

SESSION DE 1985

(6407)

MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

DURÉE : 6 heures

PRÉAMBULE

Ce problème est consacré à l'étude de la question suivante : étant donné deux polygones du plan (resp. : deux polyèdres de l'espace) de même aire (resp. : de même volume), peut-on découper le premier en morceaux et déplacer ces morceaux de façon à reconstituer le second?

La partie I met en place les données et fournit quelques résultats généraux. La partie II est l'étude du problème en dimension 2 et la partie III constitue une première approche de cette étude en dimension 3. La partie IV construit les outils nécessaires à une étude plus approfondie, abordée dans la partie V.

DÉFINITIONS ET NOTATIONS

Soit n un entier naturel au moins égal à 2 et soit E un espace affine réel euclidien de dimension n , muni de sa topologie usuelle. On notera comme d'habitude $\overset{\circ}{X}$ et \bar{X} l'intérieur et l'adhérence d'une partie X de E .

On appelle *simplexe* de E toute partie S de E qui est l'enveloppe convexe de $n + 1$ points affinement indépendants de E ; l'ensemble de ces $n + 1$ points est uniquement déterminé par S : c'est l'ensemble des *sommets* du simplexe S .

Soient X et Y des parties de E ; on dira qu'elles sont *quasi disjointes* lorsque leurs intérieurs sont disjoints, c'est-à-dire $\overset{\circ}{X} \cap \overset{\circ}{Y} = \emptyset$. Soient X_1, \dots, X_k , X des parties de E ; les notations

$$X = \bigsqcup_{i=1}^k X_i \quad \text{ou} \quad X = X_1 \sqcup X_2 \sqcup \dots \sqcup X_k$$

signifient : pour tous i, j tels que $1 \leq i < j \leq k$ les parties X_i et X_j sont quasi disjointes et la réunion des X_i est X .

On appelle *polyèdre* de E toute partie (éventuellement vide) de E qui est la réunion d'un ensemble fini de simplexes deux à deux quasi disjoints.

On distingue parmi les polyèdres de E les *polytopes* : ce sont les polyèdres convexes non vides de E ; on admettra que les polytopes de E sont aussi caractérisés parmi les polyèdres par l'une des propriétés suivantes :

- 1° Il existe une partie finie génératrice de E dont le polytope est l'enveloppe convexe;
- 2° Il existe une famille finie de demi-espaces fermés dont le polytope est l'intersection.

On admettra de plus les résultats suivants sur les polytopes : soit P un polytope; alors :

- a. Soit k le nombre minimal de points dont P est l'enveloppe convexe. Alors il existe une et une seule partie ayant k éléments dont P est l'enveloppe convexe; c'est l'ensemble des *sommets* de P . Dans le cas particulier des simplexes, on retrouve la même notion de sommet;
- b. Soit m le nombre minimal d'éléments d'un ensemble de demi-espaces fermés dont P est l'intersection; alors il existe un et un seul tel ensemble ayant m éléments. Soit $\{F_1, \dots, F_m\}$ cet ensemble; la frontière H_i de F_i est un *hyperplan facial* de P . La frontière de P est la réunion des $H_i \cap P$, et chaque $H_i \cap P$ est un polytope de H_i , appelé *face* de P .

Tournez la page S. V. P.

On admettra sans démonstration que toutes les notions introduites ci-dessus sont invariantes par isométrie (et plus généralement par bijection affine).

On appellera *décomposition* d'un polyèdre P toute famille finie de polytopes deux à deux quasi disjoints dont P est la réunion. Soient (P_1, \dots, P_s) et (P'_1, \dots, P'_t) des décompositions du polyèdre P ; on dira que (P'_1, \dots, P'_t) est plus fine que (P_1, \dots, P_s) si tout P'_j est inclus dans au moins un P_i .

PARTIE I. — LES INVARIANTS DE DÉCOUPAGE

Dans cette partie, n est quelconque.

- I.1. Soient P_1, \dots, P_k des polyèdres deux à deux quasi disjoints; montrer que leur réunion est un polyèdre.
- I.2. *a.* Montrer que tout polyèdre est l'adhérence de son intérieur. On pourra commencer par le cas des simplexes.
b. Montrer que si P' est un polyèdre quasi disjoint de P , alors $\overset{\circ}{P}' \cap P = \emptyset$.
- I.3. Montrer que si P_1, \dots, P_k, P sont des polyèdres deux à deux quasi disjoints, alors les polyèdres $P_1 \perp\!\!\!\perp \dots \perp\!\!\!\perp P_k$ et P sont quasi disjoints.
- I.4. Soit P un polyèdre; soit (P_i) une décomposition de P , et soit (P'_j) une décomposition de P plus fine que (P_i) ; montrer que chaque P_i admet une décomposition formée de certains P'_j .
- I.5. Soit P un polyèdre; soit (H_1, \dots, H_m) une famille finie d'hyperplans de E , contenant les hyperplans faciaux des polytopes d'une décomposition de P ; montrer qu'il existe une seule décomposition (P_1, \dots, P_r) de P telle que

$$P \setminus \bigcup_{i=1}^m H_i = \bigcup_{j=1}^r \overset{\circ}{P}_j$$

(on pourra, pour chaque point de $\overset{\circ}{P}$, considérer l'ensemble des demi-espaces ouverts qui le contiennent et qui ont pour frontière l'un des H_i).

Ce type de décomposition sera appelé *dissection* de P .

- I.6. Étant donné deux décompositions (P_i) et (Q_j) d'un polyèdre P , montrer qu'il existe une dissection (R_k) de P telle que chaque P_i et chaque Q_j admette pour dissection une sous-famille de (R_k) .
Soit Π (resp. Π_c) l'ensemble des polyèdres (resp. des polytopes) de E . Soit A un groupe commutatif noté additivement; on dit qu'une application f de Π_c dans A est *additive* lorsque pour tout polytope P et toute dissection de P en deux polytopes P_1 et P_2 on a :

$$f(P) = f(P_1) + f(P_2)$$

- I.7. Soit f une application additive de Π_c dans un groupe commutatif \mathfrak{A} .
a. Montrer que pour tout polytope P et toute décomposition (P_i) de P on a :

$$f(P) = \sum_i f(P_i)$$

(on pourra traiter d'abord le cas d'une dissection).

- b.* Montrer qu'il existe une unique application \bar{f} de Π dans \mathfrak{A} qui prolonge f et telle que l'on ait

$$\bar{f}(P \perp\!\!\!\perp P') = \bar{f}(P) + \bar{f}(P')$$

pour tous polyèdres quasi disjoints P et P' .

Soit G un groupe d'isométries de E . On dira que deux polyèdres P et Q sont *G-équidécomposables* et l'on écrira $P \approx_G Q$, s'il existe des décompositions (P_i) de P , (Q_i) de Q , et des éléments (g_i) de G , $i = 1, 2, \dots, s$, tels que l'on ait $g_i(P_i) = Q_i$ pour tout i .

- I.8. Montrer que la relation $P \approx_G Q$ est une relation d'équivalence sur Π .
- I.9. Montrer que si deux polyèdres admettent des décompositions (P_i) et (Q_i) telles que P_i et Q_i soient *G-équidécomposables* pour tout i , alors P et Q sont *G-équidécomposables*.

I.10. Soit f une application additive de Π_c dans le groupe \mathcal{A} et soit \bar{f} son prolongement à Π .

On suppose que pour tout g de G , et pour tout polytope P , on a $f(g(P)) = f(P)$.

Montrer que l'on a $\bar{f}(P) = \bar{f}(Q)$ pour tout couple de polyèdres G -équidécomposables (P, Q) .

Une telle application \bar{f} sera appelée dans la suite un invariant de G -découpage.

On admettra en particulier que pour $n = 2$ (resp. 3), l'aire (resp. le volume) dans E est un invariant de G -découpage à valeurs réelles pour tout groupe d'isométries G .

PARTIE II. — ÉQUIDÉCOMPOSABILITÉ DANS LE PLAN

Dans cette partie, on suppose $n = 2$. Selon l'usage, on appellera polygones les polyèdres et polygones convexes les polytopes de E .

Un parallélogramme est l'enveloppe convexe de quatre points non alignés A, B, C, D , tels que $\vec{AB} = \vec{DC}$; on parlera alors du parallélogramme (ou du rectangle, ou du carré) $ABCD$. Les simplexes de E sont appelés triangles.

On désignera par T le groupe des translations de E et par S le groupe engendré par T et une symétrie par rapport à un point.

II.1. Donner les éléments de S .

II.2. Soient $ABCD$ et $A'B'C'D'$ deux parallélogrammes tels que $A = A', B = B'$ et que C, D, C', D' soient alignés. Montrer que $ABCD \underset{T}{\approx} A'B'C'D'$.

II.3. Montrer que tout triangle est S -équidécomposable à un parallélogramme.

II.4. En déduire que tout polygone est S -équidécomposable à une réunion de rectangles d'intérieurs disjoints.

II.5. Soit $ABCD$ un rectangle tel que $\|\vec{AB}\| = a, \|\vec{AD}\| = b, 0 < b < a$.

a. Montrer que $ABCD$ est T -équidécomposable à un carré. On pourra considérer le carré $AB'C'D'$ défini par $\vec{AB'} = -(\sqrt{b}/\sqrt{a})\vec{AB}$ et $\vec{AD'} = -(\sqrt{a}/\sqrt{b})\vec{AD}$.

b. Soit H une droite passant par A telle que $ABCD$ soit d'un même côté de H . Soit $A'B'C'D'$ l'image de $ABCD$ par la réflexion de droite H . Montrer que $ABCD$ et $A'B'C'D'$ sont T -équidécomposables.

c. En déduire que deux rectangles d'aires égales sont T -équidécomposables.

II.6. A quelle condition deux polygones sont-ils S -équidécomposables?

II.7. Soit \mathcal{A} le groupe des applications de l'ensemble des vecteurs non nuls du plan E dans \mathbb{R} et soit l'application β de Π_c dans \mathcal{A} définie comme suit : soit P un polygone convexe de sommets consécutifs $A_1, \dots, A_s, A_{s+1} = A_1$, de sorte que les droites faciales de P sont les droites $A_i A_{i+1}$ ($1 \leq i \leq s$) et M un point intérieur à P . On pose, pour tout vecteur non nul \vec{v} ,

$$\beta(P)(\vec{v}) = \sum_{i=1}^s \varepsilon_i(\vec{v}) \|\vec{A_i A_{i+1}}\|$$

où :

$$\varepsilon_i(\vec{v}) = 0 \text{ si } \vec{v} \cdot \vec{A_i A_{i+1}} \neq 0$$

$$\varepsilon_i(\vec{v}) = +1 \text{ si } \vec{v} \cdot \vec{A_i A_{i+1}} = 0 \text{ et } \vec{v} \cdot \vec{M A_i} > 0$$

$$\varepsilon_i(\vec{v}) = -1 \text{ si } \vec{v} \cdot \vec{A_i A_{i+1}} = 0 \text{ et } \vec{v} \cdot \vec{M A_i} < 0$$

a. L'application β dépend-elle du choix de M ?

b. Montrer que β s'étend en un invariant de T -découpage.

c. A quelle condition deux triangles sont-ils T -équidécomposables?

Tournez la page S. V, P.

PARTIE III. — ÉQUIDÉCOMPOSABILITÉ DANS L'ESPACE

On suppose dorénavant $n = 3$. Dans cette partie, on aborde l'étude de l'équidécomposabilité des polyèdres de E , c'est-à-dire de l'équidécomposabilité sous le groupe de toutes les isométries de E . On écrira simplement $P \approx Q$ si les polyèdres P et Q sont équidécomposables.

- III.1. Établir que, si P et Q sont deux parallélépipèdes rectangles de même volume, alors $P \approx Q$.
- III.2. *a.* Étant donné un polygone B d'un plan P et un vecteur \vec{v} non parallèle à P , montrer que l'ensemble des points $M + t\vec{v}$, où $M \in B$ et $0 \leq t \leq 1$, est un polyèdre, qu'on appellera un prisme de base B ; ce prisme est dit droit si \vec{v} est orthogonal à P .
- b.* Tout prisme est-il équidécomposable à un cube? On commencera par étudier le cas des prismes droits.
- III.3. On donne dans un repère orthonormé $Oxyz$, le tétraèdre V de sommets les points $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, et $(1, 1, 1)$.
- a.* Montrer que le cube défini par $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$ admet une décomposition en 6 tétraèdres isométriques à V .
- b.* Pour tout entier $m \geq 2$, exhiber une décomposition de V en m^3 tétraèdres semblables à V .
- N.B.* : Ici, et dans la suite, « P est semblable à Q dans le rapport $t > 0$ » signifie que P se déduit de Q par la composée d'une isométrie et d'une homothétie de rapport t ; on ne distingue donc pas les similitudes directes et inverses.
- c.* Dédurre de ce qui précède que V est équidécomposable à un cube.

PARTIE IV. — L'ESPACE VECTORIEL $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

Une application f d'un ensemble X dans \mathbb{Z} est dite à support fini si l'ensemble des éléments x de X tels que $f(x) \neq 0$ est fini (éventuellement vide). L'ensemble des applications à support fini de X dans \mathbb{Z} est manifestement un groupe abélien pour l'addition des applications (on ne demande pas de le vérifier), noté $\mathbb{Z}^{(X)}$.

On prend désormais pour X le produit cartésien $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ de deux groupes abéliens \mathcal{A} et \mathcal{B} ; si, pour $a \in \mathcal{A}$ et $b \in \mathcal{B}$, $\chi_{(a,b)}$ désigne la fonction qui vaut 1 au point (a, b) et 0 en tout autre point de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, tout élément f de $\mathbb{Z}^{(\mathcal{A} \times \mathcal{B})}$ a l'écriture :

$$f = \sum f(a, b) \chi_{(a,b)}$$

où les $f(a, b)$ sont des entiers relatifs tous nuls sauf un nombre fini d'entre eux.

On désigne par \mathcal{R} le sous-groupe de $\mathbb{Z}^{(\mathcal{A} \times \mathcal{B})}$ engendré par les éléments de la forme :

$$\chi_{(a,b)} + \chi_{(a',b)} - \chi_{(a+a',b)}$$

et

$$\chi_{(a,b)} + \chi_{(a,b')} - \chi_{(a,b+b')}$$

où a et a' (resp. b et b') varient arbitrairement dans \mathcal{A} (resp. \mathcal{B}).

On note alors $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ le groupe quotient $\mathbb{Z}^{(\mathcal{A} \times \mathcal{B})}/\mathcal{R}$ et, pour tout (a, b) dans $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, on note $a \otimes b$ la classe de $\chi_{(a,b)}$ modulo \mathcal{R} .

Le groupe $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ est dit produit tensoriel de \mathcal{A} et \mathcal{B} .

IV.1.a. Établir que l'ensemble des $a \otimes b$, où (a, b) parcourt $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, est une partie génératrice du groupe $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

b. Une application f de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ dans un groupe abélien \mathcal{C} sera dite biadditive si les applications :

$$a \longmapsto f(a, b) \quad \text{et} \quad b \longmapsto f(a, b)$$

de \mathcal{A} dans \mathcal{C} et de \mathcal{B} dans \mathcal{C} respectivement sont des homomorphismes.

Établir que l'application p de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ dans $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ définie par :

$$(a, b) \longmapsto a \otimes b$$

est biadditive.

c. Le symbole 0 désignant indifféremment les éléments neutres de \mathcal{A} , \mathcal{B} , $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, établir :

$$\forall a \in \mathcal{A}, \forall b \in \mathcal{B}, \quad 0 \otimes b = a \otimes 0 = 0$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall a \in \mathcal{A}, \forall b \in \mathcal{B}, \quad (na) \otimes b = a \otimes (nb) = n(a \otimes b)$$

IV.2. Montrer que, si f est une application biadditive de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ dans un groupe abélien \mathcal{C} , il existe un unique homomorphisme \bar{f} de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ dans \mathcal{C} tel que $f = \bar{f} \cdot p$.

IV.3. On suppose ici que \mathcal{A} est un espace vectoriel sur le corps commutatif K , et que \mathcal{B} est un groupe abélien quelconque. On définit une action de K sur $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ par :

$$\forall k \in K, \forall a \in \mathcal{A}, \forall b \in \mathcal{B}, \quad k.(a \otimes b) = (ka) \otimes b$$

Vérifier que cela définit sur $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ une structure de K -espace vectoriel.

Le seul exemple de produit tensoriel de deux groupes abéliens qui sera utilisé dans la suite sera $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, qui a, d'après ce que l'on vient de voir, une structure d'espace vectoriel sur \mathbb{R} telle que, si \bar{z} désigne la classe modulo \mathbb{Z} du réel z (notation qui sera désormais utilisée systématiquement).

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad \forall z \in \mathbb{R}, \quad (xy) \otimes \bar{z} = x(y \otimes \bar{z})$$

IV.4. Établir que l'on a dans $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ la propriété suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{Q}, \quad \forall z \in \mathbb{R}, \quad x \otimes (\bar{yz}) = (xy) \otimes \bar{z}$$

Dans la suite, on admet la possibilité de compléter toute famille de réels linéairement indépendants sur \mathbb{Q} en une base de \mathbb{R} sur \mathbb{Q} .

IV.5. a. Établir l'existence, pour tout nombre irrationnel y , d'un homomorphisme du groupe \mathbb{R} vers \mathbb{Q} tel que 1 ait pour image 0 et y pour image 1.

b. Soient x et y deux réels, $x \neq 0$; montrer que l'élément $x \otimes \bar{y}$ de $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est nul si et seulement si y est rationnel.

c. Montrer que si une famille (z_j) de réels est libre sur \mathbb{Q} et si 1 n'est pas engendré par cette famille, alors la famille $(1 \otimes \bar{z}_j)$ est libre dans l'espace vectoriel réel $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

IV.6. a. Établir l'existence d'une suite de polynômes $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à coefficients dans \mathbb{Z} , tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos \theta) = \cos n\theta$$

b. Calculer le terme de plus haut degré de T_n et son terme constant.

c. On donne un réel $\theta = \pi p/q$, où $p/q \in \mathbb{Q}$, tel que $\cos \theta \in \mathbb{Q}$. Donner les différentes valeurs possibles de $\cos \theta$; on commencera par le cas où q est impair : on montrera que $\cos \theta$ est de la forme 2^{-s} ou -2^{-s} , avec $s \in \mathbb{N}$, puis que $s = 0$ ou 1. On étudiera ensuite le cas où q est pair.

d. Soit θ_0 l'angle dièdre intérieur de deux faces d'un tétraèdre régulier. Calculer $\cos \theta_0$. Que peut-on dire de θ_0/π ?

PARTIE V. — L'INVARIANT DE DEHN

On rappelle que $n = 3$. On se propose dans cette dernière partie de définir un invariant de découpage pour les polyèdres de l'espace.

Soit P un polyèdre convexe, c'est-à-dire un polytope de E ; les côtés des faces de P sont appelés arêtes de P et constituent un ensemble de segments noté $A(P)$; à chaque arête a est associée une unique paire $\{H, H'\}$ de plans faciaux de P telle que a soit l'intersection de P , H et H' . On désigne par $\theta(a)$ une mesure en radians de l'angle dièdre limité par H et H' qui contient P , et par $l(a)$ la longueur du segment a . On pose enfin :

$$\Delta(P) = \sum_{a \in A(P)} l(a) \otimes \overline{(\theta(a)/\pi)} \in \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

ce qui définit une application de Π_c dans $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Tournez la page S. V. P.

V.1. Montrer que Δ s'étend en un invariant de découpage, qu'on appelle l'invariant de Dehn.

- V.2. a. Quel est l'invariant de Dehn du tétraèdre V étudié en III.3? Quel est celui d'un cube? Celui d'un prisme?
 b. Quel est l'invariant de Dehn d'un tétraèdre régulier d'arête 1? Un tétraèdre régulier est-il équidécoupable à un cube?

V.3. Soit P un polyèdre tel que $\Delta(P) \neq 0$.

- a. On donne m réels strictement positifs t_1, t_2, \dots, t_m et m polyèdres P_1, P_2, \dots, P_m d'intérieurs deux à deux disjoints et tels que, pour tout i variant de 1 à m , P_i soit semblable à P dans le rapport t_i ; soit Q la réunion des P_i . Calculer le volume $v(Q)$ de Q et $\Delta(Q)$ en fonction de $v(P)$, de $\Delta(P)$ et des nombres t_i .
 b. En déduire l'existence, pour tout réel $t \geq 1$, d'un polyèdre P_t tel que

$$v(P_t) = v(P) \quad \text{et} \quad \Delta(P_t) = t \cdot \Delta(P)$$

c. Étendre ce résultat au cas $0 < t < 1$.

d. Montrer l'existence d'un polyèdre P' tel que $\Delta(P') = -\Delta(P)$.

e. Étendre enfin le résultat du b. au cas d'un réel t quelconque.

V.4. Montrer que l'ensemble des valeurs de $\Delta(P)$, lorsque P décrit l'ensemble des polyèdres ayant un volume donné non nul v_0 , est un sous-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ et indépendant de v_0 du \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de E . On considère l'enveloppe convexe D des 20 points dont les coordonnées dans ce repère sont :

$$(\pm \rho/2, \pm \rho/2, \pm \rho/2), \quad (\pm \rho^2/2, 0, \pm 1/2), \quad (\pm 1/2, \pm \rho^2/2, 0), \quad (0, \pm 1/2, \pm \rho^2/2)$$

où $\rho = (1 + \sqrt{5})/2$ est la racine positive de l'équation $X^2 - X - 1 = 0$. Le polyèdre D est un dodécaèdre régulier.

V.5. Dessiner la projection de D sur le plan (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soit θ_D l'angle dièdre intérieur de deux faces adjacentes de D . Montrer que :

$$\cos \theta_D = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Calculer $\Delta(D)$ en fonction de θ_D .

V.6. En déduire que :

$$\forall m \in \mathbb{Z} - \{0\}, \quad \text{tg } m \theta_D \in \mathbb{Q}^*$$

V.7. On rappelle que l'enveloppe convexe des centres de gravité des faces de D est un icosaèdre régulier. Soit θ_I l'angle dièdre intérieur de deux faces d'un icosaèdre régulier. Montrer que :

$$\forall m \in \mathbb{Z} - \{0\}, \quad \text{tg } m \theta_I \in \mathbb{Q}^* \cdot \sqrt{5}$$

V.8. Montrer que les réels $\pi, \theta_D, \theta_I, \theta_0$, où l'on rappelle que θ_0 est l'angle dièdre de deux faces d'un tétraèdre régulier (cf. IV.6.d.), sont \mathbb{Q} -linéairement indépendants.

Que peut-on en conclure?