

Agrégation de mathématiques 1987

Mathématiques générales

6454. Calculatrice électronique de poche – y compris calculatrice programmable et alphanumérique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Dans tout le problème, on fixe un entier n strictement positif, et on note E l'espace vectoriel \mathbb{R}^n sur le corps \mathbb{R} des nombres réels.

On munit E de sa structure standard d'espace euclidien. Pour x et y dans E , on note $\|x\|$ la norme de x et $x \cdot y$ le produit scalaire de x et y ; si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, on a donc :

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n, \quad \|x\|^2 = x \cdot x.$$

On note O l'élément neutre de $(E, +)$.

On note \mathcal{S} , le groupe des applications *affines* isométriques de E dans lui-même, \mathcal{O} le sous-groupe de \mathcal{S} , formé des applications *linéaires* isométriques (le groupe orthogonal de E), \mathcal{T} le sous-groupe formé des translations; si x appartient à E , on note t_x la translation de vecteur x ; si X est une partie de E , on note \mathcal{T}_X l'ensemble des translations dont les vecteurs sont dans X ; on note I l'application identité de E , translation de vecteur nul.

On note \mathcal{L} l'algèbre $\text{End}(E)$ des applications linéaires de E dans E . On munit \mathcal{L} de la norme des opérateurs: la norme d'un élément f de \mathcal{L} est

$$\|f\| = \sup \{ \|f(x)\| / \|x\| \mid x \in E, x \neq O \}.$$

On munit \mathcal{L} et ses sous-ensembles de la topologie induite par cette norme.

Si Γ est un groupe et α, β deux éléments de Γ , on note $[\alpha, \beta]$ le commutateur $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ de α et β . On rappelle qu'un sous-groupe Δ de Γ est dit *distingué* (ou *normal*) si, quels que soient α dans Δ et β dans Γ , alors $\beta\alpha\beta^{-1}$ appartient à Δ .

Pour tout entier g strictement positif, on note \mathbb{N}_g l'ensemble des entiers de 1 jusqu'à g .

Un sous-groupe G de \mathcal{S}_s est dit *crystallographique* s'il vérifie les deux conditions C1 et C2 suivantes :

C1. — Il existe un nombre réel d tel que, pour tout vecteur x de E , il existe un élément α de G vérifiant $\|\alpha(0) - x\| \leq d$.

C2. — Quel que soit le nombre réel T , il existe seulement un nombre fini d'éléments α de G vérifiant $\|\alpha(0)\| \leq T$.

Le but du problème est la démonstration du théorème suivant, dû à L. BIEBERBACH.

THÉORÈME : Tout sous-groupe crystallographique de \mathcal{S}_s contient n translations linéairement indépendantes.

I. — PRÉLIMINAIRES.

A. — Décomposition des éléments de \mathcal{S}_s .

1° Soit α un élément de \mathcal{S}_s ; montrer qu'il existe un, et un seul, élément (a, A) de $E \times \mathcal{O}$ tel que $\alpha = t_a \circ A$.

NOTATION : On pose $a = \tau(\alpha)$, $A = \pi(\alpha)$, et on note π_α l'application $\alpha \mapsto \pi(\alpha)$ de \mathcal{S}_s dans \mathcal{O} , τ l'application $\alpha \mapsto \tau(\alpha)$ de \mathcal{S}_s dans E .

2° Prouver que π est un morphisme de groupes de \mathcal{S}_s dans \mathcal{O} . Déterminer son image et son noyau.

3° Si G est un sous-groupe de \mathcal{S}_s , prouver que $G \cap \mathcal{O}$ est un sous-groupe abélien distingué de G . Soit α un élément de \mathcal{S}_s . Posons $a = \tau(\alpha)$ et $A = \pi(\alpha)$.

4° Soit x un vecteur de E ; prouver qu'on a

$$\alpha \circ t_x \circ \alpha^{-1} = t_{A(x)}.$$

Soit β un autre élément de \mathcal{S}_s . Posons $b = \tau(\beta)$ et $B = \pi(\beta)$.

5° Calculer $\tau(\alpha\beta)$ en fonction de a, A, b et B .

6° Calculer $\tau(\alpha^{-1})$ et $\pi(\alpha^{-1})$ en fonction de a et A .

7° Posons $\gamma = [\alpha, \beta]$. Prouver qu'on a

$$\begin{aligned} \pi(\gamma) &= [A, B] \\ \tau(\gamma) &= (A - I)(b) + (I - [A, B])(b) + A(I - B)A^{-1}(a). \end{aligned}$$

et

B. — Étude de la norme d'opérateurs.

Si f est un élément de \mathcal{L} , on note f^* l'endomorphisme adjoint de f .

1° Montrer que l'application $f \mapsto f^*f$ de \mathcal{L} dans lui-même est continue. Prouver que \mathcal{O} est compact et que les applications $(A, B) \mapsto AB$ de $\mathcal{O} \times \mathcal{O}$ dans \mathcal{O} et $A \mapsto A^{-1}$ de \mathcal{O} dans \mathcal{O} sont continues.

2° Soit f un élément de \mathcal{L} . Montrer que f^*f est diagonalisable dans une base orthonormale de E , que ses valeurs propres sont des nombres réels positifs et que $\|f\|^2$ est la plus grande valeur propre de f^*f .

Pour tout élément f de \mathcal{L} , on note E_f l'ensemble des vecteurs x de E vérifiant $\|f(x)\| = \|f\| \cdot \|x\|$.

3° Soit f un élément de \mathcal{L} . Prouver que E_f est un sous-espace vectoriel de E , non réduit à $\{0\}$.

4° Quels sont les éléments f de \mathcal{L} pour lesquels E_f est E tout entier ?

5° Soient f dans \mathcal{L} et A dans \mathcal{O} . Prouver qu'on a

$$\|f\| = \|fA\| = \|Af\|.$$

Pour tout élément A de \mathcal{O} , on pose $m(A) = \|A - I\|$ et on note M_A l'espace vectoriel, $E_{A^{-1}}$, M_A^\perp son orthogonal dans E .

6° Soit A un élément de \mathcal{O} , prouver que M_A et M_A^\perp sont stables par A .

7° Soient A et B dans \mathcal{O} , prouver qu'on a

$$m([A, B]) = \|AB - BA\|$$

et en déduire l'inégalité

$$m([A, B]) \leq 2m(A)m(B).$$

Soit A dans \mathcal{O} ; si M_A^\perp est réduit à $\{0\}$ on pose $m^\perp(A) = 0$, sinon, on pose

$$m^\perp(A) = \sup \{ \|A(x) - x\| / \|x\| \mid x \in M_A^\perp, x \neq 0 \}.$$

8° Soit A dans \mathcal{O} ; prouver qu'on a

$$0 \leq m(A) - m^\perp(A) \leq 2.$$

9° Quels sont les éléments A de \mathcal{O} tels que $m(A) = m^\perp(A)$?

10° Quels sont ceux vérifiant $m(A) = m^\perp(A) + 2$?

II. — ÉTUDE DES SOUS-GROUPES CRISTALLOGRAPHIQUES FORMÉS DE TRANSLATIONS.

On dit qu'un sous-groupe de $(E, +)$ est un *réseau* s'il est engendré par les vecteurs d'une base de E . Dans cette partie II, on considère un sous-groupe L de $(E, +)$ et on note \mathcal{C}_L le sous-groupe de \mathcal{C} associé à L . On veut prouver qu'une condition nécessaire et suffisante pour que \mathcal{C}_L soit cristallographique est que L soit un réseau.

A. — On suppose d'abord que L est un réseau. Prouver que \mathcal{C}_L est cristallographique.

B. — Soit maintenant L un sous-groupe quelconque de $(E, +)$. Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs de L .

1° Prouver que si F est distinct de E , \mathcal{C}_L n'est pas cristallographique.

2° En déduire que si \mathcal{C}_L est cristallographique, alors L contient n vecteurs de E linéairement indépendants.

C. — Soient L un sous-groupe de $(E, +)$ tel que \mathcal{C}_L est cristallographique et w_1, \dots, w_n n vecteurs de E , linéairement indépendants, contenus dans L . On note l_1, \dots, l_n les applications coordonnées dans la base (w_1, \dots, w_n) de E .

Soient x et y deux éléments de E ; nous dirons qu'on a $x \leq y$ si $x = y$ ou s'il existe k dans \mathbb{N}_n tel qu'on ait $l_i(x) = l_i(y)$ pour tout i dans \mathbb{N}_n strictement plus grand que k et $l_k(x) < l_k(y)$.

1° Prouver que la relation \leq est une relation d'ordre sur E et que tout sous-ensemble fini non vide de E admet un plus petit élément pour cet ordre.

Soit V l'ensemble des vecteurs *non nuls* de L vérifiant $0 \leq l_i(x) \leq 1$ pour tout i dans \mathbb{N}_n .

2° Prouver que V est fini et qu'il existe une suite v_1, \dots, v_n de vecteurs dans V , uniquement déterminée par les conditions (i) et (ii) suivantes :

(i) v_1 est le plus petit élément de V ;

(ii) pour tout k dans \mathbb{N}_{n-1} , si on note F_k le sous-espace vectoriel de E engendré par v_1, \dots, v_k , alors v_{k+1} est le plus petit élément de V n'appartenant pas à F_k .

3° Montrer que (v_1, \dots, v_n) est une base de E et qu'on a

$$0 < l_j(v_j) \leq 1 \quad \text{et} \quad l_i(v_j) = 0$$

pour tout j dans \mathbb{N}_n et tout i dans \mathbb{N}_n tels que $i > j$.

On note L' le réseau de E engendré par v_1, \dots, v_n .

4° Prouver que pour tout x dans L , il existe x' dans L' tel que, pour tout j dans \mathbb{N}_n , on ait

$$0 \leq l_j(x - x') < l_j(v_j).$$

5° Montrer qu'on a $L = L'$.

III. — RÉSEAUX ET GROUPES CRISTALLOGRAPHIQUES.

Pour tout sous-groupe L de $(E, +)$, on note S_L le stabilisateur de L dans \mathcal{O} , Σ_L le stabilisateur de L dans \mathcal{S}_s :

$$S_L = \{A \in \mathcal{O}, A(L) = L\}$$

$$\Sigma_L = \{\alpha \in \mathcal{S}_s, \alpha(L) = L\}.$$

A. — Soit L un sous-groupe de $(E, +)$.

1° Prouver qu'on a $\Sigma_L \cap \mathcal{C} = \mathcal{C}_L$.

2° Soit G un sous-groupe de \mathcal{S}_s tel que $G \cap \mathcal{C} = \mathcal{C}_L$.
Montrer que $\pi(G)$ est inclus dans S_L .

3° Soit G un sous-groupe de \mathcal{S}_s tel que $G \cap \mathcal{C} = \mathcal{C}_L$.

Supposons en outre que G est inclus dans Σ_L .

Prouver que l'application (τ, π) de \mathcal{S}_s dans $E \times \mathcal{O}$ induit une bijection de G dans $L \times \pi(G)$. Expliciter la loi de groupe sur $L \times \pi(G)$ transportée de celle de G par cette bijection.

B. — Soient L un réseau de E et G un sous-groupe de \mathcal{S}_s tel que $G \cap \mathcal{C} = \mathcal{C}_L$.

1° Montrer que S_L est fini.

2° Montrer que \mathcal{C}_L est d'indice fini dans G .

3° Prouver que G est cristallographique.

C.1° Pour cette question seulement, supposons $n = 1$ et prenons pour L le réseau Z de $E = \mathbb{R}$. Décrire les sous-groupes G de \mathcal{S}_s tels que $G \cap \mathcal{C} = \mathcal{C}_L$.

2° Pour cette question seulement, supposons $n = 2$ et prenons pour L le réseau Z^2 de $E = \mathbb{R}^2$. Calculer le cardinal de S_L .

D. — Soient L un réseau de E et G un sous-groupe de \mathcal{S}_s tel que $G \cap \mathcal{C} = \mathcal{C}_L$. Soit H un sous-groupe abélien de G , distingué dans G .

1° Pour x dans L et A dans $\pi(H)$ prouver qu'on a $(A - I)^2(x) = 0$ (on pourra utiliser le fait que si un élément α de G vérifie $A = \pi(\alpha)$, alors α commute à $t_x \alpha t_{-x}$).

2° Prouver qu'on a $H \subset \mathcal{C}$.

3° Que peut-on dire si G est abélien?

IV. — PREUVE DU THÉORÈME.

Dans cette partie IV du problème, on fixe un sous-groupe cristallographique G de \mathcal{S}_s et on choisit un nombre réel $d > 0$ tel que la condition C1 soit vérifiée.

A. — Soit u un vecteur unitaire de E .

1° Montrer qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers naturels $(k_q)_{q \in \mathbb{N}}$ et une suite $(\beta_q)_{q \in \mathbb{N}}$ d'éléments de G telles que

(i) pour tout entier naturel q , on ait $\|\tau(\beta_q) - k_q u\| \leq d$;

(ii) la suite $(\pi(\beta_q))_{q \in \mathbb{N}}$ converge.

2° En déduire qu'il existe une suite $(\beta'_q)_{q \in \mathbb{N}}$ d'éléments de G telle que $\tau(\beta'_q)$ soit non nul à partir d'un certain rang, que $\pi(\beta'_q)$ converge vers Γ et que $\frac{u \cdot \tau(\beta'_q)}{\|\tau(\beta'_q)\|}$ converge vers 1.

(On pourra prendre β'_q de la forme $\beta_r \beta_q^{-1}$, où l'entier r est convenablement choisi.)

B. — Pour toute partie non vide X de G , on pose $\delta(X) = \inf_{\alpha \in X} \|\tau(\alpha)\|$.

1° Soit X une partie non vide de G . Prouver qu'il existe un élément α de X tel que $\|\tau(\alpha)\| = \delta(X)$.

Dans la suite de cette partie IV.B, on note Y l'ensemble des éléments α de G tels que $0 < m(\pi(\alpha)) \leq 1/2$. On désire prouver par l'absurde que Y est vide.

2° Jusqu'en IV.B.5, supposons que Y est non vide et choisissons α dans Y tel que $\|\tau(\alpha)\| = \delta(Y)$. Posons $A = \pi(\alpha)$, $a = \tau(\alpha)$ et notons p, q les projecteurs orthogonaux sur les espaces M_A et M_A^\perp respectivement, sous-espaces de E associés à A en I.B.

Prouver qu'il existe un élément β de G tel que, posant $B = \pi(\beta)$ et $b = \tau(\beta)$, on ait

$$\|q(b)\| < \|p(b)\| \quad \text{et} \quad m(B) \leq \frac{1}{8}(m(A) - m^\perp(A)).$$

(On pourra choisir un vecteur unitaire u de E et utiliser II.A.)

Soit Z l'ensemble des éléments de G vérifiant ces conditions, et choisissons $\beta \in Z$ tel que $\|\tau(\beta)\| = \delta(Z)$. Posons $B = \pi(\beta)$, $b = \tau(\beta)$, $\gamma = [\alpha, \beta]$. On pose $C = \pi(\gamma)$, $c = \tau(\gamma)$ (calculés en I.A.7) et $r = c - (A - I)b$.

3° Prouver qu'on a $m(C) \leq m(B)$.

4° Si β est une translation, vérifier qu'on a $r = 0$, $\|q(c)\| < \|p(c)\|$ et $\|c\| < \|b\|$.

5° Supposons que β n'est pas une translation ; prouver successivement :

(i) $\|a\| \leq \|b\|$

(ii) $\|r\| \leq 2m(B)\|b\|$

(iii) $\|r\| < \frac{1}{2}(m(A) - m^{\perp}(A))\|p(b)\|$

(iv) $\|q(c)\| < \frac{1}{2}(m(A) + m^{\perp}(A))\|p(b)\| < \|p(c)\|$

(v) $\|c\| < \|b\|$.

6° Dédurre de ce qui précède que Y est vide.

7° En choisissant une base de E formée de vecteurs unitaires, prouver qu'il existe une base (w_1, \dots, w_n) de E telle que tw_i soit dans G pour tout entier i dans \mathbb{N}_n .

8° Posant $L = \tau(G \cap \bar{C})$, prouver que L est un réseau de E .

Agrégation de mathématiques

Composition d'analyse

NOTATIONS

On note $x = (x_1, x_2)$ un point du plan euclidien \mathbb{R}^2 , avec le produit scalaire canonique $x \cdot x' = x_1 x'_1 + x_2 x'_2$, et la norme euclidienne $\|x\|$. On désigne par $D(x, r)$, respectivement $C(x, r)$, le disque fermé, respectivement le cercle, de centre x et de rayon $r \geq 0$; on écrira $D(0, 1) = D$ et $C(0, 1) = C$ pour abrégé. On dit que $C(x', r')$ entoure $D(x, r)$ si $D(x, r)$ est contenu dans l'intérieur de $D(x', r')$, c'est-à-dire si $\|x' - x\| < r' - r$. On note R_θ pour θ réel, la rotation d'angle θ autour de l'origine.

Toutes les fonctions considérées sont à valeurs réelles. On note $\text{supp } f$ le support d'une fonction f , adhérence de l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x) \neq 0$. On note $dx = dx_1 dx_2$ la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^2 . Une fonction f sur \mathbb{R}^2 est dite radiale si $f(R_\theta x) = f(x)$ pour tous $x \in \mathbb{R}^2$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Soit L la droite affine de \mathbb{R}^2 d'équation $x \cdot u_\alpha = p$, avec $p, \alpha \in \mathbb{R}$, et $u_\alpha = (\cos \alpha, \sin \alpha) \in C$. Si f est une fonction définie sur \mathbb{R}^2 , on note f_L , ou $\hat{f}(p, \alpha)$, l'intégrale :

$$f_L = \hat{f}(p, \alpha) = \int_{\mathbb{R}} f(pu_\alpha + tu_{\alpha + \frac{\pi}{2}}) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(pu_\alpha + tu_{\alpha + \frac{\pi}{2}}) dt,$$

lorsque cela a un sens. De manière analogue, pour $\Gamma = C(a, r)$, on pose :

$$f_\Gamma = \int_0^{2\pi} f(a + ru_\theta) d\theta,$$

avec $a \in \mathbb{R}^2$, $r \geq 0$.

On rappelle la formule de Green-Riemann : si γ est une courbe C^1 par morceaux constituant le bord orienté d'un compact K du plan, et P_1, P_2 deux fonctions numériques de classe C^1 au voisinage de K , on a :

$$\iint_K \left(\frac{\partial P_2}{\partial x_1} - \frac{\partial P_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = \int_\gamma P_1(x_1, x_2) dx_1 + P_2(x_1, x_2) dx_2.$$

DEHEVELS, *Formes quadratiques et groupes classiques*, PUF, 1981, pages 410, 446, 450.
 DELACHET, *La géométrie contemporaine*, PUF, 1965, Que sais-je 401, pages 119-121.
 DIEUDONNÉ, *Panorama des mathématiques pures*, Gauthiers-Villars, 1979, pages 35 et 48.
 ÉPISTEMON, *Algèbre 1*, Cedic, 1981, page 59.
 FAVARD, *Géométrie différentielle locale*, Gauthiers-Villars, 1956, page 84.
 GODBILLON, *Géométrie différentielle et mécanique*, Hermann, 1969, pages 81, 86, 109, 110, 129.
 LANDAU, *Mécanique*, Édition de Moscou, 1960, pages 185 et 191.
 LEICHTNAM et SCHAUER, *Exercices d'Algèbre 1*, Ellipses, SPM Marketing, 1982, page 159.
 QUEYSSANNE, *Algèbre*, Armand Colin, 1964, page 365.
 Problème ULM 1974, Première composition, solution de M. CARPENTIER.
 Problème ENSAE, 1975, Ronéo 1979.
 Dictionnaire EDM à l'alinéa PFAFF.

fosseur J. HJELMSLEV à C. JUEL pour son 70^e anniversaire lors de son jubilé scientifique le 25 janvier 1925. Elle est actuellement à l'Institut Mathématique de Copenhague.
Bibliographie.
 BRKOFF et MAC LANE, *Algèbre, exercices*, 2^e partie, Gauthiers-Villars 1973, pages 165, 166, 169, 170.
 BOUVIER et GEORGES, *Dictionnaire des mathématiques*, PUF, 1979, pages 720 et 190.
 BRONSTEIN, *Aide mémoire de mathématiques*, Eyrolles, 1983, pages 716 et 822.
 CARTAN, *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques*, Hermann 1971, page 56.
 CHAMBADAL, *Exercices d'Algèbre*, Gauthiers-Villars, 1972, pages 120 et 151.
 CHAMBADAL et OVAERT, *Algèbre tensorielle et linéaire*, Dunod, 1968, pages 381 à 384.
 CREVSTEY, *Exercices et problèmes résolus*, Dunod, 1972, Tome I, page 164.

Agrégation de mathématiques

Mathématiques générales

6454.

(Voir l'énoncé complet dans la Revue n° 1, page 1.)

PARTIE I

- A. - 1° Si $\alpha = t_a \circ \alpha$, on a $\alpha(0) = a$ d'où l'unicité de a et donc celle de A puisqu'alors $A = t_a \circ \alpha$. Inversement soit A l'application linéaire tangente à α . C'est un élément de \mathcal{C} et on a bien évidemment $\alpha = t_{\alpha(0)} \circ A$ (les deux applications affines ayant même application linéaire tangente et coïncidant sur le point O).
- A. - 2° Il est bien connu que l'application qui à une application affine associe son application linéaire tangente est multiplicative et donc r est un morphisme de groupe de \mathcal{J} dans O . Pour $A \in \mathcal{C}$, on a $r(A) = A$, donc \mathcal{R} est surjective. Le noyau de r est bien évidemment T .
- A. - 3° $G \cap T$ est le noyau de π_T donc il est distingué dans G . Comme T est abélien, $G \cap T$ est aussi abélien.
- A. - 4° $\alpha \circ t_x \circ \alpha^{-1}$ est une translation car T est distingué dans \mathcal{J} . On a $\alpha \circ t_x \circ \alpha^{-1}(\alpha(0)) = \alpha(x)$ donc c'est la translation de vecteur $\alpha(x) - \alpha(0)$ c'est-à-dire $A(x)$.
- A. - 5° On a $\alpha\beta = t_a A_t B = t_a A_t A^{-1} AB = t_a A_t A B$, d'où $\tau(\alpha\beta) = a + A(b)$.
- A. - 6° En prenant $\beta = \alpha^{-1}$, on obtient $0 = \tau(1) = a + A(b)$, soit $b = -A^{-1}(a)$, c'est-à-dire $\tau(\alpha^{-1}) = -A^{-1}(a)$.
- A. - 7° On a $\pi([\alpha, \beta]) = [A, B]$ car π est un morphisme. Par les questions 5° et 6°, on obtient $\tau(\alpha\beta) = a + A(b)$ et $\tau(\alpha^{-1}\beta^{-1}) = -A^{-1}(a) - A^{-1}B^{-1}(b)$ puis $\tau(\gamma) = a + A(b) - ABA^{-1}(a) - ABA^{-1}B^{-1}(b) = (A - 1)(b) + (1 - [A, B])(b) + (1 - B)A^{-1}(a)$.
- B. - 1° A l'aide de la base canonique, \mathcal{J} s'identifie à l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre n l'application $f \mapsto f^*$ à l'application $M \mapsto MM$ qui est polynomiale et donc continue.

θ est l'image réciproque de (1) par cette application, il est donc fermé. Les matrices d'éléments de θ ont des vecteurs colonnes de norme 1; leurs coefficients sont donc de valeur absolue inférieure à 1 et par suite θ est borné dans \mathcal{L} . On en déduit donc que θ étant fermé borné dans un espace vectoriel de dimension finie est compact. L'application $(A, B) \mapsto AB$ est la restriction de la composition des endomorphismes qui est bilinéaire donc continue, l'application $A \mapsto A^{-1}$ qui s'identifie à la transposition des matrices est bien évidemment continue.

B. - 2° f^*f est symétrique donc diagonalisable dans une base orthonormée. Ses valeurs propres sont donc des nombres réels. Soit λ une de ses valeurs propres et x un vecteur propre associé. On a

$$\lambda \|x\|^2 = f^*f(x), x = f(x), f(x) \geq 0$$

et donc $\lambda \geq 0$. Soit (e_1, \dots, e_n) une base orthonormée de vecteurs propres, avec $f^*f(e_i) = \lambda_i e_i$ et $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ et soit $x = \sum x_i e_i$. On a alors

$$f^*f(x) = \sum \lambda_i x_i^2 e_i \quad \text{et} \quad \|f(x)\|^2 = f^*f(x), x = \sum \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_1 \|x\|^2$$

avec égalité pour $x = e_1$. On a donc $\|f\|^2 = \lambda_1$.

B. - 3° L'égalité $\|f(x)\| = \|f\| \|x\|$ s'écrit encore $\|f(x)\|^2 = \|f\|^2 \|x\|^2$ soit avec les notations de la question précédente $\sum \lambda_i x_i^2 = \lambda_1 \sum x_i^2$. Ceci nécessite que $x_i = 0$ si $\lambda_i \neq \lambda_1$. Donc E_f est l'espace propre de f^*f associé à la valeur propre $\lambda_1 = \|f\|^2$. C'est un sous-espace vectoriel de E non réduit à 0.

B. - 4° Si $E_f = E$, alors $f^*f = \|f\|^2 1$, donc soit $f = 0$, soit $f/\|f\|$ est un élément de \mathcal{C} , c'est-à-dire que f est une similitude. Inversement, il est clair que les similitudes conviennent.

B. - 5° On a $\|f\| = \sup \{ \|f(x)\|, \|x\| = 1 \} = \sup \{ \|A f(x)\|, \|x\| = 1 \} = \|A\| \|f\|$. De plus $x \mapsto A(x)$ est une bijection de la sphère-unité de E sur elle-même et donc

$$\|f\| \|A\| = \sup \{ \|f(A(x))\|, \|x\| = 1 \} = \sup \{ \|f(y)\|, \|y\| = 1 \} = \|f\|$$

B. - 6° soit $x \in M_A$, c'est-à-dire $\|A(x) - x\| = \|A - 1\| \|x\|$; comme A conserve la norme on a

$$\|A^2(x) - A(x)\| = \|A - 1\| \|A(x)\|, \quad \text{donc} \quad A(x) \in M_A.$$

Donc M_A est stable par A et puisque A est orthogonal, M_A est aussi stable par A .

B. - 7° D'après la question 5°, on a

$$m([A, B]) = \|ABA^{-1}B^{-1} - 1\| = \|(ABA^{-1}B^{-1} - 1)BA\| = \|AB - BA\|.$$

On en déduit que

$$m([A, B]) = \|(A - 1)(B - 1) - (B - 1)(A - 1)\| \leq 2\|A - 1\| \|B - 1\| = 2m(A)m(B).$$

B. - 8° On a $0 \leq m'(A) \leq m(A) = \|A - 1\| \leq \|A\| + \|1\| = 2$, et donc $0 \leq m(A) - m'(A) \leq 2$.

B. - 9° Soit $x \in M_A$, $x \neq 0$. Alors on a $\|(A - 1)(x)\| < m(A)\|x\|$ et si $M_A \neq \{0\}$, on obtient $m'(A) < m(A)$ car la sphère-unité de M_A est compacte et donc que

$$m'(A) = \sup \{ \|A(x) - x\|, x \in M_A, \|x\| = 1 \}$$

est atteint pour un certain x . Si $m(A) = m'(A)$, on a donc $M_A = \{0\}$ et donc $A = 1$.

B. - 10° On n'a $m(A) = m'(A) + 2$ que si $m(A) = 2$ et $m'(A) = 0$. Il faut donc que A induise 1 sur M_A et que pour tout x dans M_A on ait

$$\|A(x) - x\| = 2\|x\| = \|A(x)\| + \|x\|.$$

Ceci nécessite que A induise sur M_A une homothétie (car, pour tout x dans M_A , x et $A(x)$ doivent être colinéaires) qui ne peut être que -1 . A est donc la symétrie orthogonale par rapport à M_A . Inversement il est clair que pour tout sous-espace vectoriel F de E , si A est la symétrie orthogonale par rapport à F , on a $M_A = F^\perp$ et $M_A = F$ et donc $m(A) = 2$ et $m'(A) = 0$, soit $m(A) = m'(A) + 2$.