page 112 15/28 - 1992.
Agrégation Externe · Options.

PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

Avertissement. Les parties A, B, D questions 1 à 6 peuvent être traitées de manière indépendante.

Notations - Définitions - Résultats

On adopte dans cet énoncé les notations et définitions suivantes.

1 - $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ est la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

2 - Si $(X, \mathcal{B}, \eta)$ est un espace probabilisé $\mathbb{L}^p(X, \mathcal{B}, \eta)$ $p \geq 1$ désigne l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles et de puissance p-ième intégrable au sens de Lebesgue sur $(X, \mathcal{B}, \eta)$. L'espace $\mathbb{L}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$ $p \geq 1$ est défini de manière analogue. De plus si $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$ on note $\lambda(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\lambda(dx)$.

3 - 1_A désigne la fonction indicatrice d'un ensemble A.

4 - Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. La moyenne d'une variable aléatoire $X \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est notée $E(X)$ et si $\mathcal{B}$ est une sous tribu de $\mathcal{F}$ l'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{B}$ est notée $E(X|\mathcal{B})$. La sous tribu de $\mathcal{F}$ engendrée par une famille finie (Y_i) $1 \leq i \leq p$ de variables aléatoires est notée $\mathcal{F}(Y_1, Y_2, \ldots, Y_p)$.

5 - * désigne deux sortes de convolution. Pour des probabilités α et β sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ $\alpha * \beta$ est la probabilité définie par

$$\alpha * \beta(B) = \int_{\mathbb{R}} \alpha(dx) \int_{\mathbb{R}} 1_B(x+y)\beta(dy) \quad B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

Si f est une fonction borélienne telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$ $u \to f(t-u)$ est un élément de $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \alpha)$ $\alpha * f$ est définie par

$$\alpha * f(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-u)\, \alpha(du) \quad t \in \mathbb{R}$$

$\alpha^{(n)}$ $n \geq 1$ désigne la nième puissance de convolution de α et $\alpha^{(0)}$ est la masse de Dirac en 0, notée ϵ_0.

6 - Une probabilité α sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ possède des moments exponentiels si pour tout réel t l'application $y \to e^{ty}$ appartient à $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \alpha)$. Le support de α est le plus petit fermé de $\mathbb{R}$ de complémentaire de probabilité nulle par rapport à α. La probabilité α est dite non arithmétique si le sous groupe fermé de $(\mathbb{R}, +)$ engendré par le support de α est $\mathbb{R}$.

7 - $I(\mathcal{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions réglées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et telles que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \sup_{x \in [n, n+1]} |f(x)| < +\infty$.

Tournez la page S.V.P.

On rappelle l'énoncé suivant (théorème de Fubini). Soit $(E_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$ $i = 1,2$ deux espaces probabilisés et f une application mesurable de $(E_1 \times E_2, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ les conditions suivantes sont équivalentes

$$x_1 \to \int_{E_2} |f|(x_1, x_2)\mu_2(dx_2) \text{ est un élément de } \mathbb{L}^1(X_1, \mathcal{B}_1, \mu_1) \tag{1}$$

$$x_2 \to \int_{E_1} |f|(x_1, x_2)\mu_1(dx_1) \text{ est un élément de } \mathbb{L}^1(X_2, \mathcal{B}_2, \mu_2) \tag{2}$$

et si elles sont vérifiées on a l'égalité

$$\int_{E_1} \mu_1(dx_1) \int_{E_2} f(x_1, x_2)\mu_2(dx_2) = \int_{E_2} \mu_2(dx_2) \int_{E_1} f(x_1, x_2)\mu_1(dx_1)$$

Par ailleurs cet énoncé reste valide en remplaçant l'un ou les deux espaces $(E_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$ $1 \leq i \leq 2$ par $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$.

Dans ce problème on considère une suite $X = (X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi μ. On définit alors pour tout $n \geq 1$ la variable aléatoire S_n par $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ et pour tout $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ la variable aléatoire $N(B)$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ par $N(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} 1_B(S_n)$.

- A -

Dans ce paragraphe on suppose que la probabilité μ possède des moments exponentiels et l'on définit l'application ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par la formule $\psi(t) = E\{e^{tX_1}\}$ $t \in \mathbb{R}$. On suppose de plus que $m = E(X_1) > 0$

1 - a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ on a $E(e^{t|X_1|}) < +\infty$ et en déduire que ψ est analytique. Prouver que $\psi'(0) = m$ et qu'il existe un réel $t_0 < 0$ tel que $\psi(t_0) < 1$

b) Calculer $E(e^{t_0 S_n})$ $n \geq 1$ en fonction de $\psi(t_0)$

c) En utilisant l'inégalité $1_{[-1,1]}(x) \leq e^{-t_0}e^{t_0 x}$ $x \in \mathbb{R}$ montrer que

$$E\{N([-1, 1])\} \leq \frac{e^{-t_0}\psi(t_0)}{1 - \psi(t_0)}.$$

2 - Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur égale à 1. On définit la variable aléatoire T_I à valeurs dans $\overline{\mathbb{N}}$ par $T_I = \inf\{n \geq 1; S_n \in I\}$ où l'on convient que $\inf \emptyset = +\infty$.

a) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$ on a $\{T_I = k\} \in \mathcal{F}(X_1, X_2, \ldots, X_k)$

b) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$ on a

$$1_{\{T_I = k\}} \times N(I) = 1_{\{T_I = k\}}[1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 1_I(S_{n+k})]$$

et que

$$1_{\{T_I=k\}} \times 1_I(S_{n+k}) \leq 1_{\{T_I=k\}} \times 1_{[-1,1]}(S_{n+k} - S_k) \quad n \geq 1 \quad k \geq 1.$$

c) En déduire que

$$E\{N(I)\} \leq \mathbb{P}\{[T_I < +\infty]\}(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\{[|S_n| \leq 1]\}) \leq 1 + E\{N([-1,1])\}$$

d) Montrer que pour tout compact J de $\mathbb{R}$ on a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} E\{N(x+J)\} < +\infty$$

- B -

Dans ce paragraphe on suppose que la probabilité μ est non arithmétique. On désigne par $\mathcal{H}_\mu$ l'espace vectoriel des fonctions h continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} h(x+y)\mu(dy)$$

1 - Soit $h \in \mathcal{H}_\mu$. Montrer que pour tout $n \geq 1$ et tout $p \geq 1$ on a

$$E\{h(S_{n+p}) | \mathcal{F}(X_1, X_2, \ldots, X_n)\} = h(S_n)$$

$\mathbb{P}$ presque sûrement et que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$ on a $h(x) = E\{h(x+S_n)\}$.

2 - Soit $h \in \mathcal{H}_\mu$

a) Etablir que pour tout $n \geq 1$ et tout $p \geq 1$ on a

$$E\{[h(S_{n+p}) - h(S_n)]^2\} = E\{h^2(S_{n+p})\} - E\{h^2(S_n)\}$$

b) En déduire que la suite $(E\{h^2(S_n)\})$ $n \geq 1$ est monotone et converge dans $\mathbb{R}$.

c) Montrer que la suite de variables aléatoires $(h(S_n))_{n\geq 1}$ converge dans $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vers une variable aléatoire Z et que $h(0) = E\{Z\}$.

3 - Soit $h \in \mathcal{H}_\mu$

a) On pose $u_n = \int_\Omega \int_{\mathbb{R}} \{h(S_n(\omega)) - h(S_n(\omega) + y)\}^2 \mathbb{P}(d\omega)\mu(dy) \quad n \geq 1$

Tournez la page S.V.P.

Montrer que $u_n = E\{[h(S_n) - h(S_{n+1})]^2\}$ et que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est convergente. En déduire qu'il existe un sous ensemble M de $\Omega \times \mathbb{R}$ appartenant à la tribu produit $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ tel que $\mathbb{P} \otimes \mu(M) = 1$ et que pour tout $(\omega, y) \in M$ on ait

$$\lim_{n \to +\infty} [h(S_n(\omega)) - h(S_n(\omega) + y)] = 0$$

b) En utilisant le théorème de Fubini montrer qu'il existe $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ tel que $\mu(A) = 1$, et que pour tout $y \in A$ on ait $\mathbb{P}(M_y) = 1$ où $M_y = \{\omega; (\omega, y) \in M\}$. En déduire que pour tout élément y du support de μ on a $h(y) = h(0)$.

4 - Soit $h \in \mathcal{H}_\mu$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ l'application $x \to h(x+t)$ est un élément de $\mathcal{H}_\mu$. En déduire que tout élément du support de μ est une période de h. Prouver de plus que l'ensemble des périodes de h est un sous groupe fermé de $(\mathbb{R}, +)$ et en déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $h(x) = h(0)$.

- C -

On suppose dans cette partie que la probabilité μ est non arithmétique, possède des moments exponentiels et que $m = E(X_1) > 0$.

On désigne par P_μ l'espace vectoriel des fonctions f mesurables bornées de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ telles que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} \mu^{(n)} * f(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Pour $f \in P_\mu$ la somme de cette série est notée $\mathsf{U}(x, f)$.

Soit J un compact de $\mathbb{R}$. Pour tout $n \geq 1$ on a

$$\mu^{(n)} * 1_J(x) = \mathbb{P}\{[S_n \in x - J]\} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \mu^{(n)} * 1_J(x) = 1_{\{x-J\}}(0) + E\{N(x-J)\}.$$

Il résulte de A que $1_J \in P_\mu$ et que $\sup_{x \in \mathbb{R}} \mathsf{U}(x, 1_J) < +\infty$.

On note $\mathcal{C}_K(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ à support compact. Pour $\phi \in \mathcal{C}_K(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R}$ on définit $\phi_x \in \mathcal{C}_K(\mathbb{R})$ par $\phi_x(t) = \phi(t-x)\; t \in \mathbb{R}$. On pourra dans la suite utiliser le résultat suivant : Si η est une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}_K(\mathbb{R})$ telle que pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}_K(\mathbb{R})$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on ait $\eta(\phi) = \eta(\phi_x)$, il existe une constante $c \geq 0$ telle que pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}_K(\mathbb{R})$ $\eta(\phi) = c\lambda(\phi)$.

1 - a) Montrer que $\mathcal{C}_K(\mathbb{R}) \subset P_\mu$ et que pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}_K(\mathbb{R})$ de support J on a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\mathsf{U}(x, \phi)| \leq [\sup_{x \in \mathbb{R}} |\phi(x)|] \times \sup_{x \in \mathbb{R}} \mathsf{U}(x, 1_J).$$

b) Soit $\phi \in \mathcal{C}_K(\mathbb{R})$ de support J. Etablir l'inégalité

$$|\,\mathsf{U}(x,\phi) - \mathsf{U}(y,\phi)| \leq 2C(J) \times \sup\{|\phi(u) - \phi(v)|; u, v \in \mathbb{R} \ \ |u-v| = |x-y|\}$$

où $C(J) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \mathsf{U}(t, 1_J)$. En déduire que $x \to \mathsf{U}(x,\phi)$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

c) On désigne par $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels tels que $\lim_n x_n = +\infty$. Prouver à l'aide de b) que pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}_K(\mathbb{R})$ la suite de fonctions $(\mathcal{T}_n(\cdot,\phi))$ $n \geq 1$ définies par $\mathcal{T}_n(x,\phi) = \mathsf{U}(x_n - x, \phi)$ $x \in \mathbb{R}$ est uniformément équicontinue sur $\mathbb{R}$.

d) On admettra que les résultats établis en a) et c) ainsi que la linéarité de l'application $\phi \to \mathcal{T}_n(\cdot,\phi)$ permettent d'établir l'existence d'une sous suite $(\ell(n))_{n\geq 1}$ de $\mathbb{N}$ telle que pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}_K(\mathbb{R})$ la suite $(\mathcal{T}_{\ell(n)}(\cdot,\phi))_{n\geq 1}$ converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{R}$ vers une fonction $\mathcal{T}(\cdot,\phi)$ continue bornée sur $\mathbb{R}$.

Soit $\phi \in \mathcal{C}_K(\mathbb{R})$ établir la relation

$$\mathcal{T}_n(x,\phi) = \phi(x_n - x) + \int_{\mathbb{R}} \mathcal{T}_n(x+y,\phi)\mu(dy) \quad n \geq 1 \ \ x \in \mathbb{R}.$$

En déduire que $\mathcal{T}(\cdot,\phi)$ est un élément de $\mathcal{H}_\mu$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\mathcal{T}(x,\phi) = \mathcal{T}(0,\phi)$.

2 - Montrer que pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}_K(\mathbb{R})$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\mathcal{T}(x,\phi) = \mathcal{T}(0,\phi_x)$. En déduire que $\phi \to \mathcal{T}(0,\phi) = \alpha(\phi)$ est une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}_K(\mathbb{R})$ telle que pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}_K(\mathbb{R})$ et tout $x \in \mathbb{R}$ $\alpha(\phi_x) = \alpha(\phi)$. En conclure qu'il existe une constante $c_1 \geq 0$ telle que pour toute $\phi \in \mathcal{C}_K(\mathbb{R})$ on ait $\alpha(\phi) = \mathcal{T}(0,\phi) = c_1\lambda(\phi)$.

3 - a) Montrer que $I(\mathcal{R}) \subset P_\mu$ et que de plus il existe une constante $K > 0$ telle que pour toute $f \in I(\mathcal{R})$ on ait

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\,\mathsf{U}(x,f)| \leq K \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sup_{x\in[n,n+1]} |f(x)|$$

b) On admettra que comme $\lim_{n\to+\infty} \mathsf{U}(x_{\ell(n)},\phi) = \lim_{n\to+\infty} \mathcal{T}_{\ell(n)}(0,\phi) = c_1\lambda(\phi)$ pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}_K(\mathbb{R})$ on a également $\lim_{n\to+\infty} \mathsf{U}(x_{\ell(n)}, f) = c_1\lambda(f)$ pour toute fonction f en escalier à support compact. En déduire que pour toute fonction $f \in I(\mathcal{R})$ on a $\lim_{n\to+\infty} \mathsf{U}(x_{\ell(n)}, f) = c_1\lambda(f)$.

4 - Soit θ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\theta = H - \mu * H$ où $H(x) = 1_{[0,+\infty[}(x)$ $x \in \mathbb{R}$

a) Calculer θ. Montrer que $\theta \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$ et que $\lambda(\theta) = m$. En utilisant les propriétés de monotonie de θ montrer de plus que $\theta \in I(\mathcal{R})$

b) Montrer que pour tout $x \in I\!R$ la suite $\mu^{(n)} * H(x) = E\{H(x-S_n)\}$ $n \geq 1$ converge vers 0. En déduire que $\mathsf{U}(x,\theta) = H(x)$ et que $\lim_{x\to+\infty} \mathsf{U}(x,\theta) = 1$.

c) En déduire à l'aide de 3 que $c_1 = \frac{1}{m}$ et que pour toute fonction $f \in I(\mathcal{R})$ $\lim_{n\to+\infty} \mathsf{U}(x_{\ell(n)}, f) = \frac{1}{m}\lambda(f)$.

5 - Déduire de l'étude précédente que pour toute fonction $f \in I(\mathcal{R})$ on a

$$\lim_{x\to+\infty}\{\sum_{n=0}^{+\infty} \mu^{(n)} * f(x)\} = \lim_{x\to+\infty} \mathsf{U}(x,f) = \frac{\lambda(f)}{m}$$

- D -

Dans cette partie $(A_k)_{k\geq 1}$ désigne une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi satisfaisant aux hypothèses suivantes :

$$I\!P\{[A_1 > 0]\} = 1, \quad I\!P\{[A_1 > 1]\} > 0$$

$E\{(A_1)^t\} = \Phi(t)$ existe pour tout $t \in I\!R$ et $E\{\log(A_1)\} < 0$. On suppose de plus que la loi de probabilité ν de $\log(A_1)$ est non arithmétique.

1 - Montrer à l'aide de la règle de Cauchy que la série $1 + \sum_{k=1}^{+\infty}(A_1A_2\cdots A_k)$ est $I\!P$ presque sûrement convergente. On note R sa somme.

2 - Montrer que $\lim_{t\to+\infty}\Phi(t) = +\infty$, et que l'application $t \to \Phi(t)$ est strictement convexe sur $[0,+\infty[$. Prouver qu'il existe un réel $\alpha_0 > 0$ tel que $\Phi(\alpha_0) = 1, \Phi(t) < 1$ si $0 < t < \alpha_0$. Etablir de plus que $E\{(A_1)^{\alpha_0}\log(A_1)\} > 0$.

3 - Pour $n \geq 1$ on définit la variable aléatoire $\sum_n$ par $\sum_n = \sum_{k=1}^{n}(A_1A_2\cdots A_k)$

Montrer que si $\alpha_0 \leq 1$ et $0 < \beta < \alpha_0$ on a $E\{(\sum_n)^\beta\} \leq \sum_{k=1}^{n}[\Phi(\beta)]^k$ et que si $\alpha_0 > 1$ $1 \leq \beta < \alpha_0$ on a $(E\{(\sum_n)^\beta\})^{1/\beta} \leq \sum_{k=1}^{n}[\Phi(\beta)]^{k/\beta}$.

En déduire que pour tout $0 < \beta < \alpha_0$ on a $E\{(R)^\beta\} < +\infty$ et que

$$\lim_{T\to+\infty} T^\beta I\!P\{[R > T]\} = 0.$$

4 - Soit R_1 la variable aléatoire définie par $R_1 = 1 + \sum_{j=2}^{+\infty}(A_2A_3\cdots A_j)$

a) Montrer que les variables aléatoires A_1 et R_1 sont indépendantes et que R_1 a même loi γ que R.

b) Vérifier que l'on définit une probabilité ν_0 sur $(I\!R, \mathcal{B}_{I\!R})$ en posant

$$\nu_0(B) = E\{(A_1)^{\alpha_0} 1_B[\log(A_1)]\} \quad B \in \mathcal{B}_{I\!R}$$

et montrer que pour toute fonction f borélienne bornée on a

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\nu_0(dx) = E\{(A_1)^{\alpha_0} f[\log(A_1)]\}$$

c) On considère les applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ F_0 et ψ_0 définies par

$$F_0(t) = e^{-t}\int_0^{e^t} u^{\alpha_0}\mathbb{P}\{[R > u]\}du \qquad \psi_0(t) = e^{-t}\int_0^{e^t} u^{\alpha_0}\mathbb{P}\{[u < R \leq u+1]\}du.$$

De la relation $R = 1 + A_1R_1$ déduire que

$$F_0(t) = E\{(A_1)^{\alpha_0}F_0[t - \log(A_1)]\} + \psi_0(t) = \nu_0 * F_0(t) + \psi_0(t) \quad t \in \mathbb{R}.$$

5 - a) Montrer à l'aide du théorème de Fubini que pour tout $t \geq 0$ on a

$$0 \leq \psi_0(t) \leq \frac{e^{-t}}{\alpha_0+1}[\int_0^1 y^{\alpha_0+1}\gamma(dy) + \int_1^{e^t+1} y^{\alpha_0+1}\{1 - (1-\frac{1}{y})^{\alpha_0+1}\}\gamma(dy)$$

et en déduire que pour $0 < \beta \quad \alpha_0 - 1 < \beta < \alpha_0$ on a pour tout $t \geq 0$

$$0 \leq \psi_0(t) \leq \frac{e^{-t}}{\alpha_0+1} + e^{-t}(e^t+1)^{\alpha_0-\beta} \times [\int_0^{+\infty} y^\beta\gamma(dy)]$$

b) Montrer que pour $t \leq 0 \quad 0 \leq \psi_0(t) \leq \frac{e^{\alpha_0 t}}{\alpha_0+1}$

c) En déduire que $\psi_0 \in I(\mathcal{R})$

6 - Montrer que $\nu_0^{(n)} * F_0(t) = e^{-t}\int_0^{e^t} u^{\alpha_0}E\{\gamma(]\frac{u}{A_1A_2\cdots A_n}, +\infty[)\}du$ pour $n \geq 1$ et $t \in \mathbb{R}$.

En déduire que $\lim_{n\to+\infty}\nu_0^{(n)} * F_0(t) = 0$ et que $F_0(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\nu_0^{(n)} * \psi_0(t) \quad t \in \mathbb{R}$.

7 - Montrer que

$$m_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} x\nu_0(dx) = E\{(A_1)^{\alpha_0}\log(A_1)\} > 0$$

et prouver à l'aide de C_5 que

$$\lim_{t\to+\infty} F_0(t) = c_+ \text{ où } c_+ = \frac{1}{m_0}\int_0^{+\infty} u^{\alpha_0-1}\mathbb{P}\{[u < R \leq u+1]\}du \quad \text{et } 0 < c_+ < +\infty.$$

8 - a) Soit $0 < \epsilon < 1$ et $T > 0$. Etablir l'inégalité

$$T^{\alpha_0}\mathbb{P}\{[R > T]\} \leq T^{-1}\int_{(1-\epsilon)T}^{T} u^{\alpha_0}\mathbb{P}\{[R > u]\}du \times \frac{\alpha_0+1}{1-(1-\epsilon)^{\alpha_0+1}}.$$

Tournez la page S.V.P.

En déduire à l'aide de 7 que

$$\limsup_{T\to+\infty} T^{\alpha_0} \dot{\mathbb{P}}\{[R>T]\} \leq c_+ \frac{(\alpha_0+1)\epsilon}{1-(1-\epsilon)^{\alpha_0+1}}$$

puis que $\limsup_{T\to+\infty} T^{\alpha_0} \mathbb{P}\{[R>T]\} \leq c_+$.

b) Démontrer de manière analogue que $\liminf_{T\to+\infty} T^{\alpha_0} \mathbb{P}\{[R>T]\} \geq c_+$ et en conclure que $\lim_{T\to+\infty} T^{\alpha_0} \mathbb{P}\{[R>T]\} = c_+$.