PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

NOTE AUX CANDIDATS

Dans la partie I, on établit des propriétés techniques utilisées dans les parties II et III, en particulier des propriétés de convergence en probabilité (résultat I.5.*f*). La partie II est consacrée à certains aspects de l'étude de l'évolution de la taille des générations successives d'une population ouverte à l'immigration. La partie III étudie la convergence de certains estimateurs de paramètres liés à cette population.

Les trois parties de ce problème peuvent chacune être traitées en admettant certains résultats des parties antérieures.

NOTATIONS ET DONNÉES

Les données sont précédées de D *(en première lecture, seules, celles-ci peuvent être lues).*

1. $\overline{\mathrm{N}} = \mathrm{N} \cup \{+\infty\}$, $\mathrm{N}^* = \mathrm{N} - \{0\}$, $\overline{\mathrm{R}} = \mathrm{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

2. $\forall a \in \mathrm{R}$, $a^+ = \sup(a, 0)$ $a^- = \sup(-a, 0)$.

3. $\mathscr{B}_{\mathrm{R}+}$, $\mathscr{B}_{\mathrm{R}}$, $\mathscr{B}_{\overline{\mathrm{R}}}$ sont les tribus boréliennes de R^+, R, $\overline{\mathrm{R}}$.

D4. $(\Omega, \mathscr{A})$ est un espace probabilisable donné une fois pour toutes, P une probabilité sur cet espace, toutes les variables aléatoires sont sur cet espace.

5. 1_{A} est la fonction indicatrice d'une partie A d'un ensemble.

6. Si $(\mathrm{A}_n)_{n \in \mathrm{N}}$ est une suite de parties d'un ensemble, on note :

$$\overline{\lim}\ \mathrm{A}_n = \bigcap_{n \in \mathrm{N}} \bigcup_{p \geqslant n} \mathrm{A}_p \qquad \text{et} \qquad \underline{\lim}\ \mathrm{A}_n = \bigcup_{n \in \mathrm{N}} \bigcap_{p \geqslant n} \mathrm{A}_p.$$

7. v.a., v.a.n., v.a.r. sont respectivement les abréviations de variable aléatoire, variable aléatoire numérique (c'est-à-dire à valeurs dans $\overline{\mathrm{R}}$), variable aléatoire réelle.

8. $\mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{B}, \mathrm{P})$ est l'ensemble des v.a.n. $\mathscr{B}$-mesurables ($\mathscr{B}$ est une sous-tribu de $\mathscr{A}$) et P-intégrables.

9. $\mathrm{E}^{\mathscr{B}}(\mathrm{X})$ ou $\mathrm{E}(\mathrm{X}/\mathscr{B})$ est l'espérance conditionnelle de $\mathrm{X} \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ par rapport à la sous-tribu $\mathscr{B}$ de $\mathscr{A}$.

10. EX et σ^2_{X} désignent, lorsqu'elles existent, les moyenne et variance d'une v.a.n. X.

11. Si $\mathrm{A} \in \mathscr{A}$, une application X_{A} définie sur A à valeurs dans $\overline{\mathrm{R}}$ est dite $\mathscr{A}$-mesurable si, $\forall \mathrm{B} \in \mathscr{B}_{\overline{\mathrm{R}}}$, $\{\omega \in \mathrm{A} \mid \mathrm{X}_{\mathrm{A}}(\omega) \in \mathrm{B}\} \in \mathrm{A} \cap \mathscr{A}$, tribu trace de $\mathscr{A}$ sur A.

D12. $(\mathscr{A}_n)_{n \in \mathrm{N}}$ est une suite de sous-tribus de $\mathscr{A}$ telle que, $\forall n \in \mathrm{N}$, $\mathscr{A}_n \subset \mathscr{A}_{n+1}$; on note $\mathscr{A}_\infty$ la plus petite tribu contenant toutes les sous-tribus $\mathscr{A}_n$.

D13. $\mathscr{T}$ est la famille des variables aléatoires T à valeurs dans $\overline{\mathrm{N}}$ possédant la propriété :
$$\forall k \in \mathrm{N},\ (\mathrm{T} = k) \in \mathscr{A}_k.$$

14. Si $\mathrm{X} = (\mathrm{X}_n)_{n \in \overline{\mathrm{N}}}$ (resp $(\mathrm{X}_n)_{n \in \mathrm{N}}$) est une suite de v.a.n. et si $\mathrm{T} \in \mathscr{T}$ (resp $\mathrm{T} \in \mathscr{T}$ telle que $\mathrm{T}(\omega) \in \mathrm{N}$, $\forall \omega \in \Omega$), on définit la v.a.n. X_{T} par : $\mathrm{X}_{\mathrm{T}}(\omega) = \mathrm{X}_{\mathrm{T}(\omega)}(\omega)$, $\forall \omega \in \Omega$.

I

1. Soit U une v.a.r. et $r \geqslant 0$.

a. Démontrer, en utilisant le théorème de Fubini, que :
$$\int_0^{+\infty} x^r \mathrm{P}(|\mathrm{U}| > x)\,dx = (r+1)^{-1} \int_\Omega |\mathrm{U}|^{r+1}\,d\mathrm{P}.$$

b. En déduire que, pour tout $a > 0$:
$$\int_\Omega |\mathrm{U}|\, 1_{(|\mathrm{U}| > a)}\,d\mathrm{P} = a\,\mathrm{P}(|\mathrm{U}| > a) + \int_a^{+\infty} \mathrm{P}(|\mathrm{U}| > x)\,dx.$$

c. Établir la double inégalité : $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \mathrm{P}(|\mathrm{U}| > j) \leqslant \int_\Omega |\mathrm{U}|\,d\mathrm{P} \leqslant 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \mathrm{P}(|\mathrm{U}| > j).$

d. Démontrer que, $\forall a > 0$, $\forall r \geqslant 0$:
$$\int_\Omega 1_{(|\mathrm{U}| \leqslant a)} |\mathrm{U}|^{r+1}\,d\mathrm{P} \leqslant (r+1) \int_0^a x^r \mathrm{P}(|\mathrm{U}| > x)\,dx.$$

2. *a.* Soit T une v.a.n. à valeurs dans $\overline{\mathrm{N}}$; démontrer que :
$$\mathrm{T} \in \mathscr{T} \iff \forall k \in \mathrm{N},\ (\mathrm{T} \leqslant k) \in \mathscr{A}_k.$$

b. Soit $\mathrm{T} \in \mathscr{T}$; on définit la famille $\mathscr{A}_{\mathrm{T}}$ de parties de Ω par :
$$\mathscr{A}_{\mathrm{T}} = \{\mathrm{A} \mid \mathrm{A} \cap (\mathrm{T} = k) \in \mathscr{A}_k,\ \forall k \in \mathrm{N}\}.$$

On admettra les propriétés immédiates suivantes, α *et* β :

α. $\mathscr{A}_{\mathrm{T}}$ est une sous-tribu de $\mathscr{A}$.

β. Si $\mathrm{X} \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$, X est $\mathscr{A}_{\mathrm{T}}$-mesurable si et seulement si, $\forall n \in \mathrm{N}$, la restriction de X à $(\mathrm{T} = n)$, notée, $\mathrm{X}_{|(\mathrm{T}=n)}$ est $\mathscr{A}_n$-mesurable.

Si $\mathrm{X} \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$, démontrer que : $\mathrm{E}(\mathrm{X}/\mathscr{A}_{\mathrm{T}}) = \displaystyle\sum_{n \in \overline{\mathrm{N}}} [1_{(\mathrm{T}=n)} \mathrm{E}(\mathrm{X}/\mathscr{A}_n)]$.

c. Soient $(\mathrm{X}_n)_{n \in \overline{\mathrm{N}}}$ une suite de v.a.n. telle que, $\forall n \in \overline{\mathrm{N}}$, X_n est $\mathscr{A}_n$-mesurable, et $\mathrm{T} \in \mathscr{T}$; vérifier que X_{T} est $\mathscr{A}_{\mathrm{T}}$-mesurable.

d. Si $\mathrm{S}, \mathrm{T} \in \mathscr{T}$ sont tels que $\mathrm{S} \leqslant \mathrm{T}$, démontrer que : $\mathscr{A}_{\mathrm{S}} \subset \mathscr{A}_{\mathrm{T}}$.

3. Une suite de v.a.r. $\mathrm{X} = (\mathrm{X}_n)_{n \in \mathrm{N}}$ est dite appartenir à la classe Q.M. (on note $\mathrm{X} \in$ Q.M.) si :

i. $\forall n \in \mathrm{N}$, $\mathrm{X}_n \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{A}_n, \mathrm{P})$.

ii. $\sup\limits_n \mathrm{EX}_n^- < +\infty$.

iii. $\mathrm{K}_{\mathrm{X}} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}\,|\mathrm{E}(\mathrm{X}_n - \mathrm{X}_{n-1}/\mathscr{A}_{n-1})| < +\infty$.

Tournez la page S.V.P.

• Soit $X \in$ Q.M. et soient deux réels a, b tels que $a < b$. On définit la suite d'applications de Ω dans $\overline{\mathbb{N}}$, $(\tau_m)_{m \in \mathbb{N}}$ par, $\forall \omega \in \Omega$:

$$\tau_0(\omega) = 0$$
$$\tau_1(\omega) = \operatorname{Inf}(n \in \mathbb{N} \mid X_n(\omega) \leq a)$$
$$\tau_2(\omega) = \operatorname{Inf}(n > \tau_1(\omega) \mid X_n(\omega) \geq b)$$
$$\dots\dots$$
$$\tau_{2m-1}(\omega) = \operatorname{Inf}(n > \tau_{2m-2}(\omega) \mid X_n(\omega) \leq a)$$
$$\tau_{2m}(\omega) = \operatorname{Inf}(n > \tau_{2m-1}(\omega) \mid X_n(\omega) \geq b)$$

où l'on convient que : $\operatorname{Inf} \varnothing = +\infty$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit les applications de Ω dans $\overline{\mathbb{N}}$, β_n et φ_n par, $\forall \omega \in \Omega$:

$$\beta_n(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \tau_2(\omega) > n \\ \operatorname{Max}(m \geq 1 \mid \tau_{2m}(\omega) \leq n) & \text{si} \quad \tau_2(\omega) \leq n, \end{cases}$$

$$\varphi_n(\omega) = 1_{\bigcup_{p=0}^{\infty} (\tau_{2p+1} < n \leq \tau_{2p+2})}(\omega)$$

($\beta_n(\omega)$ est le nombre de « traversées montantes » de la « bande » $\mathbb{N} \times]a, b[$ par la suite $((p, X_p(\omega)))_{p \in \mathbb{N}}$ avant l'indice n).

Un calcul algébrique et une majoration simples *(on ne demande pas de les faire)* conduisent à l'inégalité :

$$(*) \quad (b-a)\beta_n \leq 1_{(\tau_{2\beta_n+1} \leq n)} \cdot (X_n - a)^- + \sum_{i=1}^{n} (X_i - X_{i-1}) \varphi_i .$$

a. Démontrer que : $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\tau_m \in \mathscr{T}$.

b. Après avoir vérifié que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, φ_n est $\mathscr{A}_{n-1}$-mesurable, démontrer que :

$$E\,\beta_n \leq (b-a)^{-1} [\sup_i E(X_i - a)^- + K_X] < +\infty .$$

c. On définit $\beta_\infty = \sup_n \beta_n$; démontrer que : $E\,\beta_\infty < +\infty$.

d. En déduire que : $\forall a < b$, $P(\overline{\lim}\, X_n > b > a > \underline{\lim}\, X_n) = 0$.

e. Démontrer qu'existe une v.a.n. $X_\infty \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{A}, P)$ telle que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers X_∞.

4. Soit $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. telle que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{A}_n, P)$. Vérifier que l'un ou l'autre groupe de propriétés suivant implique que X appartient à la classe Q.M. :

i. $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n \geq 0$; $\sup_n EX_n < +\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E(X_n - X_{n-1}/\mathscr{A}_{n-1}) \geq 0$.

ii. $\sup_n E|X_n| < +\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E(X_n - X_{n-1}/\mathscr{A}_{n-1}) = 0$.

iii. $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n \geq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E(X_n - X_{n-1}/\mathscr{A}_{n-1}) \leq 0$.

5. Soit $U = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. telle que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{A}_n, P)$; on suppose qu'existent une constante $c > 0$ et une probabilité λ sur $(\mathbb{R}^+, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^+})$ vérifiant $\int_{\mathbb{R}^+} x\, d\lambda(x) < +\infty$, telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x > 0$: $P(|U_n| > x) \leq c\lambda(]x, +\infty[)$.

On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $U'_n = U_n\, 1_{(|U_n| \leq n)}$ et $V_n = \sum_{j=1}^{n} j^{-1} [U'_j - E(U'_j/\mathscr{A}_{j-1})]$.

a. Démontrer que : $E(U'_j - E(U'_j/\mathscr{A}_{j-1}))^2 = EU'^2_j - E[E(U'_j/\mathscr{A}_{j-1})]^2$.

b. α. Démontrer que : $E(V_n)^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} j^{-2} E(U'_j)^2$.

β. Déduire alors du 1. que : $\sup_n E(V_n)^2 < +\infty$.

c. Utiliser 4.ii. pour démontrer qu'existe une v.a.n. $V_\infty \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{A}, P)$ telle que la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers V_∞ et en déduire que la suite de terme général :

$n^{-1} \sum_{j=1}^{n} [U'_j - E(U'_j/\mathscr{A}_{j-1})]$ converge presque sûrement vers zéro.

(On utilisera, sans le démontrer, le lemme d'analyse : si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de réels telle que la série de terme général $n^{-1} x_n$ est convergente, alors la suite de terme général $n^{-1} \sum_{j=1}^{n} x_j$ converge vers zéro.)

d. Démontrer que : $P(\overline{\lim}\,(U_n \neq U'_n)) = 0$.

e. Démontrer que : $\lim_n E\,|E(U_n - U'_n/\mathscr{A}_{n-1})| = 0$.

f. Conclure alors à la convergence en probabilité vers 0 de la suite de terme général :

$$n^{-1} \sum_{j=1}^{n} [U_j - E(U_j/\mathscr{A}_{j-1})].$$

••• Dans les parties II et III on étudie l'évolution de la taille M_n d'une population d'individus ; $Y_{n,i}$ représentera le nombre de descendants du i-ième individu de la n-ième génération, V_{n+1} le nombre d'immigrants s'ajoutant à ces descendants. Précisément, $\{Y_{n,i} \mid n \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{N}^*\}$ est une famille de v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé, les v.a.r. $Y_{n,i}$, $i \in \mathbb{N}^*$, ont même loi μ_n, probabilité sur $\mathbb{N}$. $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$. On fait l'hypothèse que : la famille de v.a. $\{Y_{n,i}, V_n \mid n \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{N}^*\}$ est une famille de v.a. P-indépendantes.

On suppose enfin que pour tous $i \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, $Y_{n,i}$ et V_{n+1} admettent un moment d'ordre deux. On note :

$$p_n = EY_{n,i}, \quad m_n = EV_n \quad \text{et} \quad \sigma_n^2 = \sigma^2_{Y_{n,i}}.$$

On définit alors la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de v.a. à valeurs entières par :

$$M_0 = V_0 \qquad M_{n+1} = 1_{\mathbb{N}^*}(M_n) \sum_{k=1}^{M_n} Y_{n,k} + V_{n+1}.$$

(On fait la convention d'écriture $\sum_{k=1}^{0} Y_{n,k} = 0$)

Dorénavant, $\mathscr{A}_n$ est la tribu engendrée par les v.a. $M_0, M_1, \dots, M_n$.

Tournez la page S.V.P.

II

1.*a.* Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{E}(\mathrm{M}_{n+1}/\mathscr{A}_n) = p_n \mathrm{M}_n + m_{n+1}$.

b. En déduire la valeur de EM_n en fonction des suites $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.*a.* Si, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $p_n = p$ où $0 < p < 1$ et si : $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m_n < +\infty$, démontrer que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{EM}_n < +\infty$. Que dire de la convergence presque sûre de la suite $(\mathrm{M}_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

b. Si les suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont telles que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |1 - p_n| < +\infty$ et $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m_n < +\infty$, démontrer la convergence presque sûre de la suite $(\mathrm{M}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers une v.a.n. M_∞.

3. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, i \in \mathbb{N}^*$, F_n et G_n désignent les fonctions génératrices respectives de $\mathrm{Y}_{n,i}$ et V_n, c'est-à-dire les fonctions définies sur $]-1, 1]$ par :

$$\mathrm{F}_n(s) = \mathrm{E}\, s^{\mathrm{Y}_{n,i}} \quad \text{et} \quad \mathrm{G}_n(s) = \mathrm{E}\, s^{\mathrm{V}_n}.$$

a. Exprimer, pour $s \in]-1, 1]$, l'espérance conditionnelle $\mathrm{E}(s^{\mathrm{M}_{n+1}}/\mathscr{A}_n)$ en termes des fonctions F_n et G_{n+1}.

b. Si H_n est la fonction génératrice de M_n, en déduire que :

$$\forall\, s \in]-1, 1], \quad \mathrm{H}_{n+1}(s) = \mathrm{H}_n(\mathrm{F}_n(s))\,\mathrm{G}_{n+1}(s)$$

et calculer explicitement $\mathrm{H}_{n+1}(s)$ à l'aide des fonctions F_j et G_j $(j \leqslant n+1)$.

c. Dans le cas particulier où, $\forall\, i \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{P}(\mathrm{Y}_{n,i} = 1) = p_n$ et $\mathrm{P}(\mathrm{Y}_{n,i} = 0) = 1 - p_n$ $(0 < p_n < 1)$ et où V_n suit la loi de Poisson de paramètre λ_n, déterminer la loi de M_{n+1}.

Étudier la convergence en loi de la suite $(\mathrm{M}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où les suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers p et λ $(0 < p < 1$ et $\lambda > 0)$.

III

On suppose que, $\forall\, x \in \mathbb{N}$, existe une probabilité P_x sur $(\Omega, \mathscr{A})$ telle que :

i. La famille de v.a.r. $\{\mathrm{Y}_{n,i}, \mathrm{V}_n \mid n \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{N}^*\}$ est une famille de v.a.r. P_x-indépendantes,

ii. Les v.a. $\mathrm{Y}_{n,i}$, $n \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{N}^*$, ont même loi μ (probabilité sur $\mathbb{N}$, indépendante de x),

iii. Les v.a. V_n, $n \in \mathbb{N}^*$, ont même loi ν (probabilité sur $\mathbb{N}$, indépendante de x),

iv. $\mathrm{P}_x(\mathrm{V}_0 = x) = 1$,

v. $0 < \nu(\{0\}) < 1$, $\sum\limits_{x\in\mathbb{N}} x^4 \mu(\{x\}) < +\infty$, $\sum\limits_{x\in\mathbb{N}} x^4 \nu(\{x\}) < +\infty$.

On note p et m les moyennes respectives de $\mathrm{Y}_{n,i}$ et V_n, σ^2 et b^2 leurs variances, $\varphi = m(1-p)^{-1}$, $c^2 = b^2 + \sigma^2\varphi$.

On suppose que $0 < p < 1$.

Le but de cette partie est d'étudier la convergence en probabilité d'une suite d'estimateurs de p et m.

1. On définit la fonction d'ensemble P_ν sur $\mathscr{A}$ par : $\quad \mathrm{P}_\nu(\mathrm{A}) = \sum\limits_{x\in\mathbb{N}} \nu(\{x\})\,\mathrm{P}_x(\mathrm{A}) \quad \forall\, \mathrm{A} \in \mathscr{A}$.

a. Démontrer que : P_ν est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$ telle que $\mathrm{V}_0(\mathrm{P}_\nu) = \nu$ $(\mathrm{V}_0(\mathrm{P}_\nu)$ est la mesure image de P_ν par $\mathrm{V}_0)$.

b. $\mathrm{E}_x(\mathrm{Y}/\mathscr{A}_n)$ (respectivement $\mathrm{E}_\nu(\mathrm{Y}/\mathscr{A}_n)$) désignant l'espérance conditionnelle d'une v.a.n. Y par rapport à la sous-tribu $\mathscr{A}_n$ calculée avec la probabilité P_x (respectivement P_ν), démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute fonction bornée f sur $\mathbb{N}$, on a, $\forall\, x \in \mathbb{N}$, P_x-p.s. :

$$\mathrm{E}_x(f(\mathrm{M}_{n+1})/\mathscr{A}_n) = \lambda(\mathrm{M}_n, f),$$

et en déduire que, P_ν-p.s. : $\quad \mathrm{E}_\nu(f(\mathrm{M}_{n+1})/\mathscr{A}_n) = \lambda(\mathrm{M}_n, f)$,

où on a posé, $\forall\, y \in \mathbb{N}$: $\quad \lambda(y, f) = \sum\limits_{z\in\mathbb{N}} [f(z)\,[\mu^{*y} * \nu](\{z\})]$.

($\mu^{*y} * \nu$ est la y-ième convolution de μ convolée avec ν — on fait la convention : $\mu^{*0} * \nu = \nu$).

c. Si $f_1, \dots, f_k$ sont des fonctions bornées définies sur $\mathbb{N}$, démontrer que, P_ν- p.s. :

$$\mathrm{E}_\nu[f_1(\mathrm{M}_{n+1}) \dots f_k(\mathrm{M}_{n+k})/\mathscr{A}_n] = \mathrm{E}_{\mathrm{M}_n}[f_1(\mathrm{M}_1) \dots f_k(\mathrm{M}_k)]$$

(Si Y est une v.a.n., P_x-intégrable $\forall\, x \in \mathbb{N}$, $\mathrm{E}_{\mathrm{M}_n}(\mathrm{Y})$ est la composée de M_n avec l'application $x \longmapsto \mathrm{E}_x(\mathrm{Y})$, $\mathrm{E}_x(\mathrm{Y})$ étant la moyenne de Y par rapport à la probabilité P_x).

••• Si $p \in \mathbb{N}$, θ_p est l'application de l'espace des suites à valeurs dans $\overline{\mathbb{N}}$, noté $\overline{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$, dans lui-même, définie par : $\forall\, x \in \overline{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $[\theta_p(x)]_n = x_{n+p}$.

On définit de même θ_∞ par : $[\theta_\infty(x)]_n = \overline{\lim\limits_{p}}\, x_p$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Enfin, P_∞ est une probabilité quelconque sur $(\Omega, \mathscr{A})$ et $\mathrm{M}_\infty = \overline{\lim\limits_{n}}\, \mathrm{M}_n$.

d. Soit f une fonction bornée sur $\overline{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$, mesurable (par rapport à la plus petite tribu sur $\overline{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$ rendant mesurables les applications $y \longmapsto y_p$, $p \in \mathbb{N}$, de $\overline{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{N}$). On peut établir à partir du *c.* <u>*(on ne demande pas de le faire)*</u> que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, P_ν-p.s. : $\mathrm{E}_\nu[f(\theta_n(\mathrm{M}))/\mathscr{A}_n] = \mathrm{E}_{\mathrm{M}_n} f(\mathrm{M})$, où $\mathrm{M} = (\mathrm{M}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

En déduire, en utilisant les résultats du I.2., que : $\forall\, \mathrm{T} \in \mathscr{T}$,

$$\mathrm{P}_\nu\text{-p.s.} : \ \mathrm{E}_\nu[1_{(\mathrm{T}<+\infty)} f(\theta_\mathrm{T}(\mathrm{M}))/\mathscr{A}_\mathrm{T}] = 1_{(\mathrm{T}<+\infty)} \mathrm{E}_{\mathrm{M}_\mathrm{T}}[f(\mathrm{M})].$$

2. On définit la suite $(\mathrm{T}^p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ de v.a.n. par : $\forall\, \omega \in \Omega$,

$$\mathrm{T}^1(\omega) = \mathrm{Inf}(n \geqslant 1 \mid \mathrm{M}_n(\omega) = 0)$$

$$\mathrm{T}^{p+1}(\omega) = \mathrm{Inf}(n > \mathrm{T}^p(\omega) \mid \mathrm{M}_n(\omega) = 0) \quad \textit{(on convient que } \mathrm{Inf}(\varnothing) = +\infty\textit{)}.$$

Tournez la page S.V.P.

On admettra que T^p appartient à $\mathcal{T}$ *(même méthode de démonstration qu'en I.3.a.)*

On définit de plus l'application τ de $\overline{N}^N$ dans $\overline{N}$ par :

$$\forall y \in \overline{N}^N, \quad \tau(y) = \operatorname{Inf}(n \geq 1 \mid y_n = 0).$$

Alors *(ne pas le démontrer)*, sur $(T^p < +\infty)$: $T^{p+1} = T^p + \tau \circ \theta_{T^p}(M)$.

Enfin, on définit la v.a. $\underline{N}$ à valeurs dans $\overline{N}$ par : $\underline{N} = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{(M_n = 0)}$.

a. Démontrer que : $\forall m \in N^*, P_0(\underline{N} = m) = [P_0(T^1 < +\infty)]^{m-1} P_0(T^1 = +\infty)$.

b. En déduire que : $P_0(\underline{N} = +\infty)$ est égal à 1 ou 0 suivant que $P_0(T^1 < +\infty)$ est égal ou strictement inférieur à 1.

c. F *(respectivement* G*)* désigne la fonction génératrice de $Y_{n,k}$ *(respectivement* V_n*)* et, $F^{(n)}$ désigne la n-ième itérée de F. ($F^{(1)} = F$ et $F^{(n+1)} = F^{(n)} \circ F$). En utilisant l'inégalité de convexité (*valable aussi pour* G) :

$$F(s) \geq 1 + (s-1) F'(1^-), \ \forall s \in [0, 1],$$

démontrer que :

$$F^{(n+1)}(s) \geq 1 - p^n + p^n F(s), \qquad \forall s \in [0, 1];$$

En déduire que : $\varliminf_n H_n(0) > 0$.

d. Déduire alors de *b.* et *c.* que : $P_0(T^1 < +\infty) = 1$.

3. *a.* *Pour abréger,* T^1 *est noté* T. Démontrer que, pour $r = 1, 2, 3, 4$, on a :

$$E_0\left[\sum_{k=1}^{T} (M_k)^r\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(T \geq k)} E_0((M_k)^r / \mathcal{A}_{k-1}) \, dP_0.$$

b. $\forall k \in N^*$, on note : $c_k = \int_{(T \geq k)} M_k \, dP_0$.

Démontrer que : $\forall k \in N^*, \qquad c_k = m \sum_{j=1}^{k} p^{k-j} P_0(T \geq j)$.

c. Sous l'hypothèse : $E_0(T) < +\infty$, en déduire que : $E_0\left[\sum_{k=1}^{T} (M_k)^r\right] < +\infty$, pour $r = 1$.

(On admettra que le résultat demeure pour r = 2, 3, 4 — calculs semblables.)

- Par la suite, ν est une probabilité sur N, *fixée*, satisfaisant aux conditions du début du III.

On note $U = \sup_{0 \leq k \leq T} M_k$.

•• On admettra les propriétés (D^-) et (R^-) suivantes :

$$(D^-) \qquad \forall n \in N, \forall x > 0 : \quad P_\nu(M_n > x) \leq E_0[T 1_{(U > x)}]$$

$$(R^-) \qquad E_0[T^2] < +\infty.$$

4. On définit $Z_n = M_n - \varphi$. Démontrer que :

a.
$$n^{-1} \sum_{k=1}^{n} [M_k - E_\nu(M_k / \mathcal{A}_{k-1})] = (1-p) n^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n} Z_k\right) + p n^{-1}(Z_n - Z_0).$$

(On calculera $E_\nu(Z_k / \mathcal{A}_{k-1})$*.)*

b. La suite $\left(n^{-1} \sum_{j=1}^{n} Z_j\right)_{n \in N^*}$ converge en P_ν-probabilité vers 0. *(Utiliser I.5.f., le résultat admis au III.3.c., les propriétés* (D^-) et (R^-).)

5. *a.* En utilisant le résultat admis au III.3.*c.*, les propriétés (D^-) et (R^-), démontrer qu'existent une constante $\delta > 0$ et une probabilité λ' sur $(R^+, \mathcal{B}_{R^+})$ vérifiant $\int_{R^+} x \, d\lambda'(x) < +\infty$, telles que :

$$\forall n \in N, \forall x > 0 : \quad P_\nu(M_n^2 > x) \leq \delta \cdot \lambda'(]x, +\infty[).$$

b. Remarquant que les propriétés du III.1.*b.* sont encore vraies pour une fonction f positive quelconque, calculer $E_\nu[(M_n)^2 / \mathcal{A}_{n-1}]$.

c. En suivant la même démarche qu'au III.4., démontrer que la suite de terme général :

$(1 - p^2) n^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n} (Z_k)^2\right) + p^2 n^{-1}[(Z_n)^2 - (Z_0)^2]$ converge en P_ν-probabilité vers c^2, et en déduire que la suite $\left(n^{-1} \sum_{k=1}^{n} (Z_k)^2\right)_{n \in N}$ converge en P_ν-probabilité vers une limite que l'on précisera.

6. *a.* Déduire du 5.*a.* qu'existent une constante δ' et une probabilité ρ sur $(R^+, \mathcal{B}_{R^+})$ vérifiant $\int_{R^+} x \, d\rho(x) < +\infty$ telles que : $\quad \forall n \in N, \forall x > 0 : \quad P_\nu(M_n M_{n+1} > x) \leq \delta' \cdot \rho(]x, +\infty[)$.

b. En déduire que la suite $\left(n^{-1} \sum_{k=1}^{n} Z_k Z_{k+1}\right)_{n \in N^*}$ converge en P_ν-probabilité vers une limite que l'on identifiera.

c. Étudier alors la convergence en P_ν-probabilité et identifier la limite des trois suites de terme général :

$$C_n = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} M_i,$$

$$D_n = \left[\sum_{i=1}^{n} (M_{i+1} - C_n)(M_i - C_n)\right] \left[\sum_{i=1}^{n} (M_i - C_n)^2\right]^{-1},$$

$$G_n = C_n(1 - D_n).$$