PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

Définitions, notations et rappels

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. L'abréviation de variable aléatoire réelle sera v.a.r.

1. Si X est une v.a.r. intégrable ou positive on note $\mathbb{E}(X)$ son espérance mathématique, $\mathbb{E}(X) = \int X dP$.

2. Pour tout $p \geq 1$, on désigne par L^p l'espace des v.a.r. X telles que $|X|^p$ soit intégrable.

3. Pour toute fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ bornée, on note $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}\}$. On note $C_0(\mathbb{R})$ l'ensemble des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ existent et sont nulles et on le munit de la norme $\| . \|$.

4. Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des mesures de Radon réelles de masse totale finie sur $\mathbb{R}$. On rappelle que l'application qui à tout élément μ dans $\mathcal{M}$ fait correspondre la forme linéaire $f \rightarrow \int f d\mu$ identifie $\mathcal{M}$ à l'espace des formes linéaires continues sur $C_0(\mathbb{R})$.
Si μ est une mesure positive et f une fonction intégrable pour la mesure μ, on note $f\mu$ la mesure de Radon de densité f par rapport à μ.

5. $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des mesures de probabilité sur $\mathbb{R}$. Un élément générique de $\mathcal{P}$ est appelé loi. La fonction de répartition F (f.r. en abrégé) de la loi μ ou d'une v.a.r. X de loi μ est définie par $F(x) = \mu(]-\infty, x]) = \mathbb{P}(X \leq x)$. On rappelle que F est continue à droite et on note $F(x-0)$ la limite à gauche de F au point x. Une loi μ est dite sans atome si $\mu(\{x\}) = 0$ pour tout x dans $\mathbb{R}$. Dans ce cas sa fonction de répartition est continue.

6. On dit qu'une suite $(\mu_n)_{n>0}$ de lois converge faiblement vers une loi μ de $\mathcal{P}$ si pour toute f dans $C_0(\mathbb{R})$, $\mu_n(f)$ converge vers $\mu(f)$. On rappelle que, si μ est une loi sans atome, la convergence faible de $(\mu_n)_{n>0}$ vers μ est équivalente à la convergence uniforme des fonctions de répartition des lois μ_n vers la fonction de répartition de μ.

7. Un espace mesuré $(E, \mathcal{E}, m)$ est dit σ-fini si E s'exprime comme réunion au plus dénombrable d'ensembles mesurables de mesure finie. On rappelle l'énoncé du théorème de Fubini pour une fonction positive.
Soit $(E_i, \mathcal{E}_i, m_i)_{i=1,2}$ deux espaces mesurés σ-finis et f une application mesurable et positive, définie sur $(E_1 \times E_2, \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2)$. Alors les applications

$$f_1 : x_1 \longrightarrow \int_{E_2} f(x_1, x_2) dm_2(x_2) \quad \text{et} \quad f_2 : x_2 \longrightarrow \int_{E_1} f(x_1, x_2) dm_1(x_1)$$

sont mesurables, et $\displaystyle\int_{E_1 \times E_2} f d(m_1 \otimes m_2) = \int_{E_1} f_1 dm_1 = \int_{E_2} f_2 dm_2$.

8. Si μ et ν sont des éléments de $\mathcal{P}$, on note $\mu * \nu$ leur produit de convolution, qui est l'unique élément de $\mathcal{P}$ tel que, pour toute fonction f mesurable et positive

$$\int f(x) d(\mu * \nu)(x) = \iint f(x+y) d(\mu \otimes \nu)(x, y).$$

On rappelle que le produit de convolution dans $\mathcal{P}$ est une loi interne, commutative et associative.

Si μ est un élément de $\mathcal{M}$ et g une fonction mesurable bornée, on note $\mu * g$ le produit de convolution de μ avec g, qui est la fonction mesurable et bornée définie par

$$\mu * g(x) = \int g(x-y)d\mu(y).$$

9. On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Si f est une fonction intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue et g une fonction mesurable bornée, on définit le produit de convolution $f * g$ par

$$f * g(x) = (f\lambda) * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy.$$

Préliminaires

Dans cette partie, on se propose d'étudier l'effet de la régularisation par un noyau gaussien sur la distance uniforme entre les fonctions de répartition. Pour $\varepsilon > 0$, on définit donc la fonction ϕ_ε par

$$\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}\Big).$$

On rappelle que la fonction ϕ_ε est la densité de la loi gaussienne d'espérance nulle et de variance ε^2. Soit μ et ν deux lois, de fonctions de répartition respectives F et G. On pose $F_\varepsilon = \phi_\varepsilon * F$ et $G_\varepsilon = \phi_\varepsilon * G$.

1.

a. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que

$$\|F - G\| = \sup_{x\in[-M,M]} |F(x) - G(x)|.$$

b. Soit Γ l'ensemble des points (x, y) dans $[-M, M] \times \mathbb{R}$ tels que $y = F(x) - G(x)$. Montrer que l'adhérence $\bar{\Gamma}$ de l'ensemble Γ est compacte et que

$$\bar{\Gamma} = \Gamma \cup \{(x,y) \in]-M,M] \times \mathbb{R} \text{ tels que } y = F(x-0) - G(x-0)\}.$$

c. En déduire qu'il existe x_0 dans $\mathbb{R}$ tel que

$$\|F - G\| = |F(x_0) - G(x_0)| \text{ ou } \|F - G\| = |F(x_0 - 0) - G(x_0 - 0)|.$$

2. On suppose que la loi ν a une densité bornée par d.

a. Montrer que, si $\|F - G\| = 2\delta d$, il existe un réel x_0 tel que $F(x_0) - G(x_0) = 2\delta d$ ou $G(x_0) - F(x_0 - 0) = 2\delta d$.

b. Montrer que si $F(x_0) = G(x_0) + 2\delta d$, alors, pour tout $x \geq x_0$,

$$2\delta d + F(x) - G(x) \geq d(4\delta + x_0 - x).$$

c. En déduire que si $F(x_0) = G(x_0) + 2\delta d$, alors

$$2\delta d + F_\varepsilon(x_0 + \delta) - G_\varepsilon(x_0 + \delta) \geq 3\delta d \int_{-\delta}^{\delta} \phi_\varepsilon(v)dv.$$

d. Étudier l'autre cas et montrer que, si ν a une densité bornée par d, alors

$$\|F-G\| = 2\delta d \implies \|F_\varepsilon - G_\varepsilon\| \geq 2\delta d\Big(3\int_0^\delta \phi_\varepsilon(v)dv - 1\Big).$$

3. En admettant que $3\displaystyle\int_0^{3/2} \phi_1(v)dv - 1 > (2/7)$, en déduire que, si ν a une densité bornée par d, alors l'implication suivante est vraie:

$$(1) \qquad \|F_\varepsilon - G_\varepsilon\| \leq \frac{6}{7}\,\varepsilon d \implies \|F-G\| \leq 3\,\varepsilon d.$$

4. Soit $(\mu_n)_{n>0}$ une suite de lois et μ une loi ayant une densité bornée par une constante d. On note F_n la f.r. de μ_n et F la f.r. de μ. Montrer que si $\lim\limits_{n\to\infty} \|\phi_\varepsilon * F_n - \phi_\varepsilon * F\| = 0$ pour tout $\varepsilon > 0$, alors (μ_n) converge faiblement vers μ.

Première partie

Dans la suite du problème, $(X_i)_{i>0}$ est une suite de v.a.r. indépendantes et équidistribuées satisfaisant les conditions suivantes : X_1 est dans L^3, $\mathbb{E}(X_1) = 0$ et $\mathbb{E}(X_1^2) = 1$. Pour chaque entier $n > 0$, on note S_n la somme $X_1 + \cdots + X_n$. Enfin la loi de $S_n/\sqrt{n}$ est notée μ_n et sa fonction de répartition F_n. La fonction de répartition de la loi gaussienne de densité ϕ_ε est notée Ψ_ε.

A

Soit, pour tout entier $r > 0$, $\mathcal{P}_r$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}$ constitué par les lois μ telles que $\displaystyle\int |x|^r d\mu(x) < \infty$. Pour toute application numérique h l-fois continûment dérivable, on note $h^{(l)}$ sa dérivée l-ième. Par convention on pose $h^{(l)} = h$ pour $l = 0$.

On dit qu'une application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est 1-lipschitzienne si, pour tout couple (x,y) de réels,

$$|g(x) - g(y)| \leq |x-y|.$$

On note $\mathcal{F}_r$ l'ensemble des applications h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ $(r-1)$-fois continûment dérivables dont la dérivée $(r-1)$-ième est 1-lipschitzienne et qui sont telles que $h^{(i)}(0) = 0$ pour tout entier i dans $[0, r[$.

5. Montrer que, pour tout entier $r > 0$, toute fonction h dans $\mathcal{F}_r$ et tout x dans $\mathbb{R}$,

$$|h(x)| \leq \frac{|x|^r}{r!}$$

En déduire que, pour toute loi μ dans $\mathcal{P}_r$, h est intégrable sous la loi μ.

6. On rappelle qu'un écart d sur $\mathcal{P}_r$ est une application symétrique de $\mathcal{P}_r \times \mathcal{P}_r$ dans $\mathbb{R}^+$ satisfaisant l'inégalité triangulaire et s'annulant sur la diagonale. Montrer que

$$d_r(\mu,\nu) = \sup_{f\in\mathcal{F}_r} \int f d(\mu - \nu)$$

est un écart sur $\mathcal{P}_r$.

7. Soit δ_0 la masse de Dirac en 0. Donner la valeur exacte de $d_r(\mu, \delta_0)$. Calculer explicitement $d_r(\phi_\varepsilon\lambda, \delta_0)$ pour tous les entiers $r > 0$.

8. Soient π_1 et π_2 deux lois de $\mathcal{P}_r$ avec $\displaystyle\int x^i d(\pi_1 - \pi_2) = 0$ pour tout entier i dans $[1, r[$.

a. Montrer que

$$d_r(\pi_1,\pi_2)=\sup_{h\in\mathcal{G}_r}\int hd(\pi_1-\pi_2),$$

où $\mathcal{G}_r$ est la classe des fonctions $(r-1)$ fois continûment dérivables de dérivée $(r-1)$-ième 1-lipschitzienne.
b. En déduire que $d_r(\mu*\pi_1,\mu*\pi_2)\le d_r(\pi_1,\pi_2)$ pour tout élément μ de $\mathcal{P}_r$.

9. Soient μ une loi de f.r. F et ν une seconde loi. Montrer que la f.r. de $\mu*\nu$ est égale à $\nu*F$. En déduire que $\phi_\varepsilon*F=\mu*\Psi_\varepsilon$.

10. Déduire des questions précédentes que

$$\|\phi_\varepsilon*F_n-\phi_\varepsilon*\Psi_1\|\le\|\phi_\varepsilon^{(1)}\|\;d_2(\mu_n,\phi_1\lambda).$$

Montrer ensuite que $\|\phi_\varepsilon^{(1)}\|=(2\pi e)^{-1/2}\varepsilon^{-2}$.

11. Montrer que

$$\|\Psi_1-F_n\|\le\left(\sqrt{2}\,d_2(\mu_n,\phi_1\lambda)\right)^{1/3}. \tag{2}$$

B

On se propose de majorer l'écart de μ_n à sa limite. Pour tout entier $k>0$, on note ν_k la loi de $S_k=X_1+\cdots+X_k$ et on pose $\nu_0=\delta_0$, où δ_0 désigne la masse de Dirac en 0.

12. Montrer que

$$n\,d_2(\mu_n,\phi_1\lambda)\le d_2(\nu_n\,,\,\nu_{n-1}*\phi_1\lambda)+\sum_{l=1}^{n-1}d_2(\nu_{n-l}*\phi_{\sqrt{l}}\lambda\,,\,\nu_{n-l-1}*\phi_{\sqrt{l+1}}\lambda).$$

13. En déduire que, pour tout entier $n\ge 2$,

$$n\,d_2(\mu_n,\phi_1.\lambda)\le d_2(\nu_1,\phi_1\lambda)+\sum_{l=1}^{n-1}d_2(\phi_{\sqrt{l}}\lambda*\nu_1\,,\,\phi_{\sqrt{l}}\lambda*\phi_1\lambda).$$

14. Soient μ et ν deux éléments de $\mathcal{P}_3$ tels que $\int x^i d(\mu-\nu)=0$ pour $i=1,2$.
a. Montrer que, pour tout réel $\eta>0$,

$$d_2(\phi_\eta\lambda*\mu,\phi_\eta\lambda*\nu)\le\frac{2}{\eta\sqrt{2\pi}}\,d_3(\mu,\nu).$$

b. En déduire que, pour tout entier $n\ge 2$,

$$n\,d_2(\mu_n,\phi_1\lambda)\le d_2(\nu_1,\phi_1\lambda)+d_3(\nu_1,\phi_1\lambda)\sum_{l=1}^{n-1}\frac{2}{\sqrt{2\pi l}}\,.$$

15. Soit Y_1 v.a.r. gaussienne de loi $\phi_1\lambda$. Montrer que

$$\sqrt{2\pi}\;\mathbb{E}(|Y_1|^3)\le 4\,\mathbb{E}(|X_1|^3).$$

En déduire que

$$d_3(\nu_1,\phi_1\lambda)\le\frac{4+\sqrt{2\pi}}{6\sqrt{2\pi}}\;\mathbb{E}(|X_1|^3).$$

16. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$d_2(\mu_n, \phi_1 \lambda) \leq n^{-1/2}\mathbb{E}(|X_1|^3). \tag{3}$$

En déduire une majoration de $\|\Psi_1 - F_n\|$. Conclure.

Seconde partie

Le propos de cette partie est l'étude des espaces $(\mathcal{P}_r, d_r)$ pour $r = 1, 2$. Pour toute fonction de répartition F, on définit son inverse généralisée F^{-1} sur $]0,1[$ par

$$F^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq u\}.$$

A

17. On se propose de montrer que d_r est une distance. Soient donc μ et ν deux lois dans $\mathcal{P}_r$ telles que $\int hd(\mu - \nu) = 0$ pour tout h dans $\mathcal{F}_r$.

a. Montrer qu'il existe une suite finie $a_0, a_1, \ldots a_{r-1}$ de coefficients réels telle que, pour toute fonction h r-fois continûment dérivable et de dérivée r-ième bornée,

$$\int hd(\mu - \nu) = \sum_{i=0}^{r-1} a_i h^{(i)}(0).$$

b. Montrer que $a_i = 0$ pour tout $i > 0$.

c. Conclure, en admettant que l'ensemble des fonctions r-fois continûment dérivables de limite nulle en $+\infty$ et en $-\infty$ est dense dans $C_0(\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\,.\,\|$.

18. Soient μ et ν deux éléments quelconques de $\mathcal{P}_1$, de fonctions de répartition respectives F et G.

a. Montrer que, si (X, Y) un couple de v.a.r. tel que X suive la loi μ et Y la loi ν, alors

$$d_1(\mu, \nu) \leq \mathbb{E}(|X - Y|).$$

b. En déduire que

$$d_1(\mu, \nu) \leq \int_0^1 |F^{-1}(u) - G^{-1}(u)|\, du.$$

19. On considère les lois μ et ν de la question **18**. Montrer qu'il existe une fonction h dans $\mathcal{F}_1$ telle que

$$\int hd(\mu - \nu) = \int_{\mathbb{R}} |F(x) - G(x)|\, dx.$$

En déduire une autre expression de d_1.

20. Montrer que $(\mathcal{P}_1, d_1)$ est un espace métrique complet.

B

On se propose maintenant d'étudier $(\mathcal{P}_2, d_2)$.

21. Soient μ et ν deux éléments de $\mathcal{P}_2$, et F et G leurs fonctions de répartition respectives.

a. Montrer qu'il existe un élément h de $\mathcal{F}_2$ tel que, pour tout u dans $]0,1[$,

$$h(F^{-1}(u)) - h(G^{-1}(u)) \geq \frac{1}{8}\left(F^{-1}(u) - G^{-1}(u)\right)^2.$$

b. En déduire que

$$\int_0^1 \left(F^{-1}(u) - G^{-1}(u)\right)^2 du \leq 8\, d_2(\mu, \nu). \tag{4}$$

22. Montrer que $(\mathcal{P}_2, d_2)$ est un espace métrique complet.

23. Pour (x, y) couple de réels, on note $\mathbb{1}_{x>y}$ la fonction valant 1 si $x > y$ et 0 sinon. Soit $\mathcal{K}$ une partie compacte de $(\mathcal{P}_2, d_2)$. Montrer que

$$\lim_{A\to+\infty} \sup_{\mu\in\mathcal{K}} \int_{\mathbb{R}} x^2 \mathbb{1}_{|x|>A}\, d\mu(x) = 0.$$

En déduire que, pour les sommes S_n définies dans la première partie,

$$\lim_{B\to+\infty} \sup_{n>0} n^{-1} \mathbb{E}(S_n^2 \mathbb{1}_{S_n^2>nB}) = 0.$$

24. Pour tout réel $A > 0$, on note $\mathcal{K}_A$ l'ensemble des lois μ telles que $\mu([-A, A]) = 1$.

a. Montrer que $\mathcal{K}_A$ est une partie compacte de $(\mathcal{P}_2, d_2)$.

b. En déduire un critère de compacité pour les parties fermées de $(\mathcal{P}_2, d_2)$.

MATHÉMATIQUES DE L'INFORMATIQUE

Les *réseaux de Petri* ont été introduits dans les années 60, comme modèles de la communication entre processus parallèles. La décidabilité du *problème de l'accessibilité* pour ces réseaux a été démontrée il y a une quinzaine d'années. On se contentera ici d'étudier certains cas particuliers qui jouent un rôle essentiel dans la preuve de décidabilité. De plus, on montrera qu'un problème plus général, à savoir l'*inclusion des ensembles d'accessibilité*, est indécidable.

Notations et conventions

On note $\mathbb{N}$ (respectivement $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$) l'ensemble des entiers naturels (respectivement des entiers relatifs, des nombres rationnels). Si X est un ensemble et $p \in \mathbb{N}$, on note X^p l'ensemble des p-uplets $(a_1, \ldots, a_p)$ où $a_1, \ldots, a_p \in X$. On munit $\mathbb{N}^p$ de l'ordre produit : $(a_1, \ldots, a_p) \leq (b_1, \ldots, b_p)$ si $a_i \leq b_i$ pour $i = 1, \ldots, p$. On note $0_p = (0, \ldots, 0)$ le vecteur nul de $\mathbb{Z}^p$, et $e_1, \ldots, e_p$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{Z}^p$. Enfin, si U et V sont des parties de $\mathbb{Z}^p$, on pose $U + V = \{u + v \mid u \in U, v \in V\}$.

Il n'est pas nécessaire de présenter les algorithmes comme des programmes. On se contentera de les décrire informellement.

I. Préliminaires

On cherche un algorithme pour déterminer si le système linéaire

$$n_1 u_1 + \cdots + n_q u_q = v \tag{1}$$

admet une solution $(n_1, \ldots, n_q)$ dans $\mathbb{N}^q$, étant donnés des vecteurs $u_1, \ldots, u_q$, et v de $\mathbb{Z}^p$.