PROBABILITÉS

N.B. — *Les différentes questions du problème sont largement indépendantes, à condition d'admettre à tout moment les résultats qui précédent.*

NOTATIONS.

a. Dans tout le problème, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne un espace probabilisé, et T une application mesurable de Ω dans lui-même (c'est-à-dire telle que :

$$(\forall A \in \mathcal{A}) \qquad T^{-1}(A) \in \mathcal{A}).$$

On note E l'espérance mathématique relativement à P et, pour tout A appartenant à $\mathcal{A}$, on note 1_A la fonction indicatrice de A (c'est-à-dire l'application de Ω dans $\{0, 1\}$ définie par :

$$(\forall \omega \in A) \quad 1_A(\omega) = 1 \qquad \text{et} \qquad (\forall \omega \notin A) \quad 1_A(\omega) = 0).$$

b. La notation [ ] (resp.] [,]] et [[) est utilisée pour désigner les intervalles fermés (resp. ouverts, semi-ouverts) dans la droite achevée $\overline{\mathbf{R}}$ (munie, quand besoin est, de sa topologie usuelle d'espace compact).

La notation $< >$ (resp. $> <$, $> >$ et $< <$) est utilisée pour désigner les intervalles fermés (resp. ouverts, semi-ouverts) dans $\overline{\mathbf{N}}$ (ensemble ordonné obtenu en adjoignant à l'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers naturels un plus grand élément noté ∞).

Pour tout x appartenant à $[0, \infty[$, on note $\mathcal{E}(x)$ la partie entière de x, et on pose $\mathcal{F}(x) = x - \mathcal{E}(x)$.

On définit par ailleurs $\mathcal{E}(\infty) = \infty$, $\mathcal{F}(\infty) = 0$.

On note I l'ensemble $[0, 1[$, $\mathcal{B}$ la tribu borélienne de I, et λ la mesure de Lebesgue sur $(I, \mathcal{B})$.

c. T^0 est l'application identique de Ω sur lui-même.

Pour tout n appartenant à $< 1, \infty <$, on définit l'application T^n de Ω dans lui-même par la relation de récurrence :

$$T^n = T^{n-1} \circ T.$$

RAPPEL.

Soit $\mathcal{C}$ un *clan* (ou algèbre de Boole) de parties de Ω (c'est-à-dire un sous-ensemble de l'ensemble des parties de Ω, fermé pour l'union des familles finies et la complémentation); supposons que $\mathcal{A}$ soit la *tribu* (ou σ-algèbre de Boole) *engendrée* par $\mathcal{C}$ (c'est-à-dire la plus petite tribu de parties de Ω qui contienne $\mathcal{C}$).

Alors P est entièrement déterminée par sa restriction à $\mathcal{C}$, et vérifie :

$$(\forall A \in \mathcal{A})\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists\, C \in \mathcal{C}) \quad P(\complement_A C \cup \complement_C A) < \varepsilon.$$

On dit que T *conserve la probabilité* P si et seulement si :

$$(\forall A \in \mathcal{A}) \quad P[T^{-1}(A)] = P(A).$$

On dit que T est P-*mélangeante* si et seulement si elle conserve P et que, de plus,

$$(\forall A \in \mathcal{A})(\forall B \in \mathcal{A}) \lim_{n\to\infty} P(A \cap (T^n)^{-1}(B)) = P(A)\,P(B).$$

1° Soit $\mathcal{C}$ un clan de parties de Ω, qui engendre $\mathcal{A}$.

a. Démontrer que, pour que T conserve P, il faut et il suffit que :

$$(\forall C \in \mathcal{C}) \quad P[T^{-1}(C)] = P(C).$$

b. Démontrer que, pour que T soit P-mélangeante, il faut et il suffit qu'elle conserve P et que :

$$(\forall C \in \mathcal{C})(\forall D \in \mathcal{C}) \lim_{n\to\infty} P(C \cap (T^n)^{-1}(D)) = P(C)\,P(D).$$

2° Dans toute cette question, on suppose que T conserve P.

a. Soit A appartenant à $\mathcal{A}$; pour tout n appartenant à $< 0, \infty <$, on pose :

$$d_n = P(A \cap (T^n)^{-1}(A)) - (P(A))^2.$$

Soit $(k_n)_{n \in < 0, \infty <}$ une suite strictement croissante d'éléments de $< 0, \infty <$. Démontrer que, pour tout n appartenant à $< 1, \infty <$,

$$E\left(\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i \in < 0, n <} 1_{(T^{k_i})^{-1}(A)}\right) - P(A)\right]^2\right)$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i \in < 0, n <}\left(\frac{1}{n}\sum_{j \in < 0, n <} d_{|k_i - k_j|}\right).$$

En déduire que, si T est P-mélangeante,

$$\frac{1}{n}\sum_{i \in < 0, n <} 1_{(T^{k_i})^{-1}(A)}$$

tend vers P(A) en moyenne d'ordre 2, ainsi que stochastiquement (autrement dit en probabilité).

b. Réciproquement, on suppose que T vérifie la condition suivante: pour tout A appartenant à $\mathcal{A}$, et toute suite $(k_n)_{n \in < 0, \infty <}$ strictement croissante d'éléments de $< 0, \infty <$, la suite des variables aléatoires

$$\frac{1}{n}\sum_{i \in < 0, n <} 1_{(T^{k_i})^{-1}(A)}$$

converge stochastiquement vers P(A).

Démontrer que, pour toute telle suite $(k_n)_{n \in < 0, \infty <}$, tout couple (A,B) d'éléments de $\mathcal{A}$, et tout n appartenant à $< 1, \infty <$, on a :

$$\left|\left(\frac{1}{n}\sum_{i\in<0,n<} P\left((T^{k_i})^{-1}(A)\cap B\right)\right) - P(A)\,P(B)\right|$$
$$\leqslant E\left(\left|\left(\frac{1}{n}\sum_{i\in<0,n<} 1_{(T^{k_i})^{-1}(A)}\right) - P(A)\right|\right).$$

Démontrer que, si une suite $(x_n)_{n\in<0,\,\infty<}$ de nombres réels ne converge pas vers 0, il existe une suite $(k_n)_{n\in<0,\,\infty<}$, strictement croissante, d'éléments de $<0, \infty<$, telle que la suite

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i\in<0,n<} x_{k_i}\right)_{n\in<1,\,\infty<}$$

ne converge pas vers 0.

En déduire que T est P-mélangeante.

3° *Exemples.*

a. Soit $\Omega = <1, n>$, $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de Ω, et T une application bijective de Ω sur lui-même (autrement dit une substitution d'ordre n).

Quelles sont les probabilités P que T conserve?

Quelles sont celles pour lesquelles T est mélangeante?

b. On considère l'espace de probabilité $(I, \mathcal{B}, \lambda)$; soit c appartenant à I, et soit T l'application de I dans lui-même définie par :

$$(\forall\, x\in I)\quad T(x) = \mathcal{F}(x+c)\,.$$

Est-ce que T conserve λ?

Est-ce que T est λ-mélangeante?

c. On suppose que l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et l'application T vérifient la condition suivante : il existe une suite $(X_n)_{n\in<0,\,\infty<}$ de variables aléatoires, indépendantes et de même loi, telle que :

— $\mathcal{A}$ est la plus petite tribu par rapport à laquelle toutes les variables aléatoires X_n sont mesurables;

— pour tout ω appartenant à Ω, et tout n appartenant à $<0, \infty<$, on a :

$$X_n[T(\omega)] = X_{n+1}(\omega).$$

Démontrer que T conserve P.

Démontrer que T est P-mélangeante.

II

N. B. — *Dans toute cette partie,* on suppose que T *conserve* P.

Étant donné deux événements A et B, tels que $P(B)\neq 0$, on note $P^B(A)$ la probabilité conditionnelle de A par rapport à B.

Étant donné une sous-tribu $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$, un événement A, et une variable aléatoire P-intégrable X, on note $P^{\mathcal{C}}(A)$ (resp. $E^{\mathcal{C}}(X)$) la probabilité (resp. l'espérance) conditionnelle, par rapport à la sous-tribu $\mathcal{C}$, de l'événement A (resp. de la variable aléatoire X).

On note, pour tout n appartenant à $<0, \infty<$, $\mathcal{A}_n = (T^n)^{-1}(\mathcal{A})$

$$(\mathcal{A}_n = \{A_n \subset \Omega ; \quad (\exists A \in \mathcal{A}) \ A_n = (T^n)^{-1}(A)\}).$$

On pose :

$$\mathcal{A}_\infty = \bigcap_{n \in <0, \infty<} \mathcal{A}_n .$$

On dit que T est P-*Kolmogorovienne* si et seulement si, pour tout A_∞ appartenant à $\mathcal{A}_\infty$, on a, soit $P(A_\infty) = 0$, soit $P(A_\infty) = 1$.

1° On suppose que T est P-Kolmogorovienne; le but de cette question est d'en déduire qu'elle est P-mélangeante.

Soit A appartenant à $\mathcal{A}$.

a. Démontrer que, si $0 \leqslant m \leqslant n \leqslant \infty$,

$$E^{\mathcal{A}_n}\left(P^{\mathcal{A}_m}(A)\right) = P^{\mathcal{A}_n}(A)$$

et

$$E^{\mathcal{A}_n}\left(P^{\mathcal{A}_m}(A)P^{\mathcal{A}_n}(A)\right) = \left[P^{\mathcal{A}_n}(A)\right]^2.$$

Que peut-on dire de $P^{\mathcal{A}_\infty}(A)$?

b. Démontrer que, si $0 \leqslant m \leqslant n \leqslant \infty$,

$$E\left[\left(P^{\mathcal{A}_m}(A) - P^{\mathcal{A}_n}(A)\right)^2\right] = E\left[\left(P^{\mathcal{A}_m}(A)\right)^2\right] - E\left[\left(P^{\mathcal{A}_n}(A)\right)^2\right].$$

c. Démontrer que la suite $\left(P^{\mathcal{A}_n}(A)\right)_{n \in <0, \infty<}$ converge en moyenne d'ordre 2.

d. Démontrer que la suite $\left(P^{\mathcal{A}_n}(A)\right)_{n \in <0, \infty<}$ converge en moyenne d'ordre 1; démontrer que sa limite est P(A).

e. Soit B appartenant à $\mathcal{A}$; démontrer que :

$$\lim_{n \to \infty} [P(A \cap (T^n)^{-1}(B)) - P(A)\,P(B)] = 0.$$

2° On reprend la situation de la question I-3°-*c*. T est-elle P-Kolmogorovienne?

3° Soit $(\mathcal{C}_n)_{n \in <1, \infty<}$ une suite croissante de sous-tribus de $\mathcal{A}$, telle que $\mathcal{A}$ soit engendrée par $\bigcup_{n \in <1, \infty<} \mathcal{C}_n$.

On suppose qu'existe une constante strictement positive H telle que, pour tout A appartenant à $\mathcal{A}$, tout n appartenant à $<1, \infty<$, et tout C_n appartenant à $\mathcal{C}_n$ et vérifiant $P(C_n) \neq 0$, on ait :

$$H\,P(A) \leqslant P^{C_n}[(T^n)^{-1}(A)].$$

Démontrer que, pour tout n appartenant à $<1, \infty<$, tout A_n appartenant à $\mathcal{A}_n$ et vérifiant $P(A_n) \neq 0$, et tout C_n appartenant à $\mathcal{C}_n$, on a :

$$H\,P(C_n) \leqslant P^{A_n}(C_n).$$

Démontrer que, pour tout A_∞ appartenant à $\mathcal{A}_\infty$ et vérifiant $P(A_\infty) \neq 0$ et tout A appartenant à $\mathcal{A}$, on a :

$$H\,P(A) \leqslant P^{A_\infty}(A).$$

En déduire que T est P-Kolmogorovienne.

III

La notation φ désigne une application de $[0,1]$ dans $[0,\infty]$ vérifiant les propriétés suivantes :

(1) φ est continue et strictement monotone;

(2) *a*. Si φ est strictement croissante, on a :

$$\varphi(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi(1) \in \, < 2,\infty >;$$

b. Si φ est strictement décroissante, on a :

$$\varphi(0) \in \, < 3,\infty > \qquad \text{et} \qquad \varphi(1) = 1;$$

(3) En tout t, tel que $\varphi(t)$ appartient à $[0,\infty[$, φ est dérivable et :

a. Si φ est strictement croissante, on a :

$$\inf_{t \in [0,\,1]} |\,\varphi'(t)\,| > 1;$$

b. Si φ est strictement décroissante, on a,

$$(\forall\ t_0 \in\,]0,\ 1[) \quad \inf_{t \in]0,\, t_0]} |\,\varphi'(t)\,| > 1.$$

Étant donné n appartenant à $< 1,\infty <$, on dit qu'une suite d'entiers de longueur n, $(a_i)_{i \in < 1,\, n >}$, est φ-régulière si et seulement si elle satisfait aux conditions suivantes :

a. Si φ est strictement croissante, on a :

$$(\forall\ i \in\, < 1, n >) \qquad a_i \in\, < 0, \varphi(1) < .$$

b. Si φ est strictement décroissante, on a :

$$(\forall\ i \in\, < 1, n >) \qquad a_i \in\, < 1, \varphi(0) >$$

et, de plus, s'il existe i tel que $a_i = \varphi(0)$, alors, pour tout j appartenant à $< i, n >$, on a $a_j = \varphi(0)$.

On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des suites φ-régulières de longueur n; on pose :

$$\mathcal{S} = \bigcup_{n \in < 1,\, \infty <} \mathcal{S}_n.$$

Pour tout x appartenant à I, on définit les deux suites

$$(r_n(x))_{n \in < 0,\, \infty <} \qquad \text{et} \qquad (\varepsilon_n(x))_{n \in < 1,\, \infty <}$$

par la récurrence suivante :

$$r_0(x) = x$$

$$(\forall\, n \in <1,\ \infty<) \left| \begin{array}{l} r_n(x) = \mathcal{F}(\varphi(r_{n-1}(x))) \\ \varepsilon_n(x) = \mathcal{E}(\varphi(r_{n-1}(x))) . \end{array} \right.$$

La suite $(\varepsilon_n(x))_{n \in <1,\ \infty<}$ est appelée le φ-développement de x.
Soit T l'application de I dans lui-même définie par :

$$(\forall x \in \mathrm{I}) \qquad \mathrm{T}(x) = \mathcal{F}(\varphi(x)).$$

Notre but est de démontrer qu'il existe des probabilités sur (I, $\mathcal{B}$) conservées par T, et de trouver une condition suffisante pour que T soit P-Kolmogorovienne (et donc P-mélangeante); on considérera en particulier les cas suivants :

α. Développement en base p (où $p \in <2,\ \infty<$) :

$$(\forall\ x \in [0,\ 1]) \quad \varphi(x) = px.$$

β. Développement quadratique :

$$(\forall\ x \in [0,\ 1]) \quad \varphi(x) = (1+x)^2 - 1.$$

γ. Développement en fraction continue :

$$(\forall\ x \in]0,\ 1]) \qquad \varphi(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad \varphi(0) = \infty.$$

1° *a*. Démontrer que T est une application mesurable de I dans lui-même.

b. Soit x appartenant à I; exprimer, en fonction du φ-développement de x, le φ-développement de T(x).

2° *a*. Démontrer que, pour tout x appartenant à I, et tout n appartenant à $<1, \infty<$, la suite $(\varepsilon_i(x))_{i \in <1,\ n>}$ est φ-régulière.

b. Réciproquement, à toute suite φ-régulière de longueur n,

$$s = (a_i)_{i \in <1,\ n>},$$

on associe :

$$\Delta_s = \{\, x \in \mathrm{I};\ (\forall\ i \in <1,\ n>) \quad \varepsilon_i(x) = a_i \,\}.$$

Démontrer que les Δ_s forment, quand s parcourt $\mathcal{S}_n$, une partition de I en intervalles non vides.

Démontrer l'égalité : $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \sup_{s \in \mathcal{S}_n} \lambda(\Delta_s) = 0.$

Pour tout n appartenant à $<1, \infty<$, on note $\mathcal{C}_n$ l'ensemble des unions des familles dénombrables d'intervalles Δ_s (où s appartient à $\mathcal{S}_n$).

Quelle est la tribu engendrée par

$$\bigcup_{n \in <1,\ \infty<} \mathcal{C}_n ?$$

3° *a*. Soit P une probabilité sur (I,$\mathcal{B}$); pour tout s appartenant à $\mathcal{S}$, on pose :

$$p_s = \mathrm{P}(\Delta_s).$$

Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur la famille $(p_s)_{s \in \mathcal{S}}$, pour que T conserve P.

b. Inversement, soit donnée une famille $(p_s)_{s \in \mathcal{S}}$ d'éléments de $[0,1]$; établir une condition nécessaire et suffisante pour qu'existe une probabilité P sur $(\mathrm{I},\mathcal{B})$, conservée par T, telle que :

$$(\forall s \in \mathcal{S}) \quad \mathrm{P}(\Delta_s) = p_s$$

(on pourra chercher à déterminer P par la restriction de sa fonction de répartition à l'ensemble des extrémités des intervalles Δ_s).

Démontrer qu'on peut choisir la famille $(p_s)_{s \in \mathcal{S}}$ de manière que pour tout n appartenant à $< 1,\infty <$, les n variables aléatoires ε_i $(i \in < 1, n >)$ soient indépendantes.

c. On reprend les cas particuliers $\alpha.$ et $\gamma.$ cités ci-dessus. Démontrer que l'application T conserve :

— dans le cas $\alpha.$ la probabilité λ;

— dans le cas $\gamma.$ la probabilité admettant pour densité par rapport à λ la fonction définie sur I par :

$$x \longmapsto \frac{1}{\operatorname{Log} 2} \, \frac{1}{1+x}.$$

4° Soit P une probabilité sur $(\mathrm{I},\mathcal{B})$, conservée par T; on suppose de plus que :

(A) Il existe deux nombres réels strictement positifs, K_1 et K_2, tels que P soit absolument continue par rapport à λ, de densité $\dfrac{d\mathrm{P}}{d\lambda}$ vérifiant :

$$\mathrm{K}_1 \leqslant \frac{d\mathrm{P}}{d\lambda} \leqslant \mathrm{K}_2 \,;$$

(B) Il existe un nombre réel strictement positif K tel que, pour tout intervalle $[x,y[$ de I, tout n appartenant à $< 1,\infty <$ et tout s appartenant à $\mathcal{S}_n$, on ait :

$$\lambda\big((\mathrm{T}^n)^{-1}([x,y[) \cap \Delta_s\big) \geqslant \mathrm{K}(y-x)\,\lambda(\Delta_s).$$

Démontrer qu'est satisfaite la condition, établie à la question II 3°, pour que T soit P-Kolmogorovienne.

5° *a.* Démontrer que la condition (A) est satisfaite pour chacune des probabilités considérées en III-3°-*c*.

b. Démontrer qu'il existe, pour tout n appartenant à $< 1,\infty <$, et tout s appartenant à $\mathcal{S}_n$, et tel que $\mathrm{P}(\Delta_s) \neq 0$, une application Ψ_s de I dans lui-même, strictement monotone, et telle que, pour tout intervalle $[x,y[$ de I, $\Delta_s \cap (\mathrm{T}^n)^{-1}([x,y[)$ soit un intervalle d'extrémités $\Psi_s(x)$ et $\Psi_s(y)$.

Démontrer que la condition (B) est satisfaite dans chacun des cas particuliers $\alpha.$ $\beta.$ et $\gamma.$

(On pourra passer par les étapes suivantes :

Cas β : pour tout s appartenant à $\mathcal{S}$, et vérifiant $\mathrm{P}(\Delta_s) \neq 0$, on a :

$$\inf_{x \in \mathrm{I}} |\Psi'_s(x)| \geqslant \frac{1}{2} \sup_{x \in \mathrm{I}} |\Psi'_s(x)|\,;$$

Cas γ : $s = (a_i)_{i \in < 1,\, n >}$ étant une suite régulière telle que $\mathrm{P}(\Delta_s) \neq 0$, si $(\alpha_i)_{i \in < 0,\, n >}$ et $(\beta_i)_{i \in < 0,\, n >}$ sont les suites solutions de l'équation de récurrence :

$$(\forall\, i \in < 2, n >) \quad x_i = a_i x_{i-1} + x_{i-2}$$

qui vérifient les conditions initiales $\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 1, \quad \beta_0 = 1, \quad \beta_1 = a_1,$
alors, pour tout x appartenant à I, on a :

$$\Psi'_s(x) = \frac{\alpha_n + x\,\alpha_{n-1}}{\beta_n + x\,\beta_{n-1}}\Big).$$

RAPPORT SUR LA COMPOSITION DE PROBABILITES ET STATISTIQUE

GENERALITES

Ce problème a été suggéré par certaines questions de Théorie Ergodique; le thème central en était la notion de transformation mélangeante sur un espace de probabilité.

Dans la première partie, on s'assure tout d'abord (1°) que, pour que T soit mélangeante, il suffit que soit vérifiée une condition portant uniquement sur un clan qui engendre la tribu des événements ; les seuls outils nécessaires sont ici la notion de tribu engendrée par un clan et le théorème de prolongement de Carathéodory, qu'on avait pris soin de rappeler dans l'introduction de l'énoncé. On démontre ensuite (2°) une condition nécessaire et suffisante de mélange, qui est due à Blum et Hanson ([3]), et dans la démonstration de laquelle interviennent les relations entre les convergences dans L^2, dans L^1 et stochastique ([6], III, 3° alinéa). Enfin, en 3°, on étudie trois exemples élémentaires (qu'on peut trouver, ainsi que bien d'autres dans [1], chapitre I), faisant intervenir respectivement les probabilités sur ensemble fini, la loi uniforme sur un segment ([6], I, 5° alinéa) et l'indépendance des variables aléatoires ([6], II, 7° alinéa).

La deuxième partie consiste en l'étude d'une condition suffisante de mélange, à savoir le caractère Kolmogorovien. Pour démontrer que c'est bien une condition suffisante (1°), on utilise, comme dans [1], chapitre III, 11, la convergence des martingales inversées ; ici, nous nous contentons de faire intervenir la convergence dans L^2, puis dans L^1 ; le seul outil nécessaire pour cela est la définition de l'espérance conditionnelle par rapport à une sous-tribu ([6], II, 4° alinéa). En 2° et 3°, on donne deux exemples de transformations Kolmogoroviennes : le 2° est une application immédiate de la loi du tout ou rien ([6], III, 4° alinéa) ; le 3°, qui est destiné à être utilisé dans la troisième partie, fait intervenir des calculs élémentaires sur les probabilités conditionnelles relatives à des événements de probabilité non nulle ([6], II, 1er alinéa) et, une fois encore, le théorème de prolongement de Carathéodory.

La troisième partie a été inspirée par un article de Rényi ([7]), dont on a un peu simplifié les hypothèses (en supposant φ dérivable, et prenant en 0 et 1 des valeurs entières ou infinies) et modifié la présentation afin de mettre l'accent sur le caractère Kolmogorovien, et non seulement sur le caractère ergodique, de la transformation étudiée (ainsi qu'il est fait en [1], chapitre 1, 4, dans le cas particulier de la représentation d'un nombre réel en fraction continue) ; cette partie ne fait appel, comme connaissances purement probabilistes, qu'aux notions de densité et de fonction de répartition ([6], I, 4° alinéa) et, à nouveau, d'indépendance des variables aléatoires ; par contre, elle nécessite, pensons-nous, une certaine habileté de calcul, au niveau de l'analyse élémentaire ; à ce propos, le lecteur pourra étudier avec profit les articles de Bissinger ([2]) et Everett ([4]), qui furent utilisés par Rényi dans [7].

Première Partie

I - 1° - La démonstration des conditions suffisantes figurant dans cette question a arrêté de très nombreux candidats. Pourtant, le a. peut se traiter en 3 lignes :

« les applications de $\mathcal{A}$ dans [0,1], P et $P \circ T^{-1}$, sont toutes deux des probabilités ; elles coïncident sur $\mathcal{C}$, clan qui engendre $\mathcal{A}$; donc elles coïncident sur $\mathcal{A}$ ».
(voir, dans le RAPPEL, le membre de phrase : « Alors P est entièrement déterminée par sa restriction à $\mathcal{C}$ »).

Par contre le b. nécessite un raisonnement un peu plus élaboré ; on peut en particulier utiliser la dernière ligne du RAPPEL (c'est-à-dire la densité de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{A}$ pour la topologie définie sur $\mathcal{A}$ par l'écart d défini par $d(A, B) = P(A \triangle B)$).