COMPOSITION
DE PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

I

$\mathbf{R}^2$ est muni de la distance euclidienne et considéré comme espace affine et métrique. Un point de $\mathbf{R}^2$ est défini par ses coordonnées (x, y).

Soit Ω l'ensemble des droites de $\mathbf{R}^2$, Π l'ensemble $[0,\pi[\times\mathbf{R}$. L'application qui, à tout couple (u, v), élément de Π, associe l'élément $\omega(u, v)$ de Ω d'équation $x \cos u + y \sin u = v$, est une bijection de Π sur Ω. Soit $\mathscr{S}$ l'ensemble des images dans Ω des boréliens de Π et soit μ la mesure image de la mesure de Borel-Lebesgue de Π par cette bijection.

Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des parties convexes compactes de $\mathbf{R}^2$. Étant donné $A \in \mathscr{C}$, on pourra admettre que l'ensemble Ω_A des droites qui coupent A est mesurable dans $(\Omega, \mathscr{S})$.

On admettra que toute partie A de $\mathscr{C}$ possède la propriété suivante : à toute valeur de u correspondent deux valeurs de v : $v_1(u)$ et $v_2(u)$, $v_1(u) \leqslant v_2(u)$ telles que toute droite $\omega(u, v)$ coupe A si et seulement si $v \in [v_1(u), v_2(u)]$.

1° Soit $\mathscr{C}^*$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{C}$, dont la frontière est une courbe fermée simple rectifiable; pour $A \in \mathscr{C}^*$, calculer l'intégrale

$$\int_{[0,\pi[} [v_2(u) - v_1(u)]\, du$$

en fonction de la longueur L_A de la frontière de A; en déduire que la mesure dans $(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$ de l'ensemble des droites qui coupent A est L_A.

(On pourra d'abord montrer que l'intégrale est indépendante de l'origine O et par suite la calculer en supposant que $O \in A$, ce qui conduira à une intégrale telle que : $\displaystyle\int_{[0,2\pi[} w(u)\, du$ avec $w(u) \geqslant 0$. On pourra dorénavant supposer que la frontière de A est une courbe « fermée simple rectifiable »).

N.B. — *Le candidat qui ne saura pas résoudre cette question préliminaire en admettra le résultat pour traiter la suite du problème.*

A étant un élément déterminé de $\mathscr{C}^*$, dont la frontière a pour longueur L_A, si Ω_A est l'ensemble des droites qui coupent A, $\mathscr{S}_A$ la trace de $\mathscr{S}$ sur Ω_A et P_A la restriction à $(\Omega_A, \mathscr{S}_A)$ de la mesure $\dfrac{1}{L_A}\mu$, $(\Omega_A, \mathscr{S}_A, P_A)$ est un espace probabilisé. *Cet espace sera l'espace de référence qui sera utilisé dans les deux premières parties du problème.*

Si B est une partie de $\mathbf{R}^2$ telle que l'ensemble des droites de $\mathbf{R}^2$ appartenant à Ω_A qui coupent B est un événement dans $(\Omega_A, \mathscr{S}_A)$, on notera cet événement E_B.

2° *a.* Montrer que, si $B \in \mathscr{C}^*$ et $B \subset A$, on a : $P_A(E_B) = \dfrac{L_B}{L_A}$, où L_B est la longueur de la frontière de B.

b. Soit B et B′ deux éléments de $\mathscr{C}^*$ inclus dans A tels que $B \cap B' \neq \varnothing$, C le plus petit ensemble convexe de $\mathbf{R}^2$ qui contient B et B′ (enveloppe convexe de B et B′) et L_B, $L_{B'}$, L_C les longueurs respectives des frontières de B, B′ et C. Montrer que :

$$P_A(E_B \cap E_{B'}) = \frac{L_B + L_{B'} - L_C}{L_A}$$

c. Soit $B \in \mathscr{C}^*$ tel que $B \cap A \neq \varnothing$, C l'enveloppe convexe de B et A, L_B et L_C les longueurs respectives des frontières de B et C. Montrer que :

$$P_A(E_B) = \frac{L_A + L_B - L_C}{L_A}$$

d. Soit deux disques fermés B et B′ inclus dans A, de rayons respectifs r et r' $(r > 0,\ r' > 0)$ et dont la distance des centres est d. Calculer la probabilité pour qu'une droite coupe ces deux disques *à la fois.* On distinguera les deux cas : $d \leqslant r + r'$ et $d > r + r'$. Dans ce second cas, on pourra introduire les tangentes communes intérieures aux cercles frontières des disques.

3° *a.* Étant donnés dans A deux points m et n dont la distance est l, trouver la probabilité pour qu'une droite coupe le segment $[m, n]$ en fonction de l. Comparer le résultat ainsi obtenu à celui de I 1°.

b. Soit G un arc de courbe inclus dans A d'extrémités a et b tel que $G \cup [a, b]$ soit la frontière d'un élément de $\mathscr{C}^*$; on désigne par L la longueur de G et par l la distance entre a et b.

Quelle est la probabilité pour qu'une droite coupe G en deux points distincts ou soit « tangente » à G en laissant G toute entière d'un même côté? pour qu'elle coupe G en un point et un seul?

c. Soit B un disque fermé inclus dans A, de rayon r $(r > 0)$ et de centre b, m et n deux points de A situés sur un même diamètre de B et i le milieu de $[m, n]$. On appelle δ la distance entre b et i et 2ρ la longueur de $[m, n]$ $(\rho > 0)$.

Calculer en fonction de r, δ et ρ la probabilité pour qu'une droite coupe *à la fois* B et le segment $[m, n]$.

Cas particulier : $\delta = 0$, $0 < \rho < r$: expliquer pourquoi ce résultat donne la solution du problème suivant (problème de l'aiguille de Buffon) : on lance *au hasard* une « aiguille » de longueur 2ρ sur le « plan » sur lequel sont tracées les droites parallèles $x = 2nr$, $n \in \mathbf{Z}$; quelle est la probabilité pour que « l'aiguille » coupe une quelconque de ces parallèles? Quelle est l'hypothèse mathématique correspondant à l'expression « *au hasard* »?

II

Dans cette seconde partie, l'espace probabilisé est toujours $(\Omega_A, \mathscr{S}_A, P_A)$, mais on particularise en prenant pour A le disque :

$$\{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$

1° B est un disque fermé de rayon r $(r > 0)$ et tel que la distance de son centre à l'origine O soit $2d$ $(d \geqslant 0)$.

Calculer $P_A(E_B)$ dans les différents cas possibles.

2° Si $m = (\alpha, 0)$ et $n = (\beta, 0)$ sont deux éléments de $\mathbf{R}^2$, calculer en fonction de α et β la probabilité pour qu'une droite coupe le segment $[m, n]$.

3° On note $\mathscr{R}$ la relation d'équivalence définie sur Ω de la manière suivante : deux éléments ω et ω' de Ω sont équivalents si et seulement si ou bien ω et ω' coupent la droite $y = 0$ en un même point ou bien ω et ω' sont parallèles (au sens large) à la droite $y = 0$.

Soit $\mathscr{T}$ la sous-tribu des parties S de $\mathscr{S}$ telles que, si ω est un élément de S, tout élément ω' de Ω, $\mathscr{R}$-équivalent à ω, appartient aussi à S; soit $\mathscr{T}_A$ la trace de $\mathscr{T}$ sur Ω_A.

B_r étant le disque $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant r^2, r \in \mathbf{R}^+ - \{0\}\}$, calculer un représentant de la probabilité conditionnelle $P(E_{B_r} \mid \mathcal{C}_A)$.

Trouver le lien entre cette probabilité conditionnelle et la probabilité pour qu'une droite ω coupe B_r sachant qu'elle passe par un point $m = (\alpha, 0)$ donné.

4° On suppose que le rayon r du disque $B_r = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant r^2\}$ satisfait à $0 < r \leqslant 1$. La longueur de la corde découpée sur une droite ω par B_r est une variable aléatoire Z_r dont on demande de déterminer la fonction de répartition. Cette loi est-elle absolument continue par rapport à la mesure de Borel-Lebesgue? Calculer l'espérance et la variance de Z_r.

En prenant $r = 1 - \frac{1}{n}$, on fait correspondre à tout entier $n > 1$ une variable aléatoire $Z'_n = Z_{1-\frac{1}{n}}$. La suite $\{Z'_n\}$ converge-t-elle en probabilité lorsque n tend vers l'infini?

III

On suppose désormais que la distribution de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{S})$, donc sur Π, résulte de la construction suivante :

t étant un nombre réel appartenant à l'intervalle $]-1, +1]$, la droite $x = t$ rencontre le demi-cercle :

$$\Gamma = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, \ y > 0\} \cup \{(1,0)\}$$

en un point h; $\cos u$, $\sin u$, où $u \in [0, \pi[$, sont les coordonnées de h; v étant un nombre réel quelconque, la perpendiculaire à Oh en k telle que $\overrightarrow{Ok} = v\overrightarrow{Oh}$ est une réalisation d'un élément de Ω.

La distribution de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{S})$ est alors parfaitement déterminée par la distribution du couple (T, V), t et v étant des réalisations de T et de V; u est une réalisation de U.

1° Quelle relation lie les variables U et T?

2° Quelle serait la loi du couple (T, V) qui induirait sur $(\Omega, \mathcal{S})$ la probabilité dont la restriction à $(\Omega_A, \mathcal{S}_A)$ est P_A, lorsque A est le disque unité de la seconde partie?

3° Dans cette question, on suppose les variables T et V indépendantes, T uniformément distribuée sur $]-1, +1]$, V symétrique sur $\mathbf{R}$ et de fonction de répartition F. On pose

$$\Phi(x) = \int_0^x F(v)\, dv.$$

a. Montrer que U admet une densité et trouver cette densité γ.

b. Quelle est la probabilité $H(a)$ pour qu'une droite ω coupe la demi-droite $]-\infty, a] \times \{0\}$?

c. Montrer que l'application H de $\mathbf{R}$ dans $[0,1]$, qui à a associe $H(a)$, est la fonction de répartition d'une distribution de probabilité. Cette distribution a-t-elle une densité?

d. Calculer H dans le cas où V admet une densité f telle que

$$f(v) = \frac{1}{2} e^{-|v|}.$$