# PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

N.B. — *Les troisième et quatrième parties sont indépendantes de la deuxième partie.*

*
* *

## DÉFINITIONS, NOTATIONS ET RAPPELS

1° Dans tout le problème, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels, $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des réels positifs ou nuls, $\mathbb{R}^-$ l'ensemble des réels négatifs ou nuls. Si $a$ et $b$ sont deux réels, on utilisera parfois la notation abrégée $a \wedge b$ pour désigner le minimum de $a$ et de $b$.

2° Désignant par $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé, on appelle variable aléatoire réelle (en abrégé *v.a.r.*) de loi $\mu$ une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$, mesurable relativement à la tribu $\mathcal{A}$ et à la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, telle que la probabilité image de P par cette application soit la mesure $\mu$ sur $\mathbb{R}$.

On note $\mathbf{1}_A$ la fonction indicatrice d'un ensemble $A \in \mathcal{A}$, c'est-à-dire la *v.a.r.* qui vaut 1 sur A et 0 sur le complémentaire de A.

Si $(X_1, \ldots, X_n)$ est une suite de $n$ v.a.r., on note $\sigma(X_1, \ldots, X_n)$ la plus petite sous-tribu de $\mathcal{A}$ rendant mesurables ces applications de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$.

3° Si $\mathcal{B}$ est une sous-tribu de $\mathcal{A}$, le symbole $E(X \mid \mathcal{B})$ désigne l'espérance conditionnelle de la v.a.r. intégrable X par rapport à la tribu $\mathcal{B}$, ou plutôt un représentant de cette espérance conditionnelle.

On rappelle l'inégalité de Jensen pour les espérances conditionnelles : si $\varphi$ est une fonction convexe, si X est une v.a.r. intégrable telle que $\varphi(X)$ soit intégrable, alors

$$\varphi(E(X \mid \mathcal{B})) \leqslant E(\varphi(X) \mid \mathcal{B}) \qquad \text{p.s.}$$

4° Si $(\mathcal{B}_n, n \geqslant 0)$ est une suite de sous-tribus de $\mathcal{A}$, croissante pour l'inclusion $(\mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}_{n+1})$, et si $(X_n, n \geqslant 0)$ est une suite de v.a.r. intégrables, on dit que $(X_n, n \geqslant 0)$ est une martingale adaptée à $(\mathcal{B}_n, n \geqslant 0)$ si chaque $X_n$ est un représentant de l'espérance conditionnelle $E(X_{n+1} \mid \mathcal{B}_n)$ : on écrira simplement $X_n = E(X_{n+1} \mid \mathcal{B}_n)$ p.s. On pourra avoir en mémoire le théorème de convergence p.s. des martingales positives, mais son utilisation ne sera pas nécessaire.

Si T est une application de $\Omega$ dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, on dira que T est un temps d'arrêt de la famille $(\mathcal{B}_n, n \geqslant 0)$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{T = n\} \in \mathcal{B}_n$.

### Première partie

Soit $(Z_n, n \geqslant 0)$ une martingale adaptée à une famille croissante $(\mathcal{B}_n, n \geqslant 0)$ de sous-tribus de $\mathcal{A}$.

1° *a.* Montrer que pour tout $p \geqslant 0$ et tout $n \geqslant 0$ :

$$E(Z_{n+p} \mid \mathcal{B}_n) = Z_n \qquad \text{p.s.}$$

*b.* Si $(Z_n, n \geqslant 0)$ est positive et si on pose $\underline{Z} = \liminf_{k \to \infty} Z_k$, montrer que pour tout $n \geqslant 0$ :

$$E(\underline{Z} \mid \mathcal{B}_n) \leqslant Z_n \qquad \text{p.s.}$$

*c.* Si $(Z_n, n \geqslant 0)$ est positive et converge p.s. vers une v.a.r. $Z_\infty$, et si $E(Z_\infty) = E(Z_0)$, montrer que pour tout $n \geqslant 0$,

$$E(Z_\infty \mid \mathcal{B}_n) = Z_n \qquad \text{p.s.}$$

2° *a.* Soit T un temps d'arrêt de la famille $(\mathcal{B}_n, n \geqslant 0)$.

Montrer que la suite $(Z_{n \wedge T}, n \geqslant 0)$ définie par

$$\begin{aligned} Z_{n \wedge T} &= Z_n \qquad \text{sur } \{T > n\} \\ &= Z_T \qquad \text{sur } \{T \leqslant n\} \end{aligned}$$

est encore une martingale adaptée à la famille $(\mathcal{B}_n, n \geqslant 0)$.

*b.* On pose pour $b > 0$

$$\begin{aligned} T_b &= \inf\{n \geqslant 0 : Z_n > b\} \\ &= +\infty \quad \text{si } Z_n \leqslant b \qquad \text{pour tout } n \geqslant 0. \end{aligned}$$

Montrer que $T_b$ est un temps d'arrêt de la famille $(\mathcal{B}_n, n \geqslant 0)$.

*c.* Montrer que si $(Z_n, n \geqslant 0)$ est positive,

$$b\,P(T_b < +\infty) \leqslant E\left(Z_{T_b} \mathbf{1}_{\{T_b < +\infty\}}\right) \leqslant E(Z_0),$$

et en déduire que $Z^* = \sup\limits_{n \geqslant 0} Z_n$ est finie p.s.

## Deuxième partie

Soit $(Y_k, k \geqslant 1)$ une suite de v.a.r. indépendantes équidistribuées de loi commune $\mu$ définie par $\mu(\{1\}) = \mu(\{-1\}) = 1/2$. On pose

$$\begin{aligned} X_0 &= 0 & \mathcal{B}_0 &= (\Phi, \Omega) \\ X_n &= \sum_{k=1}^{n} Y_k & \mathcal{B}_n &= \sigma(Y_1, \ldots, Y_n) \qquad \text{pour } n \geqslant 1. \end{aligned}$$

Si $c$ et $d$ sont deux entiers $\geqslant 1$, on pose

$$\begin{aligned} U &= \inf\{n \geqslant 1 : X_n \geqslant c \text{ ou } X_n \leqslant -d\} \\ &= +\infty \quad \text{si } -d < X_n < c \qquad \text{pour tout } n \geqslant 1. \end{aligned}$$

Le but de cette partie est d'obtenir la transformée de Laplace de la loi du temps d'atteinte U de la double barrière $\{c, -d\}$ par la promenade aléatoire $(X_n, n \geqslant 0)$.

1° Pour $0 \leqslant \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, montrer que la suite $(S_n^\alpha, n \geqslant 0)$ définie par

$$S_n^\alpha = (\cos \alpha)^{-n} \cos\left\{\alpha\left(X_n - \frac{c-d}{2}\right)\right\}$$

est une martingale adaptée à $(\mathcal{B}_n, n \geqslant 0)$.

2° On suppose désormais $0 \leqslant \alpha < \dfrac{\pi}{c+d}$. Montrer :

*a.* Que $(S_{n \wedge U}^\alpha, n \geqslant 0)$ est une martingale positive adaptée à la famille $(\mathcal{B}_n, n \geqslant 0)$ ;

*b.* Que pour tout $n \geqslant 0$,

$$E\left((\cos \alpha)^{-(n \wedge U)}\right) \leqslant \frac{\cos\left\{\alpha \dfrac{c-d}{2}\right\}}{\cos\left\{\alpha \dfrac{c+d}{2}\right\}};$$

*c.* Que $P(U < +\infty) = 1$ ;

*d.* Que $(\cos \alpha)^{-U}$ est intégrable.

3° Calculer, toujours pour $0 \leqslant \alpha < \dfrac{\pi}{c+d}$, la valeur de $E((\cos \alpha)^{-U})$.

## Troisième partie

Soit $(Z_n, n \geqslant 0)$ une martingale positive adaptée à une famille croissante $(\mathcal{B}_n, n \geqslant 0)$ de sous-tribus de $\mathcal{A}$. On suppose que $Z_0 = 1$ et que la suite $(Z_n, n \geqslant 0)$ tend p.s. quand $n$ tend vers $+\infty$ vers une v.a.r. $Z_\infty$. On pose pour tout $k \geqslant 1$.

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{Z_k}{Z_{k-1}} \qquad \text{sur } \{Z_{k-1} > 0\} \\ &= 1 \qquad\quad \text{sur } \{Z_{k-1} = 0\} \end{aligned}$$

On suppose que $\alpha_k \operatorname{Log} \alpha_k$ est intégrable pour tout $k \geqslant 1$ (ici $0 \operatorname{Log} 0 = 0$) et on va introduire la condition

$$(c) \qquad E\left(\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} E(\alpha_k \operatorname{Log} \alpha_k \mid \mathcal{B}_{k-1})\right\}\right) < +\infty$$

après lui avoir donné un sens grâce au résultat de la question 2°.

Le but de cette partie est de montrer que sous la condition $(c)$, $E(Z_\infty) = 1$.

1° Montrer que pour tout $k \geqslant 1$,

$$\mathbf{1}_{\{Z_{k-1}=0\}} \leqslant \mathbf{1}_{\{Z_k=0\}} \qquad \text{p.s.}$$

2° Montrer que pour tout $k \geqslant 1$,

$$E(\alpha_k \mid \mathcal{B}_{k-1}) = 1 \qquad \text{p.s.}$$

puis que

$$E(\alpha_k \operatorname{Log} \alpha_k \mid \mathcal{B}_{k-1}) \geqslant 0 \qquad \text{p.s.}$$

3° Soit $\lambda \in ]0, 1[$.

*a.* Montrer que pout tout $k \geqslant 1$, $(\alpha_k)^\lambda$ est intégrable et

$$E((\alpha_k)^\lambda \mid \mathcal{B}_{k-1}) > 0 \qquad \text{p.s.}$$

*b.* Soit $P_k$ la probabilité définie sur $(\Omega, \mathcal{B}_k)$ par

$$P_k(A) = E(\mathbf{1}_A \alpha_k), \qquad A \in \mathcal{B}_k, \quad k \geqslant 1.$$

Montrer que les restrictions à $\mathcal{B}_{k-1}$ de $P$ et $P_k$ ont mêmes ensembles négligeables. Si $E_k$ désigne l'espérance relative à $P_k$, montrer que

$$E(\alpha_k \operatorname{Log} \alpha_k \mid \mathcal{B}_{k-1}) = E_k(\operatorname{Log} \alpha_k \mid \mathcal{B}_{k-1}) \qquad \text{p.s.}$$

et que

$$E((\alpha_k)^\lambda \mid \mathcal{B}_{k-1}) = E_k((\alpha_k)^{\lambda-1} \mid \mathcal{B}_{k-1}) \qquad \text{p.s.}$$

*c.* En déduire que

$$\exp\{(\lambda - 1)\, E(\alpha_k \operatorname{Log} \alpha_k \mid \mathcal{B}_{k-1})\} \leqslant E((\alpha_k)^\lambda \mid \mathcal{B}_{k-1}) \qquad \text{p.s.}$$

4° On considère pour $n \geqslant 1$

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} E(\alpha_k \operatorname{Log} \alpha_k \mid \mathcal{B}_{k-1})$$

et on note

$$R_\infty = \lim_{n\to\infty} R_n \qquad \text{p.s.}$$

On suppose, comme on l'a annoncé au début de cette partie, qu'est vérifiée la condition

(*c*) $$E(\exp R_\infty) < +\infty .$$

Pour tout $\lambda \in ]0, 1[$, on introduit la suite $(Y_n(\lambda),\ n \geqslant 0)$ définie par

$$Y_0(\lambda) = 1$$

$$Y_n(\lambda) = \prod_{k=1}^{n} \frac{(\alpha_k)^\lambda}{E((\alpha_k)^\lambda \mid \mathcal{B}_{k-1})} \qquad \text{p.s.}$$

et on pose

$$\overline{Y}(\lambda) = \limsup_{n\to\infty} Y_n(\lambda)$$

*a.* Montrer que $(Y_n(\lambda),\ n \geqslant 0)$ est une martingale positive adaptée à $(\mathcal{B}_n,\ n \geqslant 0)$.

*b.* Montrer que pour tout $n \geqslant 1$,

$$Y_n(\lambda) \leqslant (Z_n)^\lambda \exp\{(1-\lambda) R_n\} \qquad \text{p.s.}$$

*c.* Montrer que pour tout $B \in \mathcal{A}$ et tout $n \geqslant 1$,

$$E(\mathbf{1}_B\ Y_n(\lambda)) \leqslant (E(\mathbf{1}_B \exp R_\infty))^{1-\lambda}$$

*d.* Montrer que $\forall \varepsilon > 0$, $E(\mathbf{1}_{\{Y_n(\lambda) \geqslant \overline{Y}(\lambda)+\varepsilon\}}\ Y_n(\lambda))$ tend vers 0 lorsque $n$ tend vers $+\infty$ et en déduire que $E(\overline{Y}(\lambda)) \geqslant 1$.

*e.* Montrer que

$$E(\overline{Y}(\lambda)) \leqslant (E(Z_\infty))^\lambda\ (E(\exp R_\infty))^{1-\lambda} .$$

*f.* En conclure que sous la condition (*c*), $E(Z_\infty) = 1$.

## Quatrième partie

Soit $(Y_k,\ k \geqslant 1)$ une suite de v.a.r. indépendantes équidistribuées dont on désigne par $\mu$ la loi commune et soit $\varphi : \mathbb{R} \to ]-\infty, +\infty]$ la fonction définie par

$$\varphi(u) = \operatorname{Log} E(\exp\{uY_1\}) = \operatorname{Log} \int e^{ux}\, d\mu(x) .$$

On pose

$$X_0 = 0 \qquad \mathcal{B}_0 = (\Omega, \Phi)$$

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k \qquad \mathcal{B}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n) \qquad \text{pour } n \geqslant 1,$$

et pour un réel $a \geqslant 0$,

$$T = \inf\{n \geqslant 1 : X_n \geqslant a\}$$
$$= +\infty \text{ si } X_n < a \qquad \text{pour tout } n \geqslant 1 .$$

Le but de cette partie est d'étudier en fonction des valeurs de $\varphi$ la transformée de Laplace $E(\exp \theta T)$ de la loi de T, et principalement de déterminer pour quelles valeurs de $\theta$ cette expression est finie.

1° Soit I l'ensemble des $u \in \mathbb{R}$ tels que $\varphi(u) < +\infty$.

*a.* Montrer que la fonction $\varphi$ est convexe et en déduire que I est un intervalle contenant l'origine 0.

*b.* Si $\mu$ n'est pas une mesure de Dirac, montrer que $\varphi$ est strictement convexe sur I.

*c.* Si $(u_n, n \geqslant 1)$ est une suite d'éléments de I tendant vers un nombre réel $v$, montrer que $\varphi(u_n) \to \varphi(v) \leqslant +\infty$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

*d.* Montrer que pour tout réel $u$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $c$ telle que pour tout $v \in ]u - \varepsilon, u + \varepsilon[$ et pour tout $x$ réel, on ait

$$|x| \exp vx \leqslant c(\exp\{(u + 2\varepsilon)x\} + \exp\{(u - 2\varepsilon)x\}).$$

En déduire que $\varphi$ est dérivable à l'intérieur $\mathring{I}$ de I, donner une expression de $\varphi'$ et montrer que $\varphi'$ est croissante et continue dans $\mathring{I}$.

*e.* Montrer que la suite $(Z_n^u = \exp\{u X_n - n\varphi(u)\}, n \geqslant 0)$, où $u \in I$, est une martingale positive adaptée à la famille $(\mathcal{B}_n, n \geqslant 0)$.

*f.* Si $\mu$ n'est pas une mesure de Dirac, et si $u \in I \setminus \{0\}$, comparer $Z_n^u$ et $(Z_n^{u/2})^2$, et en déduire que $(Z_n^u, n \geqslant 0)$ converge p.s. vers 0 lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

2° On suppose dans tout ce paragraphe que

$$\int x^- \, d\mu(x) < \int x^+ \, d\mu(x) \leqslant +\infty,$$

où $x^+ = \max(x, 0)$, $x^- = -\min(x, 0)$.

*a.* Montrer que $P(T < +\infty) = 1$ et que $E(Z_T^u) \leqslant 1$ pour tout $u \in I$.

*b.* Soit $\psi$ la fonction définie sur $\mathring{I}$ par :

$$\psi(u) = u\varphi'(u) - \varphi(u).$$

Montrer à l'aide du paragraphe III.4° que l'on a $E(Z_T^u) = 1$ dès que $E(\exp\{\psi(u)T\}) < +\infty$.

*c.* Montrer que $\varphi(u) \in [0, +\infty]$ pour $u \geqslant 0$.

*d.* Pour tout $c > 0$, on considère la suite $(Y_k^c = \min(Y_k, c), k \geqslant 1)$; $\mu^c$, $\varphi^c$, $T^c$, $Z_{T^c}^{u,c}$ désignent respectivement les valeurs de $\mu$, $\varphi$, T, $Z_T^u$ associées à cette suite $(Y_k^c, k \geqslant 1)$.

Montrer que si $u \in I \cap \mathbb{R}^-$, alors $\varphi^c(u) < +\infty$, que si $c$ est choisi assez grand, alors $P(T^c < +\infty) = 1$, et que si ces deux conditions sont réalisées, alors

$$E(Z_{T^c}^{u,c}) \geqslant \exp\{u(a + c)\} \; E(\exp\{-\varphi^c(u)T^c\}).$$

Montrer, toujours pour $u \in I \cap \mathbb{R}^-$, que $\varphi^c(u)$ converge vers $\varphi(u)$ lorsque $c$ tend vers $+\infty$. En déduire par comparaison de T et $T^c$ que :

$$E(\exp \theta T) < +\infty \qquad \text{pour } \theta < -\inf \varphi,$$

où $\inf \varphi$ désigne la borne inférieure de $\varphi(u)$ pour $u$ dans I.

*e.* On suppose $\mu(\mathbb{R}^+) = 1$, $\mu(\{0\}) > 0$ et $a > 0$. On pose

$$\begin{aligned} T_0 &= \inf\{n \geqslant 1 : X_n > 0\} \\ &= +\infty \quad \text{si } X_n \leqslant 0 \quad \text{pour tout } n \geqslant 1. \end{aligned}$$

Calculer pour tout $j \geqslant 1$, $P(T_0 = j)$. Montrer que $T_0 \leqslant T$, que $\inf \varphi = \operatorname{Log} \mu(\{0\})$ et que

$$E(\exp \theta T) = +\infty \qquad \text{pour } \theta = -\inf \varphi.$$

*f.* On suppose $\mu(\mathbb{R}^+) < 1$. Montrer que $\varphi(u)$ tend vers $+\infty$ lorsque $u$ tend vers $-\infty$ et que $\varphi$ atteint sa borne inférieure pour une valeur $u_0 \leqslant 0$.

*g.* On suppose que $\mu(\mathbb{R}^+) < 1$ et qu'il existe $c > 0$ tel que $\mu(]-\infty, c]) = 1$. Montrer que

$$E(\exp \theta T) < +\infty \qquad \text{pour } \theta = -\inf \varphi.$$

*h.* On suppose que $\mu(\mathbb{R}^+) < 1$ et qu'il existe un réel $d < 0$ tel que $\mu([d, +\infty[) = 1$. Montrer que $\mathbb{R}^- \subset I$ et que s'il existait $\theta > -\varphi(u_0)$ tel que $E(\exp \theta T) < +\infty$, alors il existerait $u_1 < u_0$ tel que $E(\exp\{\psi(u_1)T\}) < +\infty$; comparant les valeurs de $E(Z_T^{u_1})$ et $E(Z_T^{u_0})$, en déduire que

$$E(\exp \theta T) = +\infty \qquad \text{pour } \theta > -\inf \varphi.$$

*i.* On suppose $\mu(\mathbb{R}^+) < 1$. Montrer que

$$\mathrm{E}(\exp \theta \mathrm{T}) = +\infty \qquad \text{pour } \theta > -\inf \varphi .$$

*j.* Au vu des questions précédentes, pour quelles valeurs de $\theta$ peut-on affirmer que

$$\mathrm{E}(\exp \theta \mathrm{T}) < +\infty$$

- si $\mu$ est la loi gaussienne de moyenne $m > 0$ et de variance $\sigma^2 > 0$ ?
- si $\mu$ est la loi de densité $\dfrac{p^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-p(x+1)} (x+1)^{\alpha-1}$ sur $]-1, +\infty[$, avec $\alpha > p > 0$ ?

3° On suppose désormais que les valeurs prises par les v.a.r. $(\mathrm{Y}_k, k \geqslant 1)$ sont des entiers relatifs inférieurs ou égaux à 1, que $\mu(\{1\}) > 0$ et que le seuil $a$ est un entier strictement positif.

*a.* Montrer que $\mathrm{X}_\mathrm{T} = a$ sur $\{\mathrm{T} < +\infty\}$.

*b.* Montrer que $\mathbb{R}^+ \subset \mathrm{I}$ et que $\varphi(u)$ tend vers $+\infty$ lorsque $u$ tend vers $+\infty$.

*c.* Soit $u^* = \max\{u \geqslant 0 : \varphi(u) = 0\}$. Montrer que la martingale $(\mathrm{Z}^u_{n \wedge \mathrm{T}}, n \geqslant 0)$ est bornée pour tout $u \geqslant u^*$, puis que

$$\mathrm{P}(\mathrm{T} < +\infty) = e^{-au^*}.$$

*d.* On suppose

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\mu(\{-k\}) < \mu(\{1\}).$$

Montrer que si $u \in \mathring{\mathrm{I}} \cap \mathbb{R}^-$ et vérifie $\varphi'(u) \geqslant 0$, alors on a $\mathrm{E}(\mathrm{Z}^u_\mathrm{T}) = 1$. En déduire la valeur de $\mathrm{E}(\exp \theta \mathrm{T})$ pour toutes les valeurs réelles de $\theta$ pour lesquelles cette quantité est finie.

*e.* Calculer $\mathrm{P}(\mathrm{T} < +\infty)$ dans les deux cas suivants :

- $\mu(\{1-k\}) = p(1-p)^k$ pour $k \in \mathbb{N}$, avec $0 < p \leqslant \dfrac{1}{2}$;
- $\mu(\{1-k\}) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$ pour $k \in \mathbb{N}$, avec $\lambda = \dfrac{e}{e-1}$.

*f.* Calculer $\mathrm{E}(\exp \theta \mathrm{T})$ dans les trois cas suivants :

- $\mu(\{1\}) = \mu(\{-1\}) = \dfrac{1}{2}$;
- $\mu(\{1\}) = \mu(\{0\}) = \dfrac{1}{2}$;
- $\mu(\{1-k\}) = p(1-p)^k$ pour $k \in \mathbb{N}$, avec $\dfrac{1}{2} < p < 1$.