II.9 – TEXTE DE L'EPREUVE DE PROBABILITES ET STATISTIQUES

La deuxième et la troisième partie de ce problème peuvent se traiter indépendamment.

NOTATIONS ET TERMINOLOGIE

1° Dans tout le problème on considère une suite d'espaces mesurables $((\Omega_n, \mathcal{A}_n))$; on appelle :

— *suite adaptée d'événements* toute suite (A_n) où, pour tout n, A_n appartient à $\mathcal{A}_n$;

— *suite adaptée de probabilités* toute suite (P_n) où, pour tout n, P_n est une probabilité définie sur l'espace mesurable $(\Omega_n, \mathcal{A}_n)$;

— *suite adaptée d'applications* toute suite (φ_n) où, pour tout n, φ_n est une application mesurable de $(\Omega_n, \mathcal{A}_n)$ dans $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ (où $\mathcal{B}$ désigne la tribu borélienne sur $\mathbf{R}$).

2° Étant donnés deux espaces mesurables $(\Omega, \mathcal{A})$ et $(\Omega', \mathcal{A}')$, une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et une application mesurable f de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\Omega', \mathcal{A}')$, on note $f\mathrm{P}$ la *probabilité* (sur $(\Omega', \mathcal{A}')$), *image* de P par f.

3° Étant donnés un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$ et une mesure μ (à valeurs réelles de signe quelconque) sur $(\Omega, \mathcal{A})$, on note $\| \mu \| = 2 \sup_{A \in \mathcal{A}} | \mu(A) |$.

4° On dit qu'une suite (M_n) de probabilités sur $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ *converge faiblement* vers une mesure M sur $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$, si et seulement si, pour tout x tel que $M(\{x\}) = 0$, on a

$$\lim_{n \to \infty} M_n(]-\infty, x[) = M(]-\infty, x[) ;$$

si de plus la mesure M est elle-même une probabilité, on dit que la suite (M_n) *converge étroitement* vers M.

PREMIÈRE PARTIE

Définition.

Soient deux suites adaptées de probabilités, (P_n) et (Q_n); (P_n) est dite *contiguë* à (Q_n) si et seulement si, pour toute suite adaptée d'événements, (A_n), vérifiant $\lim_{n \to \infty} Q_n(A_n) = 0$, on a aussi $\lim_{n \to \infty} P_n(A_n) = 0$.

I. *Généralités sur la contiguïté.*

1° Démontrer que la contiguïté est une relation de préordre (c'est-à-dire réflexive et transitive) sur l'ensemble des suites adaptées de probabilités.

2° Exemples.

a. Soit, pour tout n, $(\Omega_n, \mathcal{A}_n) = (\mathbf{R}, \mathcal{B})$; soient (a_n) et (b_n) deux suites convergentes de nombres réels, vérifiant la condition $(\forall n \in \mathbf{N}) \quad a_n < b_n$.

Soit, pour tout n, P_n la probabilité uniforme sur le segment $[a_n, b_n]$ et Q_n la probabilité uniforme sur le segment $[0, 1]$; dans quel cas la suite (P_n) est-elle contiguë à la suite (Q_n)?

b. Soit, pour tout n, $(\Omega_n, \mathcal{A}_n) = (\mathbf{R}, \mathcal{B})$; soient (α_n) et (β_n) deux suites de nombres réels et soit, pour tout n, P_n (resp. Q_n) la probabilité de Laplace-Gauss (autrement dit normale) de moyenne α_n (resp. β_n) et variance 1.

Étudier la contiguïté de (P_n) à (Q_n) dans chacun des cas particuliers suivants :

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = \lim_{n \to \infty} (-\beta_n) = +\infty ;$$

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = \lim_{n \to \infty} \beta_n \quad (\in \mathbf{R}).$$

3° Cas particuliers.

Soit, pour tout n, $(\Omega_n, \mathcal{A}_n) = (\Omega, \mathcal{A})$.

a. Soient, sur $(\Omega, \mathcal{A})$, deux probabilités P et Q; démontrer que la contiguïté de la suite constante (P) à la suite constante (Q) équivaut à l'absolue continuité de la probabilité P par rapport à la probabilité Q (c'est-à-dire à la propriété :

$$(\forall A \in \mathcal{A}) \quad [Q(A) = 0 \Rightarrow P(A) = 0])$$

b. Soit une probabilité Q sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et soit, pour tout n, une probabilité P_n absolument continue par rapport à Q; démontrer que la contiguïté de la suite (P_n) à la suite constante (Q) équivaut à l'uniforme absolue continuité des probabilités P_n par rapport à Q (c'est-à-dire à la propriété :

$$(\forall \varepsilon > 0) \; (\exists \eta > 0) \; (\forall A \in \mathcal{A}) \; (\forall n \in \mathbf{N}) \quad [Q(A) < \eta \Rightarrow P_n(A) < \varepsilon]).$$

II. *Contiguïté et convergence.*

1° Démontrer que la contiguïté de la suite (P_n) à la suite (Q_n) équivaut à la propriété suivante : pour toute suite adaptée d'applications, (φ_n), si la suite $(\varphi_n\, Q_n)$ (de probabilités sur $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$) converge étroitement vers la probabilité concentrée en 0, il en est de même de la suite $(\varphi_n\, P_n)$.

2° Soient un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et, pour tout n, deux applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\Omega_n, \mathcal{A}_n)$, f_n et g_n. On pose $P_n = f_n P$ et $Q_n = g_n P$.

Démontrer que, dans ce cas, la contiguïté de (P_n) à (Q_n) équivaut à la propriété suivante : pour toute suite adaptée d'applications, (φ_n), si la suite $(\varphi_n \circ g_n)$ converge stochastiquement (autrement dit « en probabilité »), pour la probabilité P, vers 0, il en est de même pour la suite $(\varphi_n \circ f_n)$.

III. *Contiguïté et norme de la convergence en moyenne.*

1° Soient, sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$, une mesure σ-finie μ et deux probabilités P et P′, toutes deux absolument continues par rapport à μ; soit p (resp. p') une densité de P (resp. P′) par rapport à μ. Démontrer que $\| P - P' \| = \int_\Omega | p - p' | \, d\mu$.

2° Soient deux suites adaptées de probabilités, (P_n) et (Q_n).

a. Démontrer que, si $\lim\limits_{n\to\infty} \| P_n - Q_n \| = 0$, chacune des deux suites est contiguë à l'autre.

b. On suppose que (P_n) est contiguë à (Q_n); soient deux autres suites adaptées de probabilités, (P'_n) et (Q'_n), telles que :

$$\lim_{n\to\infty} \| P_n - P'_n \| = \lim_{n\to\infty} \| Q_n - Q'_n \| = 0 \;;$$

démontrer que (P'_n) est contiguë à (Q'_n).

b. Soit une probabilité Q sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et soit, pour tout n, une probabilité P_n absolument continue par rapport à Q; démontrer que la contiguïté de la suite (P_n) à la suite constante (Q) équivaut à l'uniforme absolue continuité des probabilités P_n par rapport à Q (c'est-à-dire à la propriété :

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \eta > 0)\ (\forall A \in \mathcal{A})\ (\forall n \in \mathbf{N})\quad [Q(A) < \eta \Rightarrow P_n(A) < \varepsilon]).$$

II. *Contiguïté et convergence.*

1° Démontrer que la contiguïté de la suite (P_n) à la suite (Q_n) équivaut à la propriété suivante : pour toute suite adaptée d'applications, (φ_n), si la suite $(\varphi_n\, Q_n)$ (de probabilités sur $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$) converge étroitement vers la probabilité concentrée en 0, il en est de même de la suite $(\varphi_n\, P_n)$.

b. Soit N un nombre entier tel que, pour tout n supérieur à N, on ait $P_n(S_n) > 0$; on définit la suite (P'_n) de la manière suivante :

pour tout $n \leqslant N$, $P'_n = Q_n$,

pour tout $n > N$, P'_n est la probabilité P_n conditionnée par l'événement S_n (on note $P'_n = P_n{}^{S_n}$).

Démontrer que la suite (P'_n) satisfait bien aux conditions imposées.

Deuxième partie

Définitions.

Soient données, sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$, deux probabilités P et Q, et une mesure σ-finie μ, par rapport à laquelle P et Q sont toutes deux absolument continues; soit p (resp. q) une densité de P (resp. Q) par rapport à μ.

On appelle *vraisemblance logarithmique* de P par rapport à Q toute application mesurable φ, de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$, telle que, pour tout ω vérifiant $p(\omega) > 0$ et $q(\omega) > 0$, on ait

$$\varphi(\omega) = \operatorname{Log} p(\omega) - \operatorname{Log} q(\omega).$$

On appelle *représentation logarithmique* du couple (P, Q) toute probabilité, sur $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$, qui est l'image de P par une vraisemblance logarithmique de P par rapport à Q.

I. *Généralités sur les représentations logarithmiques.*

1° Démontrer que l'ensemble des représentations logarithmiques d'un couple (P, Q) ne dépend pas du choix de la mesure μ par rapport à laquelle P et Q sont toutes deux absolument continues.

2° On suppose P absolument continue par rapport à Q.

a. Démontrer que, si φ est une vraisemblance logarithmique de P par rapport à Q, $\exp(\varphi)$ est une densité de P par rapport à Q.

b. Démontrer qu'il existe une unique représentation logarithmique du couple (P, Q).

II. *Contiguïté et suites tendues de représentations logarithmiques.*

Une suite (M_n) de probabilités sur $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ est dite *tendue* si et seulement si elle vérifie la condition suivante :

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists c > 0)\ (\forall n \in \mathbf{N})\qquad M_n([-c, +c]) > 1 - \varepsilon.$$

1° Soient deux suites adaptées de probabilités, (P_n) et (Q_n); on suppose que *toute* suite (M_n) où, pour tout n, M_n est une représentation logarithmique du couple (P_n, Q_n) est tendue. On va démontrer qu'il en résulte que (P_n) est contiguë à (Q_n).

Soit, pour tout n, μ_n une mesure σ-finie sur $(\Omega_n, \mathcal{A}_n)$, par rapport à laquelle P_n et Q_n sont toutes deux absolument continues, et soit p_n (resp. q_n) une densité de P_n (resp. Q_n) par rapport à μ_n ; on pose

$$S_n = \{ \omega_n \in \Omega_n \ ; \ p_n(\omega_n) > 0 \ \text{ et } \ q_n(\omega_n) > 0 \} .$$

a. Démontrer que $\lim\limits_{n \to \infty} P_n(S_n) = 1$.

b. Soit, pour tout n, φ_n une vraisemblance logarithmique de P_n par rapport à Q_n, définie, en tout ω_n appartenant à S_n, par

$$\varphi_n(\omega_n) = \operatorname{Log} p_n(\omega_n) - \operatorname{Log} q_n(\omega_n);$$

soit (A_n) une suite adaptée d'événements, vérifiant $\lim\limits_{n \to \infty} Q_n(A_n) = 0$.

Démontrer que, pour tout c strictement positif, on a

$$\lim_{n \to \infty} P_n(A_n \cap S_n \cap \{ \omega_n \ ; \ |\varphi_n(\omega_n)| \leqslant c \}) = 0.$$

c. En déduire que (P_n) est contiguë à (Q_n).

2° Soient deux suites adaptées de probabilités, (P_n) et (Q_n), et soit (M_n) une suite de représentations logarithmiques des couples (P_n, Q_n). On suppose que (P_n) est contiguë à (Q_n).

a. Démontrer que, pour toute suite (c_n) de nombres réels vérifiant $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = +\infty$, on a :

$$\lim_{n \to \infty} M_n(]-\infty, -c_n]) = 0 \ \text{ et } \ \lim_{n \to \infty} M_n([c_n, +\infty[) = 0.$$

b. En déduire que la suite (M_n) est tendue.

III. *Contiguïté et suites séquentiellement relativement compactes de représentations logarithmiques.*

Une suite (M_n) de probabilités sur $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ est dite *séquentiellement relativement compacte* (s.r.c.) si et seulement si, de toute suite extraite de (M_n), on peut extraire une suite étroitement convergente.

1° Démontrer que, pour qu'une suite (M_n) de probabilités sur $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ soit s.r.c., il faut et il suffit qu'elle soit tendue (pour la condition suffisante, on pourra commencer par démontrer que, si une suite (M'_n) de probabilités sur $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$, qui converge faiblement vers une mesure M', est tendue, la limite M' est nécessairement une probabilité).

2° Il résulte de II et de III, 1° que, pour qu'une suite (P_n) soit contiguë à une suite (Q_n), il faut et il suffit que les suites (M_n) de représentations logarithmiques des couples (P_n, Q_n) soient toutes s.r.c..

Soit, pour tout n, P_n (resp. Q_n) la probabilité de Laplace-Gauss de moyenne α_n (resp. β_n) et variance σ_n^2 (on suppose σ_n non nul); on remarque que, pour tout n, P_n et Q_n sont absolument continues l'une par rapport à l'autre, et que donc il existe une unique représentation logarithmique M_n du couple (P_n, Q_n).

Démontrer que M_n est aussi une probabilité de Laplace-Gauss (éventuellement dégénérée) dont on déterminera la moyenne et la variance.

En déduire une condition nécessaire et suffisante, portant sur la suite des triplets $(\alpha_n, \beta_n, \sigma_n)$, de contiguïté de (P_n) à (Q_n).

IV. *Contiguïté mutuelle.*

Soient ici deux suites adaptées de probabilités, (P_n) et (Q_n) telles que pour tout n, P_n et Q_n soient chacune absolument continue par rapport à l'autre; soit, pour tout n, M_n (resp. M'_n) la représentation logarithmique du couple (P_n, Q_n) (resp. (Q_n, P_n)).

Soit s l'application de $\mathbf{R}$ dans lui-même définie par

$$(\forall x \in \mathbf{R}) \quad s(x) = -x.$$

1° Démontrer que, pour tout n, sM'_n est absolument continue par rapport à M_n, et admet pour densité par rapport à M_n l'application $x \rightsquigarrow \exp(-x)$.

2° Une probabilité M sur $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ est dite *séquentiellement adhérente* à la suite (M_n) si et seulement si il existe une suite extraite de (M_n) admettant M pour limite étroite.

On suppose que chacune des suites (P_n) et (Q_n) est contiguë à l'autre (on dit qu'elles sont *mutuellement contiguës*).

a. Démontrer que toute probabilité M séquentiellement adhérente à la suite (M_n) vérifie :

$$(\forall \varepsilon > 0) \ (\exists c > 0) \ \int_{-c}^{+c} \exp(-x) \ M(dx) > 1 - \varepsilon ;$$

en déduire la valeur de

$$\int_{\mathbf{R}} \exp(-x) \ M(dx).$$

b. Démontrer que, si M est une probabilité de Laplace-Gauss séquentiellement adhérente à la suite (M_n), sa moyenne est égale à la moitié de sa variance.

3° Réciproquement, on suppose vérifiées les deux conditions suivantes :
(P_n) est contiguë à (Q_n),
toute probabilité M séquentiellement adhérente à la suite (M_n) vérifie $\int_{\mathbf{R}} \exp(-x)\, M(dx) = 1$.

Démontrer qu'alors (P_n) et (Q_n) sont mutuellement contiguës.

TROISIÈME PARTIE

Définition.

Soient données, sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$, deux probabilités P et Q; pour tout α appartenant au segment [0, 1], on note Φ_α l'ensemble des applications φ, mesurables de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]})$, vérifiant $\int_\Omega \varphi\, dQ \leqslant \alpha$. On appelle *fonction de discrimination* de Q contre P l'application S, de [0, 1] dans lui-même, définie par

I. *Généralités sur la fonction de discrimination.*

1° Soit une mesure σ-finie μ, sur $(\Omega, \mathcal{A})$, par rapport à laquelle P et Q sont toutes deux absolument continues; soit p (resp. q) une densité de P (resp. Q) par rapport à μ.

Pour tout couple (k, γ), appartenant à $[0, +\infty[\times [0, 1]$, on note $\varphi_{k,\gamma}$ l'application de Ω dans [0, 1] définie par :

$$\begin{array}{lll} \text{si} & p(\omega) > kq(\omega), & \varphi_{k,\gamma}(\omega) = 1, \\ \text{si} & p(\omega) = kq(\omega), & \varphi_{k,\gamma}(\omega) = \gamma, \\ \text{si} & p(\omega) < kq(\omega), & \varphi_{k,\gamma}(\omega) = 0. \end{array}$$

a. Démontrer qu'étant donné $\alpha \in [0, 1]$ on peut choisir (k, γ) de telle sorte que $\varphi_{k,\gamma}$ vérifie

$$\int_\Omega \varphi_{k,\gamma}\, dQ = \alpha.$$

b. (k, γ) étant choisi comme il est indiqué en *a*., démontrer que, pour tout φ appartenant à Φ_α, on a

$$\int_\Omega (\varphi_{k,\gamma} - \varphi)(p - kq)\, d\mu \geqslant 0.$$

c. Démontrer que $S(\alpha) = \int_\Omega \varphi_{k,\gamma}\, dP$.

2° Démontrer que, pour tout A appartenant à $\mathcal{A}$, on a $S(Q(A)) \geqslant P(A)$.

II. *Contiguïté et suite des fonctions de discrimination.*

Étant données deux suites adaptées de probabilités, (P_n) et (Q_n), soit, pour tout n, S_n la fonction de discrimination de Q_n contre P_n.

Démontrer que la contiguïté de la suite (P_n) à la suite (Q_n) équivaut à la propriété suivante : pour toute suite (α_n) de nombres réels compris entre 0 et 1, vérifiant $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, on a $\lim_{n\to\infty} S_n(\alpha_n) = 0$.

II.10 – RAPPORT SUR L'EPREUVE DE PROBABILITES ET STATISTIQUES

II.10.1. ANALYSE DU SUJET

Ce problème est consacré à la notion de contiguïté, qui constitue une forme de généralisation, aux couples de suites de probabilités, de la notion d'absolue continuité (qui, elle, est relative aux couples de probabilités).

Cette notion a été introduite, à fin d'étude des propriétés asymptotiques locales des tests, par L. Le Cam en [2] (où étaient en fait considérés des couples de suites de probabilités dont chacune était, au sens que nous étudions ici, contiguë à l'autre) ; le lecteur intéressé pourra trouver de bons exemples d'application de la contiguïté à l'étude des tests de rang, présentés par J. Hájek et Z. Sidak dans [1] ; enfin G.G. Roussas a rédigé un ouvrage de présentation d'ensemble du concept de contiguïté et de son utilisation en statistique ([5]).

Dans la première partie du problème, consacrée aux propriétés élémentaires de la contiguïté, on étudie tout d'abord (I) quelques exemples et cas particuliers de suites contiguës : les seuls outils nécessaires sont ici certaines lois de probabilité élémentaires (uniforme, de Laplace-Gauss ([4], I, 6ᵉ alinéa)), la notion d'absolue continuité d'une probabilité par rapport à une autre ([3]), II, 2 (sous la forme «théorème de Radon-Nikodym»), et la définition était rappelée dans l'énoncé), ainsi que les propriétés de «convergence sous le signe somme» ([3]), II, 3) (ici, de préférence, le théorème de convergence dominée de Lebesgue).

On fait obtenir ensuite (II) deux définitions équivalentes de la contiguïté faisant intervenir l'une la convergence étroite des suites de probabilités (rappelée en introduction de l'énoncé, de manière à faire apparaître son lien avec la convergence en loi des suites de variables aléatoires ([4], III, 1er alinéa)), l'autre la convergence stochastique des suites de variables aléatoires ([4], III, 2ᵉ alinéa).

Enfin (III), on fait intervenir, pour chacun des couples de probabilités considérés, une mesure σ-finie par rapport à laquelle ces probabilités sont toutes deux absolument continues, et on effectue des calculs sur leurs densités (notions relevant,