SESSION DE 2000

concours externe
de recrutement de professeurs agrégés

section : mathématiques

composition de mathématiques générales

Durée : 6 heures

Calculatrice électronique de poche, y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique, à fonctionnement autonome, non imprimante autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout document et de tout autre matériel électronique est interdit.

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P.

Pour deux entiers t, $u \geqslant 1$, on notera $\mathbf{M}_{t,u}(\mathbb{C})$ (resp. $\mathbf{M}_t(\mathbb{C})$) l'espace des matrices à t lignes et u colonnes (resp. carrées à t lignes) à coefficients dans $\mathbb{C}$, munis de leurs topologies habituelles. Pour q entier, on notera I_q la matrice identité $q \times q$. Pour un entier $n \geqslant 1$ et un sous-groupe S de $\mathrm{GL}(2n, C)$, on notera $\mathrm{Ad}\ g\ (X)$ le conjugué $g X g^{-1}$ de $X \in \mathbf{M}_{2n}(\mathbb{C})$ par $g \in S$, et $\mathrm{Ad}\ (S)\ X = \{\mathrm{Ad}\ g\ (X),\ g \in S\}$.

Dans tout le problème on notera M le sous-groupe de $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{C})$ formé des matrices blocs $\begin{bmatrix} A & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & {}^tA^{-1} \end{bmatrix}$ où $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$; on remarquera qu'il est isomorphe à $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. On désigne par $\mathcal{S}$ l'espace vectoriel des matrices $n \times n$ symétriques complexes et $\mathcal{A}$ l'espace vectoriel des matrices $n \times n$ alternées (ou antisymétriques) complexes.

I

1°) Montrez que le groupe M opère sur $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{A}$) par l'action $(g, X) \mapsto {}^tA^{-1} X A^{-1}$ où $g = \begin{bmatrix} A & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & {}^tA^{-1} \end{bmatrix} \in M$ et $X \in \mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{A}$).

Deux matrices, dans la même orbite pour l'action précédente, sont dites congrues.

2°) Déterminez les orbites X_i pour cette action.

3°) Si Ω est l'une de ces orbites, déterminez l'adhérence $\overline{\Omega}$ de Ω dans $\mathcal{S}$ au moyen des orbites X_i.

On n'utilisera pas dans la suite du problème les propriétés topologiques de cette adhérence ni de celle définie en **II** 3°).

II

On posera $J_r = \begin{bmatrix} \mathrm{O} & I_r \\ -I_r & \mathrm{O} \end{bmatrix}$, r entier positif, avec la convention, si $r = 0$, que $I_0 = \varnothing$ et donc $J_0 = \varnothing$.

1°) Montrez que toute matrice alternée complexe $n \times n$ de rang $2r$ est congrue à une matrice bloc $\begin{bmatrix} J_r & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{bmatrix}$. On pourra montrer d'abord que la matrice d'une forme bilinéaire alternée non dégénérée est, dans une certaine base, une diagonale de blocs 2×2 : $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

2°) Déterminez les orbites Y_j de M dans l'action de M sur $\mathcal{A}$ pour la congruence.

3°) Si Ω est l'une des orbites précédentes, déterminez l'adhérence $\overline{\Omega}$ de Ω dans $\mathcal{A}$.

III

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $2n$ et L, L' deux sous-espaces supplémentaires de dimension n, $E = L \oplus L'$. On choisit des bases $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de L et $(e_{-1}, e_{-2}, \ldots, e_{-n})$ de L' et l'on définit sur E une forme bilinéaire symétrique, notée $(\ ,\ )$, pour laquelle L et L' sont des sous-espaces totalement isotropes tels que $(e_i, e_j) = \delta_{-i,j}$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = -1, -2, \ldots, -n$ où δ est le symbole de Kronecker.

1°) Écrire la matrice P de la forme bilinéaire $(\ ,\ )$ dans la base $(e_1, \ldots, e_{-n})$ de E.

On note G^s le groupe des matrices q complexes $2n \times 2n$, telles que ${}^tq\,P\,q = P$, et $\mathcal{G}^\sigma$ l'espace des matrices z complexes $2n \times 2n$, qui vérifient $P\,{}^tz + zP = 0$.

2°) Montrez que $\mathcal{G}^\sigma$ est stable pour la conjugaison par les matrices de G^s.

3°) Décrire la forme des matrices blocs 2×2 qui appartiennent à l'espace $\mathcal{G}^\sigma$.

IV

Soient F un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $2n$ et U, U' deux sous-espaces supplémentaires de dimension n, $F = U \oplus U'$. On choisit des bases $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de U et $(e_{-1}, e_{-2}, \ldots, e_{-n})$ de U' et l'on définit sur F une forme bilinéaire alternée, notée $< \mid >$, dont la matrice dans la base $(e_1, \ldots, e_n, e_{-1}, \ldots, e_{-n})$ est J_n.

On notera G^a le groupe des matrices q inversibles $2n \times 2n$ telles que ${}^tq\,J_n\,q = J_n$.

1°) Quelles relations nécessaires et suffisantes doivent vérifier A, B, C, $D \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ pour que la matrice bloc

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

appartienne à G^a ?

2°) Montrez que G^a laisse stable pour la conjugaison l'espace $\mathcal{G}^{\mathcal{A}}$ des matrices blocs

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & -{}^tA \end{bmatrix}$$

où A, B, $C \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ et B, $C \in \mathcal{S}$.

V

On définit les sous-espaces suivants de $\mathbf{M}_{2n}(\mathbb{C})$:

$$\underline{\mathcal{M}} = \left\{ \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -{}^tA \end{bmatrix}, \quad A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}) \right\}$$

$$\underline{r}_a^+ = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}, \quad C = -{}^tC \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}) \right\} \qquad \underline{r}_s^+ = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}, \quad C = {}^tC \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}) \right\}$$

$$\underline{r}_a^- = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = -{}^tB \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}) \right\} \qquad \underline{r}_s^- = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = {}^tB \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}) \right\}$$

$$\underline{p}_\lambda^+ = \underline{\mathcal{M}} \oplus \underline{r}_\lambda^+ \qquad \text{où } \lambda = s \text{ ou } a,$$

$$\underline{p}_\lambda^- = \underline{\mathcal{M}} \oplus \underline{r}_\lambda^- \qquad \text{où } \lambda = s \text{ ou } a.$$

On notera $\pi_{+,a}$ la projection de $\mathcal{G}^\sigma$ sur $\underline{r}_a^+$ parallèlement à $\underline{p}_a^-$ et $\pi_{+,s}$ la projection de $\mathcal{G}^{\mathcal{A}}$ sur $\underline{r}_s^+$ parallèlement à $\underline{p}_s^-$.

Tournez la page S.V.P.

1°) (a) Montrez que le groupe M opère par la conjugaison sur chacun des espaces $\underline{r}_\lambda^+$, $\lambda = s$ ou a.

(b) Déduire de (a) que l'application η_a (resp. η_s) $\begin{bmatrix} O & O \\ C & O \end{bmatrix} \mapsto C$ est une bijection linéaire de $\underline{r}_a^+$ (resp. $\underline{r}_s^+$) sur $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{S}$) qui transforme l'opération de conjugaison de M en l'action de M définie en **I** 1°).

On identifiera les orbites X_i (resp. Y_j) aux sous-ensembles correspondant par η_a^{-1} (resp. η_s^{-1}) de $\underline{r}_a^+$ (resp. $\underline{r}_s^+$).

2°) On note $\mathbf{O}_k^a$ (resp. $\mathbf{O}_k^s$) l'ensemble des éléments z de $\mathcal{G}^\sigma$ (resp. $\mathcal{G}^{\mathcal{A}}$) de rang $2k$ (resp. de rang k) tels que $z^2 = 0$. Vérifiez que $\mathbf{O}_k^a$ (resp. $\mathbf{O}_k^s$) est stable sous l'action de conjugaison de G^s (resp. G^a).

On note, pour k entier $\geqslant 1$, V_k^a (resp. V_k^s) l'ensemble des $z = \begin{bmatrix} A & B \\ C & -{}^tA \end{bmatrix} \in \mathbf{O}_k^a$ (resp. $\mathbf{O}_k^s$) vérifiant l'inégalité rang $C \leqslant 2(k\text{-}1)$ (resp. $\leqslant k\text{-}1$).

3°) On pose $R^{-,s} = \left\{ \begin{bmatrix} I_n & T \\ O & I_n \end{bmatrix}, T \in \mathcal{S} \right\}$, $R^{-,a} = \left\{ \begin{bmatrix} I_n & T \\ O & I_n \end{bmatrix}, T \in \mathcal{A} \right\}$.

(a) Vérifiez que $R^{-,s}$ (resp. $R^{-,a}$) est un sous-groupe de G^a (resp. G^s) et qu'il en est ainsi de

$$P^s = MR^{-,s} = \{ZY, \text{ où } Z \in M \text{ et } Y \in R^{-,s}\}$$

(resp. $P^a = MR^{-,a}$).

(b) Démontrez que V_k^a est stable par l'action de P^a et que V_k^s est stable par l'action de P^s.

VI

1°) (a) Soit $z = \begin{bmatrix} A & B \\ C & -{}^tA \end{bmatrix} \in \mathcal{G}^{\mathcal{A}}$, $1 \leqslant r = \text{rang } B$, $1 \leqslant u = \text{rang } C$. Montrez qu'il existe $\gamma_1, \gamma_2 \in M$ tels que

$$\text{Ad } \gamma_1 (z) = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & -{}^tA' \end{bmatrix} \quad \text{avec } B' = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}, \qquad \text{Ad } \gamma_2 (z) = \begin{bmatrix} A'' & B'' \\ C'' & -{}^tA'' \end{bmatrix} \quad \text{avec } C'' = \begin{bmatrix} I_u & O \\ O & O \end{bmatrix}.$$

(b) On introduit pour un entier $r \geqslant 1$, la matrice $K_r = \sqrt{-1}\, J_r$; vérifiez que $K_r^{-1} = K_r$.

Démontrez un résultat parallèle à celui de **VI** 1°) (a) faisant intervenir K_r, où $z \in \mathcal{G}^\sigma$ et $2r = \text{rang } B$, $2u = \text{rang } C$.

2°) (a) Soit $w = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \in V_k^s$ où $D' = -{}^tA'$. On suppose dans cette question que B' est de la forme $\begin{bmatrix} I_c & O \\ O & O \end{bmatrix}$ où $c \geqslant 0$. Montrez que A', C' et D' sont des matrices blocs de la forme suivante :

$$A' = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ O & A_4 \end{bmatrix}, \quad \text{où } A_1 \text{ est une matrice } c \times c, \quad {}^tA_1 = A_1 \text{ et } A_4^2 = O;$$

$$C' = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{bmatrix}, \quad \text{où } C_1 = -A_1^2, \quad C_2 = -(A_1A_2 + A_2A_4), \quad C_3 = D_3A_1 - D_4D_3;$$

$$D' = -{}^tA' = \begin{bmatrix} -A_1 & O \\ D_3 & D_4 \end{bmatrix}.$$

(b) Démontrez le résultat parallèle à **VI 2°) (a)** pour $w \in V_k^a$ et $B' = \begin{bmatrix} K_c & O \\ O & O \end{bmatrix}$, où A_1 est une matrice $2c \times 2c$, ${}^tA_1 = -J_c A_1 J_c$, $A_4^2 = O$;

$$C' = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{bmatrix}, \quad \text{où } C_1 = -K_c A_1^2, \quad C_2 = -K_c(A_1A_2 + A_2A_4), \quad C_3 = D_3K_cA_1 - D_4D_3K_c;$$

$$D' = \begin{bmatrix} -K_cA_1K_c & O \\ D_3 & D_4 \end{bmatrix}.$$

3°) (a) Soient $z = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in V_k^s$ et $\gamma \in M$; on pose $\mathrm{Ad}\,\gamma\,(z) = w = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}$ et l'on suppose que $B' = \begin{bmatrix} I_c & O \\ O & O \end{bmatrix}$ où $c = \mathrm{rang}\, B \geqslant 1$.

En écrivant w comme dans la question **VI 2°) (a)** sous la forme de blocs 4×4 on a

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & I_c & O \\ O & A_4 & O & O \\ C_1 & C_2 & -A_1 & O \\ C_3 & C_4 & D_3 & D_4 \end{bmatrix}.$$

Démontrez que $c = k$ si et seulement si $A_4 = D_4 = C_4 - D_3A_2 = O$.

(b) Démontrez le résultat parallèle à celui de **VI 3°) (a)** pour $z = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in V_k^a$, $B' = \begin{bmatrix} K_c & O \\ O & O \end{bmatrix}$ où $2c = \mathrm{rang}\, B$.

VII

On pose, pour $k \geqslant 1$

$$W_k^s = \left\{ z \in V_k^s,\ z = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad \text{où rang } B = k \right\},$$

$$W_k^a = \left\{ z \in V_k^a,\ z = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad \text{où rang } B = 2k \right\}.$$

On se propose, dans cette question, de démontrer que pour tout $z \in V_k^s$, il existe $\gamma \in P^s$ tel que $w = \mathrm{Ad}\,\gamma\,(z)$ appartient à W_k^s. Pour cela, l'on choisit parmi les éléments de $\mathrm{Ad}\,(P^s)\,z$ un élément $z = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ de $\mathcal{G}^{\mathcal{A}}$ tel que le rang c de B soit maximum; on va raisonner ensuite par l'absurde en supposant $c < k$ et aboutir à une contradiction.

1°) Montrez que l'on peut supposer que

$$B = \begin{bmatrix} I_c & O \\ O & O \end{bmatrix}, \quad c \geqslant 0.$$

On va utiliser dans la suite des matrices $\gamma \in R^{-,s}$ de la forme $\gamma = \begin{bmatrix} I_n & T \\ O & I_n \end{bmatrix}$, $T = \begin{bmatrix} O & O \\ O & T' \end{bmatrix}$ où T' est une matrice symétrique $(n\text{-}c) \times (n\text{-}c)$ telle que $n\text{-}c$ soit supérieur ou égal à 1.

Tournez la page S.V.P.

2°) En conjuguant z par une telle matrice γ et utilisant les notations de **VI** 3°) (a) montrez que

$$\mathrm{Ad}\,(\gamma)\, z = \begin{bmatrix} A+TC & E \\ C & D-CT \end{bmatrix} \qquad \text{où} \quad E = \begin{bmatrix} I_c & -A_2T' \\ T'D_3 & T'D_4 - A_4T' - T'C_4T' \end{bmatrix}$$

et montrez que la maximalité du rang de B implique que $F = T'D_4 - A_4T' - T'(C_4 - D_3A_2)T'$ est nulle.

3°) (a) En supposant que $A_4 \neq O$, montrez l'existence d'une matrice inversible g et d'une matrice (éventuellement vide) H telles que

$$g\,A_4\,g^{-1} = \begin{bmatrix} E_{12} & O \\ O & H \end{bmatrix} \qquad \text{où} \quad E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et vérifiez que $n\text{-}c \geqslant 2$.

(b) En déduire, en prenant $T' = g^{-1} \begin{bmatrix} E_{22} & O \\ O & O \end{bmatrix} {}^t g^{-1}$ et en posant $Y = \begin{bmatrix} E_{11} & O \\ O & O \end{bmatrix} g$ où $E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, que $YT' = O$, $\quad YF = -YA_4T'$.

(c) En déduire une contradiction avec le fait que $A_4 \neq O$.

(d) Montrez qu'il en résulte que $A_4 = O$ et $D_4 = O$.

4°) En choisissant convenablement la matrice T' montrez que $X = C_4 - D_3A_2$ est nulle et conclure.

VIII

Si $2 \leqslant 2\,k \leqslant n\text{-}1$, adaptez la preuve de **VII** de façon à prouver que pour tout $z \in V_k^a$ il existe $\gamma \in P^a$ tel que $w = \mathrm{Ad}\;\gamma\;(z)$ appartient à W_k^a.

IX

Soit $k \geqslant 1$. On notera V_k pour V_k^a ou V_k^s et l'on désignera par $\tilde{k}$ le nombre k si $V_k = V_k^s$ et le nombre $2\,k$ si $V_k = V_k^a$. Démontrez que si

$$z = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

appartient à V_k, alors rang $A < \tilde{k}$.

Les résultats des parties **VII, VIII, IX** *interviennent dans la classification de certaines représentations d'algèbres de Lie.*