mathbb{R}^q)$ respectivement. Montrez qu'il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de f et de g telle que

$$|\mathrm{Cov}(f(X),g(Y)))| \leq C \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \mathrm{Cov}(X_i, Y_j).$$

Partie I.
Association et indépendance

1. Soit X une variable aléatoire réelle quelconque.
a) Soient f et g des fonctions mesurables telles que $f(X)$ et $g(X)$ soient des variables de carré intégrable. Soit X' une v.a.r. indépendante de X et de même loi que X, montrez que

$$\mathrm{Cov}(f(X),g(X)) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(f(X) - f(X'))(g(X) - g(X')).$$

b) Montrez que X est une variable aléatoire associée.

2. Soient $X \in \mathbb{R}^p$ et $Y \in \mathbb{R}^q$ des variables aléatoires vectorielles associées, indépendantes.
a) Soient f et g des éléments de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^{p+q})$. On suppose que $f(Z)$ et $g(Z)$ sont de carré intégrable. On pose $F(x) = \mathbb{E}(f(x,Y))$ et $G(x) = \mathbb{E}(g(x,Y))$. On note $Z = (X,Y)$, montrez que

$$\mathrm{Cov}(f(Z),g(Z)) = \int_{\mathbb{R}^p} \mathrm{Cov}(f(x,Y),g(x,Y))\mathbb{P}_X(dx) + \mathrm{Cov}(F(X),G(X)).$$

b) En déduire que le vecteur aléatoire (X,Y) est associé dans $\mathbb{R}^{p+q}$.

3. Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes; prouvez que $(X_1, ..., X_n)$ est un vecteur aléatoire associé.

On se propose de montrer que si les coordonnées d'un vecteur aléatoire associé sont non corrélées alors elles sont indépendantes.

4. Soient $X = (X_1, ..., X_p) \in \mathbb{R}^p$ et $Y = (Y_1, ..., Y_q) \in \mathbb{R}^q$ des variables aléatoires telles que la v.a. (X, Y) soit associée. On suppose que $\mathrm{Cov}(X_i, Y_j) = 0$ pour tout couple (i, j) d'entiers de $[1, p] \times [1, q]$. Prouvez que les v.a. X et Y sont indépendantes (on pourra utiliser la propriété 7).

5. Soit $X = (X_1, ..., X_p)$ une v.a. associée de $\mathbb{R}^p$. On suppose que $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$ pour tout couple (i, j) d'entiers distincts de $[1, p]$. Prouvez que les coordonnées de la v.a. X sont des v.a.r. indépendantes.

6. Donnez un exemple de vecteur aléatoire (X, Y) de $\mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ et dont les coordonnées ne sont pas indépendantes. Existe-t-il un vecteur aléatoire gaussien ou associé de $\mathbb{R}^2$ dont les coordonnées sont non corrélées et non indépendantes ?

Partie II.
Association et convergence en loi
A.

Soit X un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^p$. On se propose de montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes

(i) La relation (1) vaut pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{M}_c(\mathbb{R}^p)$.

(ii) La relation (1) vaut pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{M}_s(\mathbb{R}^p)$.

(iii) Le vecteur X de $\mathbb{R}^p$ est associé.

1. Soit $f = \mathbb{1}_A$ un élément quelconque de $\mathcal{M}_s(\mathbb{R}^p)$ on pose

$$f_n(x) = \int_{[0,1]^p} f(x + n^{-1}u)du.$$

a) Montrez que $(f_n)_{n \geq 1}$ est une suite de fonctions de $\mathcal{M}_c(\mathbb{R}^p)$, décroissante, et que cette suite de fonctions converge simplement vers f.
b) En déduire que (i) implique (ii).

2. Montrez que X est associé si et seulement si la relation (1) est satisfaite pour tous les couples (f, g) de fonctions croissantes indicatrices d'ensembles (on pourra utiliser l'identité de Hoeffding).

3. Soit $f = \mathbb{1}_A$ un élément de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^p)$ et K un compact inclus dans A. Montrez qu'il existe un fermé F tel que

$$K \subset F \subset A \qquad \text{et} \qquad \mathbb{1}_F \in \mathcal{M}_s(\mathbb{R}^p).$$

4. En utilisant la régularité intérieure de la loi $\mathbb{P}_X$ du vecteur X (propriété **4**), en déduire que (ii) implique (iii). Conclure.

B.

1. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles. On suppose que la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est limite de suites associées, c'est à dire qu'il existe des suites associées $(X_{K,n})_{n\geq 0}$, avec K décrivant $\mathbb{N}$, telles que pour tout entier p la suite de vecteurs $(X_{K,0}, ..., X_{K,p})$ converge en loi vers $(X_0, ..., X_p)$ lorsque K converge vers l'infini. Montrez qu'alors la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est encore associée.

2. Soit $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi; on suppose que $\mathbb{E}\xi_0 = 0$ et $\mathbb{E}\xi_0^2 = 1$. Soit, de plus, $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels telle que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty$.

a) Soit $X_{K,n} = \sum_{k=0}^{K} a_k \xi_{n-k}$. Montrez que pour tout entier $n \geq 0$, la suite $(X_{K,n})_{K\geq 0}$ converge dans L^2 vers une variable aléatoire X_n.

b) Montrez que si, de plus, $a_n \geq 0$ pour tout entier $n \geq 0$, alors la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ définie ci-dessus est associée.

Partie III.
Inégalités de moments

Soient $(Y_n)_{n\geq 0}$ une suite associée et stationnaire (i.e. pour tout couple (n, k) d'entiers positifs, les vecteurs $(Y_0, ..., Y_n)$ et $(Y_p, ..., Y_{n+p})$ ont la même loi). Soit T dans $C_b^1(\mathbb{R})$ telle que $\mathbb{E}T(Y_0) = 0$. On pose pour tout entier $n \geq 1$,

$$X_n = T(Y_n) \qquad \text{et} \qquad S_n = X_1 + ... + X_n.$$

Soit p un entier positif quelconque, on note aussi

$$M_{n,p} = \mathbb{E}S_n^p, \quad A_{n,p} = \sum_{1\leq i_1\leq ...\leq i_p\leq n} |\mathbb{E}X_{i_1}...X_{i_p}|, \quad \text{et} \quad \rho(k) = \sup\{\mathrm{Cov}(Y_0, Y_p); |p| \geq k\}.$$

1. Prouvez que $M_{n,p} \leq p! A_{n,p}$.

Soient $p \geq 2$ un entier, on note $c_{r,p}$ la borne supérieure des expressions

$$|\mathrm{Cov}(X_{i_1}...X_{i_m}, X_{i_{m+1}}...X_{i_p})|$$

lorsque l'entier m décrit l'intervalle $[1, p[$ et les indices $(i_1, ..., i_p)$ vérifient $1 \leq i_1 \leq ... \leq i_p$ et $i_{m+1} - i_m = r$.

2. Prouvez que

$$c_{r,p} \leq \frac{p^2}{4}\|T\|_\infty^{p-2}\|T'\|_\infty^2 \rho(r).$$

Pour tout entier positif $p \geq 2$, on pose

$$H_{n,p} = \sum_{r=0}^{n}(r+1)^{p-2}c_{r,p}.$$

3. Soit $p \geq 2$, prouvez l'inégalité

$$A_{n,p} \leq npH_{n,p} + \sum_{k=2}^{p-2} A_{n,k}A_{n,p-k}.$$

(on pourra considérer, pour chaque couple d'entiers $(m, r) \in [1, p[\times[0, n[$, l'ensemble $E_{m,r}$ des p-uplets d'entiers $1 \leq i_1 \leq ... \leq i_p \leq n$ tels que $i_{m+1} - i_m = r = \max_{1 \leq k < p}\{i_{k+1} - i_k\}$).

Le reste de cette partie consiste en deux applications de cette dernière inégalité.

4. Soit p un entier quelconque, on suppose que

$$C = \sum_{r=0}^{\infty}(r+1)^{p-2}\rho(r) < \infty.$$

Prouvez qu'il existe une constante C_p ne dépendant que de p et de C telle que

$$|M_{n,p}| \leq C_p \max\{n\|T\|_\infty^{p-2}\|T'\|_\infty^2, (n\|T'\|_\infty^2)^{p/2}\}.$$

5. a) On définit par récurrence la suite $(K_p)_{p \geq 0}$ par les relations $K_0 = 0, K_1 = 1$ et, si $p \geq 2$, par la relation de récurrence

$$K_p = \sum_{k=1}^{p-1} K_k K_{p-k}.$$

Prouvez qu'il existe une constante $K \geq 1$ telle que pour tout entier $p \geq 1$, $K_p \leq K^p$ (on montrera que le rayon de convergence de la série entière $K(x) = \sum_{p=0}^{\infty} K_p x^p$ est non nul, directement ou par le calcul de ses coefficients).

b) On définit par récurrence la suite $(L_p)_{p\geq 0}$ par les relations $L_0 = L_1 = 0, L_2 = 1$ et, si $p \geq 3$, par la relation de récurrence $L_p = 2 + \sum_{k=2}^{p-2} L_k L_{p-k}$.
Prouvez que pour tout entier $p \geq 2$, $L_p \leq K_p \leq K^p$.

6. On suppose à présent que la suite associée vérifie $\mathrm{Cov}(Y_0, Y_r) = \mathcal{O}(e^{-ar})$ pour une constante $a > 0$. On suppose de plus que $\|T\|_\infty = 1$ et $\|T'\|_\infty = \sigma$ et que l'entier n vérifie $n\sigma^2 \geq 1$.
a) Soit $p \geq 2$ un entier pair. Prouvez qu'il existe des constantes U et u strictement positives, et telles que $H_{n,p} \leq Uu^{p-1}(p-1)!\sigma^2$. Prouvez qu'il existe une constante $V > 0$ telle que pour tout entier pair $p \geq 2$:

$$M_{n,p} \leq (Vp^2\sigma\sqrt{n})^p.$$

b) En déduire qu'il existe des constantes L et M strictement positives, et telles que pour tout réel $t > 0$:

$$\mathbb{P}(|S_n| \geq t\sigma\sqrt{n}) \leq L\exp(-M\sqrt{t})$$

(on pourra prouver que $\mathbb{P}(|S_n| \geq t\sigma\sqrt{n}) \leq (Vp^2/t)^p$, pour tout nombre réel $t > 0$ et tout entier pair $p \geq 2$; on cherchera une bonne valeur de p pour conclure).

Partie IV.
Estimation fonctionnelle

Soit $(Y_n)_{n\geq 0}$ une suite associée et stationnaire. Soient $h \in \mathbb{R}_*^+, t \in \mathbb{R}$ arbitraires et $u \in C_b^1(\mathbb{R})$ une densité paire et à support compact sur $\mathbb{R}$, on pose

$$f_{n,h}(t) = \frac{1}{nh}\sum_{k=1}^{n} u\left(\frac{Y_k - t}{h}\right).$$

On suppose dans toute la suite que

(H) Pour tout entier $k \geq 1$, la variable aléatoire bidimensionnelle (Y_0, Y_k) admet une densité f_k et cette densité est uniformément bornée par une constante F (indépendante de k).

L'objet de cette partie est l'étude du comportement asymptotique de $f_{n,h}(t)$.
Soient t et $h > 0$ des réels fixés, on note

$$T(y) = \frac{1}{nh}\left(u\left(\frac{y-t}{h}\right) - \mathbb{E}u\left(\frac{Y_0 - t}{h}\right)\right)$$

utilisant les notations de la partie III on posera, par exemple, $S_{n,h} = f_{n,h}(t) - \mathbb{E}f_{n,h}(t)$, $M_{n,p} = \mathbb{E}S^p_{n,h}$, etc...

A.
Suites satisfaisant la condition (H)

1. Soit $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de v.a. gaussiennes $\mathcal{N}(0,1)$ équidistribuée et indépendantes. Ici, $(X_n)_{n\geq 0}$ désigne la suite stationnaire construite lors de la question **II-B-2** à l'aide de ces variables; si $a_0 \neq 0$, prouvez que la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ satisfait à la condition **(H)**.

Donnez une condition sur la fonction G et sur la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ pour que la suite $(Y_n)_{n\geq 0}$ définie par $Y_n = G(X_n)$ vérifie la condition **(H)** et soit associée.

B.
Inégalités de moments

1. Ici n, h et t sont fixés et satisfont à l'inégalité $nh \geq 1$. Prouvez qu'il existe une constante G_p, que l'on précisera, telle que

$$c_{r,p} \leq G_p \left(\frac{1}{nh}\right)^p \min\{h^2, \frac{\rho(r)}{h^2}\}.$$

En déduire que pour tout entier $p > 2$ pair, si $\mathrm{Cov}(Y_0, Y_n) = \mathcal{O}(n^{-a})$ pour un nombre réel $a > 4(p-1)$, alors il existe une constante H_p indépendante de n et de h telle que

$$nH_{n,p} \leq H_p (nh)^{1-p}.$$

Conclure qu'il existe une constante D_p indépendante de n et de h et telle que

$$\mathbb{E}(f_{n,h}(x) - \mathbb{E}f_{n,h}(x))^p) \leq D_p (nh)^{-p/2}.$$

Soit $(h(n))_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels positifs telle que:

$$\{\forall n \in \mathbb{N}^*, nh(n) \geq 1\}, \quad \lim_{n\to\infty} h(n) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} nh(n) = +\infty.$$

On pose, dans toute la suite, $f_n(t) = f_{n,h(n)}(t)$.

2. Soient f une fonction de $C^2(\mathbb{R})$ et $h(n) = n^{-1/5}$. Prouvez que

$$\mathbb{E}f_n(t) - f(t) = \mathcal{O}(n^{-2/5}).$$

En déduire que, sous les conditions de la question **1**, pour tout entier pair $p \geq 2$, on a:

$$\mathbb{E}(f_n(t) - f(t))^p = \mathcal{O}(n^{-2p/5}).$$

3. Soit f une fonction de $C(\mathbb{R})$, on fixe t dans $\mathbb{R}$ et un nombre $0 < \eta < 1$. On pose ici $h(n) = n^{-\eta}$. Prouvez que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E} f_n(t) = f(t)$.

En déduire qu'il existe $a > 0$ tel que si $\mathrm{Cov}(Y_0, Y_r) = \mathcal{O}(r^{-a})$ alors presque sûrement, $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$.

C.
Inégalités exponentielles

On suppose à présent que la suite associée satisfait de plus, pour une constante $a > 0$,

$$\mathrm{Cov}(Y_0, Y_r) = \mathcal{O}(e^{-ar}).$$

1. a) Soit $p > 2$ un entier fixé. Montrez qu'il existe une constante $B > 0$ vérifiant

$$nH_{n,p} \leq \left(\frac{Bp}{nh}\right)^{p-1}.$$

En déduire qu'il existe une constante C telle que

$$|M_{n,p}| \leq \left(\frac{Cp^2}{\sqrt{nh}}\right)^{p}.$$

b) Utilisez les résultats précédents pour prouver qu'il existe des constantes F et G telles que pour tout nombre réel t, tout entier n et toute suite réelle $h(n) > 0$ telle que $nh(n) \geq 1$:

$$\mathbb{P}\left(|f_n(t) - \mathbb{E} f_n(t)| > \frac{\lambda}{\sqrt{nh}}\right) \leq F \exp(-G\sqrt{\lambda}).$$

c) Soit $M > 0$ un nombre réel fixé. Prouvez qu'il existe des constantes H, K et $L \geq 0$ telles que pour tout entier n et toute suite de réels telle que $nh(n) \geq 1$:

$$\mathbb{P}\left(\sup_{|t|\leq M} |f_n(t) - \mathbb{E} f_n(t)| > \frac{\lambda}{\sqrt{nh}}\right) \leq Hn^K \exp(-L\sqrt{\lambda}).$$

2. Si $\lim_{n\to\infty} nh(n)/\log^4 n = \infty$, prouvez que, presque sûrement,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|t|\leq M} |f_n(t) - \mathbb{E} f_n(t)| = 0.$$

3. Si de plus f est une fonction de $C^2(\mathbb{R})$, prouvez qu'il existe une suite $h(n)$ telle que presque sûrement,

$$\sup_{|t|\leq M} |f_n(t) - \mathbb{E} f_n(t)| = \mathcal{O}\left(\left(\frac{\log^4 n}{n}\right)^{2/5}\right).$$