PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

Sujet (durée : 6 heures)

On s'efforcera de désigner les variables aléatoires par des lettres majuscules et les valeurs qu'elles prennent par des lettres minuscules.

DÉFINITIONS, NOTATIONS ET RAPPELS

1° Dans tout le problème $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et $\overline{\mathbb{R}}_+$ l'ensemble $[0, \infty]$. Ces deux derniers ensembles sont munis de leur tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ respectivement. (On rappelle que la tribu borélienne sur un espace topologique est la tribu engendrée par les ouverts de cette topologie.)

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ désigne l'espace vectoriel (pour les opérations usuelles) de toutes les suites de nombres réels :

$$x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad \text{si} \quad x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{est une suite où } x_n \in \mathbb{R} \text{ pour tout } n .$$

$\mathbb{R}_0^{\mathbb{N}}$ désigne le sous-espace vectoriel des suites telles que $x_n = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est muni de la topologie produit usuelle qu'on peut définir de la façon suivante : soit $\Phi(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ de cardinal fini ; si $J \in \Phi(\mathbb{N})$ on désigne par Π_J la projection canonique de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}^J$ définie par :

$$x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightsquigarrow \Pi_J(x) = x_J = (x_j)_{j \in J} .$$

Une base d'ouverts de la topologie dont on munit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est alors constituée par les cylindres ouverts c'est-à-dire les ensembles de la forme $\Pi_I^{-1}(O_I)$ où I décrit $\Phi(\mathbb{N})$ et O_I la famille des ouverts de $\mathbb{R}^I$.

On notera $\mathcal{B}$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ correspondant à cette topologie. On rappelle que $\mathcal{B}$ est la plus petite tribu rendant mesurables les applications Π_J ($J \in \Phi(\mathbb{N})$) quand chaque $\mathbb{R}^J$ est muni de sa tribu borélienne.

2° Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé, une variable aléatoire X (en abrégé v. a.) sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ sera appelée variable aléatoire réelle (en abrégé v. a. r.). Une v. a. sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $(\overline{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+))$ sera appelée v. a. positive. Le symbole $E(X)$ désigne, quand elle existe, l'espérance mathématique de X relativement à la probabilité P.

Toute suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de v. a. r. sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ définit une v. a. X à valeurs dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$. Réciproquement une v. a. X sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$ définit une suite de v. a. r. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ par les relations : $X_n = \Pi_{\{n\}} X$ où $\{n\}$ désigne la partie de $\mathbb{N}$ réduite à l'entier n. Les v. a. r. X_n seront appelées les coordonnées de X. On identifiera ainsi les notions de suite de v. a. r. sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et de v. a. sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$.

On rappelle que la loi P_X d'une v. a. X à valeurs dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$, c'est-à-dire la mesure image de P par X, est uniquement déterminée par ses valeurs sur les cylindres $\Pi_I^{-1}(O_I)$ où O_I est un borélien de $\mathbb{R}^I$.

On dira qu'une v. a. X à valeurs dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$ est une v. a. gaussienne centrée si $\forall J \in \Phi(\mathbb{N})$, X_J est un vecteur gaussien centré. On conviendra qu'une v. a. constante est gaussienne.

Une v. a. X est dite suite de Bernoulli si la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de ses coordonnées est une suite de v. a. r. indépendantes de même loi de Bernoulli donnée par $P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \dfrac{1}{2}$.

PARTIE I

1° Vérifier que l'application $(x, y) \rightsquigarrow (x + y)$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est mesurable relativement à $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$.

Soient X et Y deux v. a. sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$ et indépendantes, soient P_X, P_Y et P_{X+Y} les lois respectives de X, Y et X + Y, soit f une fonction mesurable de $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$ dans $(\overline{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+))$ démontrer que :

$$\mathrm{E}\, f(\mathrm{X} + \mathrm{Y}) = \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \mathrm{E}\; f(\mathrm{X} + y)\, \mathrm{P_Y}(dy) = \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \mathrm{E}\; f(x + \mathrm{Y})\, \mathrm{P_X}(dx)$$

Énoncer un résultat analogue si f n'est pas positive.

2° Démontrer que les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ appartiennent à la tribu $\mathcal{B}$: $\mathbb{R}_0^{\mathbb{N}}$, l^∞ (espace des suites bornées), l^c (espace des suites convergentes dans $\mathbb{R}$).

3° Soit α la fonction de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ définie par :

$$x \rightsquigarrow \alpha(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{j=0}^{n} x_j \right| \quad \text{où} \quad x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}\,;$$ démontrer que α est borélienne.

Soit β la fonction de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ définie par :

$$x \rightsquigarrow \beta(x) = \begin{cases} \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \right| & \text{si la série } \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \text{ est convergente dans } \mathbb{R}\,; \\ \infty & \text{si cette série diverge;} \end{cases}$$

démontrer que β est borélienne.

PARTIE II

Les résultats de cette partie ne seront pas utilisés dans la suite

1° Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et V un vecteur gaussien sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, soit μ sa loi et Λ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\mu(\Lambda) = 0$ ou $\mu(\Lambda) = 1$.

2° Soit $\mathrm{X} = (\mathrm{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une v. a. gaussienne centrée sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$.

Soit k un entier fixé. Pour tout n de $\mathbb{N}$ on désigne par $\mathrm{Z}_n^k = \mathrm{E}[\mathrm{X}_n \mid \mathrm{X}_0, \ldots, \mathrm{X}_k]$ une version de l'espérance conditionnelle de X_n par rapport à la tribu engendrée par le vecteur $(\mathrm{X}_0, \ldots, \mathrm{X}_k)$. On posera

$$\mathrm{Y}_n^k = \mathrm{X}_n - \mathrm{Z}_n^k\,; \quad \mathrm{Y}^k = (\mathrm{Y}_n^k)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{et} \quad \mathrm{Z}^k = (\mathrm{Z}_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$$

Démontrer que Y^k est indépendante du vecteur $(\mathrm{X}_0, \ldots, \mathrm{X}_k)$ et que pour tout n il existe des réels $\mathrm{A}_{n,j}^k$ tels que $\mathrm{Z}_n^k = \sum_{j=0}^{k} \mathrm{A}_{n,j}^k \mathrm{X}_j$. A quelle condition ces coefficients sont-ils uniques pour tout n ?

3° Soit $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\mathrm{T}(y) = \left\{ \theta \in \mathbb{R}^{k+1}\,;\ \left(y_n + \sum_{j=r}^{k} \mathrm{A}_{n,j}^k \theta_j \right)_{n \in \mathbb{N}} \in l^\infty \right\}$

Comparer les ensembles $\{ \mathrm{Z}^k \in l^\infty \}$ et $\{ (\mathrm{X}_0, \ldots, \mathrm{X}_k) \in \mathrm{T}(0) \}$.

En déduire que $\mathrm{P}\{ \mathrm{Z}^k \in l^\infty \} = 0$ ou $\mathrm{P}\{ \mathrm{Z}^k \in l^\infty \} = 1$.

4° Si $T(0)^c$ désigne le complémentaire de $T(0)$, vérifier que pour tout y de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble $T(y) \cap T(0)^c$ rencontre en au plus un point toute droite de $\mathbb{R}^{k+1}$. En déduire que $T(y) \cap T(0)^c$ est négligeable pour la loi de tout vecteur gaussien centré sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{k+1}$.

5° On suppose que $P\{Z^k \in l^\infty\} = 0$; démontrer que $P\{X \in l^\infty\} = 0$.

6° On suppose que $P\{Z^k \in l^\infty\} = 1$; on pose $B_k = \{Y^k \in l^\infty\}$ et $B = \{X \in l^\infty\}$. On désigne par $B \Delta B_k$ l'ensemble $[B \cap B_k^c] \cup [B_k \cap B^c]$; démontrer que $P(B \Delta B_k) = 0$.

En déduire que si $P\{Z^p \in l^\infty\} = 1 \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad P(B) = 0$ ou $P(B) = 1$.

7° Donner un exemple simple de v. a. gaussienne X dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $P\{X \in l^\infty\} = 1$. Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v. a. r. indépendantes, gaussiennes et centrées et X la v. a. gaussienne correspondante dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\sum_{n \in \mathbb{N}} E(X_n^2) < \infty$. Démontrer que $P\{X \in l^\infty\} = 1$.

8° Soit $\tilde{X} = (\tilde{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v. a. r. indépendantes et de même loi de densité $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ (notée du).

Démontrer que $P_{\tilde{X}}\{l^\infty\} = 0$. Quelle est la probabilité $P\{\sup_n X_n < 0\}$?

PARTIE III

Une v. a. $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$ est dite symétrique si les v. a. X et $-X$ ont même loi. Elle est dite strictement symétrique si pour toute suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\{(-1), (+1)\}^{\mathbb{N}}$ les v. a. X et $\varepsilon X = (\varepsilon_n X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ont même loi.

1° Donner un exemple simple de v. a. symétrique qui n'est pas strictement symétrique.

2° Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v. a. r. indépendantes et X la v. a. correspondante dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, montrer que X est strictement symétrique si et seulement si elle est symétrique.

3° Soit $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une v. a. de $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et W une v. a. strictement symétrique sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$ et indépendante de X. Démontrer que la v. a. $Z = (X_n W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement symétrique.

4° Soit $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une v. a. sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$ et $B = (B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une v. a. de Bernoulli définie sur le même espace et indépendante de X. On suppose X strictement symétrique. Démontrer que les v. a. X, $BX = (B_n X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $B|X| = (B_n |X_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ ont même loi.

5° Soit X une v. a. sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$ et de loi P_X. Soient X' et X'' deux v. a. indépendantes à valeurs dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$ et de même loi P_X. Démontrer que $Y = X' - X''$ est symétrique. On appelle symétrisée de X toute v. a. obtenue par ce procédé. Démontrer que toutes les symétrisées de X ont même loi.

6° On suppose X symétrique ; soit $\tilde{X}$ une symétrisée de X ; $\tilde{X}$ a-t-elle même loi que X ?

7° Soit X une v. a. sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$, Y une symétrisée de X. Soit W une v. a. strictement symétrique sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$ indépendante de X. Soit Z la v. a. définie à la question 3°. Z et Y ont-elles même loi?

8° Soit X une v. a. r. sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dont la loi est une loi de Poisson de paramètre λ. Soit Y une symétrisée de X, quelle est la loi de Y ? Déterminer sa fonction caractéristique $t \rightsquigarrow \varphi(t) = E(e^{itX})$.

9° Soient $u_1, u_2, \dots, u_n$ n nombres réels et $a_1, a_2, \dots, a_n$ n réels positifs, soit $\psi_n(t)$ la fonction $t \rightsquigarrow \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\cos u_i t - 1}{a_i}\right)$; montrer que ψ_n est la fonction caractéristique d'une v. a. Y_n.

10° Soit r un réel tel que $0 < r < 2$. Soit $I(t) = \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos ut}{u^{1+r}}\, du$ et $\psi(t) = \exp[-I(t)]$.

En utilisant le fait que $I(t)$ est limite de « sommes de Riemann » montrer que $\psi(t)$ est la fonction caractéristique d'une v. a. r. Y ; expliquer comment Y s'obtient à partir de v. a. de Poisson.

PARTIE IV

Soit $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et k un entier, on désignera par H_k l'application de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans lui-même définie par $H_k(x) = (x_0, x_1, \dots, x_k, 0, 0 \dots)$.

Soient X une v. a. sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$, q une application mesurable de $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$ dans $(\overline{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+))$ et n un entier. On posera $U_n = q(H_k(x))$, $M_n = \max\limits_{0 \leqslant j \leqslant n} U_j$ et $M = \sup\limits_n M_n = \sup\limits_p U_p$.

Soit t un réel $0 \leqslant t < \infty$ et $T_t(\omega) = \inf(j \in \mathbb{N}, U_j > t)$ (on conviendra que $\inf \varnothing = +\infty$).

La fonction q est dite quasi convexe si pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : q\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \max[q(x), q(y)]$.

Dans toute la suite q désignera une fonction borélienne quasi convexe.

1° Pour tout couple d'entiers (j, n) $0 \leqslant j \leqslant n$ on pose :

$$Z_{n,j} = (X_0, X_1, \dots X_j, -X_{j+1}, -X_{j+2}, \dots, -X_n, 0, 0, \dots) ;$$

démontrer que pour tout $t \geqslant 0$

$$P\{T_t = j\} \leqslant P\{T_t = j ; U_n > t\} + P\{T_t = j ; q(Z_{n,j}) > t\}.$$

2° On suppose désormais X strictement symétrique.

Comparer $P\{T_t = j\}$ et $2P\{T_t = j ; U_n > t\}$; démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$:

$P\{M_n > t\} \leqslant 2P\{U_n > t\}$, en déduire que $P\{M > t\} \leqslant 2 \liminf\limits_n P\{U_n > t\}$.

3° Soit $\varphi : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction croissante, continue à gauche. Soit ν la mesure sur $(\overline{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+))$ définie par $\nu[s, t[= \varphi(t) - \varphi(s)$ si $0 \leqslant s \leqslant t$ (on convient que $\infty - \infty = 0$).

a. Soit Y une v. a. r. positive sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ démontrer que

$E[\varphi(Y)] = \varphi(0) + \int_{[0, \infty]} P[Y > t]\, d\nu(t)$; que devient cette formule si φ est continue?

b. φ n'étant plus supposée continue démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad E[\varphi(M_n)] \leqslant 2\,E[\varphi(U_n)] \quad \text{et que}$$
$$E[\varphi(M)] \leqslant 2 \liminf_n E[\varphi(U_n)].$$

4° Démontrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

a. $E[\varphi(M)] < \infty$

b. $\sup_n E[\varphi(U_n)] < \infty$

5° On dit qu'une suite $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de v. a. r. est bornée en probabilités si

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists A \in]0\ \infty[\ : \qquad \forall n \qquad P\{|V_n| > A\} \leqslant \varepsilon.$$

Démontrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

a. La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée en probabilités.

b. $M < \infty$ presque sûrement.

6° On suppose que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers une v. a. U. On sait qu'alors, pour tout ouvert O de $\overline{R}_+$: $P\{U \in O\} \leqslant \liminf_n P\{U_n \in O\}$. Démontrer que pour tout $t \in [0, \infty[$: $P\{U > t\} \leqslant P\{M > t\} \leqslant 2\,P\{U \geqslant t\}$; en supposant φ continue, comparer $E[\varphi(U)]$, $E[\varphi(M)]$ et $2\,E[\varphi(U)]$.

7° Soit $S_n = X_0 + X_{1+} \dots + X_n$. Démontrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

a. $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée en probabilités.

b. $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée presque sûrement (c'est-à-dire $\sup_n |S_n| < \infty$ presque sûrement).

Démontrer également celle des deux suivantes :

a'. $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente en probabilités.

b'. $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement.

8° Soit $r \in]0\ \infty[$, démontrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

a. $\sup_n E[|S_n|^r] < \infty$

b. $E[\sup_n |S_n|^r] < \infty$

PARTIE V

Cette partie est indépendante de la partie IV *et fait suite aux questions* 8° *et* 9° *de la* partie III.

Soit r un réel tel que $0 < r < 2$, $I(t) = \int_0^\infty \frac{1 - \cos ut}{u^{1+r}}\,du$ et $\Psi(t) = \exp[-I(t)]$

1° Soit $s > 0$, comparer les fonctions $t \rightsquigarrow I(t)$ et $t \rightsquigarrow I(st)$

Démontrer que $t \rightsquigarrow \exp[-|t|^r]$ est une fonction caractéristique.

On appelle v. a. r. r-stable toute v. a. r. dont la fonction caractéristique est $\exp(-|t|^r)$.

2° Soit $r_1 \in]0,2[$ un réel et X une v. a. r. Comparer les quantités $E[|X|^{r_1}]$ et $\int_0^{\infty} [1 - \mathcal{R}e\, \Psi_X(t)] \frac{dt}{t^{r_1+1}}$ où $\mathcal{R}e\, \Psi_X(t)$ désigne la partie réelle de la fonction caractéristique Ψ_X de X.

Si X est r-stable en déduire toutes les valeurs de r_1 telles que $E[|X|^{r_1}] < \infty$.

3° Soit X r-stable, démontrer que sa loi admet une densité f_r par rapport à la mesure de Lebesgue et que f_r est indéfiniment dérivable.

4° Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v. a. r. r-stables indépendantes, soit $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\Sigma_n = \sum_{k=0}^{n} x_k X_k$.

Donner une condition nécessaire et suffisante relativement à x pour que Σ_n converge en loi.

5° Soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v. a. r. indépendantes positives; démontrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

a. $\sum_n Y_n < \infty$ presque sûrement.

b. $\sum_n P\{Y_n \geqslant 1\} < \infty$ et $\sum_n \int_{\{Y_n \leqslant 1\}} Y_n \, dP < \infty$.

6° Soit X_n une suite de v. a. r. indépendantes r-stables et x un élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Démontrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

a. $\sum_n |x_n X_n|^r < \infty$ presque sûrement.

b. $\sum_n |x_n|^r \left(1 + \operatorname{Log} \frac{1}{|x_n|}\right) < \infty$.

On pourra utiliser le fait que $\int_{|u| \geqslant t} f_r(x)\, dx$ est équivalent à $\frac{1}{t^r}$ quand t tend vers $+\infty$.