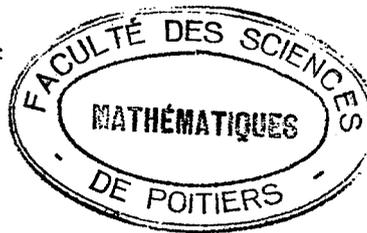


# Revue de Mathématiques Spéciales

Ce premier numéro de la 94<sup>e</sup> année de la *Revue de Mathématiques spéciales* propose un choix de sujets donnés en 1983 aux concours d'Agrégation et du CAPES et aux concours d'entrée aux Grandes écoles.

Cette documentation sera complétée par la parution dans les prochains numéros de questions orales proposées à différents concours d'entrée aux Grandes Écoles.

Les énoncés précédés d'un numéro seront résolus dans le courant de l'année 1983-1984, selon les révisions de parution qui figurent dans le numéro 2. Nos lecteurs peuvent nous faire parvenir des solutions de ces problèmes; la Rédaction examinera celles lui parvenant un mois avant la date de parution prévue.



## Agrégation de mathématiques

### Mathématiques générales

355. On désigne par  $E$  un espace vectoriel euclidien de dimension finie, le produit scalaire de deux vecteurs  $x$  et  $y$  étant noté  $(x|y)$ . Si  $x$  est un élément non nul de  $E$ , on note  $H_x$  l'hyperplan orthogonal à  $x$  et  $w_x$  la métrique orthogonale par rapport à l'hyperplan  $H_x$ . On appelle partie radicielle de  $E$  toute partie  $R$  de  $E$  vérifiant :

- (i)  $R$  est finie, engendre  $E$  et ne contient pas  $0$ ;
- (ii)  $\forall r \in R, w_r(R) \subset R$ ;
- (iii)  $\forall r \in R, \forall \lambda \in \mathbb{R}, (\lambda r \in R \Rightarrow \lambda = +1)$ .

On se fixe par la suite une telle partie radicielle de  $E$ . On note  $\mathcal{H} = \{H_r | r \in R\}$  et  $W$  le sous-groupe du groupe orthogonal de  $E$  engendré par les  $w_r$ , pour  $r$  parcourant  $R$ .  $E$  est muni de sa topologie naturelle.

#### PARTIE I.

- I.1. Montrer que  $W$  est fini. Son cardinal sera noté par la suite  $|W|$ .
- I.2. Soit  $E' = E \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H$ . Soit  $x$  un élément de  $E'$ . Rappeler pourquoi il existe une partie connexe maximale  $E'$  contenant  $x$  (composante connexe de  $x$  dans  $E'$ ). Une telle partie sera appelée une chambre (relativement à  $\mathcal{H}$ ). Montrer que deux chambres distinctes sont disjointes.
- I.3. Montrer que la chambre contenant le vecteur  $x$  de  $E'$  est l'intersection des demi-espaces ouverts délimités par les hyperplans de  $\mathcal{H}$  et qui contiennent  $x$ .
- I.4. Soit  $C$  une chambre. On dit qu'un hyperplan  $H \in \mathcal{H}$  est un mur de  $C$  si l'adhérence  $\bar{C}$  de  $C$  contient un ouvert de  $H$ . Montrer que tout hyperplan  $H$  de  $\mathcal{H}$  est mur d'au moins une chambre.

Dans toute la suite du problème on se fixe une chambre  $C$  dont on note les murs  $H_1, \dots, H_l$ . Pour  $i \in \{1, \dots, l\}$ , on désigne par  $w_i$  la symétrie orthogonale par rapport à  $H_i$ . Soit  $W'$  le sous-groupe de  $W$  engendré par  $w_1, \dots, w_l$ .

**I.5.a)** Soit  $b \in E'$ . On suppose que  $b$  est du même côté que  $C$  par rapport à tout mur de  $C$ . Montrer que  $b$  appartient à  $C$ .

**I.5.b)** Soit  $C'$  une chambre. Montrer qu'il existe  $w \in W'$  tel que  $w(C') = C$ . (Indication : on se fixe  $a \in C$  et  $a' \in C'$ . Considérer  $\inf_{w \in W'} d(a, w(a'))$ ).

**I.5.c)** En déduire, en utilisant I.4, que  $W' = W$ .

**I.6.a)** Soit  $x \in C$ . On note  $R^+$  l'ensemble des  $r \in R$  tels que  $(x|r) > 0$  et  $R^-$  l'ensemble des  $r \in R$  tels que  $(x|r) < 0$ . Montrer que la partition de  $R$  en  $R^+$  et  $R^-$  ne dépend pas du choix de  $x$  dans  $C$ . Les éléments de  $R^+$  seront dits positifs, ceux de  $R^-$  négatifs.

Si  $w$  appartient à  $W$ , on note  $n(w)$  le cardinal de l'ensemble  $\{r \in R^+ | w(r) \in R^-\}$ . Pour  $i \in \{1, \dots, l\}$ , on désigne par  $s_i$  l'élément de  $R^+$  orthogonal à  $H_i$ . Soit  $\Pi = \{s_1, \dots, s_l\}$ . On définit d'autre part une application dite longueur, de  $W$  dans l'ensemble des entiers naturels de la manière suivante : on pose  $l(\text{Id}) = 0$  et si  $w \in W \setminus \{\text{Id}\}$ ,  $l(w)$  est le plus petit entier  $k$  tel qu'il existe  $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, l\}$  tels que l'on ait :

$$w = w_{i_1} \dots w_{i_k}.$$

**I.6.b)** Soit  $H$  un mur de  $C$  et  $r$  l'élément de  $R^+$  orthogonal à  $H$ . On considère  $H'$  un hyperplan appartenant à  $\mathcal{H}$ , distinct de  $H$ . Montrer que  $C$  et  $w_r(C)$  sont d'un même côté de  $H'$  (Indication : on pourra utiliser une boule centrée sur  $H$  et ne rencontrant pas  $H'$ ). En déduire que  $w_r(r') \in R^+$  pour tout  $r' \in R^+$  distinct de  $r$ .

**I.6.c)** Montrer :  $\forall w \in W, \forall r \in \Pi, n(w w_r) = n(w) + \varepsilon_{r,w}$  avec

$$\varepsilon_{r,w} = +1 \text{ si } w(r) \in R^+ \quad \text{et} \quad \varepsilon_{r,w} = -1 \text{ si } w(r) \in R^-.$$

En déduire  $\forall w \in W, n(w) \leq l(w)$ .

**I.6.d)** Soit  $w \in W$  et soit  $w = w_{r_1} \dots w_{r_k}$  une décomposition de  $w$  avec

$$\forall i \in \{1, \dots, k\}, \quad r_i \in \Pi.$$

On suppose  $k > n(w)$ . Montrer qu'il existe un indice  $j \in \{1, \dots, k-1\}$  tel que

$$w_{r_1} \dots w_{r_j}(r_{j+1}) \in R^-,$$

puis qu'il existe un indice  $i \in \{1, \dots, j\}$  tel que

$$w_{r_1} \dots w_{r_i}(r_{j+1}) \in R^- \quad \text{et} \quad w_{r_{i+1}} \dots w_{r_j}(r_{j+1}) \in R^+.$$

En déduire que :  $w_{r_{i+1}} \dots w_{r_{j+1}} = w_{r_1} \dots w_{r_j}$ , puis que  $l(w) < k$ .

**I.6.e)** Montrer que  $\forall w \in W, n(w) = l(w)$ .

**I.7.** Montrer que si  $w \in W$  vérifie  $w(C) = C$ , alors  $w = \text{Id}_E$ .

## PARTIE II.

**II.1.** Soit  $x$  un élément non nul de  $E$  et  $y \in E$ . Montrer  $w_x(y) = y - \frac{2(x|y)}{(x|x)} x$ .

**II.2.a)** Montrer  $\forall r \in R, \exists w \in W, \exists s \in \Pi, r = w(s)$ .

**II.2.b)** Montrer que le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par  $\Pi$  est stable par  $W$  et en déduire que  $\Pi$  est une partie génératrice de  $E$ .

**II.3.** Soit  $r_1$  et  $r_2$  deux éléments distincts de  $\Pi$ .

**II.3.a)** Montrer, pour  $i \in \{1, 2\}$  l'existence d'un élément  $b_i$  de  $\bar{C} \cap H_{r_i}$  tel que  $b_i$  n'appartienne à aucun hyperplan  $H \in \mathcal{H} \setminus \{H_{r_i}\}$ .

**II.3.b)**  $b_1$  et  $b_2$  étant ainsi choisis, montrer que tout point du segment  $[b_1, b_2]$  distinct de  $b_1$  et  $b_2$  appartient à  $C$ .

Pour rendre que b C et s que le R+ } tion, et si ant à oule

**II.3.c)** Soit  $L$  un hyperplan de  $E$  contenant l'intersection  $H_{r_1} \cap H_{r_2}$ . On suppose que  $L$  contient un élément  $x$  vérifiant :  $(x|r_1) > 0$  et  $(x|r_2) > 0$ . Montrer que  $L$  rencontre  $C$  (on pourra prendre un vecteur  $v \in L \setminus \{0\}$  et considérer les signes de  $(v|b_1)$  et  $(v|b_2)$ ).

**II.3.d)** En considérant l'hyperplan  $L = w_{r_2}(H_{r_1})$  montrer que  $(r_1|r_2) \leq 0$ .

**II.4.** Montrer que  $\Pi$  est une base de  $E$  (dans une relation de dépendance linéaire entre les  $s_i$ , on pourra séparer les coefficients positifs et les coefficients négatifs).

**II.5.** Soit  $R^{++}$  l'ensemble des éléments de  $R$  dont toutes les coordonnées dans la base  $\Pi$  sont positives ou nulles. On fait l'hypothèse suivante :  $R^{++} \neq R^+$ . Si  $r$  appartient à  $R^+ \setminus R^{++}$ , on note  $\theta(r)$  la somme des coordonnées de  $r$  dans la base  $\Pi$  et on choisit  $r_0$  dans  $R^+ \setminus R^{++}$  vérifiant

$$\forall r \in R^+ \setminus R^{++}, \quad \theta(r_0) \leq \theta(r).$$

On pose  $r_0 = \sum_{i=1}^l \lambda_i s_i$ .

**II.5.a)** Soit  $i \in \{1, \dots, l\}$  tel que  $\lambda_i \geq 0$ . En considérant  $w_{s_i}(r_0)$  montrer que  $(r_0|s_i) \leq 0$ .

**II.5.b)** Soit  $v = \sum_i \lambda_i s_i$  la somme étant prise sur les indices  $i$  pour lesquels  $\lambda_i \geq 0$ . Montrer  $(v|v) \leq 0$  et en conclure que l'hypothèse faite était absurde et que donc  $R^+ = R^{++}$ .

Soit  $J$  une partie de  $\Pi$ . Soit  $E_J$  le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par  $J$ , soit  $R_J = R \cap E_J$ ,  $W_J$  le sous-groupe de  $W$  engendré par  $\{w_r | r \in J\}$  et

$$C_J = \{x \in E_J | \forall r \in J (r|x) > 0\}.$$

**II.6.** Montrer que  $R_J$  est un système radiciel dans  $E_J$ , que  $C_J$  en est une chambre et que les murs de  $C_J$  sont les  $H_r \cap E_J$  pour  $r$  parcourant  $J$ . En déduire que le groupe associé à ce système radiciel est isomorphe à  $W_J$ .

**II.7.** Soit  $D_J = \{w \in W | \forall r \in J, w(r) \in R^+\}$ . Montrer que pour tout élément  $w$  de  $W$  il existe un unique couple  $(d_J, w_J) \in D_J \times W_J$  tel que  $w = d_J w_J$ . Montrer de plus que  $l(w) = l(d_J) + l(w_J)$ .

**II.8.** Soit  $K_J = \{v \in E_J^+ | \forall r \in \Pi \setminus J, (v|r) > 0\}$ .

**II.8.a)** Montrer que  $K_J$  n'est pas vide.

**II.8.b)** Montrer que  $K_J$  est contenu dans l'adhérence de la chambre  $C$ .

**II.8.c)** Soit  $J$  et  $J'$  deux parties de  $\Pi$ . On suppose qu'il existe  $w \in W$  vérifiant  $w(K_J) \cap K_{J'} \neq \emptyset$ . Montrer que  $J = J'$ .

**II.9.** Montrer  $W_J = \{w \in W | w(K_J) \subset K_J\} = \{w \in W | \forall x \in K_J, w(x) = x\}$ .

**II.10.** Soit  $x$  un élément de  $E$ . Montrer qu'il existe une unique partie  $J$  de  $\Pi$  vérifiant : il existe  $w \in W$  tel que  $w(x) \in K_J$ .

**PARTIE III.**

Soit  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_l)$  une base de  $E$ . Une application  $f$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  est dite polynomiale s'il existe  $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_l]$  tel que

$$\forall (x_1, \dots, x_l) \in \mathbb{R}^l, \quad f(x_1 e_1 + \dots + x_l e_l) = P(x_1, \dots, x_l).$$

Il est clair que cette définition est en fait indépendante de la base choisie, de même que le degré de  $P$  (qui sera donc appelé degré de  $f$ ) ou que le fait que le polynôme  $P$  soit homogène (on dira alors que  $f$  est homogène). Les applications polynomiales forment une sous-algèbre de l'algèbre des applications de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ . Cette sous-algèbre sera notée  $S$ ; elle est isomorphe à  $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_l]$ . Soit

$$S^+ = \{f \in S | f(0) = 0\}.$$

On fait agir  $W$  sur  $S$  en posant  $\forall w \in W, \forall p \in S, \forall x \in E, w(p)(x) = p(w^{-1}(x))$ . Soit  $I$  la sous-Ralgèbre de  $S$  des éléments invariants par  $W$  :  $I = \{p \in S | \forall w \in W, w(p) = p\}$ . Soit  $I^+ = S^+ \cap I$  et soit  $SI^+$  l'idéal de  $S$  engendré par  $I^+$ . Si  $p \in S$ , on pose

$$m(p) = \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} w(p).$$

III.1. Montrer que si  $p$  appartient à  $S$  alors  $m(p)$  appartient à  $I$  et que si  $p$  appartient à  $S^+$  alors  $m(p)$  appartient à  $I^+$ .

III.2. Montrer qu'il existe une partie finie de  $I$  formée de fonctions polynomiales homogènes et engendrant l'idéal  $SI^+$  (on admettra que  $S$  vérifie la propriété suivante : soit  $J$  un idéal de  $S$  et  $G$  une partie génératrice de  $J$  alors  $G$  contient une partie finie génératrice de  $J$ ). On se fixe une telle partie  $\{I_1, \dots, I_s\}$ , que l'on suppose de plus minimale pour cette propriété. On pose  $d_i = \deg(I_i)$  pour  $i$  variant de 1 à  $s$ .

III.3. Montrer  $\forall f \in I, \exists P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_s], f = P(I_1, \dots, I_s)$ . (On se ramènera à montrer le résultat pour  $f$  homogène et on fera une récurrence sur le degré de  $f$ .)

III.4. Soit  $f_1, \dots, f_k$  des éléments de  $I$  tels que  $f_1$  n'est pas dans l'idéal de  $I$  engendré par  $f_2, \dots, f_k$ . Soit  $p_1, \dots, p_k$  des éléments homogènes de  $S$ . On cherche à démontrer par récurrence sur le degré  $p_1$  la propriété suivante :

$$p_1 f_1 + \dots + p_k f_k = 0 \Rightarrow p_1 \in SI^+.$$

III.4.a) Montrer que  $f_1$  n'est pas dans l'idéal de  $S$  engendré par  $f_2, \dots, f_k$  et conclure dans le cas où  $p_1$  est constant.

III.4.b) On suppose désormais  $\deg(p_1) > 0$ . Soit  $r \in \mathbb{R}$  et  $h_r$  l'élément de  $S$  défini par  $\forall x \in E, h_r(x) = (r|x)$ . Montrer que  $h_r$  divise dans  $S, w_r(p_i) - p_i$  pour  $i$  variant de 1 à  $k$ . On posera

$$w_r(p_i) - p_i = h_r q_i.$$

III.4.c) Montrer  $q_1 f_1 + \dots + q_k f_k = 0$ .

III.4.d) En utilisant l'hypothèse de récurrence, montrer que :

$$\forall w \in W, \quad w(p_1) - p_1 \in SI^+$$

et en déduire que  $p_1$  appartient à  $SI^+$ .

III.5. Soit  $d \in \mathbb{N}, P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_s], P = \sum_{(k_1, \dots, k_s) \in \mathbb{N}^s} a_{k_1, \dots, k_s} X_1^{k_1} \dots X_s^{k_s}$ .

On suppose vérifiées les trois conditions :

$$(a) \quad P \neq 0; \quad (b) \quad P(I_1, \dots, I_s) = 0;$$

$$(c) \quad \text{si } a_{k_1, \dots, k_s} \text{ est non nul, alors } k_1 d_1 + \dots + k_s d_s \text{ est égal à } d.$$

Pour  $i = 1, \dots, s$  soit  $p_i = \frac{\partial P}{\partial X_i}(I_1, \dots, I_s)$ . Soit  $K$  l'idéal de  $I$  engendré par  $\{p_1, \dots, p_s\}$  et on suppose les notations choisies de telle manière que  $\{p_1, \dots, p_m\}$  soit une partie génératrice minimale de cet idéal.

III.5.a) Montrer que les applications polynomiales  $p_i$  sont homogènes.

III.5.b) Montrer qu'il existe pour  $i > m$  et  $1 \leq j \leq m$  des applications polynomiales  $q_{i,j}$  homogènes de degré  $\deg(I_j) - \deg(I_i)$  telles que

$$\forall i > m, \quad p_i = \sum_{j=1}^m q_{i,j} p_j.$$

III.5.c) On se fixe une base  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_l)$  de  $E$  et si  $f$  est élément de  $S$  on note  $\frac{\partial f}{\partial x_k}$  la  $k$ -ième dérivée partielle de l'application  $(x_1, \dots, x_l) \mapsto f(x_1 e_1 + \dots + x_l e_l)$ .

Montrer pour  $k = 1, \dots, l$   $\sum_{i=1}^m p_i \left( \frac{\partial I_i}{\partial x_k} + \sum_{j=m+1}^s q_{j,i} \frac{\partial I_j}{\partial x_k} \right) = 0$  et en déduire

$$\forall k \in \{1, \dots, l\} \quad \frac{\partial I_1}{\partial x_k} + \sum_{j=m+1}^s q_{j,1} \frac{\partial I_j}{\partial x_k} \in SI^+.$$

III.5.d) Montrer qu'il existe des éléments  $R_1, \dots, R_s$  de  $S^+$  tels que

$$d_1 I_1 + \sum_{j=m+1}^s d_j q_{j,1} I_j = \sum_{i=1}^s I_i R_i.$$

III.5.e) Montrer que ceci contredit la définition de  $I_1, \dots, I_s$ .

III.6. Soit  $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_s]$  tel que  $P(I_1, \dots, I_s) = 0$ . Montrer que  $P = 0$  (c'est-à-dire que  $I$  est isomorphe à  $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_s]$ ).

III.7. Soit  $I'_1, \dots, I'_t$  une autre partie finie de  $I$  formée de fonctions polynomiales homogènes, engendrant l'idéal  $SI^+$  et minimale pour cette propriété. Montrer que  $s = t$ .

## PARTIE IV.

Soit  $N$  le cardinal de  $R^+$ .

IV.1. Montrer qu'il existe un unique élément  $w_0$  de  $W$  de longueur  $N$  et que  $\forall w \in W, l(w) \leq N$ .  
A toute partie  $J$  et  $\Pi$  on associe les deux polynômes :

$$P_J(t) = \sum_{w \in W_J} t^{l(w)} \quad \text{et} \quad T_J(t) = \sum_{w \in D_J} t^{l(w)} \quad (D_J \text{ est défini en II.7}).$$

IV.2. Montrer  $P_\Pi(t) = P_J(t)T_J(t)$  et en déduire : ( $|J|$  désignant le cardinal de la partie  $J$ )

$$\sum_{J \subset \Pi} (-1)^{|J|} \frac{P_\Pi(t)}{P_J(t)} = t^N.$$

IV.3. Soit  $F$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $\mathcal{H}$  une famille finie d'hyperplans de  $F$ . On introduit sur  $F$  la relation d'équivalence suivante :  $x \mathcal{R} y$  signifie : pour tout hyperplan  $H$  de  $\mathcal{H}$ , ou bien  $x$  et  $y$  sont tous deux sur  $H$ , ou bien  $x$  et  $y$  appartiennent à un même demi-espace ouvert limité par  $H$ . Pour  $i$  entier naturel on désigne par  $n_i$  le nombre de classes d'équivalence engendrant dans  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension  $i$ . Montrer que

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i n_i = (-1)^{\dim F}.$$

(On pourra faire une récurrence sur le nombre d'hyperplans.)

Si  $J$  est une partie de  $\Pi$  et  $w$  un élément de  $W$ , on note  $n_J(w)$  le nombre de classes à gauche  $vW_J$  dans  $W$  telles que  $wvW_J = vW_J$ .

IV.4.a) Soit  $v$  un élément de  $W$ . Montrer que  $wvW_J = vW_J$  si et seulement si  $wv(K_J) = v(K_J)$  (cf. notations de II.8) et que dans ce cas  $v(K_J)$  est contenu dans  $\text{Ker}(w - \text{Id}_E)$ .

IV.4.b) En appliquant les résultats de la question IV.3 à  $F = \text{Ker}(w - \text{Id}_E)$  montrer que

$$\sum_{J \subset \Pi} (-1)^{|J|} n_J(w) = \det(w).$$

IV.5. Soit  $f$  un élément de  $S$  vérifiant  $\forall w \in W, w(f) = \det(w)f$ . Montrer qu'il existe un élément  $p$  de  $I$  tel que

$$f = p \prod_{r \in R^+} h_r$$

(se reporter à III.4 pour la signification de  $h_r$ ).

Soit  $S_n$  l'espace vectoriel des fonctions polynomiales homogènes de degré  $n$ , soit

$$I_n = I \cap S_n, \quad A_n = \{f \in S_n \mid \forall w \in W, w(f) = \det(w)f\}.$$

Soit  $U_n$  l'application linéaire de  $S_n$  dans  $S_n$  définie par : (cf. III),  $U_n(f) = m(f)$ . Pour un élément  $w$  de  $W$  on désigne par  $\chi_n(w)$  la trace de l'application linéaire  $f \mapsto w(f)$  de  $S_n$  dans  $S_n$ .

IV.6. Montrer  $\forall n \in \mathbb{N}, \dim A_n = \dim I_{n-N} (= 0 \text{ si } n < N)$  et  $\dim I_n = \text{tr}(U_n)$ .

IV.7. Montrer  $\forall w \in W, \sum_{v \in W, vww^{-1} \in W_J} \chi_n(vww^{-1}) = \chi_n(w)n_J(w)|W_J|$  et en déduire

$$\sum_{J \subset \Pi} \frac{(-1)^{|J|}}{|W_J|} \sum_{v \in W, vww^{-1} \in W_J} \chi_n(vww^{-1}) = \chi_n(w) \det(w).$$

IV.8. En sommant l'identité précédente sur  $w \in W$ , montrer que

$$\prod_{J \subset \Pi} (-1)^{|J|} \dim(I_{J,n}) = \dim A_n \quad \text{où} \quad I_{J,n} = \{f \in S_n \mid \forall w \in W_J, w(f) = f\}.$$

IV.9. Soit  $d_1, \dots, d_s$  les entiers naturels définis en III.2. On définit le polynôme

$$Q(t) = \prod_{i=1}^s \left( \frac{t^{d_i} - 1}{t - 1} \right)$$

et de même à toute partie  $J$  de  $\Pi$  on associe un polynôme  $Q_J(t)$  défini de la même manière, mais pour le système radiciel  $R_J$  dans  $E_J$ .

IV.9.a) Montrer que le coefficient de  $t^n$  dans le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{(1-t)^s Q(t)}$$

est  $\dim(I_n)$ .

IV.9.b) On admettra à partir de maintenant que  $s = l$ . Montrer que :

$$\sum_{J \subset \Pi} (-1)^{|J|} \frac{Q(t)}{Q_J(t)} = t^N.$$

IV.10.a) Soit  $J$  une partie de  $\Pi$  et  $w$  un élément de  $W_J$ . Montrer que la longueur de  $w$  est la même que l'on considère  $w$  comme élément du groupe  $W$  associé au système radiciel  $R$  ou du groupe  $W_J$  associé à  $R_J$ .

IV.10.b) Montrer que  $Q = P_\Pi$  (utiliser un raisonnement par récurrence).

## Agrégation de mathématiques

### Composition d'analyse

#### PRÉAMBULE.

Si  $z$  est un nombre complexe non nul, on note  $\text{Arg}(z)$  l'unique détermination de l'argument de  $z$  qui appartient à l'intervalle  $[-\pi, \pi[$ , et on pose

$$\text{Log}(z) = \text{Log}|z| + i \text{Arg}(z),$$

puis, pour tout nombre complexe  $a$ ,  $z^a = e^{a \text{Log}(z)}$ .

Si  $z$  est un nombre complexe, on note  $\text{Re}(z)$  sa partie réelle,  $\text{Im}(z)$  sa partie imaginaire.

Les propriétés suivantes de la fonction  $\Gamma$  pourront être utilisées sans démonstration.

Pour  $\text{Re}(z) > 0$ , on pose

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

La fonction  $\Gamma$  est holomorphe dans le demi-plan  $\text{Re}(z) > 0$ . Elle se prolonge en une fonction méromorphe dans  $\mathbb{C}$  dont les pôles sont les entiers négatifs ou nuls. Si  $z$  n'est pas un pôle, on a

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad \text{et} \quad \Gamma(z) \neq 0.$$

Soit  $\delta$  un nombre réel,  $0 < \delta \leq \pi$ . Le nombre complexe  $a$  étant fixé, on a, pour  $z$  complexe vérifiant  $|\text{Arg} z| \leq \pi - \delta$ ,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z)z^a} = 1.$$