PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

N. B. — *Dans la partie* I, *des résultats utiles pour les autres parties sont établis. Les parties* II, III *et* IV *sont indépendantes.*

DÉFINITIONS, NOTATIONS ET RAPPELS

1° Dans tout le problème $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels et pour tout $n \geqslant 1$, $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des n-uples de réels. Si $(x_i,\ i \in \mathrm{I})$ désigne une famille de nombres réels, on notera $\sup\limits_{i \in \mathrm{I}} x_i$ leur borne supérieure et $\inf\limits_{i \in \mathrm{I}} x_i$ leur borne inférieure.

L'ensemble $\mathbb{N}^2$ des couples d'entiers naturels est muni de l'ordre partiel $\leqslant$ défini par $(i, j) \leqslant (m, n)$ si et seulement si $i \leqslant m$ et $j \leqslant n$. Une suite $(x_{i,j},\ (i, j) \in \mathbb{N}^2)$ d'éléments d'un espace vectoriel normé $(\mathrm{E}, \|.\|)$ converge vers un élément x de E si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, n \geqslant 0, \quad \forall\, i \geqslant n, \quad \forall\, j \geqslant n, \quad \| x_{i,j} - x \| < \varepsilon .$$

2° Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé. On dit que X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ si X est une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}^n, \mathcal{R}^n)$, où $\mathcal{R}^n$ désigne la tribu borélienne de $\mathbb{R}^n$. Lorsque $n = 1$ on dit que X est une variable aléatoire réelle (en abrégé v.a.r.). On note $\mathrm{P_X}$ la loi de X, c'est-à-dire la probabilité sur $\mathcal{R}^n$ image de P par X. Par abus de langage X désigne aussi la classe de P-équivalence de l'application X. Pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{R}^n$, notons $\{\mathrm{X} \in \mathrm{A}\} = \mathrm{X}^{-1}(\mathrm{A})$.

On note 1_A la fonction indicatrice d'un ensemble $\mathrm{A} \in \mathcal{F}$, c'est-à-dire la v.a.r. qui vaut 1 sur A et 0 sur le complémentaire de A. On note $\mathrm{A^C}$ le complémentaire de A dans Ω.

3° Un sous-ensemble $\mathcal{M}$ de l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω est une famille monotone si et seulement si :

(i) $\Omega \in \mathcal{M}$;

(ii) $\forall\, \mathrm{A} \in \mathcal{M}, \quad \forall\, \mathrm{B} \in \mathcal{M}, \quad \mathrm{A} \subset \mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{B} \cap \mathrm{A^C} \in \mathcal{M}$;

(iii) Pour toute suite $(\mathrm{A}_n,\ n \geqslant 0)$ d'éléments de $\mathcal{M}$ telle que $\mathrm{A}_n \subset \mathrm{A}_{n+1}$ pour tout $n \geqslant 0$, on a $\bigcup\limits_{n \geqslant 0} \mathrm{A}_n \in \mathcal{M}$.

Les candidats pourront utiliser dans la suite le résultat suivant : soient $\mathcal{C} \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ tels que $\mathcal{C}$ soit stable par intersection finie et $\mathcal{M}$ soit une famille monotone; alors $\mathcal{M}$ contient la tribu engendrée par $\mathcal{C}$.

4° Si $(\mathcal{F}_i,\ i \in \mathrm{I})$ désigne une famille de sous-tribus de $\mathcal{F}$ on note $\bigvee\limits_{i \in \mathrm{I}} \mathcal{F}_i$ la tribu engendrée par $\bigcup\limits_{i \in \mathrm{I}} \mathcal{F}_i$, c'est-à-dire la plus petite sous-tribu de $\mathcal{F}$ contenant toutes les tribus $\mathcal{F}_i$, $i \in \mathrm{I}$. Si $(\mathrm{X}_i,\ i \in \mathrm{I})$ est une famille de v.a.r., on note $\sigma(\mathrm{X}_i,\ i \in \mathrm{I})$ la plus petite sous-tribu de $\mathcal{F}$ rendant mesurables les applications X_i de Ω dans $\mathbb{R}$ pour tout $i \in \mathrm{I}$. On dit qu'une application α mesurable de $(\mathbb{R}^n, \mathcal{R}^n)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$ est borélienne. On rappelle que pour tout $n \geqslant 1$, une v.a.r. Y est mesurable de $(\Omega, \sigma(\mathrm{X}_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$ si et seulement s'il existe une application borélienne α de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\mathrm{Y} = \alpha \circ (\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$.

5° On note $\mathrm{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ (respectivement $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$; $\mathrm{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$) l'espace vectoriel des classes de P-équivalence de v.a.r. sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ qui sont intégrables (respectivement de carré intégrable; bornées) muni de la norme $\|\cdot\|_1$ (respectivement $\|\cdot\|_2$; $\|\cdot\|_\infty$). Si X est une v.a.r. on note par exemple $\mathrm{X} \in \mathrm{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ par l'abus de langage précisé au 2°.

6° Si $\mathcal{G}$ désigne une sous-tribu de $\mathcal{F}$, on désigne par $\mathrm{P}_\mathcal{G}$ la restriction de P à $\mathcal{G}$. Si $\mathrm{X} \in \mathrm{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ on note $\mathrm{E}(\mathrm{X} \mid \mathcal{G})$ l'espérance conditionnelle de X relativement à $\mathcal{G}$. C'est l'unique élément de $\mathrm{L}^1\left(\Omega, \mathcal{G}, \mathrm{P}_\mathcal{G}\right)$ défini par l'égalité :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X\,Y}) = \int \mathrm{E}(\mathrm{X} \mid \mathcal{G})\ \mathrm{Y}\ d\mathrm{P}_\mathcal{G}, \qquad \forall\ \mathrm{Y} \in \mathrm{L}^\infty\left(\Omega, \mathcal{G}, \mathrm{P}_\mathcal{G}\right).$$

Par abus de langage on note aussi $E(X \mid \mathcal{G})$ pour l'un des représentants de la classe de P-équivalence.

On rappelle que si $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, alors $E(X \mid \mathcal{G}) \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, P_{\mathcal{G}})$ et $\| E(X \mid \mathcal{G}) \|_2 \leqslant \| X \|_2$.

Lorsque $\mathcal{G}$ est la tribu engendrée par la variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, on note $E(X \mid Z = z)$ l'unique élément de $L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{R}^n, P_Z)$ tel que pour toute fonction borélienne bornée f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, on ait :

$$E[X f(Z)] = \int_{\mathbb{R}^n} E(X \mid Z = z) f(z) \, P_Z(dz),$$

c'est-à-dire tel que $E(X \mid \sigma(Z)) = E(X \mid Z = z) \circ Z$ p.s.

7° Soient $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ et $(\mathcal{F}_i, i \in I)$ une famille de sous-tribus de $\mathcal{F}$. Les tribus $(\mathcal{F}_i, i \in I)$ sont conditionnellement indépendantes sachant $\mathcal{G}$ si et seulement si pour tout sous-ensemble fini J de I et pour toute famille d'ensembles $(A_j \in \mathcal{F}_j, j \in J)$ on a :

$$E\left(\prod_{j \in J} 1_{A_j} \mid \mathcal{G}\right) = \prod_{j \in J} E\left(1_{A_j} \mid \mathcal{G}\right) \quad \text{p.s.}$$

On dit qu'une famille de v.a.r. $(X_i, i \in I)$ est conditionnellement indépendante sachant $\mathcal{G}$ si les tribus $(\sigma(X_i), i \in I)$ le sont.

8° Une suite $(\mathcal{F}_n, n \geqslant 0)$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$ est croissante si $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ pour tout $n \geqslant 0$; on note $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{n \geqslant 0} \mathcal{F}_n$.

On dit que $T : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ est un temps d'arrêt de la famille $(\mathcal{F}_n, n \geqslant 0)$ si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$. Si $(X_n, n \geqslant 0)$ est une suite de v.a.r. et si X_∞ est une v.a.r., notons X_T la v.a.r. définie par :

$$X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega).$$

9° Soient $(\mathcal{F}_n, n \geqslant 0)$ une suite croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{n \geqslant 0} \mathcal{F}_n$. Les candidats pourront admettre le résultat suivant :

Pour toute v.a.r. $X \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$, la suite de v.a.r. $(E(X \mid \mathcal{F}_n), n \geqslant 0)$ converge presque sûrement vers $E(X \mid \mathcal{F}_\infty)$.

Première partie

Les questions A, B *et* C *sont indépendantes. Les résultats prouvés dans cette partie seront utilisés dans la suite.*

A

X 1° Soient $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$, X et Y deux éléments de $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tels que $E(X) = E(Y)$. Montrer que l'ensemble des éléments G de $\mathcal{G}$ tels que $E(X 1_G) = E(Y 1_G)$ est une famille monotone.

X 2° Soient $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des sous-tribus de $\mathcal{F}$ telles que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ soient indépendantes. Soit X une v.a.r. intégrable telle que $\sigma(X) \subset \mathcal{B}$. Montrer qu'on a :

$$E(X \mid \mathcal{A} \vee \mathcal{C}) = E(X \mid \mathcal{A}) \text{ p.s.}$$

3° Soient $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ et $\mathcal{G}$ des sous-tribus de $\mathcal{F}$. Montrer que les conditions suivantes (*i*)-(*iv*) sont équivalentes :

(*i*) $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont conditionnellement indépendantes sachant $\mathcal{G}$;

(*ii*) $\forall X_1 \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_1, P)$, $\forall X_2 \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_2, P)$;

$E(X_1 X_2 \mid \mathcal{G}) = E(X_1 \mid \mathcal{G})\, E(X_2 \mid \mathcal{G})$ p.s. ;

(*iii*) $\forall A_1 \in \mathcal{F}_1$, $E(1_{A_1} \mid \mathcal{F}_2 \vee \mathcal{G}) = E(1_{A_1} \mid \mathcal{G})$ p.s. ;

(*iv*) $\forall X_1 \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_1, P)$, $E(X_1 \mid \mathcal{F}_2 \vee \mathcal{G}) = E(X_1 \mid \mathcal{G})$ p.s.

4° Soient $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ deux sous-tribus de $\mathcal{F}$ et X une v.a.r. telle que pour toute fonction borélienne bornée α de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $E(\alpha(X) \mid \mathcal{A}) = E(\alpha(X) \mid \mathcal{B})$ p.s. Montrer que $\sigma(X)$ et $\mathcal{B}$ sont conditionnellement indépendantes sachant $\mathcal{A}$.

5° Soient $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ et $(\mathcal{F}_n, n \geqslant 0)$ une suite de sous-tribus de $\mathcal{F}$ conditionnellement indépendantes sachant $\mathcal{G}$. Pour tout $k \geqslant 1$ définissons la suite de tribus $(\mathcal{H}_n, n \geqslant 0)$ par :

$$\mathcal{H}_0 = \bigvee_{0 \leqslant i \leqslant k} \mathcal{F}_i \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_n = \mathcal{F}_{n+k} \quad \text{pour } n \geqslant 1.$$

Montrer que la suite $(\mathcal{H}_n, n \geqslant 0)$ est conditionnellement indépendante sachant $\mathcal{G}$.

B

Soient $(\mathcal{F}_n, n \geqslant 0)$ une suite croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{n \geqslant 0} \mathcal{F}_n$, X une v.a.r. bornée.

X 1° Montrer que la suite $(E(X \mid \mathcal{F}_n), n \geqslant 0)$ converge dans L^2 vers $E(X \mid \mathcal{F}_\infty)$.

2° Soit $(\mathcal{A}_n, n \geqslant 0)$ une suite de sous-tribus de $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}_\infty$ telle que pour tout $n \geqslant 0$ les v.a.r. $E(X \mid \mathcal{A}_n)$ et $E(X \mid \mathcal{F}_n)$ aient même loi.

X *a.* Montrer que $E[\{E(X \mid \mathcal{F}_\infty) - E(X \mid \mathcal{A})\}^2] = E[E(X \mid \mathcal{F}_\infty)^2 - E(X \mid \mathcal{A})^2]$.

X *b.* Montrer que $\| E(X \mid \mathcal{F}_\infty) \|_2 = \| E(X \mid \mathcal{A}) \|_2$.

X *c.* Montrer que $E(X \mid \mathcal{F}_\infty) = E(X \mid \mathcal{A})$ presque sûrement.

C

Soient $(\mathcal{F}_n, n \geqslant 0)$ une suite croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{n \geqslant 0} \mathcal{F}_n$. Soient M un réel et $(Y_j, j \in \mathbb{N} \cup \{\infty\})$ une suite de v.a.r. telle que $(Y_j, j \in \mathbb{N})$ converge presque sûrement vers Y_∞ et $|Y_j| \leqslant M$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Fixons $k \geqslant 0$ et posons $Z_k = \sup_{j \geqslant k} |Y_j - Y_\infty|$.

1° Montrer que :

$$\limsup_n \sup_{i \geqslant n} \sup_{j \geqslant n} |E(Y_j \mid \mathcal{F}_i) - E(Y_\infty \mid \mathcal{F}_\infty)| \leqslant E(Z_k \mid \mathcal{F}_\infty) \text{ p.s.}$$

2° Montrer que la suite $(E(Z_k \mid \mathcal{F}_\infty), k \geqslant 0)$ converge presque sûrement vers zéro et en déduire que X $(E(Y_j \mid \mathcal{F}_i), (i, j) \in \mathbb{N}^2)$ converge presque sûrement vers $E(Y_\infty \mid \mathcal{F}_\infty)$.

Deuxième partie

Soit $(\mathcal{F}_{i,j}, (i, j) \in \mathbb{N}^2)$ une famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire telles que $(i, j) \leqslant (m, n)$ entraîne $\mathcal{F}_{i,j} \subset \mathcal{F}_{m,n}$; posons $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \mathcal{F}_{i,j}$. Soit X un élément de $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, posons $X_{i,j} = E(X \mid \mathcal{F}_{i,j})$, $\mathcal{A}_i = \bigvee_{n \geqslant 0} \mathcal{F}_{i,n}$ et $\mathcal{B}_j = \bigvee_{n \geqslant 0} \mathcal{F}_{n,j}$.

X 1. *a.* Montrer que pour toute suite croissante (i_n, j_n) d'éléments de $\mathbb{N}^2$, la suite $(X_{i_n, j_n}, n \geqslant 0)$ converge dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$.

b. Montrer que $(X_{i,j}, (i,j) \in \mathbb{N}^2)$ converge dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ vers $E(X \mid \mathcal{F}_\infty)$.

2° On suppose de plus que pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ les tribus $\mathcal{A}_i$ et $\mathcal{B}_j$ sont conditionnellement indépendantes sachant $\mathcal{F}_{i,j}$.

a. On pose $X_{\infty, j} = E(X \mid \mathcal{B}_j)$ pour tout $j \geqslant 0$. Montrer que $X_{i,j} = E(X_{\infty,j} \mid \mathcal{A}_i)$ pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$.

X *b.* Montrer que $(X_{i,j}, (i, j) \in \mathbb{N}^2)$ converge presque sûrement vers $E(X \mid \mathcal{F}_\infty)$.

3° Soient $(Y_{i,j}, (i,j) \in \mathbb{N}^2)$ des v.a.r. indépendantes. Pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ posons $\mathcal{F}_{i,j} = \sigma(Y_{m,n}, (m, n) \leqslant (i, j))$. Montrer que pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ les tribus $\mathcal{A}_i$ et $\mathcal{B}_j$ sont conditionnellement indépendantes sachant $\mathcal{F}_{i,j}$.

Troisième partie

Pour tout ε tel que $0 < \varepsilon < 1$ et $m \in \mathbb{N}$ on dit qu'une partition $\pi = \{A, B_0, B_1, \ldots, B_m\}$ de Ω est de type (ε, m) si $A \in \mathcal{F}$, $B_i \in \mathcal{F}$ pour tout $i \leqslant m$, $P(A) = \varepsilon$ et $P(B_i) = \dfrac{1-\varepsilon}{m+1}$ pour $0 \leqslant i \leqslant m$. Si π est une partition de type (ε, m), notons $\pi(i)$ la tribu engendrée par $A \cup B_i$, $0 \leqslant i \leqslant m$. La famille croissante $(\mathcal{F}_{i,j}, (i, j) \in \mathbb{N}^2)$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$ est construite sur la partition π de type (ε, m) si :

$$\mathcal{F}_{i, m-i} = \pi(i) \text{ pour } 0 \leqslant i \leqslant m,$$

$$\mathcal{F}_{i,j} = \{\varnothing, \Omega\}, \text{ si } i + j < m,$$

$$\mathcal{F}_{i,j} = \bigvee_{u \leqslant i} \bigvee_{v \leqslant j} \mathcal{F}_{u,v} \text{ si } i + j > m.$$

1° Soit π une partition de type (ε, m).

X *a.* Montrer que pour tout $i \leqslant m$,

$$E(1_A \mid \pi(i)) = c(\varepsilon, m) = [1 + (1-\varepsilon)(m+1)^{-1} \varepsilon^{-1}]^{-1} \text{ p.s. sur } A \cup B_i.$$

X *b.* Soient k et u des entiers positifs tels que $k + u \leqslant m$. Montrer que :

$$P\left(\left\{ \sup_{k \leqslant i \leqslant m-u} E(1_A \mid \pi(i)) = c(\varepsilon, m) \right\}\right) \geqslant 1 - \frac{k+u}{m+1}.$$

2° Soient $(\pi_k, k \geqslant 1)$ des partitions indépendantes de type (ε_k, m_k). Pour tout $k \geqslant 1$ soit $(\mathcal{F}_{i,j}^{(k)}, (i,j) \in \mathbb{N}^2)$ la famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$ construite sur π_k. Pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, soit $\mathcal{F}_{i,j} = \bigvee_{k \geqslant 1} \mathcal{F}_{i,j}^{(k)}$. Notons $C = \bigcup_{k \geqslant 1} A_k$. On suppose que $m_k \varepsilon_k \to +\infty$ quand $k \to +\infty$ et $\sum_{k \geqslant 1} \varepsilon_k < +\infty$.

a. Montrer que pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ et tout $k \geqslant 1$, $E(1_{A_k} | \mathcal{F}_{i,j}^{(k)}) = E(1_{A_k} | \mathcal{F}_{i,j})$ p.s.

b. Fixons $(i,j) \in \mathbb{N}^2$. Pour tout $k \geqslant 1$ tel que $i + j < m_k$, minorer

$$P\left(\left\{\sup_{u \geqslant i} \sup_{v \geqslant j} E\left(1_{A_k} | \mathcal{F}_{u,v}^{(k)}\right) \geqslant c\,(\varepsilon_k, m_k)\right\}\right).$$

c. Posons $M_{i,j} = \sup_{u \geqslant i} \sup_{v \geqslant j} E(1_C | \mathcal{F}_{u,v})$ et $M_{i,j}^{(k)} = \sup_{u \geqslant i} \sup_{v \geqslant j} E(1_{A_k} | \mathcal{F}_{u,v}^{(k)})$.

Montrer que :

$$\{M_{i,j} = 1\} \supset \bigcap_{n \geqslant 1} \left[\bigcup_{k \geqslant n} \{M_{i,j}^{(k)} \geqslant c(\varepsilon_k, m_k)\}\right].$$

En déduire que $M_{i,j} = 1$ presque sûrement.

d. Montrer que $0 < P(C) < 1$ et que $A_k \in \mathcal{F}_{i,j}^{(k)}$ si $i + j > m_k$. En déduire que $C \in \mathcal{F}_\infty = \bigvee_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \mathcal{F}_{i,j}$.

e. Montrer que $\liminf_n \inf_{i \geqslant n} \inf_{j \geqslant n} E(1_C | \mathcal{F}_{i,j}) = 0$ presque sûrement sur le complémentaire de C. En déduire que $(E(1_C | \mathcal{F}_{i,j}), (i,j) \in \mathbb{N}^2)$ n'est pas presque sûrement convergente.

Quatrième partie

Soit $(X_n, n \geqslant 1)$ une suite de v.a.r. On note $\mathcal{Q}$ la sous-tribu de $\mathcal{F}$ définie par $\mathcal{Q} = \bigcap_{n \geqslant 1} \sigma(X_i, i \geqslant n)$. Pour tout $n \geqslant 1$ soit $\mathcal{F}_n = \sigma(X_i, 1 \leqslant i \leqslant n)$. On dit que $(X_n, n \geqslant 1)$ est conditionnellement équidistribuée sachant $\mathcal{Q}$ si pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour toute fonction α borélienne bornée définie sur $\mathbb{R}$:

$$E(\alpha(X_n) | \mathcal{Q}) = E(\alpha(X_1) | \mathcal{Q}) \text{ p.s.}$$

A

On suppose que la suite $(X_n, n \geqslant 1)$ est conditionnellement indépendante et conditionnellement équidistribuée sachant $\mathcal{Q}$. Fixons un entier $k \geqslant 1$ et un temps d'arrêt T pour $(\mathcal{F}_n, n \geqslant 1)$ tel que $P(1 \leqslant T < +\infty) = 1$.

1° Montrer que pour tout k-uple $(\alpha_i, 1 \leqslant i \leqslant k)$ de fonctions boréliennes bornées positives définies sur $\mathbb{R}$:

$$E\left(\prod_{1 \leqslant i \leqslant k} \alpha_i(X_{T+i}) \mid \mathcal{Q}\right) = E\left(\prod_{1 \leqslant i \leqslant k} \alpha_i(X_i) \mid \mathcal{Q}\right) \text{ p.s.}$$

2° En déduire que les variables aléatoires $(X_1, \ldots, X_k)$ et $(X_{T+1}, \ldots, X_{T+k})$ ont même loi.

B

On suppose que la suite $(X_n,\ n \geqslant 1)$ est telle que pour tout temps d'arrêt borné $T \geqslant 1$ pour $(\mathcal{F}_n,\ n \geqslant 1)$ et pour tout entier $k \geqslant 1$, les variables aléatoires $(X_1, \ldots, X_k)$ et $(X_{T+1}, \ldots, X_{T+k})$ ont même loi. On se propose de montrer la réciproque de la question A.

1° Fixons $n \geqslant 0$, $j \geqslant 1$, $k \geqslant 1$ et $F \in \mathcal{R}$. Posons $S = j$ sur Ω et $T = j$ sur $\{X_j \notin F\}$, $T = j + n$ sur $\{X_j \in F\}$. Montrer que S et T sont des temps d'arrêt pour $(\mathcal{F}_n,\ n \geqslant 1)$ et que pour toute fonction borélienne bornée α de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}$:

$$E\left(\alpha(X_{j+1}, \ldots, X_{j+k})\, 1_{\{X_j \in F\}}\right) = E\left(\alpha(X_{j+n+1}, \ldots, X_{j+n+k})\, 1_{\{X_j \in F\}}\right).$$

En déduire que les vecteurs $(X_j, X_{j+1}, \ldots, X_{j+k})$ et $(X_j, X_{j+n+1}, \ldots, X_{j+n+k})$ ont même loi.

2° Fixons $n \geqslant 2$, $m \geqslant 2$ et une fonction borélienne bornée α de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a. Posons $\delta(z) = E(\alpha(X_1) \mid (X_2, \ldots, X_n) = z)$ pour tout $z \in \mathbb{R}^{n-1}$. Montrer que :

$$\delta(X_m, X_{m+1}, \ldots, X_{m+n-2}) = E(\alpha(X_1) \mid \sigma(X_i,\ m \leqslant i \leqslant m+n-2)) \text{ p.s.}$$

b. En déduire que $E(\alpha(X_1) \mid \sigma(X_i,\ 2 \leqslant i \leqslant n))$ et $E(\alpha(X_1) \mid \sigma(X_i,\ m \leqslant i \leqslant m+n-2))$ ont même loi.

3° Montrer que pour tout $m \geqslant 2$ et pour toute fonction borélienne bornée α de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} E(\alpha(X_1) \mid \sigma(X_i,\ i \geqslant 2)) &= E(\alpha(X_1) \mid \sigma(X_i,\ i \geqslant m)) \\ &= E(\alpha(X_1) \mid \mathcal{Q}) \text{ p.s.} \end{aligned}$$

4° *a.* Montrer que les tribus $\sigma(X_1)$ et $\sigma(X_i,\ i \geqslant 2)$ sont conditionnellement indépendantes sachant $\mathcal{Q}$.

b. Plus généralement montrer que pour tout $j \geqslant 1$ les tribus $\sigma(X_j)$ et $\sigma(X_i,\ i \geqslant j+1)$ sont conditionnellement indépendantes sachant $\mathcal{Q}$.

c. En déduire que la suite $(X_n,\ n \geqslant 1)$ est conditionnellement indépendante sachant $\mathcal{Q}$.

5° *a.* Montrer que pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leqslant m \leqslant n$ et pour tout $k \geqslant 1$ les variables aléatoires

$(X_1, X_{n+1}, \ldots, X_{n+k})$ et $(X_m, X_{m+1}, \ldots, X_{m+k})$ ont même loi.

b. En déduire que pour toute fonction borélienne bornée α de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$E(\alpha(X_1) \mid \sigma(X_i,\ i \geqslant n+1)) = E(\alpha(X_m) \mid \sigma(X_i,\ i \geqslant n+1)) \text{ p.s.}$$

c. En déduire que les v.a.r. $(X_n,\ n \geqslant 1)$ sont conditionnellement équidistribuées sachant $\mathcal{Q}$.