Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs et autres appareils électroniques similaires, ainsi que les documents sont interdits.

La qualité de la rédaction sera un facteur important d'appréciation des copies. On invite donc les candidats à produire des raisonnements clairs, complets et concis.

Les candidats peuvent utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes, en veillant dans ce cas à préciser la référence du résultat utilisé.

Notations

— Toutes les $\mathbf{C}$-algèbres considérées dans ce problème seront unitaires et l'on conviendra que les morphismes de $\mathbf{C}$-algèbres respecteront les éléments unités. La $\mathbf{C}$-algèbre des polynômes à coefficients complexes en une indéterminée X sera notée $\mathbf{C}[X]$. Le sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}[X]$ formé des polynômes P de degré $\deg P \leq n$ sera noté $\mathbf{C}_n[X]$.

— On notera $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbf{C})$ l'espace vectoriel des matrices complexes à n lignes et p colonnes, $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ l'algèbre $\mathrm{M}_{n,n}(\mathbf{C})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ le groupe linéaire (groupe des matrices inversibles de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$). Pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$, on notera $\mathbf{C}[A] := \{P(A) \mid P \in \mathbf{C}[X]\}$ la sous-algèbre de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ engendrée par A.

— Le polynôme caractéristique de $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ sera noté $\chi_A(X) := \det(XI_n - A)$ et son spectre $\mathrm{Sp}\,A$. Ce dernier sera le plus souvent considéré comme un *multiensemble*, c'est-à-dire que ses éléments peuvent avoir des multiplicités. Par exemple, le spectre de la matrice identité I_n est $\mathrm{Sp}\,I_n = \{\!\{1, 1, \ldots, 1\}\!\}$ (n fois). Pour une matrice nilpotente $N \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ (c'est-à-dire telle qu'une puissance de N soit nulle), on a donc $\mathrm{Sp}\,N = \{\!\{0, 0, \ldots, 0\}\!\}$; et pour une matrice unipotente $U \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ (c'est-à-dire telle que $U - I_n$ soit nilpotente), $\mathrm{Sp}\,U = \{\!\{1, 1, \ldots, 1\}\!\}$.

— On notera $[A,B] := AB - BA$ le commutateur de $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ (l'application $(A,B) \mapsto [A,B]$ est donc bilinéaire sur $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$). On notera $\mathrm{Diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les $\alpha_i \in \mathbf{C}$; de même, si $A_i \in \mathrm{M}_{r_i}(\mathbf{C})$ pour $i = 1, \ldots, k$, avec $r_1 + \cdots + r_k = n$, on écrira $\mathrm{Diag}(A_1, \ldots, A_k) \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$, la matrice diagonale par blocs correspondante.

— On rappelle le théorème suivant (*décomposition de* DUNFORD *d'une matrice, respectivement d'un endomorphisme*) :
• *Pour tout $A \in M_n(\mathbf{C})$, il existe un unique couple $(S,N) \in M_n(\mathbf{C})^2$ de matrices telles que $A = S + N$, $[S,N] = 0$, S est diagonalisable et N est nilpotente. On a alors : $\chi_A = \chi_S$ et $\mathrm{Sp}\,A = \mathrm{Sp}\,S$. De plus, $S, N \in \mathbf{C}[A]$, autrement dit, on peut écrire $S = P(A)$ et $N = Q(A)$ avec $P, Q \in \mathbf{C}[X]$.*
• *Soit V un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Pour tout endomorphisme ϕ de V, il existe un unique couple (ϕ_s, ϕ_n) d'endomorphismes de V tels que $\phi = \phi_s + \phi_n$, $[\phi_s, \phi_n] = 0$, ϕ_s est diagonalisable et ϕ_n est nilpotent. On a alors : $\chi_\phi = \chi_{\phi_s}$ et $\mathrm{Sp}\,\phi = \mathrm{Sp}\,\phi_s$. De plus, $\phi_s, \phi_n \in \mathbf{C}[\phi]$, autrement dit, on peut écrire $\phi_s = P(\phi)$ et $\phi_n = Q(\phi)$ avec $P, Q \in \mathbf{C}[X]$.*

— On rappelle que l'exponentielle de matrices est l'application $\exp : \mathrm{M}_n(\mathbf{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ définie par la formule :

$$\exp A := \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} A^k,$$

et que c'est une application $\mathcal{C}^\infty$ de l'espace vectoriel normé $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ dans lui-même, telle que, si $[A,B] = 0$, on ait $\exp(A+B) = (\exp A)(\exp B)$.

— On pourra noter $|||A|||$ la norme matricielle subordonnée à une norme $||\cdot||$ quelconque sur $\mathbf{C}^n$: on a donc $|||I_n||| = 1$ et, pour tous $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ et $Y \in \mathbf{C}^n$, $||AY|| \leq |||A|||\,||Y||$ et $|||AB||| \leq |||A|||\,|||B|||$.

Dans le problème, les textes placés entre les symboles ☛ ... ☚ précisent des notations et définitions qui sont utilisées dans la suite de l'énoncé.

I Exercices préliminaires

1. Donner une décomposition de DUNFORD de la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbf{C})$ (on discutera en fonction de $a \in \mathbf{C}$).
2. Justifier la relation $\exp(PAP^{-1}) = P(\exp A)P^{-1}$, où $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.
3. Soient n un entier, $n \geq 1$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{C}$ des complexes. Déterminer le noyau de l'application linéaire $P \mapsto (P(a_1), \dots, P(a_n))$ de $\mathbf{C}_{n-1}[X]$ dans $\mathbf{C}^n$ et en déduire que, si les a_i sont deux à deux distincts :
$$\forall (b_1, \dots, b_n) \in \mathbf{C}^n \ , \ \exists ! P \in \mathbf{C}_{n-1}[X] \ : \ P(a_1) = b_1, \dots, P(a_n) = b_n.$$
On ne cherchera pas à donner une forme explicite au *polynôme d'interpolation P*.
4. Montrer que toute représentation $\rho : \mathbf{Z} \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ est de la forme $k \mapsto M^k$ pour une certaine matrice $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. À quelles conditions deux telles représentations sont-elles équivalentes ?
5. Soit G un groupe abélien noté additivement. On note $\widehat{G}$ l'ensemble des morphismes de G dans le groupe multiplicatif $\mathbf{C}^*$, *i.e.* des applications $f : G \to \mathbf{C}^*$ telles que $\forall x, y \in G \ , \ f(x+y) = f(x)f(y)$. Pour tout $(f_1, f_2) \in \widehat{G}^2$, on note $f_1 f_2 : G \to \mathbf{C}^*$ l'application $x \mapsto f_1(x) f_2(x)$. Montrer qu'on munit ainsi $\widehat{G}$ d'une structure de groupe abélien.

II La décomposition de DUNFORD

Dans toute cette partie, n désigne un entier fixé avec $n \geq 2$.

1. Soient $A_1 = S_1 + N_1, A_2 = S_2 + N_2$ deux décompositions de DUNFORD. Démontrer l'équivalence logique :
$$[S_1, S_2] = [S_1, N_2] = [N_1, S_2] = [N_1, N_2] = 0 \Longleftrightarrow [A_1, A_2] = 0.$$
[*Indication : on pourra, pour l'implication directe, utiliser la bilinéarité du commutateur ; pour l'implication réciproque, le fait que $S_i, N_i \in \mathbf{C}[A_i]$.*]
2. (a) Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice triangulaire supérieure. On note $S \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ sa partie diagonale (obtenue en remplaçant par 0 tous les coefficients au dessus de la diagonale) et $N \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ sa partie triangulaire supérieure stricte (obtenue en remplaçant par 0 tous les coefficients diagonaux), de sorte que $A = S + N$. À quelles conditions est-ce une décomposition de DUNFORD ?
   (b) On suppose de plus que S est de la forme $\mathrm{Diag}(\alpha_1 I_{r_1}, \dots, \alpha_k I_{r_k})$, où $r_1 + \cdots + r_k = n$ et où $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbf{C}$ sont deux à deux distincts. Que deviennent les conditions ci-dessus ?
   [*Indication : on exprimera N sous forme de matrice par blocs de tailles $r_i \times r_j$.*]
3. (a) Soit $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. Démontrer l'existence d'un unique couple $(T, U) \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})^2$ de matrices telles que $B = TU$, $[T, U] = 0$, T est diagonalisable et U est unipotente.
   (b) Vérifier que l'on a alors les propriétés suivantes : $\chi_B = \chi_T$, $\mathrm{Sp}\, B = \mathrm{Sp}\, T$ et $T, U \in \mathbf{C}[B]$.
   (c) Soient $B_1 = T_1 U_1, B_2 = T_2 U_2$ deux telles décompositions. Démontrer l'équivalence logique :
$$[B_1, B_2] = 0 \Longleftrightarrow [T_1, T_2] = [T_1, U_2] = [U_1, T_2] = [U_1, U_2] = 0.$$
4. (a) Soit $S \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$. On suppose que $S = PDP^{-1} = P'D'P'^{-1}$, où $P, P' \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ et où $D = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $D' = \mathrm{Diag}(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$, de sorte que :
$$\mathrm{Sp}\, S = \{\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}\} = \{\{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}\}.$$

(On rappelle que, dans cette notation de multiensembles, les éléments sont présents avec une multiplicité.) Soient Ω un sous-ensemble de $\mathbf{C}$ contenant $\mathrm{Sp}\, S$ et f une application définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbf{C}$. Démontrer l'égalité :

$$P\mathrm{Diag}(f(\alpha_1),\dots,f(\alpha_n))P^{-1} = P'\mathrm{Diag}(f(\alpha'_1),\dots,f(\alpha'_n))P'^{-1}.$$

[*Indication : on pourra introduire un polynôme $F \in \mathbf{C}[X]$ interpolant f sur Sp S et calculer $F(S)$ de deux manières différentes.*]

(b) Dans le cas où $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ est la fonction définie par la série entière de rayon de convergence infini $\sum\limits_{k\geq 0} a_k z^k$, vérifier que la matrice ci-dessus est égale à $\sum\limits_{k\geq 0} a_k S^k$. On précisera soigneusement le sens donné à cette somme infinie de matrices.

☛ Indépendamment de la nature de f, la matrice $P\mathrm{Diag}(f(\alpha_1),\dots,f(\alpha_n))P^{-1}$ sera dorénavant notée $f(S)$. D'après la question ci-dessus, dans le cas de la fonction exponentielle $f = \exp$, cette notation est cohérente avec la définition de l'exponentielle de matrices rappelée en introduction.☚

III L'exponentielle $\exp : \mathrm{M}_n(\mathbf{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ est surjective

1. (a) Soient $\beta_1,\dots,\beta_n \in \mathbf{C}^*$ des complexes non nuls. Soient $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbf{C}$ tels que, pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, $\exp(\alpha_i) = \beta_i$. Soit enfin $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. Notant $T := P\mathrm{Diag}(\beta_1,\dots,\beta_n)P^{-1}$ et $S := P\mathrm{Diag}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)P^{-1}$, vérifier que $\exp S = T$.

   (b) On suppose de plus que, pour tous $i, j \in \{1,\dots,n\}$, on ait $\beta_i = \beta_j \Rightarrow \alpha_i = \alpha_j$. Montrer que $S \in \mathbf{C}[T]$.

   [*Indication : on pourra utiliser un polynôme $F \in \mathbf{C}[X]$ tel que $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, $F(\beta_i) = \alpha_i$.*]

   (c) Montrer que, si T, P et les β_i sont donnés, on peut toujours choisir des α_i de sorte que soit vérifiée l'hypothèse de la question précédente.

   (d) Montrer que, si l'on ne fait pas cette hypothèse sur les α_i, la conclusion $S \in \mathbf{C}[T]$ peut être en défaut.

   [*Indication : on pourra prendre $T = P = I_2$.*]

2. Pour tout entier naturel non nul n, on définit les polynômes suivants dans $\mathbf{C}[X]$:

$$E_n(X) := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} X^k \text{ et } L_n(X) := \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (X-1)^k.$$

   Par convention, $L_1(X) = 0$. Soient $P, Q, R \in \mathbf{C}[X]$; on notera $P \equiv Q \pmod R$ la congruence modulo R dans l'anneau $\mathbf{C}[X]$.

   (a) Montrer que $L_n \circ E_n \equiv X \pmod{X^n}$ et $E_n \circ L_n \equiv X \pmod{(X-1)^n}$.

   [*Indication : on pourra utiliser les développements de* Taylor *des fonctions usuelles $x \mapsto \exp x$ en 0 et $x \mapsto \ln(x)$ en 1.*]

   (b) À l'aide de ces formules, justifier très soigneusement le fait que les applications $N \mapsto \exp N$ et $U \mapsto L_n(U)$ sont des bijections réciproques l'une de l'autre entre l'ensemble des matrices nilpotentes et l'ensemble des matrices unipotentes de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$.

3. Déduire des questions précédentes que l'application $\exp : \mathrm{M}_n(\mathbf{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ est surjective.

IV La fonction matricielle z^A et sa monodromie

On note $\mathscr{O}$ la $\mathbf{C}$-algèbre des fonctions holomorphes sur l'ouvert connexe $\Omega := \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_- \subset \mathbf{C}^*$ (où $\mathbf{R}_-$ désigne la demi-droite réelle $]-\infty, 0]$) ; cet anneau est commutatif et intègre.
On rappelle qu'il existe une unique fonction continue log sur Ω (détermination principale du logarithme sur Ω) telle que, notant Id_Ω la fonction identité de Ω :

$$\exp \circ \log = \mathrm{Id}_\Omega \quad \text{et} \quad \log 1 = 0;$$

de plus, $\log \in \mathscr{O}$, et la restriction de log à $\mathbf{R}_+^* =]0, +\infty[$ est le logarithme népérien. Pour tout $\alpha \in \mathbf{C}$, on note :

$$z^\alpha := \exp(\alpha \log z).$$

Pour $\alpha \in \mathbf{Z}$, on retrouve les puissances usuelles. Plus généralement, on a $z^{\alpha+\beta} = z^\alpha z^\beta$. On s'autorise l'abus usuel de notation qui permet de noter z^α l'application $z \mapsto z^\alpha$. Avec cette convention, $z^\alpha \in \mathscr{O}$.
On note $\delta : f \mapsto z\dfrac{df}{dz}$ la « dérivation d'EULER » ; c'est une application $\mathbf{C}$-linéaire de $\mathscr{O}$ dans lui-même vérifiant la *règle de* LEIBNIZ :

$$\delta(fg) = f\delta(g) + \delta(f)g.$$

1. Calculer $\delta(\log)$ et, pour tout $\alpha \in \mathbf{C}$, $\delta(z^\alpha)$.
2. Vérifier que les déterminations du logarithme sur Ω (*i.e.* les fonctions continues $f : \Omega \to \mathbf{C}$ telles que $\exp \circ f = \mathrm{Id}_\Omega$) sont les fonctions $Log^{(k)} : z \mapsto \log z + 2ki\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$.

☛ Pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ et tout $z \in \Omega$, on pose $z^A := \exp((\log z)A)$. ☚

3. (a) Soit $A = S + N$ une décomposition de DUNFORD, avec $S = P\mathrm{Diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)P^{-1}$. Démontrer les égalités :

$$z^S = P\mathrm{Diag}(z^{\alpha_1}, \ldots, z^{\alpha_n})P^{-1}, \quad z^N = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}(\log z)^k N^k \quad \text{et} \quad z^A = z^S z^N = z^N z^S.$$

   (b) Calculer le déterminant de z^A.

☛ Les matrices dont les coefficients sont des fonctions sur Ω seront dénotées par des majuscules "script" $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$,... On identifiera une telle matrice $\mathscr{X} = (f_{i,j})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathscr{O})$ à la fonction à valeurs matricielles de Ω dans $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbf{C})$ qui, à $z \in \Omega$, associe $\mathscr{X}(z) := (f_{i,j}(z))_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$. ☚

4. Montrer que les coefficients de la fonction matricielle $z \mapsto z^A$ sont des combinaisons linéaires de fonctions $z^\alpha(\log z)^k$, où $\alpha \in \mathrm{Sp}\,A$ et où $k \in \mathbf{N}$, $k < d$, l'entier d désignant l'ordre de nilpotence de N.

On notera abusivement z^A la fonction $z \mapsto z^A$. On a donc $z^A \in \mathrm{M}_n(\mathscr{O})$.

☛ L'application δ s'étend naturellement aux matrices de fonctions : si $\mathscr{X} = (f_{i,j})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$, alors on pose : $\delta(\mathscr{X}) := (\delta(f_{i,j}))_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$. Ce prolongement est $\mathbf{C}$-linéaire et vérifie encore la règle de LEIBNIZ pour le produit matriciel usuel :

$$\delta(\mathscr{X}\mathscr{Y}) = \mathscr{X}\delta(\mathscr{Y}) + \delta(\mathscr{X})\mathscr{Y}. \quad ☚$$

5. Soient $f \in \mathscr{O}$ et $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$. Calculer $\delta(\exp(f(z)A))$. Vérifier en particulier que :
$$\delta(z^A) = Az^A = z^A A.$$
6. Soient $\mathscr{X} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathscr{O})$ une matrice de fonctions holomorphes sur Ω et $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$. On suppose que $\delta(\mathscr{X}) = A\mathscr{X}$. Montrer qu'il existe une matrice constante $C \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbf{C})$ telle que $\mathscr{X} = z^A C$.
[*Indication : on commencera par montrer qu'il existe un tel $C \in M_{n,p}(\mathscr{O})$, puis que* $\delta(C) = 0$.]
7. On introduit d'autres « déterminations de z^A » en posant, pour tout $k \in \mathbf{Z}$ (avec la notation introduite question 2) :
$$\left[z^A\right]_k := \exp(Log^{(k)}(z)A).$$
   (a) À l'aide de la question 5, montrer que $\delta\left[z^A\right]_k = A\left[z^A\right]_k = \left[z^A\right]_k A$ et en déduire, à l'aide de la question 6, l'existence d'une unique matrice $M_k \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que $\left[z^A\right]_k = z^A M_k$.
   (b) Calculer M_k et montrer que l'application $k \mapsto M_k$ est une représentation de $\mathbf{Z}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. On notera $\rho_A : \mathbf{Z} \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ cette représentation.
8. Que peut-on déduire de l'exercice préliminaire n° 4 à propos des représentations introduites ci-dessus ?

V Algèbres différentielles et automorphismes différentiels

Dans cette partie et la suivante, on fixe une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ et l'on note $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{C}$ ses valeurs propres (non nécessairement distinctes) : on a donc $\mathrm{Sp}\, A = \{\!\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}\!\}$. On note $\mathcal{A} := \mathbf{C}[z^{\alpha_1}, \ldots, z^{\alpha_n}]$ la sous $\mathbf{C}$-algèbre de $\mathscr{O}$ engendrée par les fonctions $z^{\alpha_1}, \ldots, z^{\alpha_n}$ et l'on pose :
$$L := \{m_1\alpha_1 + \cdots + m_n\alpha_n \mid m_1, \ldots, m_n \in \mathbf{N}\}.$$

1. (a) Vérifier que le $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathcal{A}$ est engendré par la famille des fonctions z^l avec $l \in L$, autrement dit :
$$\mathcal{A} = \sum_{l \in L} \mathbf{C} z^l.$$
   (b) Montrer que $\mathcal{A}$ est stable par la dérivation δ.
   (c) Montrer que les fonctions z^l avec $l \in L$, forment une base du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathcal{A}$.
   [*Indication : soit* $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i z^{l_i} = 0$ *une relation linéaire entre des éléments de la famille des* z^l, $l \in L$, *les $l_i \in L$ étant distincts ; on pourra appliquer itérativement δ à cette relation.*]
   (d) Soient $l \in L$ et $u, v \in \mathcal{A}$ tels que $\delta v = lv$ et $\delta u - lu = v$. Montrer que $v = 0$ et $u \in \mathbf{C}z^l$.

☛ On note $\mathcal{A}' := \mathcal{A}[\log] = \mathbf{C}[z^{\alpha_1}, \ldots, z^{\alpha_n}, \log]$ la sous $\mathbf{C}$-algèbre de $\mathscr{O}$ engendrée par $\mathcal{A}$ et par la fonction log. ☚

2. (a) On note $\log^k$ la puissance k-ème de la fonction log, *i.e.* la fonction $z \mapsto (\log z)^k$. Montrer que $\mathcal{A}' = \left\{ \sum_{k \geq 0} f_k \log^k \mid \text{ les } f_k \in \mathcal{A} \text{ étant presque tous nuls} \right\}.$
   (b) Montrer que $\mathcal{A}'$ est stable par la dérivation δ. Pour cela, on explicitera des $g_k \in \mathcal{A}$ tels que $\delta(\sum f_k \log^k) = \sum g_k \log^k$.
3. On pourra admettre les résultats de cette question dans un premier temps.

(a) Soient $u, v \in \mathcal{A}$ tels que $u + v\log = 0$. Montrer que $u = v = 0$.

[*Indication : par l'absurde, choisir u et v tels que l'écriture* $v = \lambda_1 z^{l_1} + \cdots + \lambda_p z^{l_p}$ *avec* $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbf{C}^*$ *et* $l_1, \ldots, l_p \in L$ *deux à deux distincts ait une « longueur »p minimale et généraliser les techniques développées à la question 1.*]

(b) Montrer que l'écriture $\sum f_k \log^k$ d'un élément de $\mathcal{A}'$ est unique.

[*Indication : d'une relation* $\sum_{k=0}^{p} f_k \log^k = 0$ *avec* $f_p \neq 0$ *et p minimal, déduire par application de* δ *une relation plus courte donc triviale, puis que* $\delta(f_{p-1}/f_p) = -p$*, et se ramener à la question précédente.*]

☛ Pour toute sous-**C**-algèbre $\mathcal{B}$ de $\mathcal{O}$, on note $\mathrm{Aut}(\mathcal{B})$ le groupe des automorphismes de **C**-algèbre de $\mathcal{B}$ (la loi interne sur $\mathrm{Aut}(\mathcal{B})$ étant la composition). Si de plus $\mathcal{B}$ est stable par δ, on note :

$$\mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{B}) := \{\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathcal{B}) \mid \sigma \circ \delta = \delta \circ \sigma\}.$$ ☚

4. Soit $\mathcal{B}$ une sous **C**-algèbre de $\mathcal{O}$ stable par δ. Vérifier que $\mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{B})$ est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\mathcal{B})$.

☛ Pour tout $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathcal{B})$, on étend son action aux matrices sur $\mathcal{B}$ en posant :

$$\text{pour tout } \mathcal{X} := (m_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathcal{B}) \text{ , } \sigma(\mathcal{X}) := (\sigma(m_{i,j}))_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathcal{B}).$$

On a alors les règles suivantes, que l'on admet : l'action de σ est **C**-linéaire et $\sigma(\mathcal{X}\mathcal{Y}) = \sigma(\mathcal{X})\sigma(\mathcal{Y})$. ☚

5. (a) Montrer que les coefficients de la matrice $z^A \in \mathrm{M}_n(\mathcal{O})$ sont éléments de $\mathcal{A}'$.
   (b) Soit $\sigma \in \mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A}')$ et notons $\mathcal{X} := \sigma(z^A)$. Vérifier que $\delta\mathcal{X} = A\mathcal{X}$ et en déduire l'existence d'une unique matrice $M_\sigma \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que $\mathcal{X} = z^A M_\sigma$.
   (c) Montrer que $\sigma \mapsto M_\sigma$ est une représentation du groupe $\mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A}')$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.

Cette représentation sera notée ρ'_A.

VI Groupes et représentations de PICARD-VESSIOT

Les notations $A, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ et L de la partie précédente restent en vigueur dans cette partie.

1. Soit $\sigma \in \mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A}')$.
   (a) Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $\sigma(\log) = \log + \lambda$. On le notera λ_σ.
   (b) Montrer que, pour tout $l \in L$, il existe un unique $c_l \in \mathbf{C}^*$ tel que $\sigma(z^l) = c_l z^l$. Vérifier que, pour tous $l, l' \in L$, on a $c_{l+l'} = c_l c_{l'}$.
   (c) Montrer que $\mathcal{A}$ est stable par σ et que la restriction $\sigma_{|\mathcal{A}}$ appartient à $\mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A})$.
2. (a) Avec les notations de la question précédente, montrer que l'application $\psi : \sigma \mapsto (\sigma_{|\mathcal{A}}, \lambda_\sigma)$ est un morphisme de groupes injectif de $\mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A}')$ dans le groupe $\mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A}) \times \mathbf{C}$, produit direct du groupe $\mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A})$ et du groupe additif **C**.
   (b) Soient $\sigma_0 \in \mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A})$ et $\lambda \in \mathbf{C}$. À l'aide de la question 3 de la partie V, montrer qu'il existe un unique automorphisme σ de la **C**-algèbre $\mathcal{A}'$ tel que $\sigma_{|\mathcal{A}} = \sigma_0$ et $\sigma(\log) = \log + \lambda$.

(c) Montrer que $\sigma \in \mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A}')$ et en déduire que le morphisme de la question 2(a) est un isomorphisme.

☛ On note G le sous-groupe du groupe additif $\mathbf{C}$ engendré par $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. On a donc (et on l'admet) :

$$G = \mathbf{Z}\alpha_1 + \cdots + \mathbf{Z}\alpha_n = \{m_1\alpha_1 + \cdots + m_n\alpha_n \mid m_1, \ldots, m_n \in \mathbf{Z}\} \quad \text{et} \quad G = L - L = \{l_1 - l_2 \mid l_1, l_2 \in L\}.$$

On note $\widehat{G}$ le groupe des morphismes du groupe G dans le groupe multiplicatif $\mathbf{C}^*$ (exercice préliminaire n$^{\mathrm{o}}$ 5). ☚

3. Démontrer qu'il existe $m \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $G \simeq \mathbf{Z}^m$ et en déduire que $\widehat{G} \simeq (\mathbf{C}^*)^m$.
4. (a) Soit $f \in \widehat{G}$. Montrer l'existence d'un unique $\sigma_f \in \mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A})$ tel que :

$$\forall l \in L\,,\ \sigma_f(z^l) = f(l) z^l.$$

[*Indication : on pourra commencer par définir un automorphisme d'espace vectoriel puis démontrer qu'il respecte la multiplication et l'unité et qu'il commute avec* δ.]

(b) Montrer que l'application $f \mapsto \sigma_f$ est un isomorphisme du groupe $\widehat{G}$ sur le groupe $\mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A})$.

☛ Des questions 2 et 4, on déduit l'existence d'un isomorphisme du groupe produit $\widehat{G} \times \mathbf{C}$ sur le groupe $\mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A}')$, que l'on notera $\phi_A : (f, \lambda) \mapsto \sigma_{f,\lambda}$. ☚

5. Décrire explicitement la représentation $\rho''_A := \rho'_A \circ \phi_A$ de $\widehat{G} \times \mathbf{C}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ (la représentation ρ'_A a été définie à la fin de la partie V).
6. Définir un morphisme de groupes $\varphi : \mathbf{Z} \to \widehat{G} \times \mathbf{C}$ tel que $\rho''_A \circ \varphi = \rho_A$ (la représentation ρ_A a été définie à la question 7 de la partie IV).