

## Mathématiques générales - 1982 Xoni

## Série 10 (devoir n°5)

Exercice 1 Trouver l'équation admettant pour racines les différentes valeurs du rapport anharmonique de quatre nombres donnés.

Exercice 2 Résoudre l'équation

$$x^5 - 209x + 56 = 0$$

sachant que le produit de deux racines est égal à 1.

---

 Problème
 

---

## RAPPELS.

6325. On rappelle que, pour  $n$  et  $k$  entiers naturels,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

et que, par convention,  $0! = 1$ . Les candidats pourront utiliser la notation  $C_n^k$  si elle leur est plus familière. La notation  $\mathbb{N}$  désigne l'ensemble des entiers positifs ou nuls (entiers naturels).

## OBJET DU PROBLÈME.

Soit  $K$  un corps commutatif de caractéristique nulle. Dans tout le problème,  $\mathcal{P}$  désigne l'algèbre  $K[x]$  des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans  $K$ . On note  $\mathcal{P}^*$  le dual de  $\mathcal{P}$ , c'est-à-dire l'espace vectoriel des formes linéaires sur  $\mathcal{P}$ . Si  $L$  appartient à  $\mathcal{P}^*$  et  $p$  à  $\mathcal{P}$ , on note  $\langle L, p \rangle$  la valeur de  $L$  sur  $p$ .

Une suite polynomiale  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments de  $\mathcal{P}$  tels que, pour tout  $n$ , le polynôme  $p_n$  soit exactement de degré  $n$ . En particulier  $p_0$  est un polynôme constant non nul. On remarquera que les éléments d'une telle suite forment une base de  $\mathcal{P}$ .

Une suite binomiale est une suite polynomiale  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que, pour tout  $n$ , on ait, dans  $K[x, y]$  l'identité

$$p_n(x+y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p_k(x) p_{n-k}(y).$$

Par exemple, la suite  $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est binomiale.

L'objet du problème est l'étude des suites binomiales. Toutefois ces suites n'interviennent pas dans la première partie.

PREMIÈRE PARTIE.

Pour tout élément  $a$  de  $K$ , on note  $\varepsilon_a$  l'élément de  $\mathcal{P}^*$  défini par

$$\langle \varepsilon_a, p \rangle = p(a) \quad \text{pour tout } p \in \mathcal{P}$$

et l'on pose  $\varepsilon = \varepsilon_0$ .

Soit  $L$  et  $M$  deux éléments de  $\mathcal{P}^*$  et  $L \otimes M$  la forme linéaire sur  $K[x, y]$  définie par

$$\langle L \otimes M, x^i y^j \rangle = \langle L, x^i \rangle \langle M, y^j \rangle \quad \text{pour } i, j \in \mathbb{N}.$$

On appelle produit de  $L$  et de  $M$  et on note  $LM$ , la forme linéaire sur  $\mathcal{P}$  définie par

$$\langle LM, p \rangle = \langle L \otimes M, p(x + y) \rangle \quad \text{pour tout } p \in \mathcal{P}.$$

En particulier si  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite binomiale, on a

$$\langle LM, p_n \rangle = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \langle L, p_k \rangle \langle M, p_{n-k} \rangle.$$

Muni de ce produit, l'espace vectoriel  $\mathcal{P}^*$  est une algèbre associative sur  $K$  (on ne demande pas de vérifier cette assertion).

1° Démontrer que l'algèbre  $\mathcal{P}^*$  admet  $\varepsilon$  comme élément unité et que, pour  $a$  et  $b$  éléments de  $K$ , on a  $\varepsilon_a \varepsilon_b = \varepsilon_{a+b}$ .

2° Si  $L$  est un élément non nul de  $\mathcal{P}^*$ , on note  $v(L)$  le plus petit entier  $n$  tel que  $\langle L, x^n \rangle$  soit non nul. On pose

$$|L| = 2^{-v(L)}$$

et  $|0| = 0$ .

a) Démontrer, pour  $L$  et  $M$  appartenant à  $\mathcal{P}^*$ , que

$$|L + M| \leq \sup(|L|, |M|) \quad \text{et} \quad |LM| = |L| |M|.$$

b) Soit, pour  $L$  et  $M$  appartenant à  $\mathcal{P}^*$ ,  $d(L, M) = |L - M|$ ; démontrer que  $d$  est une distance sur  $\mathcal{P}^*$ . On munit  $\mathcal{P}^*$  de la topologie associée à  $d$  et  $K$  de la topologie discrète (toute partie de  $K$  est donc ouverte). On munit  $\mathcal{P}^* \times \mathcal{P}^*$  et  $K \times \mathcal{P}^*$  des topologies produites correspondantes. Établir, pour  $L$  et  $M$  appartenant à  $\mathcal{P}^*$  et  $a$  appartenant à  $K$ , la continuité des applications

$$(L, M) \mapsto L + M, \quad (L, M) \mapsto LM \quad \text{et} \quad (a, L) \mapsto aL.$$

De même,  $p$  étant un élément fixé de  $\mathcal{P}$ , démontrer que l'application

$$L \mapsto \langle L, p \rangle$$

de  $\mathcal{P}^*$  dans  $K$  est continue.

c) Démontrer que  $\mathcal{P}^*$  est complet.

3° Soit  $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\mathcal{P}^*$ . Démontrer que la série de terme général  $L_n$  est convergente si et seulement si la suite  $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers 0.

4° Soit  $L$  un élément de  $\mathcal{P}^*$ . Démontrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes

i)  $\langle L, 1 \rangle = 0$ ;

ii) La suite  $(L^n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers 0;

iii) Pour toute suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $K$ , la série de terme général  $a_n L^n$  est convergente.

(On convient, pour  $L$  appartenant à  $\mathcal{P}^*$ , que  $L^0 = \varepsilon$ ; de même, si  $a$  appartient à  $K$ , on a  $a^0 = 1$ ).

5° Soit  $L$  un élément non nul de  $\mathcal{P}^*$ , et posons  $v(L) = m$ . Démontrer que, pour tout entier naturel  $k$ , on a  $v(L^k) = km$

et que

$$\langle L^k, x^{km} \rangle = \frac{(km)!}{(m!)^k} \langle L, x^m \rangle^k.$$

6° On rappelle que,  $n$  et  $k$  étant deux entiers naturels,

$$\delta_{n,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k \\ 0 & \text{si } n \neq k \end{cases}$$

Soit  $A$  l'élément de  $\mathcal{P}^*$  défini par

$$\langle A, x^n \rangle = \delta_{n,1} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

Démontrer que, pour  $n$  et  $k$  entiers naturels, on a

$$\langle A^k, x^n \rangle = k! \delta_{n,k}.$$

Pour un polynôme  $p$ , que représente  $\langle A^k, p \rangle$  ?

#### DEUXIÈME PARTIE.

On note  $\mathcal{P}_0^*$  l'ensemble des éléments non nuls  $L$  de  $\mathcal{P}^*$  tels que  $v(L) = 1$ .

1° a) Soit  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite binomiale. Montrer que  $p_0 = 1$  et que, pour  $n$  non nul, on a  $p_n(0) = 0$ .

b) Démontrer qu'une suite polynomiale  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est binomiale si et seulement si, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout  $a$  et  $b$  appartenant à  $K$ , on a

$$\langle \varepsilon_a \varepsilon_b, p_n \rangle = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \langle \varepsilon_a, p_k \rangle \langle \varepsilon_b, p_{n-k} \rangle.$$

2° Soit  $L$  un élément de  $\mathcal{P}_0^*$ . Démontrer que si un polynôme  $p$  vérifie, pour tout entier naturel  $k$ ,

$$\langle L^k, p \rangle = 0$$

alors  $p = 0$ . Démontrer qu'il existe une unique suite polynomiale  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que, pour tout  $n$  et  $k$  entiers naturels, on ait

$$\langle L^k, p_n \rangle = k! \delta_{n,k}.$$

On dit que la suite  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la *suite associée* à  $L$ .

3° Soit  $L$  un élément de  $\mathcal{P}_0^*$  et  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite associée. Soit  $M$  un élément de  $\mathcal{P}^*$ . Démontrer qu'il existe une unique suite  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $K$  telle que

$$M = \sum_{k=0}^{\infty} a_k L^k$$

et que

$$a_k = \frac{\langle M, p_k \rangle}{k!} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

4° Démontrer que, si  $M$  et  $N$  sont deux éléments de  $\mathcal{P}^*$  et  $L$  un élément de  $\mathcal{P}_0^*$  de suite associée  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , alors

$$\langle MN, p_n \rangle = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \langle M, p_k \rangle \langle N, p_{n-k} \rangle.$$

(On pourra commencer par le cas où  $M$  et  $N$  sont des puissances de  $L$ ).

5° Démontrer que la suite associée à un élément de  $\mathcal{P}_0^*$  est binomiale et qu'inversement toute suite binomiale est la suite associée à un unique élément de  $\mathcal{P}_0^*$ .

6° a) Soit  $L$  un élément de  $\mathcal{P}_0^*$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\langle L^k, x^n \rangle}{k!} x^k.$$

Démontrer que la suite  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est binomiale (on pourra revenir à la définition d'une suite binomiale).

b) Démontrer qu'inversement toute suite binomiale s'obtient de cette manière à partir d'un unique élément de  $\mathcal{P}_0^*$ .

c) Pour tout élément  $M$  de  $\mathcal{P}_0^*$ , de suite associée  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , il existe ainsi un unique élément  $\tilde{M}$  de  $\mathcal{P}_0^*$  tel que, pour tout entier naturel  $n$ , on ait

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\langle \tilde{M}^k, x^n \rangle}{k!} x^k.$$

On dit que  $\tilde{M}$  est le *conjugué* de  $M$ . Calculer  $\tilde{A}$ .

## TROISIÈME PARTIE.

1° a) Soit  $T$  une application linéaire de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathcal{P}$ ; on note  $T^*$  l'application linéaire de  $\mathcal{P}^*$  dans  $\mathcal{P}^*$  transposée de  $T$ . Démontrer que  $T^*$  est continue.

b) Soit  $U$  une application linéaire continue de  $\mathcal{P}^*$  dans  $\mathcal{P}^*$ . Démontrer que, pour tout polynôme  $p$ , il existe un unique polynôme  $q$  tel que, pour tout entier naturel  $k$ , l'on ait

$$\langle U(A^k), p \rangle = \langle A^k, q \rangle.$$

En déduire que  $U$  est la transposée d'une application linéaire de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathcal{P}$ .

2° Soit  $L$  un élément de  $\mathcal{P}_0^*$  et  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite associée.

a) Soit  $\alpha_L$  l'application linéaire de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathcal{P}$  définie par

$$\alpha_L(x^n) = p_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Déterminer  $\alpha_L^*(L^k)$  pour  $k \in \mathbb{N}$ .

b) Soit  $\mathcal{A}$  l'ensemble des  $\alpha_L$  pour  $L$  appartenant à  $\mathcal{P}_0^*$ . Démontrer qu'une application linéaire  $\alpha$  de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathcal{P}$  appartient à  $\mathcal{A}$  si et seulement si  $\alpha^*$  est un isomorphisme algébrique et topologique de l'algèbre  $\mathcal{P}^*$  sur elle-même.

c) Soit  $\theta_L$  l'application linéaire de  $\mathcal{P}^*$  dans  $\mathcal{P}$  définie par

$$\theta_L(p_n) = p_{n+1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Une dérivation de  $\mathcal{P}^*$  est une application linéaire  $\partial$  de  $\mathcal{P}^*$  dans  $\mathcal{P}^*$  telle que, pour tout  $M$  et  $N$  appartenant à  $\mathcal{P}^*$ , ont ait

$$\partial(MN) = M \partial(N) + \partial(M)N.$$

Démontrer que  $\theta_L^*$  est une dérivation surjective de  $\mathcal{P}^*$  et qu'inversement, pour toute dérivation continue surjective  $\partial$  de  $\mathcal{P}^*$ , il existe un élément  $L$  de  $\mathcal{P}_0^*$  tel que  $\partial = \theta_L^*$ . On pose

$$\partial_L = \theta_L^*.$$

Calculer  $\partial_L(L^k)$  pour  $k$  entier naturel et préciser le noyau de  $\partial_L$ .

3° Soit  $\alpha$  une application linéaire de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathcal{P}$  et soit  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite binomiale quelconque. Démontrer que  $\alpha$  appartient à  $\mathcal{A}$  si, et seulement si, la suite  $(\alpha(p_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est binomiale.

4° a) Soit  $L$  et  $M$  deux éléments de  $\mathcal{P}_0^*$ . Démontrer qu'il existe un unique élément de  $\mathcal{P}_0^*$ , noté  $L \circ M$ , tel que

$$\alpha_{L \circ M} = \alpha_L \circ \alpha_M.$$

b) Démontrer que  $\mathcal{P}_0^*$ , muni de la loi  $\circ$  que l'on vient de définir, est un groupe. Quel est son élément neutre ?

c) Soit  $L$  et  $M$  deux éléments de  $\mathcal{P}_0^*$  et soit  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  les suites respectivement associées à  $L$ ,  $M$  et  $L \circ M$ . Démontrer que si

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^n c_{n,k} x^k \quad \text{alors} \quad r_n(x) = \sum_{k=0}^n c_{n,k} p_k(x).$$

5° Soit  $L$  un élément de  $\mathcal{P}_0^*$  et  $\bar{L}$  son conjugué (cf. deuxième partie, 6° c). Montrer que  $\bar{L} \circ L = A$ . Quel est le conjugué de  $\bar{L}$  ?

6° Soit  $L$  et  $M$  deux éléments de  $\mathcal{P}_0^*$ . Démontrer que si

$$M = \sum_{k=1}^{\infty} b_k A^k \quad b_k \in K, \quad \text{pour tout } k,$$

alors,

$$L \circ M = \sum_{k=1}^{\infty} b_k L^k.$$

## QUATRIÈME PARTIE.

1° Soit  $L$  un élément de  $\mathcal{P}^*$ .

a) Démontrer qu'il existe une unique application linéaire  $\mu_L$  de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathcal{P}$  telle que, pour tout élément  $M$  de  $\mathcal{P}^*$  et tout élément  $p$  de  $\mathcal{P}$ , on ait

$$\langle LM, p \rangle = \langle M, \mu_L(p) \rangle$$

b) Déterminer  $\mu_A$  et, pour  $a \in K$ , déterminer  $\mu_a$ . On pose  $D = \mu_A$ .

c)  $L$  et  $M$  étant deux éléments de  $\mathcal{P}^*$ , déterminer  $\mu_L + \mu_M$  et  $\mu_L \circ \mu_M$ .