PROBABILITES ET STATISTIQUES

Session de 1988

AVERTISSEMENT : La deuxième partie est indépendante de la première. On pourra admettre les résultats demandés par l'énoncé pour poursuivre l'étude des questions à condition de l'indiquer clairement.

L'objet du problème est l'étude du comportement asymptotique de certaines marches au hasard $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ sur quelques groupes finis G.

Plus précisément, n étant un paramètre lié à la structure du groupe G et croissant avec son cardinal, on détermine une fonction K de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour n assez grand, Y_k ait une loi voisine de la loi uniforme sur G si et seulement si $k > K(n)$.

La loi de Y_k est comparée à la loi uniforme grâce à la distance en variation introduite dans les préliminaires. Cette distance est majorée dans la première partie grâce à la fonction caractéristique (ou transformée de Fourier), dans la seconde partie grâce à l'introduction d'un temps d'arrêt adéquat.

{Les indications concernant les situations concrètes modélisées dans le problème sont destinées à aider les candidats dans leur recherche mais peuvent être ignorées pour répondre aux questions posées}

PRELIMINAIRES

Dans tout le problème, on se fixe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$; toutes les variables aléatoires sont définies sur cet espace.

Q.1. Etant donnés un ensemble fini G, de cardinal card G, et une variable aléatoire X à valeurs dans $(G, \mathcal{P}(G))$, on note p sa loi de distribution sur G, c'est-à-dire que, pour tout $A \subset G$, $p(A) = P(X \in A)$

et, pour tout g dans G, $p_g = P(X = g)$.

Soit Y une autre variable aléatoire à valeurs dans $(G, \mathcal{P}(G))$ de loi q ; on pose: $\quad \|p-q\| = \max_{A \subset G} |p(A) - q(A)|$.

1.1. Montrer que $\|p-q\| \leq 1$.

1.2. Montrer que $\|p-q\| = \frac{1}{2} \sum_{g \in G} |p_g - q_g|$.

1.3. Montrer que $\|p-q\| = \frac{1}{2} \max_{\|f\|=1} |E(f(X)) - E(f(Y))|$

et que $\|p-q\| = \frac{1}{2} \max_{\|f\|\leq 1} |E(f(X)) - E(f(Y))|$

où f parcourt l'ensemble des applications de G dans $\mathbb{R}$, où $\|f\| = \max_{g \in G} |f(g)|$ et où $E(f(X))$ désigne l'espérance mathématique de la variable aléatoire $f(X)$.

1.4. Montrer que, étant donnée une troisième variable aléatoire Z à valeurs dans $(G, \mathcal{P}(G))$ et de loi de distribution r, on a :

$$\|p-r\| \leq \|p-q\| + \|q-r\|.$$

PREMIERE PARTIE

(N.B.: La question Q.5. et les questions suivantes sont indépendantes).

Dans cette partie, G est un groupe commutatif fini dont on note + la loi de composition et 0 l'élément neutre.

Q.2. On appelle *caractère* de G un homomorphisme χ de (G, +) dans $(\mathbb{C}^*, .)$, groupe multiplicatif des nombres complexes non nuls. On note $\hat{G}$ l'ensemble des caractères de G et $\mathbb{1}$ le caractère identique à 1 sur G.

2.1. Soit χ un caractère de G ; montrer que $\chi(0) = 1$ et que, pour tout g de G, $\quad |\chi(g)| = 1$ et $\chi(-g) = \overline{\chi(g)}$ (imaginaire conjuguée de $\chi(g)$).

2.2. n appartenant à l'ensemble $\mathbb{N}^*$ des entiers non nuls, déterminer $\hat{G}$ dans les deux cas suivants :

a) $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, ensemble des entiers modulo n muni de l'addition, que l'on notera $\mathbb{Z}_n$ et dont on notera les éléments 0, 1, ..., n-1.

T.S.V.P.

b) $G = \mathbb{Z}_2^n$, ensemble des n-uplets $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ avec g_i égal à 0 ou à 1, muni de l'addition modulo 2 composante par composante. On exprimera g à l'aide des n éléments δ^i de G dont les composantes $(\delta^i)_j$ sont définies par :

pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $\left\{\begin{array}{l} 1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n \end{array}\right\}$, $(\delta^i)_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$;

on exprimera alors $\chi(g)$ à l'aide des $\chi(\delta^i)$ et de l'ensemble $A_g = \{j : g_j = 1\}$. On pourra poser $B_\chi = \{i : \chi(\delta^i) = -1\}$.

2.3. Dans les deux cas a) et b) ci-dessus, montrer qu'on peut établir une bijection entre G et $\hat{G}$ et que, étant donnés deux caractères χ et χ', on a :

$$\sum_{g \in G} \chi(g)\, \overline{\chi'(g)} = \begin{cases} \text{card } G & \text{si } \chi = \chi' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

2.4. Dans les deux cas a) et b) ci-dessus, montrer que, étant donné g dans G,

$$\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(g) = \begin{cases} \text{card } \hat{G} & \text{si } g = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Q.3. Etant donnée une variable aléatoire X à valeurs dans $(G, \mathcal{P}(G))$ de loi de distribution $p_X = (p_g)_{g \in G}$, on appelle <u>fonction caractéristique</u> de X (ou de la loi p_X) et on note $\hat{p}_X$ la fonction de $\hat{G}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\hat{p}_X(\chi) = \sum_{g \in G} \chi(g)\, p_g .$$

3.1. Calculer $\hat{p}_X(\mathbb{1})$.

3.2. Montrer que, si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $(G, \mathcal{P}(G))$, on a :

$$\hat{p}_{X+Y} = \hat{p}_X \cdot \hat{p}_Y .$$

3.3. On appelle loi uniforme sur G la loi de distribution u définie par :

pour tout g de G, $u_g = \dfrac{1}{\text{card } G}$.

Montrer que, si une variable aléatoire U a pour loi u, quelle que soit la variable aléatoire X à valeurs dans $(G, \mathcal{P}(G))$ indépendante de U, $X + U$ a aussi pour loi u.

Q.4. Dans les deux cas a) et b) de Q.2, c'est-à-dire pour $G = \mathbb{Z}_n$ et pour $G = \mathbb{Z}_2^n$,

4.1. Déterminer $\hat{u}$;

4.2. Montrer que, pour toute loi p sur G, on a :

pour tout g dans G, $p_g = \dfrac{1}{\text{card } G} \displaystyle\sum_{\chi \in \hat{G}} \hat{p}(\chi)\, \overline{\chi(g)}$;

4.3. Montrer que, quelles que soient les deux lois p et p' sur G,

$$\sum_{g \in G} p_g\, p'_g = \frac{1}{\text{card } G} \sum_{\chi \in \hat{G}} \hat{p}(\chi)\, \overline{\hat{p}'(\chi)}$$

$$\text{et} \quad \sum_{g \in G} |p_g - p'_g|^2 = \frac{1}{\text{card } G} \sum_{\chi \in \hat{G}} |\hat{p}(\chi) - \hat{p}'(\chi)|^2 .$$

4.4. En déduire que, pour toute loi p sur G,

$$\|p-u\|^2 \leqslant \frac{1}{4} \sum_{\chi \neq \mathbb{1}} |\hat{p}(\chi)|^2$$

(on pourra appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

Dans les deux questions suivantes, on se donne une loi de probabilité q particulière sur G et une variable aléatoire X de loi q.

On appelle "<u>marche au hasard de pas X sur G</u>" une suite $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ où Y_k est la somme de k variables indépendantes de même loi q ; on note q^k la loi de Y_k.

T.S.V.P.

Q.5. Dans cette question $G = \mathbb{Z}_n$ et on suppose n impair supérieur à 2. On définit la loi de probabilité q sur G par $q_1 = \frac{1}{2}$, $q_{n-1} = \frac{1}{2}$ (et donc $q_k = 0$ pour les valeurs de k distinctes de 1 et de n-1).

{On peut interpréter $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ comme une marche au hasard sur les n sommets d'un polygone régulier convexe, dont chaque pas conduit, avec la même probabilité $\frac{1}{2}$, d'un sommet à l'un des deux sommets voisins}

5.1. Montrer qu'il existe une constante α dans $\mathbb{R}^+$, indépendante de k et de n, telle que : $\|q^k - u\| \leqslant \alpha \left(\cos \frac{\pi}{n}\right)^k$.
(On pourra démontrer puis utiliser l'inégalité suivante valable pour $0 \leqslant j \leqslant \frac{n-1}{2}$: $\cos \frac{\pi j}{n} \leqslant \left(\cos \frac{\pi}{n}\right)^j$)

5.2. Soit f la fonction de $\mathbb{Z}_n$ dans $\mathbb{R}$ définie par : pour $j \in \mathbb{Z}_n$, $f(j) = (-1)^j \cos \frac{j\pi}{n}$; soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $\mathbb{Z}_n$.
Calculer les espérances mathématiques $E(f(U))$ et $E(f(Y_k))$.

5.3. En déduire $\|q^k - u\| \geqslant \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{n}\right)^k$.

5.4. Dans cette question on fait varier simultanément k et n :
on pose $n = 2p+1$ et

$$\|q^k - u\| = \psi(k,p).$$

K étant une application de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$, montrer que $\left(\psi(K(p),p)\right)_{p \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0 si et seulement si $\left(\frac{K(p)}{p^2}\right)_{p \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $+\infty$.

Q.6. Dans cette question et dans les deux suivantes, Q.7 et Q.8, n appartient à $\mathbb{N}^*$ et $G = \mathbb{Z}_2^n$; on considère la loi de probabilité q sur G définie par $q_0 = \frac{1}{n+1}$ et, pour tout i de $\mathbb{N}^*$ tel que $1 \leqslant i \leqslant n$,
$q_{\delta^i} = \frac{1}{n+1}$ $\left(\text{on rappelle que } (\delta^i)_j = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}\right)$.

6.1. Montrer que, si l'on note $[\![\chi]\!] = \operatorname{card}\{i : \chi(\delta^i) = -1\}$,

on a $\hat{q}(\chi) = 1 - 2 \frac{[\![\chi]\!]}{n+1}$.

6.2. On considère une variable aléatoire X de loi q et la marche au hasard $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de pas X sur $\mathbb{Z}_2^n$.

{On peut interpréter $\mathbb{Z}_2^n$ comme décrivant l'ensemble des configurations de deux urnes U_0 et U_1 contenant au total $n+1$ boules numérotées de 0 à n ; la boule numéro 0 est toujours dans U_0 ; pour $1 \leqslant i \leqslant n$, si la boule numérotée i est dans U_0, on pose $g_i = 0$; si elle est dans U_1, on pose $g_i = 1$. On tire au hasard un des $n+1$ numéros ; si c'est 0 on ne change rien, si c'est j avec $1 \leqslant j \leqslant n$, on change d'urne la boule numéro j. On suppose qu'au départ toutes les boules sont dans U_0 et que les tirages successifs sont indépendants ; alors Y_k donne la configuration après le $k^{\text{ème}}$ tirage}

Montrer que $\|q^k - u\|^2 \leqslant \frac{1}{4} \left(\exp\left((n+1) \exp\left(-\frac{4k}{n+1}\right)\right) - 1\right)$.

Q.7. Soit f la fonction de $\mathbb{Z}_2^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(g) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{g_i} = n - 2 \operatorname{card} A_g$$

(on rappelle que $A_g = \{i : g_i = 1\}$).
Soit U une variable aléatoire de loi uniforme u sur $\mathbb{Z}_2^n$.

7.1. Calculer l'espérance $E(f(U))$ et la variance $\operatorname{Var}(f(U))$ de $f(U)$.

7.2. On pose $D = \left\{ g \in \mathbb{Z}_2^n : f(g) \geqslant \frac{e^{-2c}\sqrt{n}}{2} \right\}$ où c est un réel fixé.
Montrer que $u(D) \leqslant 4 e^{4c}$.

7.3. Calculer $E(f(Y_k))$ et $\operatorname{Var}(f(Y_k))$.

7.4. Pour quelles valeurs de k a-t-on $E(f(Y_k)) > \frac{e^{-2c}\sqrt{n}}{2}$?

Pour une telle valeur de k on pose $\varphi(k,n) = \dfrac{\operatorname{Var}(f(Y_k))}{\left(\frac{e^{-2c}\sqrt{n}}{2} - E(f(Y_k))\right)^2}$.
Montrer que $q^k(D) \geqslant 1 - \varphi(k,n)$.

T.S.V.P.

7.5. Déduire de 7.2 et 7.4 que $\quad \|q^k - u\| \geqslant 1 - \varphi(k,n) - 4\, e^{4c}$.

Q.8. Dans cette question on fait varier simultanément k et n et on pose $\|q^k - u\| = \lambda(k,n)$.

8.1. Notant $[a]$ le plus grand entier inférieur ou égal à a , on pose

$$K_1(n) = \left[\frac{1}{4}\,(n+1)\,\ell n\, n + c\,(n+1)\right].$$

Montrer qu'il existe n_o dans $\mathbb{N}^*$ tel que $\varphi(K_1(n), n)$ soit définie pour $n \geqslant n_o$ et étudier le comportement de la suite $\left(\varphi(K_1(n),n)\right)_{n \geqslant n_o}$.

8.2. Déduire de 7.5 une minoration de $\lambda(K_1(n), n)$.

8.3. Pour t réel strictement positif on pose

$$K_2\,(n,t) = \left[\frac{t}{4}\,(n+1)\,\ell n\;\; n\right].$$

Etudier la convergence et la limite de la suite $\left(\lambda(K_2(n,t), n)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ successivement pour $0 < t < 1$ puis pour $t > 1$ en utilisant 6.2.

Comparer ce résultat avec le résultat obtenu en 5.4.

DEUXIEME PARTIE

Dans cette partie, G est un groupe non commutatif fini dont on note $\bullet$ la loi de composition.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $(G, \mathcal{P}(G))$ de loi q et $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi q . On appelle "<u>marche au hasard de pas X sur G</u>" la suite $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ où $\quad Y_1 = X_1 \quad$ et, si $k \geqslant 2$, $\; Y_k = X_k \bullet Y_{k-1}$.

Soit, pour tout entier $k \geqslant 1$, $\mathcal{A}_k$ la plus petite sous-tribu de $\mathcal{A}$ telle que, pour tout j de $\mathbb{N}^*$ tel que $1 \leqslant j \leqslant k$, Y_j soit une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{A}_k)$ dans $(G, \mathcal{P}(G))$.

On note q^k la loi de Y_k et u la loi uniforme sur G (pour tout g de G , $\; u_g = \frac{1}{\text{card } G}$).

Q.9. Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\left(\overline{\mathbb{N}^*}, \mathcal{P}(\overline{\mathbb{N}^*})\right)$ (où $\overline{\mathbb{N}^*} = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$) telle que :

a) T est un "<u>temps d'arrêt</u>" par rapport à la suite de tribus $(\mathcal{A}_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, c'est-à-dire que : pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $\{T = k\}$ appartient à $\mathcal{A}_k$.

b) Pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $P\,(T{=}k,\ Y_k{=}g)$ ne dépend pas de g dans G .

9.1. Montrer que, si la condition a) ci-dessus est satisfaite, la condition b) est équivalente à l'une des deux conditions b') ou b") suivantes :

b') Pour tout g dans G , pour tout k dans $\mathbb{N}^*$ tel que $P\,(T{=}k) > 0$, la probabilité conditionnelle que $Y_k = g$ quand $T = k$, notée $P\,(Y_k = g \mid T = k)$, est égale à u_g .

b") Pour tout g dans G , pour tout k dans $\mathbb{N}^*$ tel que $P\,(T \leqslant k) > 0$, on a $P\,(Y_k{=}g \mid T \leqslant k) = u_g$.

9.2. On pose, pour tout k dans $\mathbb{N}^*$,

$$s\,(k) = \underset{g \in G}{\text{Max}} \;\{1 - P\,(Y_k{=}g).\ \text{card } G\}.$$

Montrer que $\|q^k - u\| \leqslant s(k) \leqslant P\,(T > k)$.

Q.10. Dans cette question et dans les suivantes, G est le groupe S_n des permutations σ de l'ensemble des entiers i tels que $1 \leqslant i \leqslant n$.

On note $\sigma(i)$ l'image de i par σ .

On considère pour i entier tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, la permutation τ_i définie par : $\quad \tau_i\,(1) = i$

$$\tau_i\,(j) = \begin{cases} j-1 & \text{pour } \; 2 \leqslant j \leqslant i \quad (\text{si } \; i \geqslant 2) \\ j & \text{pour } \; i+1 \leqslant j \leqslant n \quad (\text{si } \; i \leqslant n-1) \end{cases}.$$

T.S.V.P.

{On peut interpréter S_n comme l'ensemble des battages d'un paquet de n cartes numérotées de 1 à n. Si l'on effectue le battage σ sur un paquet ordonné (de la carte du dessus numérotée 1 à la carte du dessous numérotée n) $\sigma(i)$ est la position de la carte numérotée i dans le paquet battu. Le battage particulier τ_i consiste à prendre la carte du dessus du paquet et à l'insérer en $i^{ème}$ position dans le paquet sans changer l'ordre relatif des autres cartes}

La loi q de la variable aléatoire X à valeurs dans $(S_n, \mathcal{P}(S_n))$ est définie par :

pour $1 \leq i \leq n$, $\quad q_{\tau_i} = P(X = \tau_i) = \dfrac{1}{n}$.

{Ce qui revient à choisir au hasard le nouvel emplacement de la carte du dessus dans ce battage élémentaire}

Soit $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ la marche au hasard de pas X sur S_n. Pour chaque ω dans Ω et chaque k dans $\mathbb{N}^*$, on note $Y_k(\omega)$ la valeur dans S_n de la variable aléatoire Y_k et $Y_k(\omega, i)$ l'image de l'entier i $(1 \leq i \leq n)$ par la permutation $Y_k(\omega)$ *{$Y_k(\omega, i)$ est donc la position de la carte numérotée i après k battages élémentaires}*.

On définit les $n-1$ applications $T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}$ de Ω dans $\overline{\mathbb{N}^*}$ par :

pour tout ω dans Ω, pour tout j de $\mathbb{N}^*$ tel que $1 \leq j \leq n-1$,

$$T_j(\omega) = \begin{cases} \mathrm{Min}\,\{k : Y_k(\omega,n) = n-j\} & \text{s'il existe } k \text{ dans } \mathbb{N}^* \text{ tel que } Y_k(\omega,n) = n-j \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

et on pose $T = T_{n-1} + 1$.

{Le $T_j^{ème}$ battage élémentaire est donc le premier pour lequel on insère une $j^{ème}$ carte au-dessous de la carte numérotée n, le $T^{ème}$ est le premier pour lequel cette carte numérotée n est reprise au-dessus du paquet et remise dedans.}

10.1. Montrer que $T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}, T$ sont des temps d'arrêt par rapport à la suite $(\mathcal{A}_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$.

10.2. Déterminer la loi de distribution des variables aléatoires T_1 et $T_i - T_{i-1}$ pour $2 \leq i \leq n-1$.

10.3. Montrer que ces variables sont presque sûrement finies.

10.4. Montrer qu'elles sont indépendantes.

10.5. Calculer l'espérance mathématique et la variance de $T_1, T_i - T_{i-1}, T$.

10.6. Montrer que T satisfait les conditions a) et b) de Q.9 *{c'est-à-dire qu'on peut considérer que le paquet est bien mélangé après le $T^{ème}$ battage}*.

Q.11. *{Problème du collectionneur d'images qui recueille les images au hasard et souhaite compléter sa collection}*

On considère une suite $\{Z_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{1, 2, \ldots, n\}$ dont la distribution est donnée par :

pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, pour tout j entier tel que $1 \leq j \leq n$, $\quad P(Z_k = j) = \dfrac{1}{n}$.

Pour tout ω de Ω et tout m de $\mathbb{N}^*$ on pose

$$C_m(\omega) = \mathrm{card}\,\{Z_1(\omega), Z_2(\omega), \ldots, Z_m(\omega)\}$$

égal au nombre de valeurs distinctes de la suite $\{Z_1(\omega), \ldots, Z_m(\omega)\}$.

Pour tout k entier tel que $1 \leq k \leq n$ on définit l'application V_k de Ω dans $\overline{\mathbb{N}^*}$ par : pour tout ω de Ω,

$$V_k(\omega) = \begin{cases} \mathrm{Min}\,\{m : C_m(\omega) = k\} & \text{s'il existe } m \text{ dans } \mathbb{N}^* \text{ tel que } C_m(\omega) = k \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

{c'est quand on recueille la $V_k^{ème}$ image que la collection comporte pour la première fois k images distinctes}.

T.S.V.P.

11.1. Montrer que V_1 et les $V_i - V_{i-1}$ pour $2 \leqslant i \leqslant n$ sont des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\left(\overline{\mathbb{N}^*}, \mathcal{P}(\overline{\mathbb{N}^*})\right)$.

11.2. Déterminer leur loi de distribution.

11.3. En déduire qu'elles sont presque sûrement finies et que V_n a même loi que la variable T définie à la question Q.10.

11.4. Montrer que $P(V_n > k) \leqslant n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k$ pour tout k dans $\mathbb{N}$

(on pourra considérer les évènements définis pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et k dans $\mathbb{N}^*$ par $A_{i,k} = \bigcap_{1 \leqslant j \leqslant k} \{z_j \neq i\}$).

Q.12. Pour tout j entier tel que $2 \leqslant j \leqslant n$, on considère le sous ensemble B_j de S_n formé des permutations σ telles que

$$\sigma(n - j+1) < \sigma(n - j+2) \quad \dots < \sigma(n).$$

{B_j *s'interprète comme l'ensemble des battages qui laissent les j cartes du dessous du paquet initial dans leur ordre initial.*}

12.1. Calculer $u(B_j)$.

12.2. Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $\quad q^k(B_j) \geqslant P(T - T_{j-1} > k)$.

Q.13. Dans cette question on fait varier simultanément k et n et on pose

$$||q^k - u|| = \lambda(k,n).$$

On pose $K_3(n) = [n \ln n + cn]$ où c appartient à $\mathbb{R}$.

On note $\overline{\lim}_{n\,\infty}$ et $\underline{\lim}_{n\,\infty}$ la limite supérieure et la limite inférieure.

13.1. Montrer que, pour tout c dans $\mathbb{R}$, $\quad \overline{\lim}_{n\,\infty} \lambda(K_3(n), n) \leqslant e^{-c}$.

13.2. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut choisir $c < 0$ tel que

$$\underline{\lim}_{n\,\infty} \lambda(K_3(n),n) \geqslant 1 - \varepsilon.$$

13.3. On pose $K_4(n, t) = [t\, n \ln n]$.

Etudier, pour $0 < t < 1$ et pour $t > 1$, la suite $\lambda(K_4(n, t), n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

MATHEMATIQUES DE L'INFORMATIQUE

Session de 1988

Le but du problème est d'étudier les performances d'un certain nombre d'algorithmes qui opèrent sur des données de type géométrique, à savoir des points d'un espace affine euclidien de dimension 2. Chaque point est codé par le couple de ses coordonnées.

On construira en particulier de plusieurs manières l'enveloppe convexe d'un ensemble S de *n* points. Il s'agit du plus petit ensemble convexe qui contient S ou, de manière équivalente, de l'intersection de tous les demi-plans qui contiennent S. Nous noterons *conv*(S) le polygone frontière de cet ensemble convexe, et nous considérerons *conv*(S) comme la suite finie de ses sommets, ordonnés arbitrairement dans le sens positif.

Pour ne pas alourdir les discussions, on supposera dans tout le problème qu'aucun « cas particulier » ne se produit; en particulier, deux points de S n'auront jamais la même abscisse, ni la même ordonnée, et trois points de S ne seront jamais alignés.

Les correcteurs tiendront compte de la clarté et de la précision de la rédaction.

PREMIERE PARTIE

L'algorithme informel A1 ci-dessous calcule l'enveloppe convexe incrémentalement, en ajoutant un par un les points de S.

ALGORITHME A1

Prétraitement: réétiqueter les points de S de façon que la suite $s_1, \dots, s_n$ soit triée par abscisses croissantes.

Traitement: (on suppose $n \geq 3$)
Initialisation : Construire $C_3 = conv(s_1, s_2, s_3)$
Itération : **pour** i **de** 4 **à** n **faire**
$\{C_{i-1} = conv(s_1, \dots, s_{i-1})\}$
$C_i \leftarrow$ mise-à-jour(C_{i-1}, s_i)
$\{C_i = conv(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i)\}$

1°) Montrer qu'il existe deux points u et v du contour C_{i-1} vérifiant

$$C_{i-1} = \alpha, u, \beta, v, \gamma$$
$$C_i = \alpha, u, s_i, v, \gamma$$
$$s_{i-1} \in u, \beta, v$$

où α, β et γ sont des suites (éventuellement vides) de points consécutifs de S.

En déduire une version informelle de la procédure mise-à-jour(C, s).

2°) Proposer une structure de données pour représenter C_i.

3°) Montrer que la procédure mise-à-jour(C_{i-1}, s_i), dans la phase itérative de A1, prend un temps $O(i)$.

4°) En évaluant le nombre maximum de fois que chaque point de S est examiné au cours de l'exécution de A1, montrer que le temps total de l'étape itérative est aussi en $O(n)$.

T.S.V.P.