

Pour chaque entier $n \geq 1$, on note $GL_n(\mathbb{C})$ le groupe des matrices carrées inversibles de taille n à coefficients dans le corps \mathbb{C} des nombres complexes. On note U_n le sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ formé des matrices unitaires.

Le but du problème est d'étudier les sous-groupes finis de U_n et de $GL_n(\mathbb{C})$. La partie III propose de démontrer le résultat suivant, dû à C. Jordan : *il existe un entier $a(n)$, tel que tout sous-groupe fini G de $GL_n(\mathbb{C})$ possède un sous-groupe abélien distingué d'indice au plus $a(n)$ dans G .*

Les parties II.A, II.B et III sont indépendantes.

Dans le problème, n est un entier fixé ≥ 1 ; il vaut 2 dans la partie II. On désigne par V un espace vectoriel complexe de dimension n ; on note $\text{End}(V)$ l'algèbre des endomorphismes de V et $GL(V)$ le groupe des automorphismes de V ; on écrit gh , au lieu de $g \circ h$, le composé de deux endomorphismes g et h de V et on note Id_V l'automorphisme identité de V .

Un élément g de $\text{End}(V)$ est dit *diagonalisable* s'il existe une base de V telle que la matrice de g dans cette base soit diagonale ; on dira qu'une partie X de $\text{End}(V)$ est *diagonalisable* s'il existe une base de V telle que la matrice dans cette base de *tout* élément de X soit diagonale.

Une *forme hermitienne* sur V est une application $\Phi : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ qui est *sesquilinéaire* (linéaire à droite, antilinéaire à gauche) et vérifie $\Phi(y, x) = \overline{\Phi(x, y)}$, pour tout x, y dans V . Une telle forme est dite *définie positive* si le nombre réel $\Phi(x, x)$ est strictement positif pour tout vecteur non nul x de V . Si Φ est une forme hermitienne définie positive sur V , une base (e_1, \dots, e_n) de V est dite *orthonormée pour Φ* si l'on a $\Phi(e_i, e_i) = 1$ et $\Phi(e_i, e_j) = 0$, pour tout i, j dans $\{1, 2, \dots, n\}$, $i \neq j$; un endomorphisme g de V est dit *unitaire pour Φ* si l'on a $\Phi(g(x), g(y)) = \Phi(x, y)$ pour tout x, y dans V .

Première partie

Généralités

Comme indiqué plus haut, V désigne un espace vectoriel *complexe* de dimension finie $n \geq 1$.

I.1. Soient u et v deux éléments de $GL(V)$. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, posons :

$$t = vuv^{-1}, U_\lambda = \text{Ker}(u - \lambda Id_V) \text{ et } T_\lambda = \text{Ker}(t - \lambda Id_V).$$

- (a) Calculer T_λ en fonction de U_λ et v .
- (b) On suppose que u et v commutent ; montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $v(U_\lambda) = U_\lambda$.

- (c) On suppose que u et v commutent et que v est diagonalisable; montrer que, pour toute valeur propre λ de u , v induit un endomorphisme diagonalisable de U_λ .
- I.2. Prouver qu'un élément d'ordre fini de $GL(V)$ est diagonalisable.
- I.3. Soit X une partie de $End(V)$ formée d'endomorphismes diagonalisables qui commutent deux à deux. Montrer que X est diagonalisable. (On pourra distinguer le cas où tous les éléments de X sont des homothéties).
- I.4. Il est clair d'après I.2 et I.3 qu'un sous-groupe *abélien fini* de $GL(V)$ est diagonalisable. Donner, sous forme matricielle, un sous-groupe abélien infini de $GL(\mathbb{C}^2)$ qui ne soit pas diagonalisable.
- I.5. Soit G un sous-groupe fini de $GL(V)$. À partir d'une forme hermitienne définie positive Ψ sur V , construire une forme hermitienne définie positive Φ sur V telle que G soit formé d'endomorphismes *unitaires* pour Φ .
- I.6. En déduire qu'un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{C})$ est conjugué à un sous-groupe de U_n .

Désormais, V désigne un espace vectoriel *hermitien* de dimension $n \geq 1$, c'est-à-dire un espace vectoriel complexe de dimension $n \geq 1$, muni d'une forme hermitienne définie positive Φ . Selon l'usage, on parlera de base orthonormée au lieu de base orthonormée pour Φ , et d'endomorphisme unitaire au lieu d'endomorphisme unitaire pour Φ . Les endomorphismes unitaires de V forment un sous-groupe de $GL(V)$ noté $U(V)$; on note $SU(V)$ le sous-groupe de $U(V)$ formé des endomorphismes de déterminant 1.

Pour $g \in End(V)$, on note g^* l'endomorphisme adjoint de g ; il est caractérisé par la condition $\Phi(g(x), y) = \Phi(x, g^*(y))$ pour tout x, y dans V . L'endomorphisme g est *hermitien* si $g^* = g$, *unitaire* si $g^*g = Id_V$.

Si W est un espace vectoriel complexe, on peut restreindre à $\mathbb{R} \times W$ la loi de multiplication par les scalaires $\mathbb{C} \times W \rightarrow W$; on obtient alors sur le groupe additif de W une structure d'espace vectoriel réel, qu'on appelle espace vectoriel *réel sous-jacent* à W .

Si E est un espace vectoriel réel et q une forme quadratique définie positive sur E , une *isométrie* de q est un endomorphisme u de E tel que $q(u(x)) = q(x)$ pour tout $x \in E$; les isométries de q forment un sous-groupe noté $O(q)$ du groupe des automorphismes de E , et on note $SO(q)$ le sous-groupe de $O(q)$ formé des éléments de déterminant 1.

Deuxième partie

Le cas où n vaut 2

Dans cette partie, V est un espace vectoriel *hermitien* de dimension $n = 2$; on note Φ la forme hermitienne définie positive donnée sur V .

II.A.- On note E l'ensemble des éléments hermitiens de $\text{End}(V)$ dont la trace est nulle. Pour $x \in E$, on pose $q(x) = -\det(x)$.

II.A.1. Il est clair que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel *réel* sous-jacent à $\text{End}(V)$.

- a) Calculer la dimension de E sur \mathbb{R} .
- b) Prouver que q est une forme quadratique définie positive sur E .
- c) Calculer la forme bilinéaire symétrique $B : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $B(x, x) = q(x)$ pour tout $x \in E$. (On pourra répondre à ces questions en termes de matrices des éléments de $\text{End}(V)$ dans une base orthonormée de V).

II.A.2. Soient $a \in \text{U}(V)$ et $x \in E$. Montrer que $axa^{-1} \in E$.

Pour $a \in \text{U}(V)$, on note $\varphi(a)$ l'application $x \mapsto axa^{-1}$ de E dans E ; il est immédiat que c'est un endomorphisme de E .

II.A.3. Montrer que pour tout $a \in \text{U}(V)$, $\varphi(a)$ est une isométrie de q . L'application $\varphi : a \mapsto \varphi(a)$ de $\text{U}(V)$ dans $\text{O}(q)$ ainsi obtenue est un homomorphisme de groupes (on ne demande pas de le vérifier).

II.A.4. a) Déterminer le noyau de φ .

b) Soit a un élément de $\text{U}(V)$ qui n'est pas dans le noyau de φ . Montrer que $\varphi(a)$ est une rotation de E , et préciser, après le choix d'une orientation de E , un couple (axe, angle) de cette rotation, en termes de vecteurs propres et valeurs propres de a . (On fixera une base orthonormée de V formée de vecteurs propres de a et on considérera les matrices des éléments de $\text{End}(V)$ dans cette base).

c) Déterminer l'image de φ .

II.A.5. Montrer que $\text{SU}(V)$ contient un sous-groupe fini G dont tout sous-groupe abélien distingué est d'indice au moins 60. (On pourra utiliser le groupe des isométries positives d'un icosaèdre régulier, en *admettant* qu'un espace affine euclidien de dimension 3 contient un tel icosaèdre).

II.B.- On se donne un sous-groupe fini G de $U(V)$. On note Z le sous-groupe de G formé des homothéties qui appartiennent à G (de sorte que Z est inclus dans le centre de G) et on note H le groupe quotient de G par son sous-groupe distingué Z . On note m le cardinal de H , et on suppose G distinct de Z , de sorte que $m \geq 2$.

Les éléments de G qui ne sont pas dans Z ont exactement 2 droites propres (qui sont d'ailleurs orthogonales). On note \mathcal{D} l'ensemble des droites de V ainsi obtenues.

II.B.1 a) Montrer que si $D \in \mathcal{D}$ et $g \in G$, alors $g(D)$ est dans \mathcal{D} .

b) Montrer que l'application $(g, D) \mapsto g(D)$ de $G \times \mathcal{D}$ dans \mathcal{D} induit une action sur \mathcal{D} du groupe $H = G/Z$.

On note cette action $(h, D) \mapsto h.D$. Pour chaque élément D de \mathcal{D} , on note e_D le cardinal du stabilisateur de D dans H .

II.B.2 a) Prouver qu'on a $e_D \geq 2$ pour $D \in \mathcal{D}$.

b) Prouver l'égalité :

$$2(m - 1) = \sum_{D \in \mathcal{D}} (e_D - 1).$$

II.B.3 Si D et D' sont des éléments de \mathcal{D} dans la même orbite pour l'action de H , montrer que l'on a $e_D = e_{D'}$.

On note $\Omega_1, \dots, \Omega_r$ les orbites de \mathcal{D} pour l'action de H . Pour $i = 1, \dots, r$, on note e_i la valeur commune des e_D pour $D \in \Omega_i$. On suppose les orbites rangées de manière à avoir $e_1 \leq e_2 \leq \dots \leq e_r$.

II.B.4 a) Calculer

$$\sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{e_i}\right),$$

en fonction de m .

b) Montrer qu'on a $r = 2$ ou 3 .

II.B.5 Si r vaut 2, montrer que G est abélien.

II.B.6 Si r vaut 3 et qu'on a $e_1 = e_2 = 2, e_3 \geq 2$, établir que G possède un sous-groupe abélien distingué d'indice 2.

II.B.7 En examinant les possibilités autres que celles envisagées en II.B.5 et II.B.6, montrer que tout sous-groupe fini G de $GL_2(\mathbb{C})$ possède un sous-groupe abélien distingué d'indice au plus 60 dans G .

Troisième partie

La méthode de Frobenius

Dans cette partie, n est un entier quelconque ≥ 2 , et V un espace vectoriel hermitien de dimension n . On note Φ la forme hermitienne définie positive donnée sur V .

III.A.- Dans cette section on fixe un nombre réel $\tau \in [0, \pi/2[$ et un élément v de $U(V)$. On suppose que pour chaque valeur propre γ de v , il existe $\theta \in [-\tau, +\tau]$ tel que $\gamma = e^{i\theta}$.

III.A.1 Montrer que pour tout vecteur non nul x de V , il existe un nombre réel $r > 0$ et un nombre réel $\alpha \in [-\tau, +\tau]$, tel que

$$\Phi(v(x), x) = re^{i\alpha}.$$

III.A.2 Soit u un élément de $U(V)$. Posons $t = vuv^{-1}$. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, posons $U_\lambda = \text{Ker}(u - \lambda Id_V)$, $T_\lambda = \text{Ker}(t - \lambda Id_V)$, et notons U_λ^\perp l'orthogonal de U_λ dans V .

a) Prouver qu'on a :

$$T_\lambda \cap U_\lambda^\perp = \{0\}.$$

b) On suppose de plus que u et t commutent. Montrer qu'on a $T_\lambda = U_\lambda$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, de sorte que $t = u$ et que u et v commutent.

III.A.3 Soit s un élément de $U(V)$. On suppose que pour chaque valeur propre σ de s , il existe $\alpha \in [-\tau, +\tau]$ tel que $\sigma = e^{i\alpha}$. Prouver que pour toute valeur propre μ de vs^{-1} , il existe $\beta \in [-2\tau, +2\tau]$, tel que $\mu = e^{i\beta}$. (On pourra considérer un vecteur x de V tel que $(v - \mu s)(x) = 0$).

Pour $g \in \text{End}(V)$, on note $N(g)$ la trace de g^*g . Si $A = [a_{i,j}]$ est la matrice de g dans une base orthonormée de V , on a $N(g) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|^2$, de sorte que $g \mapsto N(g)$ est une forme quadratique définie positive sur l'espace vectoriel réel E sous-jacent à $\text{End}(V)$. On note $g \mapsto \|g\| = \sqrt{N(g)}$ la norme euclidienne correspondante sur l'espace vectoriel E .

III.A.4 Montrer que, quel que soit $u \in U(V)$ on a

$$N(vuv^{-1}u^{-1} - Id_V) \leq 4\sin^2(\tau)N(u - Id_V).$$

(On pourra, en prenant une base de vecteurs propres de v , estimer $N(v(u - Id_V) - (u - Id_V)v)$.)

III.B.- Dans cette section, G désigne un sous-groupe *fini* de $U(V)$. On note S l'ensemble des éléments s de G tels que pour toute valeur propre σ de S , il existe $\alpha \in]-\pi/6, \pi/6[$ tel que $\sigma = e^{i\alpha}$. On note A le sous-groupe de G engendré par S .

III.B.1 Soient v un élément de S et u un élément de G . On définit par récurrence sur l'entier naturel k , un élément u_k de $U(V)$, en posant :

$$u_0 = u \text{ et } u_{k+1} = vu_kv^{-1}u_k^{-1}, \text{ pour } k \in \mathbb{N}.$$

- a) Montrer qu'on a $u_k = Id_V$ pour k assez grand.
- b) On suppose en outre que pour toute valeur propre λ de u , on peut trouver $\theta \in]-\pi/2, +\pi/2[$ tel que $\lambda = e^{i\theta}$. Montrer que u et v commutent. (On pourra remarquer que, pour $k \geq 1$, dire que $u_{k+1} = Id_V$ signifie que v commute à $u_{k-1}vu_{k-1}^{-1}$).

III.B.2 Montrer qu'il existe un nombre réel strictement positif η , indépendant de n , tel que deux éléments de g et h de G vérifiant $N(g - h) < \eta$ vérifient aussi $h^{-1}g \in S$.

III.B.3 Prouver que l'indice de A dans G vaut au plus

$$a(n) = \left(2\sqrt{\frac{n}{\eta}} + 1\right)^{2n^2} - \left(2\sqrt{\frac{n}{\eta}} - 1\right)^{2n^2}.$$

(Prendre un système de représentants de G/A dans G ; il sera commode de noter m la mesure de la boule unité de l'espace vectoriel euclidien E).

III.B.4 Conclure en prouvant le théorème de Jordan : *tout sous-groupe fini G de $GL_n(\mathbb{C})$ possède un sous-groupe abélien distingué d'indice au plus $a(n)$ dans G .*