Retrouver à partir des équations de Lagrange avec multiplicateurs l'intégrale première de l'énergie sous la forme $E = U + h$ (h = constante).

3° On abandonne les hypothèses du paragraphe précédent, à l'exception de l'existence d'une fonction de force U, mais qui peut maintenant dépendre du temps. A quelles conditions peut-on obtenir à partir des équations de Lagrange avec multiplicateurs une intégrale première du type de Painlevé?

Application : on reprend la situation étudiée au 3° cas *a.* de la première partie, mais en supposant que le plan (P), rainuré suivant les droites passant par O, est animé d'un mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire constante ω autour de Oz_1, axe passant par O et de vecteur unitaire $\vec{k_1}$. Étudier le mouvement de la sphère (S).

PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

NOTATIONS ET RAPPELS

1° Pour tout entier $n \geqslant 1$ on désignera par Σ_n l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Chaque fois que l'on aura à utiliser une propriété de Σ_n, on l'énoncera avec soin, mais on ne la démontrera pas.

2° Soit $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; on notera Φ^s l'application symétrisée de Φ définie par :

$$(x_1, \ldots, x_n) \rightsquigarrow \frac{1}{n!} \sum_{\Pi \in \Sigma_n} \Phi(x_{\Pi(1)}, \ldots, x_{\Pi(n)}).$$

Φ sera dite symétrique si elle est identique à sa symétrisée.

3° On considérera sur $\mathbb{R}^n$ le produit scalaire usuel défini par

$$< x, y > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{pour tous} \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \quad \text{et} \quad y = (y_1, \ldots, y_n).$$

Une application linéaire A de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même sera dite unitaire si elle conserve le produit scalaire, c'est-à-dire :

$$< A(x), A(y) > = < x, y > \quad \text{pour tout} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

$\mathbb{R}^n$ sera muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}^n$.

4° Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé ; l'expression « variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ » signifiera :

— soit une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$;
— soit une classe d'équivalence relativement à P de telles applications.

On notera P_X la loi d'une variable aléatoire X.

Sauf mention explicite, chaque fois qu'on considérera une famille de variables aléatoires, on les supposera définies sur un même espace $(\Omega, \mathcal{F})$.

Si X est une variable aléatoire réelle intégrable on désignera par $E\{X\}$ son espérance mathématique et $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ désignera l'espace des variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ intégrables (c'est un ensemble de P-classes d'équivalence).

5° Si $\mathcal{G}$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}$, on désignera par P_g la restriction de P à $\mathcal{G}$. Si $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ on notera $E\{X \mid \mathcal{G}\}$ l'espérance conditionnelle de X relativement à $\mathcal{G}$. C'est l'unique élément de $L^1(\Omega, \mathcal{G}, P_g)$ défini par :

$$E\{XY\} = \int E\{X \mid \mathcal{G}\}.\, Y\, dP_g \quad \text{pour toute} \quad Y \in L^\infty(\Omega, \mathcal{G}, P_g).$$

Si $\mathcal{G}$ est la tribu engendrée par une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, on notera $E\{X \mid Z\}$ au lieu de $E\{X \mid \mathcal{G}\}$, et $E\{X \mid Z = .\}$ désignera l'unique élément de $L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, P_Z)$ tel que pour toute $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ borélienne bornée on ait :

$$E\{X g(Z)\} = \int_{\mathbb{R}^n} E\{X \mid Z = z\}\, g(z)\, P_Z(dz).$$

6° Une famille $(X_i)_{i \in I}$ de variables aléatoires réelles est dite indépendante conditionnellement à la sous-tribu $\mathcal{G}$, si pour tout sous-ensemble fini J de I et toute famille $(f_j)_{j \in J}$ de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ boréliennes bornées on a :

$$E\left\{ \prod_{j \in J} f_j(X_j) \mid \mathcal{G} \right\} = \prod_{j \in J} E\{f_j(X_j) \mid \mathcal{G}\}.$$

Cette famille est dite de même loi conditionnellement à $\mathcal{G}$ si pour toute $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne bornée $E\{f(X_i) \mid \mathcal{G}\}$ ne dépend pas de i dans I.

7° Le candidat pourra utiliser dans la suite le résultat suivant :

Soit $(\mathcal{G}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille décroissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$ et soit $\mathcal{G}_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_n$. Pour toute $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on a $\lim_{n \to \infty} E\{Y \mid \mathcal{G}_n\} = E\{Y \mid \mathcal{G}_\infty\}$ au sens de la convergence presque sûre.

8° On rappelle enfin que la fonction Γ est définie pour $x > 0$ par

$$x \rightsquigarrow \Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\, e^{-t}\, dt.$$

9° $\mathbb{N}^*$ désignera l'ensemble des entiers strictement positifs.

$\mathbb{R}_+^*$ désignera l'ensemble des réels strictement positifs.

PRÉLIMINAIRES

1° Soit $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ n variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.

Soit $\mathcal{G} = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ la tribu engendrée par ces variables.

Soient Z et $\tilde{Z}$ deux variables aléatoires réelles telles que

a. $Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\tilde{Z} \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P_g)$;

b. Pour tout n-uple $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ de fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ mesurables bornées on ait :

$$E\{Z.f_1(X_1) \ldots f_n(X_n)\} = E\{\tilde{Z}.f_1(X_1) \ldots f_n(X_n)\}$$

Comparer $\tilde{Z}$ et $E\{Z \mid \mathcal{G}\}$.

2° À quelle condition les $(X_i)_{i \in I}$ sont-elles indépendantes conditionnellement à la tribu $\{\varnothing, \Omega\}$?

À quelle condition sont-elles indépendantes conditionnellement à $\mathcal{F}$?

I

Un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$: $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est dit *échangeable* si pour toute $\Pi \in \Sigma_n$ il a même loi que le vecteur $X_\Pi = (X_{\Pi(i)})_{1 \leqslant i \leqslant n}$. On dira également que les n-variables aléatoires réelles $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ sont échangeables.

1° Soit U une variable aléatoire réelle telle que U et $(-U)$ ont même loi. Montrer que le vecteur aléatoire $(U, -U)$ est échangeable.

2° On suppose que la loi du vecteur échangeable $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Que peut-on dire de la densité de cette loi ?

3° Soient $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ des variables aléatoires indépendantes ayant toutes pour loi la loi uniforme sur $[0, 1]$. Soit $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$ une statistique d'ordre pour les U_i ; c'est-à-dire que les Y_i sont des variables aléatoires réelles telles que

— $\forall \omega$ $Y_1(\omega) \leqslant Y_2(\omega) \ldots \leqslant Y_n(\omega)$;

— $\forall \omega$ l'ensemble $\{Y_1(\omega), \ldots Y_n(\omega)\}$ est identique à l'ensemble $\{U_1(\omega), \ldots U_n(\omega)\}$.

(On admettra l'existence des Y_i.)

On pose $Y_0(\omega) = 0 \; \forall \omega$ et pour $i = 1, 2, \ldots, n$, on pose $X_i = Y_i - Y_{i-1}$. Démontrer que les X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sont échangeables.

4° Montrer que, s'il existe une sous-tribu $\mathcal{G}$ telle que, conditionnellement à $\mathcal{G}$, les variables aléatoires $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ soient indépendantes et de même loi, alors les X_i sont échangeables.

Dans toute la suite de cette partie, on supposera que le vecteur aléatoire X *est échangeable.*

5° Soient J et K deux parties de $\{1, 2, \ldots, n\}$ de même cardinal.

Que peut-on dire des vecteurs aléatoires $(X_j)_{j \in J}$ et $(X_k)_{k \in K}$?

6° On suppose que la variable aléatoire X_1 n'est pas presque sûrement égale à une constante et qu'elle est de carré intégrable. Exprimer la variance de la variable $\sum_{j=1}^{n} X_j$ au moyen de n, de la variance σ^2 de X_1 et du coefficient de corrélation b de X_1 et X_2.

En déduire l'inégalité $b \geqslant -\dfrac{1}{n-1}$.

7° Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ toutes deux croissantes ou toutes deux décroissantes (au sens large) et telles que $E\{f(X_1)\,g(X_1)\}$ et $E\{f(X_1)\,g(X_2)\}$ existent. Démontrer que pour tout couple (j, k) d'éléments de $\{1, 2, \ldots, n\}$:

$$E\{f(X_j)\,g(X_k)\} \leqslant E\{f(X_j)\,g(X_j)\}.$$

8° Soit Φ une fonction borélienne de $\mathbb{R}_n$ dans $\mathbb{R}$. Que peut-on dire de $E\{\Phi(X)\}$ et $E\{\Phi^s(X)\}$?

II

Le vecteur aléatoire $X = (X_1, \ldots, X_n)$ est dit à *symétrie sphérique* en loi si, pour tout opérateur unitaire A sur $\mathbb{R}^n$, les vecteurs X et A (X) ont même loi. On omettra dans la suite le terme « en loi ».

1° Démontrer que tout vecteur à symétrie sphérique est échangeable.

La réciproque est-elle vraie ?

2° Énoncer une condition nécessaire et suffisante portant sur la fonction caractéristique du vecteur aléatoire X pour que celui-ci soit à symétrie sphérique.

3° Si $\sigma > 0$, on désignera par $\mathcal{N}_\sigma$ la loi gaussienne réelle centrée de variance σ. $\mathcal{N}_0$ désignera la mesure de Dirac sur $\mathbb{R}$ au point zéro.

On suppose qu'il existe une variable aléatoire réelle V, presque sûrement positive ou nulle telle que, pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$ pour toute $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne bornée, la fonction de $[0, \infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\sigma \rightsquigarrow \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathcal{N}_\sigma(dx)$$

soit un représentant de $E\{f(X_i)\,|\,V = .\}$. Montrer que, si les X_i sont indépendantes conditionnellement à V, X est à symétrie sphérique.

4° Soit $Y = (Y_1, Y_2)$ un vecteur aléatoire dont la loi est uniformément répartie sur le cercle unité de $\mathbb{R}^2$: $\{z ; \|z\| = 1\}$.

Montrer que X est à symétrie sphérique. Y satisfait-elle aux hypothèses de la question 3° ?

5° Soient $V, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes, les Y_i ayant la loi $\mathcal{N}_\sigma$ $(\sigma > 0)$ et la loi de V ayant la densité suivante (par rapport à la mesure de Lebesgue) :

$$x \rightsquigarrow \frac{\exp\left(-\dfrac{x}{2\sigma}\right) x^{\frac{m}{2}-1}}{\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)(2\sigma)^{\frac{m}{2}}}\, 1_{\mathbb{R}_+^*}(x) \qquad (m > 0).$$

Montrer que le vecteur aléatoire $X = (X_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ tel que $X_j = \dfrac{Y_j}{\sqrt{V}}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ est à symétrie sphérique.

Expliciter la loi du vecteur $(X_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$. On appellera $\mathcal{C}_n^m$ cette loi.

6° Les notations restant celles de la question ci-dessus, que peut-on dire des variables aléatoires

$$X' = (X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}) \quad \text{et} \quad U_n = \frac{X_n}{\sqrt{1 + \sum_{j=1}^{n-1} X_j^2}} \;? \qquad (n \geqslant 2).$$

III

On désignera par Σ' l'ensemble des permutations de $\mathbb{N}^*$, et pour tout n entier naturel $\geqslant 1$, on désignera par Σ'_n l'ensemble de celles qui laissent invariants les entiers k tels que $k > n$.

Soit $X = (X_k)_{1 \leqslant k < \infty}$ une suite de variables aléatoires réelles.

Une variable aléatoire réelle Y est dite *n-symétrique* relativement à X (ou simplement n-symétrique quand aucune confusion n'est possible) s'il existe $g : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$, mesurable relativement à la tribu produit $\mathcal{B}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\mathcal{B}^1$, telle que $Y = g \circ X$ et telle que les variables aléatoires $g(X)$ et $g(X_\Pi)$ sont p. s. égales pour toute $\sigma \in \Sigma'_n$.

(On rappelle que si $\Pi \in \Sigma'$: $X_\Pi = (X_{\Pi(n)})_{n \geqslant 1}$.)

On désigne par $(\mathcal{G}_n)$ la suite (décroissante en n) des tribus engendrées par les variables aléatoires n-symétriques.

La suite X est dite échangeable si pour tout $n > 1$, les vecteurs aléatoires $(X_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ sont échangeables.

Dans toute cette partie on supposera que la suite X *est échangeable.*

1° On suppose que X_1 est non presque sûrement constante et que $E\{X_1^2\} < \infty$. Donner une borne inférieure non triviale du coefficient de corrélation de X_1 et X_2.

2° Soit $g : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ mesurable et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne.

Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ soit Π_j la permutation de $\mathbb{N}^*$ telle que

$$\Pi_j(k) = k \text{ si } j \neq k \text{ et } k \neq 1, \quad \text{et} \quad \Pi_j(1) = j, \quad \Pi_j(j) = 1.$$

Comparer, lorsqu'elles existent, les quantités $E\{f(X_1)\, g(X)\}$ et $E\{f(X_j)\, g(X_{\Pi_j})\}$.

3° Soit Y une variable aléatoire réelle n-symétrique et bornée.

On suppose que $E\{|f(X_1)|\} < \infty$. Comparer d'abord les quantités :

$$\mathrm{E}\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(\mathrm{X}_j)\,.\,\mathrm{Y}\right\} \quad \text{et} \quad \mathrm{E}\{f(\mathrm{X}_j)\,.\,\mathrm{Y}\}.$$

Comparer ensuite les variables aléatoires

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(\mathrm{X}_j) \quad \text{et} \quad \mathrm{E}\{f(\mathrm{X}_1)\,|\,\mathcal{G}_n\}.$$

4° Soit $\mathcal{G} = \bigcap_{n \geqslant 1} \mathcal{G}_n$. Démontrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(\mathrm{X}_j) = \mathrm{E}\{f(\mathrm{X}_1)\,|\,\mathcal{G}\} \text{ presque sûrement.}$$

Démontrer que, conditionnellement à $\mathcal{G}$, les variables aléatoires X_i, $_{i \in \mathbb{N}^*}$ ont même loi.

5° Soit maintenant f une fonction borélienne bornée de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}$ ($k \geqslant 1$). Si $n \geqslant k$, on désignera pas $\mathcal{A}_n^k$ l'ensemble des arrangements des indices $\{1, 2, \ldots, n\}$ pris k à k et par A_n^k le cardinal de cet ensemble. Démontrer que l'on a presque sûrement :

$$\frac{1}{\mathrm{A}_n^k} \sum_{(j_1, \ldots, j_k) \in \mathcal{A}_n^k} f(\mathrm{X}_{j_1}, \ldots, \mathrm{X}_{j_k}) = \mathrm{E}\{f(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_k)\,|\,\mathcal{G}_n\}.$$

6° En déduire que, presque sûrement :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} \sum_{j_1=1}^{n}, \sum_{j_2=1}^{n}, \ldots, \sum_{j_k=1}^{n} f(\mathrm{X}_{j_1}, \mathrm{X}_{j_2}, \ldots, \mathrm{X}_{j_k}) = \mathrm{E}\{f(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_k)\,|\,\mathcal{G}\}.$$

7° Démontrer que, conditionnellement à $\mathcal{G}$, les variables X_i, $i \in \mathbb{N}^*$ sont indépendantes.

IV

Pour résoudre cette partie le candidat pourra admettre les deux résultats suivants :

A

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et $\mathcal{H}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$.

Soit ξ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Il existe alors une fonction $(\omega, \mathrm{A}) \rightsquigarrow \mathrm{P}_\xi^{\mathcal{H}}(\omega, \mathrm{A})$ de $\Omega \times \mathcal{B}^n$ dans $[0, 1]$ telle que

i. $\forall\, \omega \in \Omega$, $\mathrm{P}_\xi^{\mathcal{H}}(\omega, .)$ est une probabilité sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$.

ii. $\forall\, \mathrm{A} \in \mathcal{B}^n$, $\mathrm{P}_\xi^{\mathcal{H}}(\,.\,, \mathrm{A})$ est $\mathcal{H}$-mesurable.

iii. Quelle que soit la fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, borélienne bornée, la fonction $\omega \rightsquigarrow \int f(x)\, \mathrm{P}_\xi^{\mathcal{H}}(\omega, dx)$ (dont on démontre facilement la mesurabilité) est un représentant pour la $\mathrm{P}_{\mathcal{H}}$-équivalence de $\mathrm{E}\{f(\xi)\,|\,\mathcal{H}\}$. $\mathrm{P}_\xi^{\mathcal{H}}$ est appelée une version régulière de la loi conditionnelle de ξ par rapport à $\mathcal{H}$.

B

Les seules fonctions $\mathrm{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues, telles que $\mathrm{F}(0) = 1$ et telles que

$$\mathrm{F}\left(\sqrt{u^2 + v^2}\right) = \mathrm{F}(u)\,\mathrm{F}(v) \quad \forall\,(u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

sont les fonctions $t \rightsquigarrow F(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda t^2\right)$ où $\lambda \in \mathbb{C}$.

Soit alors $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite échangeable et $\mathcal{H}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ telle que, conditionnellement à $\mathcal{H}$ les X_k soient indépendantes et de même loi. Soit $P_{X_1}^{\mathcal{H}}$ une version régulière de la loi conditionnelle de X_1 par rapport à $\mathcal{H}$.

1° Soit $t \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \Omega$; on pose :

$$F(t, \omega) = \int_{\mathbb{R}} \exp(itx)\, P_{X_1}^{\mathcal{H}}(\omega, dx) \quad (i \in \mathbb{C} : i = (0,1)).$$

Soit $n \geq 1$ et soit $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$. Démontrer que l'application $\omega \rightsquigarrow \prod_{j=1}^{n} F(t_j, \omega)$ est un représentant de $E\left\{\exp\left(i\sum_{j=1}^{n} t_j X_j\right) \mid \mathcal{H}\right\}$.

En déduire une expression de la fonction caractéristique de la variable aléatoire réelle $\sum_{j=1}^{n} t_j X_j$.

La suite $X = (X_n)_{n \geq 1}$ est dite à symétrie sphérique si, pour tout $n \geq 1$, le vecteur aléatoire $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est à symétrie sphérique. *Dans toute la suite, on supposera* X *à symétrie sphérique.*

2° Démontrer que, pour tout n, l'expression

$$E\left\{\prod_{j=1}^{n} F(t_j, \omega)\right\} \quad \text{(les } t_j \text{ étant réels) ne dépend que de } \sum_{j=1}^{n} t_j^2.$$

3° Soient u et v deux réels et $t = \sqrt{u^2 + v^2}$. Calculer :

$$E\{|F(t, \omega) - F(u, \omega)F(v, \omega)|^2\};$$

et en déduire :

$$P\{\omega ; F(t, \omega) = F(u, \omega)F(v, \omega)\}.$$

4° Démontrer que, pour presque tout ω :

$$F(\sqrt{u^2 + v^2}, \omega) = F(u, \omega)F(v, \omega) \qquad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

En déduire l'existence d'une variable aléatoire U réelle telle que

$$F(t, \omega) = \exp\left(-\frac{1}{2}U(\omega)t^2\right) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

5° Démontrer que U est $\mathcal{H}$-mesurable et que, presque sûrement :

$$E\left\{\exp\left(i\sum_{j=1}^{n} t_j X_j\right) \mid U\right\} = \prod_{j=1}^{n} \exp\left(-\frac{1}{2}U t_j^2\right).$$

Démontrer que, conditionnellement à U, les variables aléatoires X_k, $k \in \mathbb{N}^*$ sont indépendantes et de même loi. Expliciter une version régulière de la loi conditionnelle de X_1 par rapport à la tribu engendrée par U.

6° En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ soit à symétrie sphérique.

7° Démontrer que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j^2$ existe presque sûrement. Comparer cette limite à U.

8° Démontrer que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ est à symétrie sphérique si et seulement s'il existe une probabilité μ sur $[0, \infty[$ ayant la propriété suivante :

Soit $t \in \mathbb{R}$ et $F(t) = \int_{[0,\infty[} \exp(-xt^2)\, d\mu(x)$; alors $\forall n \geq 1$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \rightsquigarrow F\left(\sqrt{t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_n^2}\right)$ est la fonction caractéristique du vecteur aléatoire $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Ce résultat subsiste-t-il pour un vecteur aléatoire $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ à symétrie sphérique ?

9° Soit $(Z_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables réelles indépendantes ayant la même loi $\mathcal{N}_\sigma$ $(\sigma > 0)$ et soit V une variable aléatoire réelle indépendante des Z_n et ayant pour loi :

$$x \rightsquigarrow \frac{\exp\left(-\frac{x}{2\sigma}\right) x^{\frac{m}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)(2\sigma)^{\frac{m}{2}}} 1_{\mathbb{R}_+^*}(x) \,.\, dx.$$

Que peut-on dire de la suite de variables aléatoires définie par $U_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{Z_j^2}{V}$ $(n \geq 1)$.

10° Soit $m \in \mathbb{N}^*$; on considère une suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires réelles indépendantes et de lois respectives $\mathcal{C}_1^{n+m-1}$ (voir partie II, question 4°).

On définit la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ par $X_1 = Y_1$ et par la relation de récurrence :

$$X_{n+1} = Y_{n+1} \sqrt{1 + \sum_{j=1}^{n} X_j^2}.$$

Montrer que $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j^2$ converge presque sûrement. Quelle est la loi de cette limite ?

11° Avec les mêmes notations, démontrer que $\frac{1}{n} \prod_{j=1}^{n} (1 + Y_j^2)$ converge presque sûrement.