72.0.1

J. 5675

SESSION DE 1999

concours externe de recrutement de professeurs agrégés

section : mathématiques

composition de mathématiques générales

Durée : 6 heures

L'usage de tout document et de tout matériel électronique est interdit.

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P.

Notations et définitions. Si A et B sont des ensembles, on note $\mathrm{A}-\mathrm{B}$ l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans B.

Dans tout le problème, $\mathbf{k}$ désigne le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. On fixe un entier n strictement positif et un $\mathbf{k}$-espace vectoriel V de dimension $n+1$. On munit V de sa topologie d'espace vectoriel normé. On note $\mathbf{PV}$ l'espace projectif associé à V, c'est-à-dire l'ensemble des droites vectorielles de V, ou encore le quotient de $\mathrm{V}-\{0\}$ par la relation d'équivalence de colinéarité. On note $\pi : \mathrm{V}-\{0\} \to \mathbf{PV}$ l'application quotient, qui à un vecteur non nul x associe la droite engendrée par x. Soit d un entier ; on appelle *sous-espace projectif de* $\mathbf{PV}$ *de dimension* d un sous-ensemble P de $\mathbf{PV}$ tel que $\pi^{-1}(\mathrm{P}) \cup \{0\}$ soit un sous-espace vectoriel de V de dimension $d+1$, que l'on notera alors toujours $\widehat{\mathrm{P}}$. Les sous-espaces projectifs de $\mathbf{PV}$ de dimension 0 sont donc les points de $\mathbf{PV}$, ceux de dimension 1 sont appelés *droites projectives*, ou simplement droites, et ceux de dimension 2 *plans projectifs*, ou simplement plans.

Si q est une forme quadratique sur V, on appelle *quadrique projective* associée à q le sous-ensemble $\mathrm{Q} = \pi(\{x \in \mathrm{V}-\{0\} \mid q(x)=0\})$ de $\mathbf{PV}$. Soit m un entier vérifiant $0 \leqslant 2m \leqslant n+1$; on dit que q est *de type* m s'il existe une base $\mathcal{B}$ de V telle que, pour tout vecteur x de V de coordonnées $(x_0, \ldots, x_n)$ dans $\mathcal{B}$, on ait

$$q(x) = x_0 x_m + x_1 x_{m+1} + \cdots + x_{m-1} x_{2m-1} .$$

On dit qu'une telle base est *adaptée à* q. Si q est de type m, on dira aussi que Q est une quadrique de type m.

Préliminaire

Dans toute cette partie, q désigne une forme quadratique sur V et Q la quadrique projective associée.

1) Soient P un sous-espace projectif de $\mathbf{PV}$ de dimension d et P' un sous-espace projectif de $\mathbf{PV}$ de dimension d'.

a) Si $d+d' \geqslant n$, montrer que P rencontre P'.

b) Si P est disjoint de P', montrer qu'il existe un unique sous-espace projectif de dimension $d+d'+1$ de $\mathbf{PV}$ qui contient P et P'.

2) a) On suppose $n=1$; si Q contient trois points distincts, montrer que $\mathrm{Q}=\mathbf{PV}$.

b) On suppose $n=2$; si Q contient une droite projective D, montrer que soit $\mathrm{Q}=\mathbf{PV}$, soit il existe une droite projective D' telle que $\mathrm{Q}=\mathrm{D}\cup\mathrm{D}'$.

3) Soit D une droite de $\mathbf{PV}$.

a) Si D rencontre Q en au moins trois points, montrer que D est contenue dans Q.

b) Si $\mathbf{k}=\mathbf{C}$, montrer que D rencontre Q.

4) Soit m un entier positif.

a) Lorsque $\mathbf{k} = \mathbf{R}$, caractériser les formes quadratiques de type m à l'aide de leur signature.

b) Lorsque $\mathbf{k} = \mathbf{C}$, caractériser les formes quadratiques de type m à l'aide de leur rang.

5) On suppose $n + 1 = 2m$ et q de type m.

a) Déterminer la dimension maximale d'un sous-espace projectif de $\mathbf{P}$V contenu dans Q.

b) Soit q' une forme quadratique sur V dont la quadrique associée contient Q. Montrer que q' est proportionnelle à q (on pourra montrer que la matrice de q' dans une base de V adaptée à q est $\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{A} \\ {}^t\mathrm{A} & 0 \end{pmatrix}$, où A est une matrice carrée d'ordre m, puis que A est diagonale, puis que A est multiple de l'identité).

Première partie

Droites projectives contenues dans une quadrique de type 2

On suppose dans cette partie $n = 3$. Soient D_1, D_2 et D_3 des droites de $\mathbf{P}$V deux à deux disjointes.

1) Montrer que par chaque point x de D_1, il passe une unique droite qui rencontre D_2 et D_3. On la notera D_x.

2) Soient x et y des points distincts sur D_1. Montrer que D_x ne rencontre pas D_y.

3) a) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2, e_3)$ de V telle que $\widehat{\mathrm{D}}_2$ soit le sous-espace vectoriel de V engendré par e_0 et e_1, que $\widehat{\mathrm{D}}_3$ soit le sous-espace vectoriel de V engendré par e_2 et e_3, et que $\widehat{\mathrm{D}}_1$ soit le sous-espace vectoriel de V engendré par $e_0 - e_3$ et $e_1 + e_2$.

b) On définit une forme quadratique q sur V en posant $q(x) = x_0x_2 + x_1x_3$ pour tout vecteur x de coordonnées $(x_0, \ldots, x_3)$ dans la base $\mathcal{B}$. On note Q la quadrique projective associée. Montrer que pour tout x dans D_1, la droite D_x est contenue dans Q.

c) Montrer l'égalité $\mathrm{Q} = \bigcup_{x \in \mathrm{D}_1} \mathrm{D}_x$ (si $y \in \mathrm{Q} - \mathrm{D}_1$, on pourra considérer l'intersection de Q avec le plan contenant y et D_1).

4) Soient x un point de Q et $\widehat{x}$ la droite vectorielle de V associée. On note $\widehat{x}^{\perp}$ l'orthogonal de $\widehat{x}$ pour q, et $x^{\perp}$ le plan projectif associé $\pi(\widehat{x}^{\perp} - \{0\})$.

a) Montrer que toute droite projective passant par x et contenue dans Q est contenue dans $x^{\perp}$.

b) Quel est le rang de la restriction de q à $\widehat{x}^{\perp}$?

c) Montrer qu'exactement deux droites contenues dans Q passent par x.

5) On note $\mathcal{P}^+$ l'ensemble des droites contenues dans Q qui sont du type D_x, pour $x \in \mathrm{D}_1$, et $\mathcal{P}^-$ l'ensemble des droites contenues dans Q qui ne sont pas de ce type.

a) Montrer que par chaque point de Q, il passe exactement une droite de $\mathcal{P}^+$ et une droite de $\mathcal{P}^-$. En déduire que deux droites distinctes de $\mathcal{P}^+$ (respectivement de $\mathcal{P}^-$) sont disjointes.

b) Montrer que chaque droite de $\mathcal{P}^+$ rencontre chaque droite de $\mathcal{P}^-$.

6) Soient D_1, D_2, D_3 et D_4 des droites de $\mathbf{PV}$ deux à deux disjointes. Montrer que l'on est dans l'un des quatre cas suivants, et que chacun de ces cas peut se produire, à l'exception du premier lorsque $\mathbf{k} = \mathbf{C}$:

- aucune droite ne rencontre D_1, D_2, D_3 et D_4 ;
- exactement une droite rencontre D_1, D_2, D_3 et D_4 ;
- exactement deux droites rencontrent D_1, D_2, D_3 et D_4 ;
- une infinité de droites rencontrent D_1, D_2, D_3 et D_4.

Deuxième partie
Plans projectifs contenus dans une quadrique de type 3

Soit d un entier vérifiant $0 \leqslant d \leqslant n$. On note $\mathcal{G}_d$ l'ensemble des sous-espaces projectifs de $\mathbf{PV}$ de dimension d (c'est-à-dire aussi l'ensemble des sous-espaces vectoriels de V de dimension $d+1$). En particulier, $\mathcal{G}_0 = \mathbf{PV}$. On note $\mathrm{GL(V)}$ le groupe des automorphismes linéaires de V ; c'est un sous-ensemble de l'espace vectoriel des endomorphismes de V, que l'on munit de la topologie induite.

1) Soit W un sous-espace vectoriel de V de dimension $d+1$.

a) On définit une application $\rho_\mathrm{W} : \mathrm{GL(V)} \to \mathcal{G}_d$ en associant à un élément g de $\mathrm{GL(V)}$ le sous-espace projectif de $\mathbf{PV}$ associé au sous-espace vectoriel $g(\mathrm{W})$ de V. Montrer que ρ_W est surjective.

b) On munit $\mathcal{G}_d$ de la topologie dont les ouverts sont les sous-ensembles $\mathcal{U}$ de $\mathcal{G}_d$ tels que $\rho_\mathrm{W}^{-1}(\mathcal{U})$ soit ouvert dans $\mathrm{GL(V)}$. Montrer que cette topologie est indépendante du choix de W et que ρ_W est continue pour cette topologie.

2) Soit M un sous-espace vectoriel de V de dimension $n-d$. Montrer que

$$\mathcal{U}_\mathrm{M} = \{\ \mathrm{P} \in \mathcal{G}_d \mid \widehat{\mathrm{P}} \cap \mathrm{M} = \{0\}\ \}$$

est un ouvert de $\mathcal{G}_d$ homéomorphe à $\mathbf{k}^{(d+1)(n-d)}$ (on pourra introduire un supplémentaire W de M dans V, et considérer l'application ρ_W associée).

3) On fixe une base $(e_0, \ldots, e_n)$ de V. Notons $\mathcal{I}$ l'ensemble des parties à $n-d$ éléments de $\{0, \ldots, n\}$. Pour tout I dans $\mathcal{I}$, on note $\mathrm{M_I}$ le sous-espace vectoriel de V engendré par $\{e_i \mid i \in \mathrm{I}\}$. Montrer l'égalité $\mathcal{G}_d = \bigcup_{\mathrm{I} \in \mathcal{I}} \mathcal{U}_{\mathrm{M_I}}$.

4) Montrer qu'une partie A de $\mathcal{G}_d$ est ouverte (respectivement fermée) si et seulement si, pour tout I dans $\mathcal{I}$, l'ensemble $\mathrm{A} \cap \mathcal{U}_{\mathrm{M_I}}$ est ouvert (respectivement fermé) dans $\mathcal{U}_{\mathrm{M_I}}$.

5) On note V^* l'espace vectoriel dual de l'espace vectoriel V et $\mathrm{A}(\mathrm{V}^*)$ l'espace vectoriel des formes bilinéaires alternées sur V^*. On note enfin $\mathbf{P}\mathrm{A}(\mathrm{V}^*)$ l'espace projectif associé à $\mathrm{A}(\mathrm{V}^*)$.

a) Quelle est la dimension de $\mathrm{A}(\mathrm{V}^*)$?

b) Montrer que le déterminant d'une matrice carrée antisymétrique d'ordre impair est nul.

c) Montrer que toute forme bilinéaire alternée sur V^* est de rang pair.

d) Soient D un élément de $\mathcal{G}_1$ et (d_1, d_2) une base de $\widehat{\mathrm{D}}$. On associe à D la forme bilinéaire

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{V}^* \times \mathrm{V}^* & \longrightarrow & \mathbf{k} \\ (\ell_1, \ell_2) & \longmapsto & \ell_1(d_1)\ell_2(d_2) - \ell_1(d_2)\ell_2(d_1) . \end{array}$$

Montrer que l'on définit ainsi une application $\kappa : \mathcal{G}_1 \to \mathbf{P}\mathrm{A}(\mathrm{V}^*)$, puis que κ est injective.

e) Caractériser les points de l'image de κ. Décrire l'application réciproque $\kappa^{-1} : \kappa(\mathcal{G}_1) \to \mathcal{G}_1$.

Dans toute la suite de cette partie, on suppose $n = 3$.

6) Soit $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant 4}$ une matrice antisymétrique à coefficients dans $\mathbf{k}$. Déterminer un polynôme homogène en les coefficients $a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{23}, a_{24}, a_{34}$ dont le carré soit le déterminant de A. En déduire que l'image de κ est une quadrique Q de type 3 dans $\mathbf{P}\mathrm{A}(\mathrm{V}^*)$.

7) Soient x un point de $\mathbf{P}\mathrm{V}$ et P un plan dans $\mathbf{P}\mathrm{V}$. On note $\Pi_x = \kappa(\{\mathrm{D} \in \mathcal{G}_1 \mid x \in \mathrm{D}\})$ et $\Pi_\mathrm{P} = \kappa(\{\mathrm{D} \in \mathcal{G}_1 \mid \mathrm{D} \subset \mathrm{P}\})$.

a) Montrer que Π_x est un plan dans $\mathbf{P}\mathrm{A}(\mathrm{V}^*)$.

b) Montrer que Π_P est un plan dans $\mathbf{P}\mathrm{A}(\mathrm{V}^*)$.

c) Montrer que $\Pi_x \cap \Pi_\mathrm{P}$ est vide si $x \notin \mathrm{P}$, et que c'est une droite projective sinon.

8) Soient ω_1 et ω_2 des formes bilinéaires alternées dégénérées sur V^*. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) la forme bilinéaire alternée $\omega_1 + \omega_2$ est non dégénérée;

(ii) $\mathrm{V}^* = \mathrm{Ker}(\omega_1) \oplus \mathrm{Ker}(\omega_2)$.

9) En déduire que toute droite contenue dans Q est une intersection $\Pi_x \cap \Pi_\mathrm{P}$, où P est un plan dans $\mathbf{P}\mathrm{V}$ et x un point de P.

10) Montrer que tout plan contenu dans Q est soit du type Π_x, avec $x \in \mathbf{P}\mathrm{V}$, soit du type Π_P, où P est un plan dans $\mathbf{P}\mathrm{V}$.

11) On obtient ainsi une partition de l'ensemble des plans contenus dans Q en deux sous-ensembles. Montrer que l'intersection de deux de ces plans est de dimension paire si et seulement s'ils sont dans le même sous-ensemble (on rappelle que conformément à nos conventions, l'ensemble vide est un sous-espace projectif de $\mathbf{P}\mathrm{V}$ de dimension -1).

Tournez la page S.V.P.

Troisième partie

Espaces projectifs contenus dans une quadrique de type m

Dans toute cette partie, on suppose qu'il existe un entier m tel que $n = 2m - 1$ et l'on fixe une forme quadratique q de type m sur V ainsi qu'une base $\mathcal{B} = (e_0, \ldots, e_{2m-1})$ de V adaptée à q (*cf.* Notations et définitions). On note Q la quadrique projective associée à q et $\mathcal{P}$ l'ensemble des sous-espaces projectifs de **PV** de dimension $m - 1$ contenus dans Q ; c'est un sous-ensemble de l'espace topologique $\mathcal{G}_{m-1}$ défini dans la première question de la partie précédente.

1) Montrer que $\mathcal{P}$ est fermé dans $\mathcal{G}_{m-1}$.

2) Soit I une partie de $\{0, \ldots, m-1\}$; on pose $\mathrm{I}^c = \{0, \ldots, m-1\} - \mathrm{I}$. Soit $\mathrm{N_I}$ le sous-espace vectoriel de V engendré par les vecteurs $(e_i)_{i \in \mathrm{I}}$ et $(e_{m+i})_{i \in \mathrm{I}^c}$. On note u_I l'automorphisme de V défini par $u_\mathrm{I}(e_i) = e_{m+i}$ et $u_\mathrm{I}(e_{m+i}) = e_i$ si $i \in \mathrm{I}$, et $u_\mathrm{I}(e_i) = e_i$ et $u_\mathrm{I}(e_{m+i}) = e_{m+i}$ si $i \in \mathrm{I}^c$, de sorte que $\mathrm{N_I} = u_\mathrm{I}(\mathrm{N}_\varnothing)$. En particulier, $u_\varnothing$ est l'identité de V.

a) Montrer que $\mathcal{P} \cap \mathcal{U}_{\mathrm{N}_\varnothing}$ est homéomorphe à $\mathbf{k}^{m(m-1)/2}$.

b) Montrer que l'application $v_\mathrm{I} : \mathcal{G}_{m-1} \to \mathcal{G}_{m-1}$ qui à un sous-espace projectif de **PV** de dimension $m-1$ associe le sous-espace projectif $u_\mathrm{I}(\mathrm{P})$, est un homéomorphisme. Déterminer $v_\mathrm{I}(\mathcal{P} \cap \mathcal{U}_{\mathrm{N}_\varnothing})$.

c) Montrer que $\mathcal{P}$ est contenu dans la réunion des $\mathcal{U}_{\mathrm{N_I}}$, lorsque I parcourt l'ensemble des parties de $\{0, \ldots, m-1\}$.

d) Montrer que $\mathcal{P} \cap \mathcal{U}_{\mathrm{N}_\varnothing} \cap \mathcal{U}_{\mathrm{N_I}}$ est vide si et seulement si le cardinal de I est impair.

e) Soient I et J des parties de $\{0, \ldots, m-1\}$; déterminer $u_\mathrm{I}(\mathrm{N_J})$. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur I et J pour que $\mathcal{P} \cap \mathcal{U}_{\mathrm{N_I}} \cap \mathcal{U}_{\mathrm{N_J}}$ soit vide.

3) En déduire que $\mathcal{P}$ est réunion disjointe de deux sous-ensembles fermés connexes homéomorphes notés $\mathcal{P}^+$ et $\mathcal{P}^-$, et que deux sous-espaces projectifs de dimension $m-1$ contenus dans Q sont dans le même sous-ensemble $\mathcal{P}^+$ ou $\mathcal{P}^-$ si et seulement si la dimension de leur intersection a même parité que $m - 1$.

4) Soit P_1 un sous-espace projectif de **PV** de dimension $m-2$ contenu dans Q. Montrer qu'il existe un unique élément de $\mathcal{P}^+$ contenant P_1 et un unique élément de $\mathcal{P}^-$ contenant P_1.

Quatrième partie

Intersection de deux quadriques

On suppose dans toute cette partie $\mathbf{k} = \mathbf{C}$. On fixe des formes quadratiques q et q' sur V, de quadriques associées Q et Q', et l'on note X le sous-ensemble $\mathrm{Q} \cap \mathrm{Q}'$ de **PV**. Pour tout nombre complexe λ, on pose $q_\lambda = \lambda q - q'$.

1) On suppose $n=2$. Montrer que X n'est pas vide, et que si X contient au moins cinq points, soit il contient une droite, soit q et q' sont proportionnelles (on pourra montrer qu'il existe une combinaison linéaire de q et q' qui est dégénérée).

2) On suppose $n \geqslant 5$. Montrer que par tout point de X passe (au moins) une droite contenue dans X.

3) On suppose q non dégénérée. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) l'ensemble des nombres complexes λ tels que la forme quadratique q_λ soit dégénérée a $n+1$ éléments ;

(ii) il existe une base $\mathcal{B}$ de V et des nombres complexes $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ deux à deux distincts tels que, pour tout point x de V de coordonnées $(x_0, \ldots, x_n)$ dans $\mathcal{B}$, on ait

$$q(x) = x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 \qquad \text{et} \qquad q'(x) = \lambda_0 x_0^2 + \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2 .$$

Dans toute la suite de cette partie, on suppose ces conditions réalisées.

4) Montrer que le groupe $\mathrm{G}_n = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n$ opère sur $\mathbf{P}\mathrm{V}$ de façon que :

– pour tout g dans G_n et tout x dans X, on ait $g \cdot x \in \mathrm{X}$;

– pour tout x dans X, il existe g dans G_n tel que $g \cdot x \neq x$.

5) On suppose $n=2$. Montrer que X a exactement quatre points qui forment une orbite pour l'action du groupe G_2.

6) Montrer que toute forme quadratique dont la quadrique associée contient X est combinaison linéaire de q et q'.

7) Soient x un point de X et $\widehat{x}$ la droite vectorielle de V associée. On note $\widehat{x}^\perp$ l'orthogonal de $\widehat{x}$ pour q.

a) Montrer qu'il existe un nombre complexe λ tel que la restriction de la forme quadratique q_λ à $\widehat{x}^\perp$ soit non dégénérée.

b) Montrer que tout sous-espace projectif de $\mathbf{P}\mathrm{V}$ contenu dans X est de dimension au plus $\dfrac{n}{2} - 1$.

8) On suppose $n=5$. Montrer que par tout point de X passent au plus quatre droites contenues dans X.

9) On suppose $n=4$.

a) Montrer que X contient exactement seize droites, qui forment une orbite pour l'action du groupe G_4 (on pourra fixer une base de V comme dans la question 3) (ii), chercher les droites contenues dans X qui joignent un point de coordonnées homogènes $(1, 0, x_2, x_3, x_4)$ à un point de coordonnées homogènes $(0, 1, y_2, y_3, y_4)$, et montrer que l'on obtient ainsi toutes les droites contenues dans X).

b) Soit D l'une des droites contenues dans X. Montrer que D rencontre exactement cinq des quinze autres droites contenues dans X, et que ces cinq droites sont deux à deux disjointes.