le second groupe ne contenant pas les réactions supplémentaires. C'est d'ailleurs là l'un des avantages des équations d'Euler-Lagrange : on obtient les équations du mouvement directement, sans passer par l'élimination de réactions ou de multiplicateurs.

4° Les notes (sur 40)

Un barème excessivement bienveillant a permis à un tout petit nombre de candidats d'obtenir une note voisine de la moyenne :

0	1 à 5	6 à 10	11 à 15	16 à 19	20 à 24	25 à 40
32	117	44	16	4	6	0

Nombre de copies corrigées : 219

Moyenne : 4,73 (en excluant les copies nulles : 5,55).

PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

Sujet (durée : 6 heures)

N. B. — *La troisième partie est indépendante des deuxième et quatrième parties.*

DÉFINITIONS, NOTATIONS ET RAPPELS

1° Dans tout le problème, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers strictement positifs, $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels, $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ compactifié par deux éléments à l'infini (notés ∞ et $-\infty$); $\mathbb{R}^+$ désigne l'ensemble des réels strictement positifs, et $\overline{\mathbb{R}^+}$ l'ensemble précédent compactifié par un élément à l'infini noté « ∞ ». $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ désigne la tribu des boréliens de $\overline{\mathbb{R}}$ et, plus généralement, $\mathcal{B}(U)$ désigne la tribu des boréliens de U, où U est un sous-ensemble de $\overline{\mathbb{R}}$.

Toute application de $\overline{\mathbb{R}}$, ou d'un sous-ensemble de $\overline{\mathbb{R}}$, mesurable relativement aux tribus boréliennes correspondantes, sera dite borélienne.

2° Désignant par $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, on appelle variable aléatoire réelle (en abrégé v.a.r.) définie sur cet espace, une application de Ω dans $\overline{\mathbb{R}}$, mesurable relativement aux tribus $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, et on dira qu'une v.a.r. est positive, si elle est à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}^+}$.

Étant donnée une v.a.r. définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on note $\sigma(X)$ la tribu engendrée par X et on rappelle que, si Y est une v.a.r. $\sigma(X)$ - mesurable, il existe une application borélienne f, telle que $Y = f(X)$.

Désignant par A la fonction de répartition de X, c'est-à-dire l'application de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $[0, 1]$ définie par

$$A(u) = P(X \leqslant u) ,$$

on notera dA la mesure-image de P par X (appelée aussi loi de X) et on utilisera couramment des expressions du type :

« L'application φ borélienne est dA - intégrable », « telle propriété est vraie dA p.s. ». On notera $\int \varphi \, dA$ l'intégrale de φ relativement à la mesure dA.

Ainsi, on peut écrire :

$$\forall B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}), \qquad P(X \in B) = \int \mathbf{1}_B \, dA$$

où $\mathbf{1}_B$ désigne la fonction indicatrice de B.

3° Étant donnée une famille de tribus $\mathcal{C}_i$ $(i \in I)$ d'un même espace Ω, on sait que leur intersection est une tribu que l'on notera $\bigwedge_{i \in I} \mathcal{C}_i$; on notera, de même, $\bigvee_{i \in I} \mathcal{C}_i$ la plus petite tribu contenant toutes les tribus $\mathcal{C}_i$, laquelle est, en général, différente de leur union.

Si les X_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont n v.a.r. définies sur le même espace probabilisé, on désigne par $\sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ la tribu $\bigvee_{1 \leqslant i \leqslant n} \sigma(X_i)$, laquelle n'est autre que la tribu engendrée par le vecteur aléatoire $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Enfin, si $(\Omega, \mathcal{A})$ et $(\Omega', \mathcal{A}')$ sont deux espaces mesurables, on désigne par $(\Omega \times \Omega', \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}')$ l'espace mesurable produit associé.

On rappelle que la tribu produit $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'$, est la tribu engendrée par les pavés, c'est-à-dire par tous les ensembles de la forme $E \times E'$, où E est un élément de $\mathcal{A}$, et E' un élément de $\mathcal{A}'$. La tribu $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \otimes \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ est aussi notée $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}^2})$.

4° Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on considère une v.a.r. X, $\mathcal{A}$ - mesurable, positive ou intégrable. Si $\mathcal{B}$ est une sous-tribu de $\mathcal{A}$, le symbole $E(X \mid \mathcal{B})$ désigne l'espérance conditionnelle de la v.a.r. X par rapport à la tribu $\mathcal{B}$.

Si Y est une v.a.r., $\mathcal{B}$ - mesurable, dont la classe d'équivalence pour la relation d'égalité P - presque sûre (en abrégé, P p.s.) est $E(X \mid \mathcal{B})$, nous dirons que Y est un représentant de $E(X \mid \mathcal{B})$.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé sur lequel est définie une v.a.r. strictement positive S, dont on désigne par A la fonction de répartition. Pour tout $u \in \overline{\mathbb{R}}$, différent de $-\infty$, on désigne par $A(u^-)$ la limite de $A(v)$ lorsque v tend vers u par valeurs inférieures.

1° *a.* Quelles sont les valeurs de $A(0)$ et de $A(\infty)$?

Étant donné un élément u de $\overline{\mathbb{R}^+}$, que représente la quantité

$$A(u) - A(u^-)?$$

Peut-on avoir $A(\infty^-) < 1$?

b. On pose $c = \inf \{ u \mid u \in \overline{\mathbb{R}^+}, A(u) = 1 \}$.

Montrer que c appartient à $\overline{\mathbb{R}^+}$, que $A(c) = 1$, et que si $t < c$, $A(t) < 1$.

c. Montrer que : $S \leqslant c$ P p.s.,
et que, si $A(c^-) = 1$, $S < c$ P p.s.

2° Étant donné t, élément de $\overline{\mathbb{R}^+}$, on désigne par $S \wedge t$, l'application de Ω dans $\overline{\mathbb{R}^+}$, définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad (S \wedge t)(\omega) = \inf (S(\omega), t) .$$

a. Montrer que $S \wedge t$ est une v.a.r. positive et déterminer sa fonction de répartition.

Expliciter $P(S \wedge t \in B)$, où $B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}^+})$.

b. On désigne par $\mathcal{G}_t$ la tribu engendrée par $S \wedge t$.

Montrer que l'ensemble $\{ S \geqslant t \}$ appartient à $\mathcal{G}_t$, et que toute v.a.r. $\mathcal{G}_t$-mesurable est constante sur cet ensemble.

3° Soit f une application borélienne de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, supposée dA - intégrable.

a. Montrer que $f(\mathrm{S})$ est P - intégrable, et trouver un représentant de l'espérance conditionnelle de $f(\mathrm{S})$ par rapport à la tribu $\mathcal{G}_t$, lorsque t est supérieur ou égal à c.

b. Si t est strictement plus petit que c, montrer qu'un représentant de l'espérance conditionnelle de $f(\mathrm{S})$ par rapport à la tribu $\mathcal{G}_t$ est donné par la v.a.r.

$$n^f(t, \ \mathrm{S} \wedge t),$$

où n^f est une application de $[0, c[\times [0, c[$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, définie par

$$n^f(t, u) = f(u) \qquad \text{si} \quad u < t,$$

$$n^f(t, u) = \frac{1}{1 - \mathrm{A}(t^-)} \int_{[t, \infty]} f d\mathrm{A} \qquad \text{si} \quad u \geqslant t.$$

En déduire la fonction de répartition de la loi conditionnelle de S par rapport à $\mathrm{S} \wedge t$.

Montrer que n^f est $\mathcal{B}([0, c[) \otimes \mathcal{B}([0, c[)$ - mesurable.

c. Expliciter le calcul précédent lorsque S suit la loi exponentielle de paramètre $\mu (\mu > 0)$, c'est-à-dire la loi dont la densité de probabilité est définie par :

$$u \longmapsto \mu e^{-\mu u} \quad \text{si} \quad u > 0 ; \qquad u \longmapsto 0 \quad \text{si} \quad u \leqslant 0.$$

On mettra en évidence une fonction n^f_μ de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$ - mesurable, telle que $n^f_\mu(t, \mathrm{S} \wedge t)$ soit un représentant de $\mathrm{E}[f(\mathrm{S}) \mid \mathcal{G}_t]$.

4° On considère une suite $(\mathrm{T}_n ; n \in \mathbb{N}^*)$ de v.a.r. indépendantes qui suivent toutes une loi exponentielle; on désigne par $\lambda_n (\lambda_n > 0)$ le paramètre de la loi de T_n.

On pourra poser

$$\mu_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i .$$

On note T^*_n la v.a.r. définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad \mathrm{T}^*_n(\omega) = \inf_{1 \leqslant i \leqslant n} (\mathrm{T}_i(\omega)).$$

a. Quelle est la loi de T^*_n?

b. Montrer que, si la série de terme général λ_n diverge, T^*_n converge dans $\mathrm{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ et P p.s. vers zéro.

c. Montrer que les v.a.r. T^*_{n-1} et T_n $(n > 1)$ sont indépendantes.

Montrer que, pour tout u appartenant à $\overline{\mathbb{R}}$, les ensembles

$$\{ \mathrm{T}^*_n \leqslant u \} \quad \text{et} \quad \{ \mathrm{T}_n \leqslant \mathrm{T}^*_{n-1} \} \quad \text{sont indépendants.}$$

En déduire l'indépendance des v.a.r. $\mathbf{1}_{\{ \mathrm{T}_n \leqslant \mathrm{T}^*_{n-1} \}}$ et T^*_n.

d. Soit f une application borélienne de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, telle que :

$$\mathrm{E}[\,|f(\mathrm{T}_n)|\,] < +\infty.$$

Montrer que les v.a.r. $f(\mathrm{T}_n)$ et $n^f_{\lambda_n}(\mathrm{T}^*_{n-1}, \mathrm{T}^*_n)$ ont même espérance conditionnelle par rapport à T^*_n. (La fonction $n^f_{\lambda_n}$ a été définie à la question 3°.)

En déduire $\mathrm{E}[f(\mathrm{T}_n) \mid \mathrm{T}^*_n]$, et déterminer par sa fonction de répartition la loi conditionnelle de T_n par rapport à T^*_n.

DEUXIÈME PARTIE

Les notations sont les mêmes que celles de la première partie.

1° *a.* Montrer que, si s et t sont deux éléments de $\overline{\mathbb{R}^+}$ tels que

$$s < t, \quad \text{on a :} \quad \mathcal{G}_s \subset \mathcal{G}_t .$$

Montrer que $\mathrm{S} \wedge t$ est mesurable par rapport à $\bigvee_{s<t} \mathcal{G}_s$.

En déduire que $\mathcal{G}_t = \bigvee_{s<t} \mathcal{G}_s$.

b. On pose : $\quad \mathcal{F}_t = \bigwedge_{s>t} \mathcal{G}_s \quad$ si $\quad t \in \mathbb{R}^+$,

et $\quad \mathcal{F}_\infty = \mathcal{G}_\infty$.

Montrer que les v.a.r. $\mathcal{F}_t$ - mesurables sont constantes sur l'ensemble $\{ S > t \}$, et expliciter toutes les v.a.r. $\mathcal{F}_t$ - mesurables.

c. Montrer que :

$$\mathcal{F}_t = \bigwedge_{s > t} \mathcal{F}_s \qquad (t \in \mathbb{R}^+)$$

$$\mathcal{G}_t = \bigvee_{s < t} \mathcal{F}_s \qquad (t \in \mathbb{R}^+)$$

$$\mathcal{G}_\infty = \mathcal{F}_\infty = \bigvee_{s \in \mathbb{R}^+} \mathcal{F}_s$$

et que $\mathcal{F}_\infty$ est identique à la tribu engendrée par S.

2° On considère l'espace produit $\Omega \times \overline{\mathbb{R}^+}$, muni de la tribu produit $\mathcal{F}_\infty \otimes \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}^+})$.

Soit f une application borélienne de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, dA - intégrable.

a. Montrer qu'il existe une application, N^f, de $\Omega \times \overline{\mathbb{R}^+}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, $\mathcal{F}_\infty \otimes \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}^+})$ - mesurable, telle que :

i. pour tout t de $\overline{\mathbb{R}^+}$, $N^f(\bullet, t)$ est un représentant de $E[f(S) \mid \mathcal{G}_t]$;

ii. pour tout t de $\overline{\mathbb{R}^+}$, $N^f(\bullet, t)$ est P - intégrable, et, pour tout $s < t$, $(s \in \mathbb{R}^+)$, $N^f(\bullet, s)$ est un représentant de $E[N^f(\bullet, t) \mid \mathcal{G}_s]$;

iii. il existe un élément C de $\mathcal{F}_\infty$, P - négligeable, que l'on déterminera, tel que si $\omega \notin C$, l'application

$t \longmapsto N^f(\omega, t)$ est continue à gauche sur $\overline{\mathbb{R}^+}$.

b. Montrer, de même, qu'il existe une application, M^f, de $\Omega \times \overline{\mathbb{R}^+}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, $\mathcal{F}_\infty \otimes \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}^+})$ - mesurable, telle que :

i. pour tout t de $\overline{\mathbb{R}^+}$, $M^f(\bullet, t)$ est un représentant de $E[f(S) \mid \mathcal{F}_t]$;

ii. pour tout t de $\overline{\mathbb{R}^+}$, $M^f(\bullet, t)$ est P - intégrable et, pour tout $s < t$ $(s \in \mathbb{R}^+)$, $M^f(\bullet, s)$ est un représentant de $E[M^f(\bullet, t) \mid \mathcal{F}_s]$;

iii. si $\omega \notin C$, l'application $t \longmapsto M^f(\omega, t)$ est continue à droite sur $\mathbb{R}^+$, et, pour tout t de $\overline{\mathbb{R}^+}$, $M^f(\omega, t^-) = N^f(\omega, t)$.

c. Montrer que $M^f(\bullet, t)$ converge p.s. et dans $L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ vers $f(S)$, si t tend vers c par valeurs inférieures.

3° On pose $\displaystyle m_f(t) = \frac{1}{1 - A(t)} \int_{]t, \infty]} f dA$ si $0 \leqslant t < c$.

Si $r \in \mathbb{R}^+$, on définit le nombre t_r par :

$$t_r = \inf \{ t \mid 0 \leqslant t < c, \ |m_f(t)| > r \},$$

si cet ensemble n'est pas vide; sinon, on pose $t_r = c$.

Par ailleurs, on suppose, dans cette question, que :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad S(\omega) \leqslant c.$$

On désigne par M_f^* l'application de Ω dans $\overline{\mathbb{R}}$ définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad M_f^*(\omega) = \sup_{t \in \overline{\mathbb{R}^+}} | M^f(\omega, t) |$$

a. Montrer que l'ensemble $\{ M_f^* > r \}$ est la réunion des deux ensembles :

$$\{ S > t_r \} \quad \text{et} \quad \{ S \leqslant t_r \} \cap \{ |f(S)| > r \}.$$

En déduire que M_f^* est une v.a.r. $\mathcal{F}_\infty$ - mesurable.

b. Montrer que si t_r est strictement inférieur à c,

$$P(S > t_r) \leqslant \frac{1}{r} E[\mathbb{1}_{\{ S > t_r \}} |f(S)|].$$

Établir ensuite que

$$P(M_f^* > r) \leqslant \frac{1}{r} E[|f(S)|].$$

c. Soit $(f_n \,;\, n \in \mathbb{N}^*)$, une suite d'applications boréliennes de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, dA-intégrables, qui convergent vers f dans $L^1(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}), dA)$.

Montrer qu'on peut extraire de la suite $(f_n \,;\, n \in \mathbb{N}^*)$ une sous-suite $(f_{k_n} \,;\, n \in \mathbb{N}^*)$, telle que la suite $M_{f_{k_n}}^*$ converge P p.s. vers M_f^*, si n tend vers $+\infty$.

On note

$$I = \{ \omega \mid \lim_{n \to +\infty} M^*_{f_{k_n}}(\omega) \neq M^*_f(\omega) \}.$$

Montrer que pour tout $\omega \notin I \cup C$, et pour tout $t \in \overline{\mathbb{R}^+}$:

$$\lim_{n \to \infty} M^{f_{k_n}}(\omega, t) = M^f(\omega, t) \quad \text{et}$$

$$\lim_{n \to \infty} N^{f_{k_n}}(\omega, t) = N^f(\omega, t).$$

TROISIÈME PARTIE

On rappelle que cette partie est indépendante des deuxième et quatrième parties.

On considère une suite $(T_n \,;\, n \in \mathbb{N}^*)$ de v.a.r. définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et de loi commune la loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un nombre strictement positif donné. (La définition de la loi exponentielle a été rappelée à la question 3° *c.* de la première partie.)

On construit alors la suite $(S_n \,;\, n \in \mathbb{N})$ de v.a.r., de la façon suivante :

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i \qquad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Et, pour tout t de $\mathbb{R}^+$, on pose :

$$N(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbf{1}_{\{S_n \leq t\}}$$

On désigne par $\mathcal{C}_0$ la tribu $\sigma(S_0)$, par $\mathcal{C}_n$ la tribu $\sigma(S_0, S_1, \ldots, S_n)$, par $\mathcal{C}_\infty$ la tribu $\sigma(S_0, S_1, \ldots, S_n, \ldots)$, et enfin par $\mathcal{F}_t (t \in \mathbb{R}^+)$ l'ensemble des éléments D de $\mathcal{A}$, tels que :

pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe $B_n \in \mathcal{C}_n$, vérifiant :

$$D \cap \{ N(t) = n \} = B_n \cap \{ N(t) = n \}.$$

On admettra que $\mathcal{F}_t$ est une sous-tribu de $\mathcal{C}_\infty$.

1° *a.* Calculer la densité de probabilité du vecteur aléatoire

$$(S_1, S_2, \ldots, S_n).$$

b. Montrer que $N(t)$ est une v.a.r. $\widehat{\mathcal{F}}_t$ - mesurable qui suit la loi de Poisson de paramètre λt.

c. Dans cette question, k désigne un élément de $\mathbb{N}^*$.

Montrer que $\dfrac{N(k)}{k}$ converge en loi, en probabilité et dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ vers λ, lorsque k devient infini.

Montrer que, dans les mêmes conditions, $\dfrac{N(k) - \lambda k}{\sqrt{k}}$ converge en loi vers une loi limite que l'on précisera.

Peut-on obtenir ce dernier résultat en appliquant le théorème central limite (dit aussi théorème de convergence vers la loi de Gauss, ou encore de Moivre-Laplace)?

2° *a.* Montrer que, pour tout B_n de la tribu $\mathcal{C}_n$, pour tout t et pour tout u de $\mathbb{R}^+$:

$$P(B_n \cap \{ N(t) = n \} \cap \{ N(t+u) - N(t) \geq 1 \})$$
$$= (1 - e^{-\lambda u}) \, E[\mathbf{1}_{B_n} \mathbf{1}_{\{S_n \leq t\}} \, e^{-\lambda(t - S_n)}]$$

En déduire que les événements $B_n \cap \{ N(t) = n \}$ et $\{ N(t+u) - N(t) \geq 1 \}$ sont indépendants.

b. On pose $R(t) = S_{N(t)+1} - t$.

Déduire de *a.* que $R(t)$ est une v.a.r. $\mathcal{C}_\infty$ - mesurable, indépendante de $\widehat{\mathcal{F}}_t$, qui suit la loi exponentielle de paramètre λ.

c. Montrer que, plus généralement, les v.a.r.

$$R(t), \quad T_{N(t)+2}, \ldots, T_{N(t)+k}, \ldots$$

constituent une suite de v.a.r. indépendante de $\widehat{\mathcal{F}}_t$.

Montrer que c'est une suite de v.a.r. indépendantes, de même **loi**, ayant pour loi commune la loi exponentielle de paramètre λ.

d. On pose :

$$\overline{N}_t(u) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbf{1}_{\{ S_{N(t)+n} - t \leqslant u \}} \qquad \text{pour tout} \quad u \in \mathbb{R}^+.$$

Montrer que $\overline{N_t(u)}$ est, pour tout u de $\mathbb{R}^+$, une v.a.r. indépendante de $\widehat{\mathcal{F}}_t$, de même loi que $N(u)$, égale à $N(t+u) - N(t)$.

En déduire que si $u_1, u_2, \ldots, u_k$ sont des éléments de $\mathbb{R}^+$, les v.a.r. $N(u_1)$, $N(u_1 + u_2) - N(u_1)$, $\ldots$, $N(u_1 + u_2 + \ldots, u_k) - N(u_1 + u_2 + \ldots, u_{k-1})$ sont indépendantes.

3° On pose $L(t) = t - S_{N(t)}$.

a. Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}^+$ tel que $0 < x \leqslant t$,

$$P(t - S_{N(t)} \geqslant x) = P(R(t-x) > x).$$

En déduire que la loi de $L(t)$ est la même que celle de $T_1 \wedge t$.

b. Plus généralement, on pose, pour tout k de $\mathbb{N}^*$:

$L_k(t) = \inf \{ s \mid 0 \leqslant s \leqslant t;\ N(t) - N(t-s) = k \}$ si $N(t) \geqslant k$,

$L_k(t) = t$ si $N(t) < k$.

Montrer que :

$L_k(t) = \inf \{ s \mid 0 \leqslant s \leqslant t,\ N(t-s) = \sup (N(t) - k, 0) \}$

et que : $L_k(t) = \sup (t - S_{N(t)+1-k}, 0)$.

En déduire que la loi de $L_k(t)$ est la même que celle de $S_k \wedge t$.

QUATRIÈME PARTIE

(Cette partie est indépendante de la troisième partie, mais utilise les notations et résultats des deux premières parties.)

On rappelle que S est une v.a.r. strictement positive, de fonction de répartition A. Dans toute cette partie, nous supposerons que

$$\forall \omega \in \Omega,\ S(\omega) < c.$$

On note B la fonction définie sur $\overline{\mathbb{R}^+}$, croissante et continue à gauche, définie par $B(u) = A(u^-)$.

1° On définit une nouvelle application borélienne de $\overline{\mathbb{R}^+}$ dans $\overline{\mathbb{R}^+}$ par :

$$\alpha(t) = \int_{]0,\, t]} \frac{dA}{1 - B}$$

a. Montrer que α est une fonction croissante, continue à droite, et que $\alpha(t)$ est fini si $t < c$.

En déduire que α est la fonction de répartition d'une mesure positive σ - finie sur $[0, c[$.

b. Montrer que, si h est une fonction borélienne de $\overline{\mathbb{R}^+}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, positive ou dA - intégrable,

$$E[h(S)] = E\left[\int_{]0,\, S]} h\, d\alpha \right]$$

Calculer $E[\alpha(S)]$.

c. Considérons deux fonctions boréliennes de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, positives ou telles que $\int f^2\, dA$ et $\int h^2\, dA$ soient finis.

Montrer que

$$E[N^f(\bullet, S)\ h(S)] = E[f(S) \int_{]0,\, S]} h\, d\alpha]$$

où $N^f(\bullet, \bullet)$ est l'application $\mathcal{F}_\infty \otimes \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}^+})$ - mesurable introduite dans la deuxième question de la deuxième partie.

2° Pour tout $u < c$, pour tout $t \in \overline{\mathbb{R}^+}$, on pose :

$$q_u(t) = \mathbf{1}_{\{ u \leqslant t \}} - \alpha(t \wedge u).$$

$q_u(t)$ est la différence de deux fonctions de répartition continues à droite et croissantes, finies car $u < c$.

On désigne par $Q(\bullet, t)$ la v.a.r. définie par :

$$Q(\omega, t) = \mathbf{1}_{\{S(\omega) \leqslant t\}} - \alpha[t \wedge S(\omega)] \quad \text{pour tout } t \in \overline{\mathbb{R}^+},$$

et on note $\int_{]0, t]} f dQ(\omega, \bullet)$ la v.a.r. définie par :

$$f(S(\omega))\, \mathbf{1}_{\{S(\omega) \leqslant t\}} - \int_{]0, t \wedge S(\omega)]} f d\alpha$$

lorsque f est une fonction borélienne de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\mathbb{R}$, positive ou dA-intégrable.

a. Montrer que $\sup_t E\,|\,Q(\bullet, t)\,| \leqslant 2$, et que $Q(\bullet, t)$ est une v.a.r. $\mathcal{F}_t$-mesurable, d'espérance nulle.

b. Montrer que, pour tout u de $\mathbb{R}^+$:

$$P(S > u) = E[\alpha(S) - \alpha(S \wedge u)]$$

En déduire que pour tout u de $\mathbb{R}^+$, la v.a.r. $Q(\bullet, \infty) - Q(\bullet, u)$ a une espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}_u$, qui est nulle.

Montrer ensuite que $Q(\bullet, u)$ est un représentant de $E[Q(\bullet, \infty) \mid \mathcal{F}_u]$ et mettre en évidence une fonction g, de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, borélienne, telle que :

$$\forall\, u \in \mathbb{R}^+, \quad Q(\bullet, u) = M^g(\bullet, u).$$

c. Plus généralement, si f est une application borélienne de $\overline{\mathbb{R}^+}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, dA-intégrable, montrer que l'application $\bar{f}$ de $\overline{\mathbb{R}^+}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ définie par :

$$\bar{f}(x) = f(x) - \int_{]0, x]} f d\alpha \qquad \text{si} \quad 0 < x < c$$

$$\bar{f}(x) = 0 \qquad \text{si} \quad x \leqslant 0 \quad \text{ou} \quad x \geqslant c$$

est une fonction borélienne dA-intégrable et que

$$E[\bar{f}(S)\, \mathbf{1}_{\{S > u\}}] = E\left[\int_{]u \wedge S, S]} f d\alpha\right].$$

En déduire que $\int_{]0, t]} f dQ(\bullet, \bullet)$ est un représentant de l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}_t$ de la v.a.r.

$$f(S) - \int_{]0, S]} f d\alpha = \bar{f}(S)$$

puis, que, si $t < c$:

$$\frac{1}{1 - A(t)} \int_{]t, c[} \bar{f} dA = \int_{]0, t]} f d\alpha.$$

3° On demande d'admettre que, pour tout t de $\overline{\mathbb{R}^+}$, $t < c$, la relation suivante est vérifiée :

$$\frac{1}{1 - A(t)} = 1 + \int_{]0, t]} \frac{dA}{(1 - A)(1 - B)}.$$

a. Soit f une application de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, dA-intégrable et satisfaisant à $\int f dA = 0$.

Utiliser le théorème de Fubini pour établir que : pour tout t de $\mathbb{R}^+$ strictement plus petit que c, $m_f(t) = \int_{]0, t]} [m_f(\bullet) - f] d\alpha$ (où m_f est la fonction introduite dans la deuxième partie, 3° *a.*).

En déduire que $M^f(\omega, t) = \int_{]0, t]} (f - m_f)\, dQ(\omega, \bullet)$.

b. Soit h une application de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, dA-intégrable.

Montrer que si, pour tout t de $\overline{\mathbb{R}^+}$,

$$\int_{]0, t]} h dQ(\bullet, \bullet) = 0 \quad \text{p.s.},$$

h est nulle dA p.s.

En déduire que si f satisfait aux hypothèses de la question *a.*, il existe une fonction g de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, dA-intégrable, unique au sens de l'égalité dA p.s., telle que : il existe un ensemble négligeable I, tel que pour tout $\omega \notin$ I et tout t de $\overline{\mathbb{R}^+}$,

$$M^f(\omega, t) = \int_{]0, t]} g\,dQ(\omega, \bullet)$$

c. Soit h une application borélienne de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, dA - intégrable. Pour tout $\omega \in \Omega$, calculer la discontinuité au point $S(\omega)$ de l'application qui, à tout élément t de $[0, c[$, associe

$$\int_{]0, t]} h\,dQ(\omega, \bullet)$$

Montrer ensuite que, si f est une application borélienne dA - intégrable satisfaisant à $M^f(\bullet, S) = N^f(\bullet, S)$, f est nulle dA p.s.

RAPPORT SUR L'EPREUVE DE PROBABILITES ET STATISTIQUES

1. Thème du sujet

L'objet du problème est d'établir que toutes les martingales par rapport à la famille de tribus engendrées par un processus ponctuel à un seul saut, s'expriment comme des intégrales par rapport à une martingale fondamentale, qui est, pour chaque un processus à variation finie.

Ce texte a été construit à partir de l'article de MM. CHOU et MEYER : «Sur la présentation des martingales comme intégrales stochastiques dans les processus ponctuels». Séminaire de Probabilités IX. Lect. Notes in Math. Springer Verlag n°465.

La troisième partie, pratiquement indépendante du reste, a été jointe par souci de ne pas défavoriser les candidats moins familiarisés avec le maniement des tribus.

2. Résumé de la solution

(Il ne s'agit que d'indications relatives à certaines questions).

PARTIE I

3° (les questions précédentes sont évidentes)

a) Si $t \geqslant c$, $S = S \wedge t$ $P.p.s$, et $f(S \wedge t)$ convient comme représentant.

b) Si $t < c$, $P(S \geqslant t) > 0$. La v.a.r $f(S)\, 1_{\{S < t\}}$ est $\mathcal{G}_t$ mesurable.

Sur $\{S \geqslant t\}$, un représentant sera constant et égal à $\dfrac{E(f(S)\, 1_{\{S \geqslant t\}})}{P(S \geqslant t)}$