page 76 1/10 1992

Agrégation Ext. Math. Générales

SESSION DE 1992

concours externe
de recrutement de professeurs agrégés

section : mathématiques

composition de mathématiques générales

[illegible] heures

Les candidats composeront sur du papier de composition quadrillé 5 × 5.

Tout document est interdit.

Calculatrice électronique de poche — y compris calculatrice programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

DÉFINITIONS ET NOTATIONS

Dans tout le problème k désigne un corps commutatif. Les termes “espace vectoriel”, “application (bi)linéaire” et “forme linéaire” signifient respectivement “k-espace vectoriel”, “application k-(bi)linéaire” et “forme k-linéaire”.

1. Une *algèbre* est un espace vectoriel A muni d'une application bilinéaire (appelée le produit) $(a,b) \mapsto ab$ de $A \times A$ dans A vérifiant les deux hypothèses suivantes :
(i) le produit induit une structure d'anneau sur A ,
(ii) si $\lambda \in k$ et $a,b \in A$, on a : $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$.
Nous supposerons que, de même qu'un anneau, une algèbre a toujours une unité notée 1. Un *morphisme d'algèbres* $f : A \to B$ de l'algèbre A dans l'algèbre B est une application linéaire telle que $f(1) = 1$ et $f(aa') = f(a)f(a')$ pour tout couple (a,a') d'éléments de A . Un sous-espace vectoriel A' d'une algèbre A est une *sous-algèbre* de A si l'unité 1 de A appartient à A' et si $a, a' \in A'$ implique $aa' \in A'$.

2. Si A est une algèbre, la multiplication des matrices induit une structure d'algèbre sur l'espace vectoriel $M_n(A)$ des matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients dans A ($n \geq 1$). Si a est un élément de A et i et j sont deux entiers vérifiant $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, on désigne par $E_{ij}(a)$ la matrice carrée de $M_n(A)$ dont tous les coefficients

Tournez la page S.V.P.

sont nuls à l'exception du coefficient situé sur la i-ème ligne et dans la j-ème colonne, coefficient qui est égal à a . Le produit dans $M_n(A)$ des matrices $E_{ij}(a)$ et $E_{k\ell}(a')$ vaut :

$$E_{ij}(a)E_{k\ell}(a') = \delta_{jk}\, E_{i\ell}(aa')$$

où δ_{jk} est le symbole de Kronecker : $\delta_{jj} = 1$ et $\delta_{jk} = 0$ si $j \neq k$.

On définit la *trace* $\mathrm{Tr}(m)$ d'une matrice m de $M_n(A)$ comme la somme dans A de ses coefficients diagonaux.

Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur k et f un endomorphisme k-linéaire de V . On admet qu'il existe un élément bien défini $\mathrm{Tr}(f)$ de k égal pour toute base de V à la trace de la matrice représentant f dans cette base. On appelle $\mathrm{Tr}(f)$ la *trace de l'endomorphisme* f .

3. Soit A une algèbre et V un espace vectoriel. On appelle *trace* sur A à valeurs dans V toute application linéaire τ de A dans V telle que $\tau(aa') = \tau(a'a)$ pour tout couple (a, a') d'éléments de A . Les traces sur A à valeurs dans V forment un espace vectoriel noté $T(A, V)$.

4. (a) Dans toute algèbre A on définit le *commutateur* $[a, a']$ de deux éléments a et a' de A par :

$$[a, a'] = aa' - a'a\,.$$

On désigne par $[A, A]$ le sous-espace vectoriel de A engendré par tous les commutateurs $[a, a']$ où a et a' parcourent A .

(b) Si A est une algèbre, on désigne par $H_0(A)$ l'espace vectoriel quotient $H_0(A) = A/[A, A]$. On note T l'application linéaire surjective canonique de l'espace vectoriel A sur son quotient $H_0(A)$; celle-ci associe à l'élément a de A sa classe modulo $[A, A]$.

Comme il est d'usage, les lettres $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Q}$ désignent successivement le monoïde des entiers naturels, l'anneau des entiers relatifs et le corps des nombres rationnels.

PARTIE I : L'ESPACE VECTORIEL $H_0(A)$

A. PRÉLIMINAIRES

Soit A une algèbre.

1. Montrer que la projection canonique $T : A \to H_0(A)$ est une trace sur A .

2. Soit $\tau : A \to V$ une trace sur A à valeurs dans un espace vectoriel V . Montrer qu'il existe une unique application linéaire $\overline{\tau} : H_0(A) \to V$ telle que $\overline{\tau}(T(a)) = \tau(a)$ pour tout $a \in A$. En déduire que $T(A, V)$ est isomorphe à l'espace vectoriel des applications linéaires de $H_0(A)$ dans V .

3. (a) Soit $f : A \to B$ un morphisme d'algèbres. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $H_0(f)$ de $H_0(A)$ dans $H_0(B)$ telle que

$$H_0(f) \circ T = T \circ f\,.$$

(b) Soit u un élément inversible de l'algèbre A et f l'endomorphisme d'algèbre de A donné par $f(a) = uau^{-1}$. Démontrer que $H_0(f)$ est l'application identité de $H_0(A)$.

B. LES ALGÈBRES DE MATRICES.

On se donne une algèbre A et un entier $n \geq 2$.

1. Montrer que $T \circ \mathrm{Tr}$ est une trace de $M_n(A)$ vers $H_0(A)$.

2. (a) Calculer dans $M_n(A)$ le commutateur $[E_{ij}(a), E_{k\ell}(b)]$ pour a et b dans A .

   (b) On pose : $F_i(a) = E_{ii}(a) - E_{11}(a)$ $(i \geq 1)$. Montrer que $F_i(a)$ peut s'écrire sous la forme d'un commutateur de $M_n(A)$.

   (c) Etablir que toute matrice $m = (m_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ de $M_n(A)$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$m = \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} E_{ij}(m_{ij}) + \sum_{2 \leq i \leq n} F_i(m_{ii}) + E_{11}(\mathrm{Tr}\,(m)).$$

   (d) On note $M'_n(A)$ le noyau de l'application linéaire $T \circ \mathrm{Tr}$ de $M_n(A)$ dans $H_0(A)$. Etablir que $M'_n(A)$ est un sous-espace vectoriel de $[M_n(A), M_n(A)]$.

   (e) Montrer que l'application $\overline{T \circ \mathrm{Tr}}$ de $H_0(M_n(A))$ dans $H_0(A)$ est un isomorphisme pour tout entier $n \geq 2$.

C. L'ALGÈBRE D'UN GROUPE FINI.

On désigne par G un groupe fini noté multiplicativement, d'unité e et de cardinal N. On note aussi $k[G]$ l'espace vectoriel des fonctions de G à valeurs dans k . A chaque élément g de G on associe la fonction χ_g de $k[G]$ définie par $\chi_g(g) = 1$ et $\chi_g(h) = 0$ si $h \neq g$.

1. Montrer que si $f \in k[G]$, alors on a :

$$f = \sum_{g \in G} f(g)\,\chi_g$$

   et que la famille $\{\chi_g\}_{g \in G}$ forme une base de l'espace vectoriel $k[G]$.

2. On munit $k[G]$ de la loi de composition $(f, f') \mapsto ff'$ où ff' est appelé le *produit de convolution* de f et de f' et est défini pour tout g de G par

$$(ff')(g) = \sum_{h \in G} f(h) f'(h^{-1}g).$$

   (On ne confondra pas le produit de convolution avec le produit usuel des fonctions qui n'est pas utilisé dans ce problème). Calculer $\chi_g \chi_{g'}$ et montrer que le produit de convolution munit $k[G]$ d'une structure d'algèbre dont l'unité est χ_e .

Tournez la page S.V.P.

3. On rappelle que les éléments g et g' du groupe G sont *conjugués* s'il existe h dans G tel que $g' = hgh^{-1}$. La conjugaison est une relation d'équivalence. Soit C une classe de conjugaison de G . Pour toute fonction f de $k[G]$ on pose :

$$T_C(f) = \sum_{g \in C} f(g) .$$

Montrer que T_C est une trace sur l'algèbre $k[G]$.

4. (a) Montrer que pour toute forme linéaire α sur $k[G]$, il existe une fonction a de $k[G]$ telle que pour toute fonction f on ait :

$$\alpha(f) = \sum_{g \in G} a(g) f(g) .$$

   (b) En déduire que toute trace de $k[G]$ à valeurs dans k est combinaison linéaire de traces de la forme T_C .

5. Etablir que la famille $\{T_C\}$ (où C parcourt l'ensemble des classes de conjugaison de G) forme une base de l'espace vectoriel $T(k[G], k)$ et que la famille $\{\overline{T_C}\}$ forme une base de l'espace vectoriel dual de $H_0(k[G])$.

6. Calculer la dimension de l'espace vectoriel $H_0(k[S_4])$ où S_4 est le groupe symétrique d'ordre quatre.

PARTIE II : INDÉCOMPOSABILITÉ DE $\mathbf{Z}[G]$

A. IDEMPOTENTS.

Soit A_1 et A_2 deux anneaux. On munit l'ensemble $A_1 \times A_2$ d'une structure d'anneau en posant :

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$
$$(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2) .$$

On dit qu'un anneau A est *indécomposable* s'il n'existe aucun isomorphisme d'anneaux de A sur $A_1 \times A_2$ où A_1 et A_2 sont des anneaux tous deux différents de $\{0\}$.

Un élément e de A est dit *idempotent* si $e^2 = e$. On note $P(A)$ l'ensemble des idempotents de A . On dit que $e, f \in P(A)$ sont *orthogonaux* si $ef = fe = 0$.

1. Etablir que

   (a) si e et f sont des idempotents orthogonaux de A , alors $e + f \in P(A)$;

   (b) si $e \in P(A)$, alors $1 - e$ est un idempotent et e et $1 - e$ sont orthogonaux.

2. Soit A un anneau tel qu'il existe une application $r : P(A) \to \mathbf{N}$ vérifiant les trois propriétés:

   (R1) $r(1) = 1$ et $r(0) = 0$,

(R2) $r(e) > 0$ si et seulement si $e \neq 0$,

(R3) $r(e+f) = r(e) + r(f)$ si e et f sont des idempotents orthogonaux.

Sous ces hypothèses montrer que les seuls idempotents de A sont 0 et 1 .

3. Montrer que si les seuls idempotents de A sont 0 et 1 , alors A est indécomposable.

4. Montrer que si e est une matrice idempotente de $M_n(k)$, alors le rang $\mathrm{rg}\,(e)$ de la matrice e est lié à sa trace par :

$$\mathrm{rg}\,(e)\, 1 = \mathrm{Tr}\,(e)$$

où 1 est l'unité du corps commutatif k .

B. INDÉCOMPOSABILITÉ.

On reprend les notations de I.C. On suppose jusqu'à la fin de cette partie que k est le corps $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels. On définit $\mathbf{Z}[G]$ comme le sous-groupe de $\mathbf{Q}[G]$ des combinaisons linéaires à coefficients *entiers* des éléments χ_g où g parcourt G . On définit aussi une application $\tau : \mathbf{Z}[G] \to \mathbf{Z}$ par

$$\tau(\sum_{g\in G} n(g)\chi_g) = n(e)$$

où e est l'unité de G . On rappelle que N désigne le cardinal du groupe fini G .

1. Montrer que le produit défini en I.C.2 sur $\mathbf{Q}[G]$ fait de $\mathbf{Z}[G]$ un sous-anneau de $\mathbf{Q}[G]$.

2. Soit x un élément de $\mathbf{Z}[G]$. On lui fait correspondre l'endomorphisme linéaire $\tilde{x}$ du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $V = \mathbf{Q}[G]$ défini par $\tilde{x}(y) = xy$ pour tout y dans $\mathbf{Q}[G]$. Montrer que la trace de cet endomorphisme est donnée par :

$$\mathrm{Tr}\,(\tilde{x}) = N\,\tau(x)\,.$$

3. Montrer que la restriction de τ à $P(\mathbf{Z}[G])$ est à valeurs dans $\mathbf{N}$ et vérifie les propriétés (R1), (R2) et (R3) décrites plus haut. En déduire que l'anneau $\mathbf{Z}[G]$ est indécomposable.

PARTIE III : L'ESPACE VECTORIEL $H_1(A)$

Soit A une algèbre. On considère l'espace vectoriel F_A des applications ensemblistes de l'ensemble $A \times A$ dans k . Pour tout couple (a, b) de $A \times A$ on note $X(a, b)$ la fonction qui vaut 1 sur le couple (a, b) et 0 sur tout autre couple. La famille libre $\{X(a,b)\}_{(a,b)\in A\times A}$ engendre un sous-espace vectoriel X_A de F_A . Soit Y_A le sous-espace vectoriel de X_A engendré par les éléments

$$\alpha(a,b) = X(a,b) + X(b,a)$$

Tournez la page S.V.P.

$$\beta(a,b,c) = X(ab,c) - X(a,bc) + X(ca,b)$$
$$\gamma(a,b,\lambda) = X(\lambda a,b) - \lambda X(a,b)$$

et

$$\delta(a,b,c) = X(a+b,c) - X(a,c) - X(b,c)$$

où a, b, c parcourent A et λ parcourt k .

On note $C(A)$ l'espace vectoriel quotient $C(A) = X_A/Y_A$. L'image de $X(a,b)$ dans $C(A)$ est notée $a \wedge b$.

1. Montrer que tout élément de $C(A)$ s'écrit sous la forme :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \wedge b_i$$

où $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ sont des éléments de A .

2. Etablir dans $C(A)$ les relations :

$$a \wedge b = -b \wedge a$$
$$a \wedge bc = ab \wedge c + ca \wedge b$$

et

$$1 \wedge a = a \wedge 1 = 0 .$$

3. Soit V un espace vectoriel et f une application k-bilinéaire de $A \times A$ dans V vérifiant les relations :

$$f(a,b) + f(b,a) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(a,bc) = f(ab,c) + f(ca,b)$$

pour tout $a, b, c \in A$. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $\hat{f}$ de $C(A)$ dans V telle que pour tout couple (a,b) d'éléments de A on a :

$$\hat{f}(a \wedge b) = f(a,b).$$

4. (a) Etablir qu'il existe une unique application linéaire $\theta_A : C(A) \to A$ vérifiant $\theta_A(a \wedge b) = [a,b]$ pour tout couple $(a,b) \in A^2$. On rappelle que $[a,b] = ab - ba$.
   (b) Déterminer l'espace vectoriel quotient $A/\theta_A(C(A))$.

   On définit l'espace vectoriel $H_1(A)$ comme le noyau de $\theta_A : C(A) \to A$.

5. On considère l'application bilinéaire Tr' de $M_p(A) \times M_p(A)$ dans $C(A)$ définie par

$$\mathrm{Tr}'(m,n) = \sum_{i,j=1}^{p} m_{ij} \wedge n_{ji}$$

où $m = (m_{ij})_{ij}$ et $n = (n_{ij})_{ij}$ sont des matrices de $M_p(A)$.

page 82 7/10 . 1992.
Agrégation Ext. Math. générales

(a) Calculer $\mathrm{Tr}'(E_{ij}(a), E_{k\ell}(b))$ pour les matrices introduites au début du problème.

(b) Montrer qu'il existe une application linéaire et une seule $\widehat{\mathrm{Tr}'}$ de $C(M_p(A))$ dans $C(A)$ telle que $\widehat{\mathrm{Tr}'}(m \wedge n) = \mathrm{Tr}'(m, n)$ $(m, n \in M_p(A))$.

(c) Etablir la relation : $\theta_A \circ \widehat{\mathrm{Tr}'} = \mathrm{Tr} \circ \theta_{M_p(A)}$ où Tr désigne la trace de $M_p(A)$ dans A . En déduire que la restriction Tr_1 de $\widehat{\mathrm{Tr}'}$ à $H_1(M_p(A))$ est à valeurs dans $H_1(A)$.

(d) Montrer que $\mathrm{Tr}_1 : H_1(M_p(A)) \to H_1(A)$ est surjective.

6. Considérons l'espace vectoriel $k[t, t^{-1}]$ des séries $\sum_{n\in\mathbf{Z}} \lambda_n t^n$ où $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est une suite indexée par $\mathbf{Z}$ d'éléments de k tous nuls sauf un nombre fini d'entre eux. On admettra que le produit

$$(\sum_{n\in\mathbf{Z}} \lambda_n t^n)(\sum_{n\in\mathbf{Z}} \mu_n t^n) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} (\sum_{i+j=n} \lambda_i \mu_j)\, t^n$$

munit $k[t, t^{-1}]$ d'une structure d'algèbre d'unité $t^0 = 1$. Pour tout élément $P = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \lambda_n t^n$, on pose :

$$P' = \sum_{n\in\mathbf{Z}} (n+1)\, \lambda_{n+1} t^n \qquad \text{et} \qquad res(P) = \lambda_{-1}\,.$$

(a) Vérifier que pour tout $P \in k[t, t^{-1}]$ on a :

$$(PQ)' = P'Q + PQ' \qquad \text{et} \qquad res(P') = 0\,.$$

(b) Etablir qu'il existe une forme linéaire Res sur $C(k[t, t^{-1}])$ et une seule telle que pour tout couple (P, Q) d'éléments de $k[t, t^{-1}]$ on a :

$$Res(P \wedge Q) = res(PQ')\,.$$

(c) Montrer que si $n \in \mathbf{Z}$ et $P \in k[t, t^{-1}]$, on a les relations :

$$P \wedge t^n = nPt^{n-1} \wedge t$$

dans $C(k[t, t^{-1}])$ (on pourra commencer par traiter le cas $n \geq 0$). En déduire les relations (pour $P, Q \in k[t, t^{-1}]$) :

$$P \wedge Q = PQ' \wedge t = -QP' \wedge t$$

et

$$P' \wedge t = 0\,.$$

(d) Etablir que la restriction de Res à $H_1(k[t, t^{-1}])$ est un isomorphisme de $H_1(k[t, t^{-1}])$ sur k lorsque k est un corps de caractéristique nulle.

Tournez la page S.V.P.

PARTIE IV : EXTENSIONS

On suppose jusqu'à la fin du problème que le corps commutatif k est de caractéristique nulle.

A. GÉNÉRALITÉS.

Soit U un espace vectoriel. On appelle *crochet* sur U toute application k-bilinéaire $<,>$ de $U \times U$ dans U vérifiant pour tous $u, v, w \in U$ les deux conditions :

(L1) $\quad <u,v> + <v,u> = 0$

(L2) $\quad <u,<v,w>> + <v,<w,u>> + <w,<u,v>> = 0$.

On appelle ℓ-espace tout couple $L = (U, <,>)$ où $<,>$ est un crochet sur l'espace vectoriel U . Soit $L' = (U', <,>')$ un autre ℓ-espace. Un ℓ-morphisme de L dans L' est une application linéaire $f : U \to U'$ vérifiant $< f(u), f(v) > = f(< u, v >)$ pour tous u, v dans U .

Soit E un espace vectoriel. On appelle *cocycle* sur le ℓ-espace $L = (U, <,>)$ à valeurs dans E toute application bilinéaire α de $U \times U$ dans E vérifiant pour tous $u, v, w \in U$ les deux conditions :

(C1) $\quad \alpha(u, v) + \alpha(v, u) = 0$

(C2) $\quad \alpha(u, <v, w>) + \alpha(v, <w, u>) + \alpha(w, <u, v>) = 0$.

Avec ces données considérons l'application bilinéaire $\{,\}$ de $(U \times E) \times (U \times E)$ dans $U \times E$ définie par

$$\{(u, x), (v, y)\} = (<u, v>, \alpha(u, v))$$

où $u, v \in U$ et $x, y \in E$.

1. (a) Montrer que l'application bilinéaire $\{,\}$ ainsi définie vérifie les conditions (L1) et (L2) . On note $L(\alpha)$ le ℓ-espace $(U \times E, \{,\})$ ainsi obtenu : $L(\alpha)$ est appelé l'extension de L par le cocycle α .

   (b) Soit p la projection canonique de $U \times E$ sur U . Montrer que p est un ℓ-morphisme de $L(\alpha)$ sur L .

   (c) Montrer qu'il existe un ℓ-morphisme $s : L \to L(\alpha)$ tel que $p \circ s =$ identité de L si et seulement s'il existe une application linéaire $f : U \to E$ telle que $\alpha(u, v) = f(<u, v>)$ pour tous u, v dans U . Si une telle application s existe, on dira que l'extension $L(\alpha)$ est *triviale*.

2. On reprend les notations de la partie III. Soit A une algèbre.

   (a) Montrer que l'application "commutateur" $[,]$ de $A \times A$ dans A vérifie les conditions (L1) et (L2). On note $L(A)$ le ℓ-espace $(A, [,])$.

   (b) Soit φ une application linéaire de $C(A)$ dans un espace vectoriel E . Montrer que l'application bilinéaire $\alpha_\varphi : A \times A \to E$ définie par $\alpha_\varphi(a, b) = \varphi(a \wedge b)$ est un cocycle sur $L(A)$ à valeurs dans E .

   (c) Montrer que l'extension $L(A)(\alpha_\varphi)$ est triviale si et seulement si la restriction de φ à $H_1(A)$ est nulle.

B. EXTENSIONS AFFINES.

On considère l'algèbre $A = k[t, t^{-1}]$ définie en III.6. Soit

$$\varphi = Res \circ \widehat{\mathrm{Tr}'} : C(M_p(A)) \to k$$

la composée des applications Res et $\widehat{\mathrm{Tr}'}$ définies dans la Partie III.

1. Dans $M_p(A) \times k$ posons :

$$c = (0,1) \qquad \text{et} \qquad e_{ij}(t^n) = (E_{ij}(t^n), 0)\,.$$

Montrer que l'ensemble $\{c\} \cup \{e_{ij}(t^n)\}_{1 \leq i,j \leq p, n \in \mathbf{Z}}$ est une base de l'espace vectoriel $M_p(A) \times k$ et que dans l'extension $L(M_p(A))(\alpha_\varphi)$ on a les relations :

$$\{c, c\} \;=\; \{c, e_{ij}(t^n)\} \;=\; \{e_{ij}(t^n), c\} \;= 0$$

$$\{e_{ij}(t^n), e_{k\ell}(t^m)\} \;=\; \delta_{jk} e_{i\ell}(t^{n+m}) - \delta_{i\ell} e_{kj}(t^{n+m}) \qquad \text{si } n + m \neq 0$$

$$\{e_{ij}(t^{-m}), e_{k\ell}(t^m)\} \;=\; \delta_{jk} e_{i\ell}(1) - \delta_{i\ell} e_{kj}(1) + m\, \delta_{jk} \delta_{i\ell}\, c\,.$$

2. L'extension $L(M_p(A))(\alpha_\varphi)$ est-elle triviale ?

C. OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS.

On considère à nouveau l'algèbre $A = k[t, t^{-1}]$. Pour tout élément P de A , on note $\widetilde{P}$ l'endomorphisme linéaire de A défini par $\widetilde{P}(Q) = PQ$ ($Q \in A$) . De même on note d l'endomorphisme linéaire de A donné par $d(P) = P'$.

1. (a) Montrer que l'application $P \mapsto \widetilde{P}$ est un morphisme d'algèbres de A dans l'algèbre $End(A)$ des endomorphismes linéaires de A munie de la composition.

   (b) Vérifier que pour tout $P \in A$ et tout $q \geq 1$ on a la relation suivante dans $End(A)$:

$$d^q\, \widetilde{P} = \sum_{\ell=0}^{q} \binom{q}{\ell} \widetilde{P^{(\ell)}}\, d^{q-\ell}$$

   où $\binom{q}{\ell}$ désigne le coefficient binômial $\frac{q!}{\ell!(q-\ell)!}$ et où $P^{(\ell)}$ est défini par récurrence par : $P^{(0)} = P$ et $P^{(\ell)} = (P^{(\ell-1)})'$ si $\ell > 0$.

2. Soit D l'espace vectoriel des éléments de $End(A)$ de la forme :

$$\widetilde{P_0} + \widetilde{P_1} d + \widetilde{P_2} d^2 + \cdots + \widetilde{P_n} d^n$$

où n parcourt $\mathbf{N}$ et $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$ parcourent A . On pose : $u = \widetilde{t}$.

   (a) Montrer que $\{u^p d^q\}_{p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}}$ est une base de l'espace vectoriel D .

   (b) Montrer que si $x, y \in D$ alors $xy \in D$. En déduire que D est une sous-algèbre de $End(A)$.

Tournez la page S.V.P.

3. Dans l'algèbre D calculer le commutateur $[u, u^q d^r]$. En déduire que $H_0(D) = 0$ et que toute trace sur D est nulle.

D. EXTENSION DE VIRASORO.

On considère le sous-espace vectoriel W de D engendré par les éléments $u^p d$ où p parcourt $\mathbf{Z}$.

1. Soit $P, Q \in A = k[t, t^{-1}]$. Montrer que $[\tilde{P}d, \tilde{Q}d] = \widetilde{(PQ' - QP')}\, d$. En déduire que $(W, [\ ,\ ])$ est un ℓ-espace que nous noterons encore W .

2. Considérons l'application bilinéaire $\alpha : W \times W \rightarrow k$ définie par

$$\alpha(\tilde{P}d, \tilde{Q}d) = \frac{1}{12} res(P'Q'' - Q'P'')$$

où $P, Q \in A$, $Q'' = (Q')'$ et res est la forme linéaire sur A définie en III.6. Montrer que α est un cocycle sur W .

3. On note $Vir = W(\alpha)$ l'extension correspondante. Montrer que Vir possède une base $\{c\} \cup \{L_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$ telle que son crochet $\{\ ,\ \}$ soit déterminé par :

$$\{c, c\} = \{c, L_n\} = \{L_n, c\} = 0$$

$$\{L_n, L_m\} = (m - n) L_{n+m} \qquad \text{si } n + m \neq 0$$

$$\{L_{-m}, L_m\} = 2m L_0 - \frac{m^3 - m}{6} c .$$

4. (a) Démontrer que l'extension Vir n'est pas triviale.

   (b) En admettant que le cocycle α soit de la forme α_φ où φ est une forme linéaire sur $C(D)$, établir la non-nullité de l'espace vectoriel $H_1(D)$.