donc :

$$\begin{cases} \Delta = \Delta_1 = \Delta_2 & \text{: le triangle est équilatéral} \\ \omega^2 = \dfrac{m_1 + m_2 + m_3}{\Delta^3} = \text{constante} \end{cases}$$

On retrouve les résultats obtenus dans la première partie du problème dans le cas λ = constante.

II.8.4 LES NOTES (sur 40)

Candidats : 167 copies ; candidates : 73 copies

	0	1 à 5	6 à 10	11 à 15
Candidats :	17	60	47	27
Candidates :	20	27	12	5

	16 à 20	21 à 25	26 à 30	31 à 40
Candidats :	12	3	1	0
Candidates :	6	3	0	0

II.9 TEXTE DE L'EPREUVE DE PROBABILITES ET STATISTIQUES

INTRODUCTION

1° Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable et T un sous-ensemble de la droite réelle **R** ; on appelle fonction aléatoire réelle (en abrégé f.a.r.), construite sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et T, toute application X de $T \times \Omega$ dans la droite réelle achevée $\overline{\mathbf{R}}(=[-\infty, +\infty])$, telle que, pour tout t de T l'application X_t définie par

$$(\forall \omega \in \Omega) \qquad X_t(\omega) = X(t, \omega)$$

soit mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\overline{\mathbf{R}}, \overline{\mathcal{B}})$ (où $\overline{\mathcal{B}}$ désigne la tribu borélienne de $\overline{\mathbf{R}}$).

2° Soit P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$; une f.a.r. X construite sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et T est dite du second ordre relativement à P si et seulement si

$$(\forall t \in T) \qquad \int_\Omega (X_t)^2 dP < \infty$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté sur P, on pourra :

— dire plus brièvement que « X est du second ordre »;

— noter, pour toute variable aléatoire réelle (v.a.r.) Y définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$, et intégrable par rapport à P $\quad E(Y) = \int Y\, dP$;

— noter m l'application de T dans **R** définie par $(\forall t \in T) \quad m(t) = E(X_t)$, et l'appeler moyenne de la f.a.r. X;

— dire que X est centré si $\forall t \in T \quad m(t) = 0$;

— noter K l'application de $T \times T$ dans **R** qui, à tout couple (s, t), associe la covariance des v.a.r. X_s et X_t et l'appeler covariance de la f.a.r. X;

— commettre l'abus de langage consistant à confondre l'espace des v.a.r. de carré intégrable et celui de leurs classes d'équivalence pour l'égalité P presque sûre (on le notera $L^2(P)$).

3° On rappelle qu'un noyau symétrique de type positif sur un sous-ensemble T de **R** est une application n de $T \times T$ dans **R** telle que

(i) $\quad (\forall (s, t) \in T \times T) \qquad n(s, t) = n(t, s)$

(ii) pour toute fonction réelle a sur T nulle sauf sur un ensemble fini de points on a

$$\sum_{(s, t) \in T \times T} a(s)\, a(t)\, n(s, t) \geqslant 0.$$

I

Soit P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et X une f.a.r. du second ordre construite sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et T.

1° Vérifier que $K(s, t)$ est un noyau symétrique de type positif.

2° Pour toute fonction réelle a nulle sauf sur un ensemble fini de points de T, $\sum_{t \in T} a(t) X_t$ est une v.a.r. de carré intégrable ; l'ensemble de ces variables forme un espace vectoriel $L(X, T)$. On appelle espace engendré par X, pour la loi P, la fermeture $H_P(X, T)$ de $L(X, T)$ dans $L^2(P)$ [s'il n'y a pas de risque de confusion on notera cet espace H_P]. On appelle f.a. gaussienne une f.a.r. du second ordre telle que $L(X, T)$ soit formé de variables de Laplace-Gauss (toujours pour la loi P). Vérifier que H_P est formé aussi de variables de Laplace-Gauss. Cet espace s'appelle l'espace gaussien engendré par X.

3° On suppose que : $\forall\, t \in T \qquad m(t) = 0$.

a. Montrer que l'application $J : H_P \longrightarrow \mathbf{R}^T$ définie par

$$J(Z)(t) = E[Z\, X_t] \quad \text{est injective;}$$

b. Soit $\mathcal{H}(K, T)$ [en abrégé $\mathcal{H}(K)$] l'image de H_P par J. Montrer qu'on peut munir $\mathcal{H}(K)$ d'une structure d'espace de Hilbert telle que J soit un isomorphisme de H_P sur $\mathcal{H}(K)$ [application linéaire, inversible, préservant la norme]. On notera $< f, g >_{\mathcal{H}(K)}$ le produit scalaire de deux éléments f et g de $\mathcal{H}(K)$;

c. Soit $K(s, .)$ la fonction définie sur T par $t \rightsquigarrow K(s, t)$ montrer que la famille $[K(s, .)]_{s\in T}$ engendre $\mathcal{H}(K)$, et que,

$$\forall h \in \mathcal{H}(K) \qquad h(t) = < h, K(t, .) >_{\mathcal{H}(K)} .$$

En déduire en particulier que deux f.a.r. centrées construites sur le même ensemble d'indice T et ayant même covariance déterminent par l'intermédiaire de J le même espace de Hilbert.

4° Cette question consiste à démontrer la proposition suivante :

À tout noyau K symétrique de type positif sur T on peut associer un espace unique $\mathcal{H}(K, T) \subset \mathbf{R}^T$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $\mathcal{H}(K, T)$ est un espace de Hilbert engendré par $[K(t, .)]_{t\in T}$

(ii) $\forall\, h \in \mathcal{H}(K, T) \qquad h(t) = < h,\ K(t, .) >_{\mathcal{H}(K)}$

Un tel espace s'appelle l'espace autoreproduisant associé à K.

On pourra admettre cette proposition ou la démontrer en considérant l'espace vectoriel $\mathcal{H}_0$ engendré par $[K(t, .)]_{t\in T}$ et en vérifiant que si a et b sont non nulles sur un ensemble fini de points les fonctions

$$f = \sum_{s\in T} a(s)\, K(s, .) \quad \text{et} \quad g = \sum_{t\in T} b(t)\, K(t, .) \text{ sont telles que}$$

$\displaystyle\sum_{s\in T} a(s)\, g(s) = \sum_{t\in T} b(t)\, f(t)$. En déduire qu'on peut munir $\mathcal{H}_0$ d'un produit scalaire qui permet de définir $\mathcal{H}(K, T)$ par complétion.

5° *Exemples.*

a. Soit $T = \{1, 2, \ldots, n\}$. Décrire $\mathcal{H}(K)$ et donner une expression du produit scalaire correspondant;

b. soit $T = [a, b]$, σ donné $\neq 0$ et $K(s, t) = \sigma^2 \inf(s, t)$.

Montrer que $\mathcal{H}(K)$ est égal à

$$\left\{ f \in \mathbf{R}^T;\ \exists f^* : \int_a^b [f^*(u)]^2\, du < \infty \ \text{ et } \ \forall\, t, f(t) = f(a) + \int_a^t f^*(u)\, du \right\}$$

muni du produit scalaire $\displaystyle < f, g >_{\mathcal{H}(K)} = \int_a^b f^*(u)\, g^*(u)\, du$.

II

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité. On rappelle que deux mesures R et S sur $\mathcal{A}$ sont étrangères si $\exists\, A \in \mathcal{A} : R(A) = 0 = S(\complement A)$.

Soit $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$ et Z un élément de $L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on notera $E_P^{\mathcal{B}}(Z)$ l'espérance conditionnelle de Z par rapport à $\mathcal{B}$ pour la probabilité P.

Soit X une f.a.r. gaussienne centrée construite sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et $\mathbf{R}_+$, et P une probabilité sur $\mathcal{A}$, on notera K la covariance de X pour P et H_P l'espace gaussien engendré par X dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que $\mathcal{A}$ est la tribu engendrée par $[X_t]_{t\in\mathbf{R}_+}$.

1° Soit $Y \in H_P$, Q_Y la mesure de densité $\exp\left[Y - \frac{1}{2} E_P(Y^2)\right]$ par rapport à P; vérifier que Q_Y est une probabilité sur Ω telle que la f.a.r. X définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et $\mathbf{R}_+$ soit gaussienne pour Q_Y. Trouver sa moyenne m_Y et sa covariance K_Y. Soit $[Z_n]_{n\in N}$ une suite dans $L(X, T)$; vérifier que si $[Z_n]_{n\in N}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ elle l'est aussi dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, Q_Y)$ et réciproquement. Comparer les limites.

2° Soient sur $(\Omega, \mathcal{A})$ deux probabilités R et S absolument continues par rapport à une probabilité μ (on remarquera que R et S sont absolument continues par rapport à $\dfrac{R + S}{2}$), soient $\dfrac{dR}{d\mu}$ et $\dfrac{dS}{d\mu}$ les densités correspondantes.

a. Montrer que $\displaystyle\int \sqrt{\frac{dR}{d\mu}\,\frac{dS}{d\mu}}\, d\mu$ ne dépend pas de μ; on notera cette quantité $\int \sqrt{dR\,dS}$;

b. Montrer que R et S sont étrangères si et seulement si

$$\int \sqrt{dR\,dS} = 0\,;$$

c. Soit $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$; $R_{\mathcal{B}}$, $S_{\mathcal{B}}$ et $\mu_{\mathcal{B}}$ les restrictions de R, S et μ à $\mathcal{B}$. Exprimer $\dfrac{dR_{\mathcal{B}}}{d\mu_{\mathcal{B}}}$ et $\dfrac{dS_{\mathcal{B}}}{d\mu_{\mathcal{B}}}$ comme des espérances conditionnelles par rapport à $\mathcal{B}$. Montrer que

$$\int \sqrt{dR_{\mathcal{B}}\,dS_{\mathcal{B}}} \geqslant \int \sqrt{dR\,dS}$$

[on rappelle l'inégalité de Jensen : soit Y concave sur un domaine convexe $\mathcal{D}$ de R^n, soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire ; pour toute sous-tribu $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$

$$E^{\mathcal{B}}\, Y(X_1, \ldots, X_n) \leqslant Y\left(E^{\mathcal{B}} X_1, \ldots, E^{\mathcal{B}} X_n\right)\Big].$$

3° Soit Q une deuxième probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que X soit gaussienne pour Q de même covariance que pour P, de moyenne

$m_Q(t) = \int X_t\, dQ$ et d'espace gaussien H_Q.

Soit $Z \in L(X, T)$.

a. Soit $\mathcal{B}$ la sous-tribu de $\mathcal{A}$ engendrée par Z : calculer

$$\int \sqrt{dP_{\mathcal{B}}\, dQ_{\mathcal{B}}}\;;$$

b. Vérifier que si P et Q ne sont pas étrangères, il existe une constante C telle que :

$$\forall Z \in L(X, T) \quad \left|\int Z\, dQ\right| \leqslant C \|Z\|_2\;;$$

en déduire que P et Q sont soit étrangères, soit équivalentes. Vérifier que si P et Q sont équivalentes : $m_Q \in \mathcal{H}(K)$, calculer dans ce cas $\dfrac{dQ}{dP}$.

4° On suppose qu'il existe un système orthonormal de fonctions a_i dans $\mathcal{H}(K)$ tel que $\quad m = \sum_{i=1}^{r} \theta_i a_i$, où $\theta_i \in \mathbf{R} \quad \forall i \in [1, \ldots, r]$.

Trouver l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ_i.

III

Soit X une f.a.r. du second ordre construite sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et T, de moyenne m et de covariance K pour une probabilité P. On suppose que $X(t, \omega) = m(t) + Y(t, \omega)$ de sorte que la loi P_m de X est complètement déterminée par m et par la loi P_0 de Y. On suppose qu'il existe r fonctions $a_i(t)$ dans $\mathcal{H}$ (K) telles que $m = \sum_{i=1}^{r} \theta_i a_i$ $(\theta_i \in \mathbf{R}\ \forall i)$ de sorte que m décrit le sous-espace M de $\mathcal{H}(K)$ engendré par la famille $[a_i]_{i=1,\ldots,r}$. On suppose connus P_0 et la famille a_i et on désire estimer une fonction f de m au moyen de X (f est à valeur dans $\overline{\mathbf{R}}$). Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P_m \quad m \in M)$ le modèle statistique correspondant. On supposera que $H_{P_m}(X, T) = H_{P_0}(X, T) \quad \forall m$ (on le notera H (X)), on notera J l'isomorphisme défini en I, 3°, *a*.

On dit que U est un Estimateur Linéaire Sans Biais de $f(m)$ [en abrégé ELSB] si $U \in H(X)$ et $E_m(U) = \int U dP_m = f(m) \quad \forall m \in M$.

On vérifiera que : $\forall U \in H(X)$ la variance de U ne dépend pas de m et on la notera var U.

On dit que U* est un Estimateur Linéaire Sans Biais de Variance Minimum [ELSBVM] de $f(m)$ si var U* $\leqslant$ var U pour tout U ELSB de $f(m)$.

1° *a.* Vérifier que $\forall\, V \in H(X) \quad E_m(V) = \langle m, J(V) \rangle_{\mathcal{H}(K)}$

b. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que f soit linéairement estimable sans biais.

c. Soit f linéairement estimable sans biais, montrer qu'il existe un unique ELSBVM $\hat{f}$ de f. Exprimer $\hat{f}$ au moyen de l'isomorphisme J et de l'opérateur de projection P^M de $\mathcal{H}(K)$ sur M.

2° Soit p un entier $p \geqslant r$. Soit $T = \{0, 1, \ldots, p\}$. On désigne par A la matrice $\{A_{ij} = \langle a_i, a_j \rangle_{\mathcal{H}(K)}\}$ et par a le vecteur de coordonnées a_i $(i = 1, \ldots, r)$. On suppose K et A inversibles.

a. Vérifier que θ_i est linéairement estimable sans biais;

b. Si A est la matrice identité trouver $\widehat{\theta}_i$ ELSBVM de θ_i;

c. Trouver $\widehat{\theta}_i$ dans le cas général (soit B une matrice telle que $B\,B^t = A^{-1}$, on pourra poser $\alpha = B\,a$; B^t désigne la matrice transposée de B).

3° On se replace dans les conditions de II, 4°; trouver un ELSBVM de θ_i.

IV

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P_\theta, \theta \in \Theta \subset R)$ un modèle statistique et μ une probabilité dominant P_θ pour tout θ de Θ, soit $p_\theta = \dfrac{dP_\theta}{d\mu}$, on suppose $p_\theta \in L^2(\mu)$. On dit que f est estimable sans biais s'il existe $U \in L^2(\mu)$ tel que $f(\theta) = E_\theta(U) = \int U\,dP_\theta \quad \forall\, \theta \in \Theta$. U^* est dit μ-efficace si $\|U^*\|_{L^2(\mu)} \leqslant \|U\|_{L^2(\mu)} \quad \forall\, U$ estimateur sans biais de f.

1° Soit $R(\theta_1, \theta_2) = \langle p_{\theta_1}, p_{\theta_2} \rangle_{L^2(\mu)}$. Vérifier que R est un noyau symétrique de type positif, décrire $\mathcal{H}(R)$. Soit $L^2(p_\theta, \theta \in \Theta)$ le sous-espace engendré par $[p_\theta]_{\theta \in \Theta}$ dans $L^2(\mu)$.

On notera encore J l'isomorphisme de $L^2(p_\theta, \theta \in \Theta)$ sur $\mathcal{H}(R)$.

2° Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit estimable sans biais. Trouver un estimateur sans biais μ-efficace de f.

3° Si $\mu = P_{\theta_0}$, que peut-on dire d'un estimateur P_{θ_0} efficace pour tout θ_0. Vérifier que si $\mu = P_{\theta_0}$, $1 \in \mathcal{H}(R)$ et $J(1) = 1$.

4° On se place dans les conditions de II, 4°;

soit $\theta^0 = (\theta_1^0, \ldots, \theta_r^0)$ fixé et $\mu = P_{\theta^0}$.

(de façon générale on notera θ_i la coordonnée d'ordre i du vecteur θ).

Calculer $R(\theta^1, \theta^2)$ et $\dfrac{\partial}{\partial u_i} R(u, v)\,[\theta^0, \theta]$ (dérivée de R prise au point (θ^0, θ)). Vérifier que

$$\frac{\partial}{\partial u_i} R(u, v)\,[\theta^0, \theta] = \left\langle \frac{\partial p_\theta}{\partial \theta_i}(\theta^0), p_\theta \right\rangle_{L^2(\mu)}.$$

En déduire un estimateur sans biais de variance minimum de θ_i.

V

Quand on observe un phénomène et qu'on veut estimer une fonction f on ne connaît généralement pas tout le passé de ce phénomène, il est intéressant de comparer l'estimation qu'on peut faire connaissant le passé de $-n$ à 0 à celle qu'on pourrait faire si on le connaissait depuis $-\infty$.

Si K un noyau symétrique de type positif sur $\mathbf{Z}$, $\mathcal{H}(K)$ l'espace autoreproduisant associé. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit $T_n = \{-n, \ldots, -1, 0\}$, soit K_n la restriction de K à T_n et soit $f \in \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \mathcal{H}(K_n, T_n)$.

a. Soit H un espace de Hilbert, $[H_n]_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de sous-espaces fermés de H tels que

$$\forall\, n \in \mathbf{N} \quad H_n \subset H_{n+1} \quad \text{et} \quad \overline{\bigcup_{n \in \mathbf{N}} H_n} = H\ ;$$

Soit $[Z_n]_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de H tels que $\forall\, m \leqslant n \quad P^{H_m}(Z_n) = Z_m$ (P^{H_m} désigne le projecteur de H sur H_m).

Montrer que si $\lim_{n \to \infty} \|Z_n\|^2 < \infty$, il existe $Z \in H$ tel que $\|Z_n - Z\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ et $Z_n = P^{H_n}(Z) \ \forall\, n$.

b. Soit H_n le sous-espace fermé de $\mathcal{H}(K)$ engendré par

$$[K(t, .)]_{t \in T_n}.$$

Montrer qu'il existe une suite $[f^{(n)}]_{n \in \mathbf{N}}$, telle que $\forall\, n \in \mathbf{N} \quad f^{(n)} \in H_n, \quad \forall\, t \in T_n \quad f^{(n)}(t) = f(t)$ et $f^{(m)} = P^{H_m}[f^{(n)}]$; en déduire que $f \in \mathcal{H}(K)$ si et seulement si $\lim_{n \to \infty} \|f\|_{\mathcal{H}(K_n, T_n)} < \infty$.

c. Soit f estimable linéairement sans biais sur Z et $\widehat{f}$ un ELSBVM de f. Soit $\widehat{f}_n$ un ELSBVM de f obtenu en ne considérant X que sur T_n, vérifier que $\widehat{f}_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \widehat{f}$ dans $\mathcal{H}(K)$.