PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

DÉFINITIONS, NOTATIONS ET RAPPELS

1° Dans tout le problème $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ désignent respectivement les ensembles des entiers naturels, des entiers relatifs, des rationnels, des réels et des complexes. Si n est un entier ($n \geqslant 1$), $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des n-uples de réels. Si $(x_i\,,\ i \in \mathrm{I})$ désigne une famille de nombres réels, on note $\sup\limits_{i \in \mathrm{I}} x_i$ leur borne supérieure et $\inf\limits_{i \in \mathrm{I}} x_i$ leur borne inférieure.

$$\mathbb{R}_+ = \{ x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 0 \} \ ; \qquad \mathbb{R}_+^* = \{ x \in \mathbb{R},\ x > 0 \} \ ; \qquad \overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{ +\infty \}.$$

2° Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé. On dit que V est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ si V est une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}^n, \mathcal{R}^n)$ où $\mathcal{R}^n$ désigne la tribu borélienne de $\mathbb{R}^n$. Lorsque $n = 1$ on dit que V est une variable aléatoire réelle. On note $\mathrm{P_V}$ la loi de V, c'est-à-dire la probabilité sur $\mathcal{R}^n$ image de P par V. Par abus de langage, V désigne aussi la classe de P-équivalence de l'application V. Pour tout A de $\mathcal{R}^n$, on note

$$\{ \mathrm{X} \in \mathrm{A} \} = \mathrm{X}^{-1}(\mathrm{A})\,.$$

La notion de variable aléatoire complexe est obtenue en identifiant $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$.

On note 1_A la fonction indicatrice d'un ensemble $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$, c'est-à-dire la variable aléatoire réelle qui vaut 1 sur A, et 0 sur le complémentaire de A.

3° Si $(\mathrm{V}_i\,,\ i \in \mathrm{I})$ est une famille de variables aléatoires (à valeurs dans $\mathbb{R}^n$) on note $\sigma\,(\mathrm{V}_i\,,\ i \in \mathrm{I})$ la plus petite sous-tribu de $\mathcal{A}$ rendant mesurables les applications V_i de Ω dans $\mathbb{R}^n$ pour tout $i \in \mathrm{I}$. Une application mesurable de $(\mathbb{R}^n, \mathcal{R}^n)$ dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{R}^d)$ est dite borélienne.

4° Un processus ξ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est la donnée d'une famille $(\xi_t\,,\ t \in \mathbb{R}_+)$ de variables aléatoires d-dimensionnelles. On dit que ξ est *(presque sûrement) continu* s'il existe $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$, de probabilité 1 tel que : pour tout ω de A, l'application $t \in \mathbb{R}_+ \to \xi_t(\omega) \in \mathbb{R}^d$ est continue.

On dit que deux processus *continus* ξ et ξ' à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ *ont même loi* si : pour toute suite finie $t_0, t_1, \ldots, t_n$ de réels positifs, les lois de $(\xi_{t_0}, \xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_n})$ et $(\xi'_{t_0}, \xi'_{t_1}, \ldots, \xi'_{t_n})$ coïncident.

5° On note $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ l'espace vectoriel des classes de P-équivalence de variables (réelles ou complexes) sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ dont le module est de carré intégrable, muni de la norme $\|\,.\,\|_2$. Si V est une variable aléatoire, on note $\mathrm{V} \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ par l'abus de langage précisé au 2°.

6° Soient $\mathcal{F}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$ et V une variable aléatoire intégrable. $\mathrm{E}[\mathrm{V} \mid \mathcal{F}]$ désigne l'espérance conditionnelle de V par rapport à $\mathcal{F}$: $\mathrm{E}[\mathrm{V} \mid \mathcal{F}]$ est $\mathcal{F}$-mesurable et vérifie $\mathrm{E}[\mathrm{V}\, 1_\mathrm{F}] = \mathrm{E}[\mathrm{E}[\mathrm{V} \mid \mathcal{F}]\, 1_\mathrm{F}]$ pour tout ensemble $\mathcal{F}$-mesurable F.

Si V est de la forme 1_A $(\mathrm{A} \in \mathcal{A})$ on notera aussi $\mathrm{E}[1_\mathrm{A} \mid \mathcal{F}]$ sous la forme $\mathrm{P}[\mathrm{A} \mid \mathcal{F}]$; si $\mathcal{F}$ est la tribu $\sigma\,(\mathrm{M})$ engendrée par la variable aléatoire M, on abrégera $\mathrm{E}[\,.\mid \mathcal{F}]$ par $\mathrm{E}[\,.\mid \mathrm{M}]$.

7° Une variable aléatoire V (respectivement un processus ξ) est dit indépendant d'une sous-tribu $\mathcal{H}$ de $\mathcal{A}$ si les tribus $\sigma(V)$ et $\mathcal{H}$ (respectivement $\sigma(\xi_t, t \in \mathbb{R}_+)$ et $\mathcal{H}$) sont indépendantes.

Soient $(N_i, i \in I)$ et $(M_k, k \in K)$ deux familles de variables (à valeurs dans $\mathbb{R}^d$). On rappelle que les tribus $\sigma(N_i, i \in I)$ et $\sigma(M_k, k \in K)$ qu'elles engendrent sont indépendantes dès que : pour toute famille finie f_1, $f_2, \dots, f_n$, $g_1, \dots, g_m$ de fonctions boréliennes bornées (ou seulement continues bornées) sur $\mathbb{R}^d$ et pour tout $(i_1, \dots, i_n) \in I^n$, pour tout $(k_1, \dots, k_m) \in K^m$,

$$E[f_1(N_{i_1}) \dots f_n(N_{i_n})\, g_1(M_{k_1}) \dots g_m(M_{k_m})] = E[f_1(N_{i_1}) \dots f_n(N_{i_n})] \,.\, E[g_1(M_{k_1}) \dots g_m(M_{k_m})].$$

8° On dit de même que des éléments aléatoires (ensembles, variables, tribus, processus, ...) sont *indépendants conditionnellement à un événement* A de $\mathcal{A}$ s'ils sont indépendants lorsque l'on munit $(\Omega, \mathcal{A})$ de la probabilité conditionnelle $P[\,.\,|A] = \dfrac{P[\,.\cap A]}{P[A]}$.

9° Soient $\mathcal{F}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$, M une variable aléatoire $\mathcal{F}$-mesurable (à valeurs dans $\mathbb{R}^m$) et N une variable aléatoire (à valeurs dans $\mathbb{R}^n$) indépendante de $\mathcal{F}$. Si φ est borélienne bornée sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$,

$$E[\varphi(M, N) \mid \mathcal{F}] = \int \varphi(M, x)\, P_N(dx).$$

10° Une écriture du type : $\int_a^b f(t)\, dt$ $\left(\text{resp. } \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\, dx\right)$ indique que l'on intègre la fonction (borélienne) f (resp. g) par rapport à la mesure de Lebesgue sur l'intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ (resp. sur $\mathbb{R}^n$).

11° Tous les éléments aléatoires introduits dans la suite sont supposés définis sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

PREMIÈRE PARTIE

1° Soit $(V_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, ayant un moment d'ordre 2 et centrées $(E[V_n] = 0)$. On note :

$$b_n = E[V_n^2] \quad \text{et pour } t \in [-1, +1], \quad S_n(t) = \sum_{1 \leq k \leq n} V_k \exp(ik\pi t)$$

On suppose qu'il existe $\delta > 0$ avec

$$\sum_{k \geq 1} k^{\delta + 1/2}\, b_k < +\infty.$$

a. Montrer que, pour tout $t \in [-1, +1]$, la suite $(S_n(t), n \geq 1)$ converge dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ vers une variable aléatoire complexe W_t.

b. Établir les majorations suivantes :

i) $$|S_n(t) - S_m(t)|^2 \leq \left(\sum_{m < k \leq n} V_k^2\right) + 2 \sum_{1 \leq j < n-m} \left| \sum_{m < k \leq n-j} V_k V_{k+j} \right| \quad (1 \leq m < n).$$

ii) $$E\left[\left|\sum_{m < k \leq n-j} V_k V_{k+j}\right|\right] \leq \left\{\sum_{m < k \leq n-j} b_k b_{k+j}\right\}^{1/2} \quad (1 \leq m, n, j\,;\ m + j \leq n).$$

iii) $$E\left[\left\{\sup_{t \in [-1, +1]} |S_n(t) - S_m(t)|\right\}^2\right] \leq \left(1 + \sqrt{2(n-m)}\right) \sum_{m < k \leq n} b_k \quad (1 \leq m < n).$$

c. Montrer que pour toute suite $(c_n\,,\, n \geqslant 1)$ de réels on a :

$$\sum_{n \geqslant 1} c_n\, 2^{n/4} \leqslant (2^\delta - 1)^{-1/2} \cdot \left(\sum_{n \geqslant 1} c_n^2\, 2^{n(\delta + 1/2)} \right)^{1/2}.$$

En déduire :

$$\sum_{n \geqslant 1} 2^{n/4} \left(\sum_{2^n < k \leqslant 2^{n+1}} b_k \right)^{1/2} \leqslant (2^\delta - 1)^{-1/2} \left(\sum_{k \geqslant 1} k^{1/2+\delta}\, b_k \right)^{1/2}.$$

d. Soit, pour n entier non nul, $M_n = \sup\limits_{t \in [-1,+1]} \left| S_{2^{n+1}}(t) - S_{2^n}(t) \right|$.

Montrer que $\sum\limits_{n \geqslant 1} E[M_n]$ est fini. En déduire : $P\left[\sum\limits_{n \geqslant 1} M_n < +\infty \right] = 1$.

Montrer que, pour presque tout ω de Ω, la suite de fonctions :

$$t \longrightarrow \sum_{1 \leqslant k \leqslant 2^n} V_k(\omega) \exp(ik\pi t) \qquad (n \geqslant 0,\ t \in [-1, +1])$$

converge uniformément sur $[-1, +1]$. En conclure que l'on peut supposer (*et c'est ce que l'on fera dans la suite*) que W est presque sûrement continu.

2° *a.* Soit $f \in L^2([-1, +1], du)$ et pour $k \in \mathbb{Z}$:

$$a_k = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f(t) \exp(-ik\pi t)\, dt.$$

On rappelle : $f(u) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} a_k \exp(ik\pi u)$ dans $L^2([-1, +1], du)$.

Montrer que si f est paire, $a_k = a_{-k}$ pour tout entier k.

b. Soit $g \in L^2([0, 1], du)$. Montrer qu'il existe des coefficients $(\gamma_n\,,\, n \in \mathbb{N})$ tels que :

$$g(u) = \sum_{n \geqslant 0} \gamma_n \cos n\pi u \quad \text{dans} \quad L^2([0, 1], du).$$

c. En déduire :

i) pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, $1_{[0,t]}(u) - t = \dfrac{2}{\pi} \sum\limits_{k \geqslant 1} \dfrac{\sin k\pi t}{k} \cos k\pi u$ dans $L^2([0, 1], du)$.

ii) pour $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1$, $t(1 - s) = \dfrac{2}{\pi^2} \sum\limits_{k \geqslant 1} \dfrac{\sin k\pi t \ \sin k\pi s}{k^2}$.

3° On suppose *dorénavant* que $\pi^2 n^2 b_n = 2\ (n \geqslant 1)$; C_t désigne, pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, la partie imaginaire de W_t.

a. Montrer que pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, C_t est une variable aléatoire centrée, de variance $t(1 - t)$. Calculer $E[C_t C_s]$ pour $0 \leqslant s, t \leqslant 1$.

b. Soit pour t réel positif, $B_t = (1 + t)\, C_{\frac{t}{1+t}}$. Montrer que pour s et t positifs, $E[B_t B_s] = \inf(t, s)$.

4° On suppose *désormais de plus* que chaque variable V_n suit une loi de Laplace-Gauss.

a. Montrer que les suites de réels $(\lambda_k, k \geqslant 1)$ telles que la suite $\left(\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \lambda_k V_k, n \geqslant 1\right)$ converge dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sont exactement les suites vérifiant $\sum_{k \geqslant 1} \frac{\lambda_k^2}{k^2} < +\infty$, et montrer que dans ce cas la limite dans L^2 est une variable aléatoire gaussienne, centrée, de variance $\frac{2}{\pi^2} \sum_{k \geqslant 1} \frac{\lambda_k^2}{k^2}$.

b. Soient $n \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ des réels et $(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$;

Montrer que la variable aléatoire $\sum_{1 \leqslant j \leqslant n} u_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})$ est centrée, a pour variance $\sum_{1 \leqslant j \leqslant n} u_j^2 (t_j - t_{j-1})$, et est gaussienne.

En déduire que les variables $(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}, 1 \leqslant j \leqslant n)$ sont indépendantes.

c. Montrer que $E[B_1^4] = 3$. En déduire que, pour tout $t \geqslant 0$, la suite

$\left(\sum_{0 < k \leqslant n} \left(B_{\frac{k}{n}t} - B_{\frac{k-1}{n}t}\right)^2, n \geqslant 1\right)$ converge vers t dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

DEUXIÈME PARTIE

On suppose définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ trois copies indépendantes X, Y et Z du processus B (*i.e.* X, Y, Z sont presque sûrement continus, ont même loi que B et les tribus $\sigma(X_t, t \geqslant 0)$, $\sigma(Y_t, t \geqslant 0)$ et $\sigma(Z_t, t \geqslant 0)$ sont indépendantes. U désigne le processus (à valeurs dans $\mathbb{R}^3$) (X, Y, Z).

Pour $t \geqslant 0$, $\mathcal{F}_t$ désigne la tribu $\sigma(U_s, 0 \leqslant s \leqslant t)$; $\mathcal{F}_\infty = \sigma(U_s, s \geqslant 0)$.

Une variable T à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ est un temps d'arrêt si $\{\omega \mid T(\omega) \leqslant t\}$ est dans $\mathcal{F}_t$ pour tout réel positif t.

$$\mathcal{F}_T = \{ A \in \mathcal{F}_\infty, A \cap \{T \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t \geqslant 0 \}.$$

1° Soient S et T des temps d'arrêt.

a. Montrer que $\mathcal{F}_S$ est une tribu et que S est $\mathcal{F}_S$ - mesurable.

b. Si S est inférieur à T, montrer que $\mathcal{F}_S$ est contenue dans $\mathcal{F}_T$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant 1)$, soit T_n la variable définie par :

$$T_n = (k+1)\, 2^{-n} \text{ sur } \{k\, 2^{-n} \leqslant T < (k+1)\, 2^{-n}\}, \; T_n = +\infty \text{ sur } \{T = +\infty\}.$$

Montrer que $(T_n, n \geqslant 1)$ est une suite de temps d'arrêt, décroissant vers T. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{F}_{T_n}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $A \cap \left\{ T_n = \dfrac{k+1}{2^n} \right\}$ appartient à $\mathcal{F}_{(k+1)2^{-n}}$.

2° *a.* Soit $r \geqslant 0$; montrer que le processus $t \longrightarrow U_{t+r} - U_r$ est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_r$ et a même loi que U.

b. Soit T un temps d'arrêt; montrer que, conditionnellement à $\{T < +\infty\}$, le processus $t \longrightarrow U_{T_n + t} - U_{T_n}$ est indépendant de $\mathcal{F}_{T_n}$ et a même loi que U. En déduire que, conditionnellement à $\{T < +\infty\}$, le processus $t \longrightarrow U_{T+t} - U_T$ est indépendant de $\mathcal{F}_T$, de même loi que U.

c. Montrer que pour φ fonction borélienne bornée sur $\mathbb{R}^3$, $t \geqslant 0$ et $h > 0$, on a :

$$E[\varphi(U_{t+h}) \mid \mathcal{F}_t] = \frac{1}{(2\pi h)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} dv\, \varphi(v) \exp - \left(\frac{\|v - U_t\|^2}{2h} \right)$$

où $\|u\| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ est la norme euclidienne du vecteur $u = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$.

TROISIÈME PARTIE

Q et G désignent les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$ par :

$$\begin{cases} Q(h, a, r) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi h}}\ \dfrac{r}{a}\ \operatorname{sh}\left(\dfrac{ar}{h}\right) \exp\left(-\dfrac{a^2 + r^2}{2h}\right) & (a > 0) \\ Q(h, 0, r) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi h^3}}\ r^2 \exp\left(-\dfrac{r^2}{2h}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} G(p, a, r) = \dfrac{1}{\sqrt{2p}}\ \dfrac{r}{a}\left(\exp\left(-\sqrt{2p}\ |r - a|\right) - \exp\left(-\sqrt{2p}\ (r + a)\right)\right) & (a > 0) \\ G(p, 0, r) = 2r \exp\left(-\sqrt{2p}\ r\right) \end{cases}$$

On admettra l'égalité pour $p > 0$ et $b \geqslant 0$:

$$\sqrt{2p} \int_0^{\infty} \exp\left(-\left(pt + \frac{b^2}{2t}\right)\right) \frac{dt}{\sqrt{2\pi t}} = \exp\left(-b\sqrt{2p}\right).$$

On pourra aussi admettre le résultat suivant : soit f une fonction borélienne bornée sur $\mathbb{R}_+$; si $\int_0^{\infty} f(t) \exp(-pt)\, dt$ est nulle pour tout $p > 0$, alors f est nulle presque sûrement (pour la mesure de Lebesgue).

U étant le processus (à valeurs dans $\mathbb{R}^3$) défini dans la deuxième partie, si $u \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}_+$, R_t^u est le réel $\| u + U_t \|$; pour simplifier l'écriture on remplacera R_t^0 par R_t.

1° Soit f une fonction borélienne bornée sur $\mathbb{R}_+$.

a. Soit w un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$, h un réel $(h > 0)$; montrer l'égalité :

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(\|x\|) \exp\left(-\frac{\|x - w\|^2}{2h}\right) \frac{dx}{(2\pi h)^{3/2}} = \int_0^{\infty} f(r)\, Q(h, \|w\|, r)\, dr.$$

(On pourra faire un changement de repère orthonormé tel que $\dfrac{w}{\|w\|}$ soit l'un des vecteurs de base, puis intégrer en coordonnées sphériques.)

b. Établir l'égalité suivante $(t \geqslant 0, h > 0)$:

$$E\left[f(R_{t+h}^u) \mid \mathcal{F}_t\right] = \int_0^{\infty} f(r)\, Q(h, R_t^u, r)\, dr \qquad (u \in \mathbb{R}^3).$$

Quelle est la loi de R_t ?

c. Montrer que si p est strictement positif, on a :

$$E\left[\int_0^{\infty} f(R_{t+h}^u) \exp(-ph)\, dh \mid \mathcal{F}_t\right] = \int_0^{\infty} f(r)\, G(p, R_t^u, r)\, dr \qquad (u \in \mathbb{R}^3).$$

2° *a.* Soient $0 < t_1 < t_2 \dots < t_n$ des réels et $u \in \mathbb{R}^3$; calculer la densité de la loi du vecteur aléatoire $(R^u_{t_1}, R^u_{t_2}, \dots, R^u_{t_n})$. Montrer que les processus $t \longrightarrow R^u_t$ et $t \longrightarrow R^v_t$ ont la même loi si $\|u\| = \|v\|$.

b. Soient en outre $t \geqslant 0$ et $f_1, f_2, \dots, f_n$ des fonctions boréliennes bornées sur $\mathbb{R}_+$; soit Φ la fonction définie pour $r \in \mathbb{R}_+$ par :

$$\Phi(r) = E\left[f_1(R^{r\alpha}_{t_1}) \dots f_n(R^{r\alpha}_{t_n})\right] \qquad (\alpha \in \mathbb{R}^3,\ \|\alpha\| = 1).$$

Montrer que Φ est borélienne et que :

$$E\left[f_1(R^u_{t+t_1}) \dots f_n(R^u_{t+t_n}) \mid \mathcal{F}_t\right] = \Phi(R^u_t) = E\left[f_1(R^u_{t+t_1}) \dots f_n(R^u_{t+t_n}) \mid R^u_t\right].$$

3° Soient $u \in \mathbb{R}^3$ et $a > 0$; on abrégera dans cette question R^u_t par ρ_t.

On définit sur Ω une variable τ (à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}_+}$) en posant :

$$\tau(\omega) = +\infty \text{ si, pour tout } t \geqslant 0,\ \rho_t(\omega) \text{ est différent de } a\ ;$$

$$\tau(\omega) = \inf(t \geqslant 0,\ \rho_t(\omega) = a) \quad \text{sinon}.$$

a. Montrer que, pour tout réel positif s, on a :

$$\{s < \tau\} = \bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geqslant 1}} \bigcap_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ q \leqslant s}} \left\{ |\rho_q - a| \geqslant \frac{1}{n} \right\}.$$

En déduire que τ est un temps d'arrêt.

b. Soient f une fonction borélienne bornée sur $\mathbb{R}_+$ et $p > 0$.

Montrer que, pour tout $s \geqslant 0$, $\int_0^s f(\rho_t) \exp(-pt)\, dt$ est $\mathcal{F}_s$ - mesurable.

Montrer :

$$\int_0^\tau f(\rho_t) \exp(-pt)\, dt = \lim_n \sum_{k \geqslant 0} 1_{\left\{\frac{k}{n} \leqslant \tau < \frac{k+1}{n}\right\}} \int_0^{\frac{k}{n}} f(\rho_t) \exp(-pt)\, dt$$

En déduire que $\int_0^\tau f(\rho_t) \exp(-pt)\, dt$ est $\mathcal{F}_\tau$ - mesurable. Établir en outre l'égalité :

$$\int_0^\infty f(\rho_t) \exp(-pt)\, dt$$
$$= \int_0^\tau f(\rho_t) \exp(-pt)\, dt + 1_{\{\tau < +\infty\}} \exp(-p\tau) \int_0^\infty f(\rho_{t+\tau}) \exp(-pt)\, dt.$$

c. Montrer que, conditionnellement à $\{\tau < +\infty\}$, le processus $t \longrightarrow \rho_{t+\tau}$ est indépendant de $\mathcal{F}_\tau$ et a même loi que $R^{a\alpha}$ dès que $\|\alpha\| = 1$. En déduire, pour f fonction borélienne bornée, l'égalité :

$$E\left[\int_0^\infty f(\rho_t) \exp(-pt)\, dt\right]$$
$$= E\left[\int_0^\tau f(\rho_t) \exp(-pt)\, dt\right] + E\left[1_{\{\tau < +\infty\}} \exp(-p\tau)\right] \int_0^\infty f(r)\, G(p, a, r)\, dr.$$

d. En utilisant les fonctions $f_1 = 1_{]0,a[}$ ou $f_2 = 1_{]a,+\infty[}$, établir :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[1_{\{\tau<+\infty\}} \exp(-p\tau)\right] &= \frac{a}{\|u\|} \exp\left(-\sqrt{2p}\,(\|u\| - a)\right) && \text{si} \quad \|u\| \geqslant a, \\
&= \frac{a}{\|u\|} \frac{\operatorname{sh}(\|u\|\sqrt{2p})}{\operatorname{sh}(a\sqrt{2p})} && \text{si} \quad 0 < \|u\| < a, \\
&= \frac{a\sqrt{2p}}{\operatorname{sh}(a\sqrt{2p})} && \text{si} \quad 0 = \|u\|.
\end{aligned}$$

En déduire : $\mathrm{P}[\tau < +\infty] = \inf\left(1, \dfrac{a}{\|u\|}\right)$. Montrer que l'ensemble $\{\exists\, t \geqslant 0,\ \rho_t = 0\}$ est $\mathcal{F}_\infty$ - mesurable et qu'il est de probabilité nulle lorsque $\|u\|$ est non nul.

e. On suppose $\|u\| > a$. Soit f borélienne bornée sur $\mathbb{R}_+$; montrer pour $p > 0$ l'égalité :

$$\mathrm{E}\left[\int_0^\tau f(\rho_t) \exp(-pt)\, dt\right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_a^\infty \frac{r}{\|u\|} f(r) \left(\exp\left(-\sqrt{2p}\,\big|r - \|u\|\big|\right) - \exp\left(-\sqrt{2p}\,(\|u\| + r - 2a)\right)\right) dr.$$

En déduire :

$$\mathrm{E}\left[f(\rho_h)\, 1_{\{h<\tau\}}\right]$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi h}} \int_a^\infty \frac{r}{\|u\|} \left(\operatorname{sh} \frac{(r-a)(\|u\| - a)}{h}\right) \left(\exp - \frac{(r-a)^2 + (\|u\| - a)^2}{2h}\right) f(r)\, dr$$

(h réel, $h > 0$).

4º *a.* Soit pour n entier, $n \geqslant 1$, $\mathrm{A}_n = \left\{\exists\, t \geqslant 0,\ \mathrm{R}_{\frac{1}{n}+t} = 0\right\}$.

Montrer que A_n est $\mathcal{F}_\infty$ - mesurable ; calculer $\mathrm{P}[\mathrm{A}_n \mid \mathrm{R}_{1/n}]$. En déduire que $\{\omega \mid t \longrightarrow \mathrm{U}_t(\omega)$ ne retourne pas en $0\}$ est un événement de probabilité 1.

b. Soient pour a et b réels strictement positifs :

$$\tau_a = \inf(t \geqslant 0,\ \mathrm{R}_t = a) \quad (\inf \varnothing = +\infty \text{ par convention}) ;$$
$$\sigma_b = \sup(t \geqslant 0,\ \mathrm{R}_t < b).$$

Montrer que τ_a est presque sûrement fini ; $a \longrightarrow \tau_a$ est croissante et tend vers $+\infty$ avec a. Montrer que l'on a presque sûrement :

$$\{\tau_a < \sigma_b\} = \{\exists\, u \in \mathbb{Q},\ u > 0,\ \mathrm{R}_{u+\tau_a} < b\}.$$

En déduire :

$$\mathrm{P}[\tau_a < \sigma_b] = \inf\left(1, \frac{b}{a}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{P}[\sigma_b < +\infty] = 1.$$

Montrer que R_t tend presque sûrement vers $+\infty$ avec t.

5° Soient pour $t \geqslant 0$ et $h > 0$, $J_t = \inf_{u \geqslant t} R_u$, $I_{t,h} = \inf_{t \leqslant u \leqslant t+h} R_u$.

a. Montrer que le processus J est presque sûrement continu et que $J_t = \inf(J_{t+h}, I_{t,h})$.

b. Montrer que pour $t \geqslant 0$, $b > 0$, $\{J_t < b\} = \{\exists\, \varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon \geqslant 0, R_{\varepsilon+t} < b\}$.

En déduire les égalités :

$$P[J_t \geqslant b \mid \mathcal{F}_t] = \sup\left(0, 1 - \frac{b}{R_t}\right) = P[J_t > b \mid \mathcal{F}_t] \quad (t > 0);$$

$$E[f(J_t) \mid \mathcal{F}_t] = \frac{1}{R_t}\int_0^{R_t} f(j)\, dj \ (t > 0, f \text{ borélienne bornée});$$

$$E[g(R_t, J_t) \mid \mathcal{F}_t] = \frac{1}{R_t}\int_0^{R_t} g(R_t, j)\, dj \ (t > 0, g \text{ borélienne bornée sur } \mathbb{R}^2_+).$$

c. Soient g borélienne bornée sur $\mathbb{R}^2_+$ et $a > 0$.

i) Démontrer l'égalité :

$$E[g(R_{t+h}, J_{t+h})\, 1_{\{J_t > a\}} \mid \mathcal{F}_t] = E\left[\frac{1}{R_{t+h}}\int_a^{R_{t+h}} g(R_{t+h}, j)\, dj\, 1_{\{a < R_{t+h},\, a < I_{t,h}\}} \mid \mathcal{F}_t\right]$$

ii) Soit $\tau_{t,a} = \inf(s \geqslant 0, R_{t+s} \leqslant a)$. Déduire de l'égalité :

$\{\tau_{t,a} > h\} = \{a < I_{t,h}\}$ la relation :

$$E[g(R_{t+h}, J_{t+h})\, 1_{\{a < J_t\}} \mid \mathcal{F}_t]$$

$$= 1_{\{a < R_t\}} \frac{1}{R_t}\sqrt{\frac{2}{\pi h}}\int_a^{\infty}\left(\text{sh}\, \frac{(R_t - a)(r - a)}{h}\right)\left(\exp - \frac{(r-a)^2 + (R_t - a)^2}{2h}\right)\int_a^r g(r, j)\, dj\, dr$$

d. Montrer que pour f borélienne bornée sur $\mathbb{R}$ et $a > 0$, on a :

$$E[f(2J_{t+h} - R_{t+h})\, 1_{\{a < J_t\}} \mid \mathcal{F}_t]$$

$$= 1_{\{a < R_t\}} \frac{1}{R_t}\int_a^{R_t} \frac{1}{\sqrt{2\pi h}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x) \exp\left(-\frac{(x - 2y + R_t)^2}{2h}\right) dx\right) dy.$$

Notons $\beta_t = 2J_t - R_t$ et $\mathcal{H}_t$ la tribu engendrée par $\mathcal{F}_t$ et J_t.

Montrer que :

$$E[f(\beta_{t+h}) \mid \mathcal{H}_t] = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}}\int_{\mathbb{R}} f(x) \exp\left(-\frac{(x - \beta_t)^2}{2h}\right) dx.$$

Montrer enfin que β a même loi que B.