

# écrit

## MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

DURÉE : 6 heures

### INTRODUCTION

Dans tout le problème, on considère un espace vectoriel euclidien  $E$  de dimension finie  $n \geq 2$ , un entier  $k \geq 2$  et un réel  $\gamma \in ]0, 1[$ . Les entiers  $n$  et  $k$  et le réel  $\gamma$  pourront être assujettis à des conditions supplémentaires qui dépendront de la question traitée.

On se propose d'étudier certaines familles finies de vecteurs de  $E$  (Partie II) et certains ensembles finis de droites vectorielles de  $E$ , appelés épis (Partie III). La Partie I rassemble des résultats préliminaires. Dans la Partie IV, on examine quelques propriétés d'un épi particulier.

### NOTATIONS

Si  $v, v'$  appartiennent à  $E$ , leur produit scalaire est noté  $(v | v')$ , et on pose  $\|v\| = \sqrt{(v | v)}$ . On note  $L(E)$  l'algèbre des endomorphismes de  $E$ ,  $L^s(E)$  l'espace des endomorphismes symétriques de  $E$  et  $O(E)$  le groupe orthogonal de  $E$ .

Pour tout  $v \in E$ , on désigne par  $p_v$  l'endomorphisme de  $E$  tel que

$$p_v(v') = (v | v')v \quad \text{pour tout } v' \in E.$$

On définit une opération de  $O(E)$  sur l'ensemble  $E^k$  en posant, si  $f \in O(E)$  et si  $x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in E^k$ ,  $f \cdot x = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_k))$ .

Par abus de notation,  $x$  pourra aussi désigner la famille  $(x_i)_{1 \leq i \leq k}$ .

Si  $Y$  est un ensemble, on note  $\text{Card}(Y)$  le cardinal de  $Y$ ,  $\mathfrak{S}(Y)$  le groupe des permutations de  $Y$  et  $\text{id}_Y$  l'application identique de  $Y$ . Si de plus  $h$  est un entier naturel,  $Y^{(h)}$  désigne l'ensemble des parties de cardinal  $h$  de  $Y$ .

Si  $P$  est un polynôme non nul de  $\mathbb{C}[X]$  et si  $\lambda \in \mathbb{C}$ , on note  $m(\lambda, P)$  le plus grand entier naturel  $m$  tel que  $(X - \lambda)^m$  divise  $P$  dans  $\mathbb{C}[X]$ .

On désigne par  $\mathfrak{M}_k$  l'espace des matrices, à  $k$  lignes et  $k$  colonnes, à termes réels; si  $A \in \mathfrak{M}_k$ , on note  $P_A$  le polynôme caractéristique de  $A$ ;

l'espace des matrices symétriques de  $\mathfrak{M}_k$  est noté  $\mathfrak{M}_k^s$ ; si  $B \in \mathfrak{M}_k^s$ ,  $\lambda(B)$  désigne la plus petite valeur propre de  $B$ .

On note enfin  $I_k$  la matrice unité de  $\mathfrak{M}_k$  et  $J_k$  la matrice de  $\mathfrak{M}_k$  dont tous les termes sont égaux à 1.

## PARTIE I

Les questions 1, 2, 3 sont indépendantes les unes des autres. Les questions 4 et 5 sont indépendantes des précédentes.

1. Déterminer le rang et la trace de  $J_k$ ; en déduire  $P_{J_k}$ . Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont des réels quelconques, former le polynôme caractéristique et calculer les valeurs propres de la matrice  $\alpha I_k + \beta J_k$ .

2. a. Soit  $Q$  un polynôme irréductible de  $\mathbb{Q}[X]$ . Démontrer que toute racine complexe de  $Q$  est simple.

b. Soit  $P$  un polynôme non nul de  $\mathbb{Q}[X]$ . Soit  $\lambda$  une racine complexe de  $P$  telle que  $m(\lambda, P) > \frac{1}{2}$  degré  $(P)$ . Montrer que  $\lambda$  appartient à  $\mathbb{Q}$ .

3. Si  $f \in L(E)$ ,  $\text{Tr}(f)$  désigne la trace de  $f$ . Démontrer que  $L^s(E)$ , muni de la forme bilinéaire symétrique  $(f, f') \mapsto \langle f, f' \rangle = \text{Tr}(f \circ f')$ , est un espace vectoriel euclidien.

4. A tout  $x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in E^k$ , on associe la matrice  $B_x = ((x_i | x_j))$ , élément de  $\mathfrak{M}_k^s$  ( $(x_i | x_j)$  est le terme de la  $i^{\text{ème}}$  ligne et de la  $j^{\text{ème}}$  colonne de  $B_x$ ).

L'espace  $\mathbb{R}^k$  étant muni du produit scalaire usuel, noté  $(|)_{\mathbb{R}^k}$ , pour lequel la base canonique  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k)$  est orthonormale,  $\varphi_x$  désigne l'application linéaire de  $\mathbb{R}^k$  dans  $E$  telle que  $\varphi_x(\varepsilon_i) = x_i$  pour  $1 \leq i \leq k$ . On désigne par  $\varphi_x^*$  l'unique application linéaire de  $E$  dans  $\mathbb{R}^k$  telle que, pour tout  $v \in E$  et tout  $w \in \mathbb{R}^k$ ,

$$(w | \varphi_x^*(v))_{\mathbb{R}^k} = (\varphi_x(w) | v).$$

a. Montrer que  $B_x$  est la matrice de  $\varphi_x^* \circ \varphi_x$  dans la base  $\varepsilon$ . En déduire les égalités  $\text{rang}(x) = \text{rang}(B_x) = k - m(0, P_{B_x})$ . Montrer que  $\lambda(B_x) \geq 0$ , et que l'égalité a lieu si et seulement si la famille  $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$  est liée.

b. Pour  $1 \leq i \leq k$ , on pose  $p_i = P_{x_i}$ . Montrer que  $\varphi_x \circ \varphi_x^* = \sum_{i=1}^k p_i$ .

En déduire que  $B_x$  et  $\sum_{i=1}^k p_i$  ont les mêmes valeurs propres non nulles.

5. a. Soit  $B \in \mathfrak{M}_k^s$ . Montrer qu'il existe  $x \in E^k$  tel que  $B = B_x$  si et seulement si  $\lambda(B) \geq 0$  et  $\text{rang}(B) \leq n$ .

b. Soient  $x, y$  des éléments de  $E^k$ . Montrer que  $B_x = B_y$  si et seulement si  $x$  et  $y$  ont même orbite sous l'action de  $O(E)$ .

## PARTIE II

On note  $U$  l'ensemble des vecteurs unitaires de  $E$ . Une famille  $u = (u_1, u_2, \dots, u_k) \in U^k$  est dite équiangulaire d'angle  $\text{Arc cos } \gamma$  si  $|(u_i | u_j)| = \gamma$  pour  $1 \leq i < j \leq k$ .

L'ensemble des familles équiangulaires  $u \in U^k$  d'angle  $\text{Arc cos } \gamma$  est noté  $U_\gamma^k$ .

On désigne par  $\mathcal{A}_k$  l'ensemble des matrices  $A = (a_{i,j})$  de  $\mathcal{M}_k^s$  telles que  $a_{i,i} = 0$  pour  $1 \leq i \leq k$  et  $a_{i,j} \in \{1, -1\}$  pour  $1 \leq i < j \leq k$ .

A tout  $u \in U_\gamma^k$ , on associe la matrice  $A_u = \frac{1}{\gamma} (B_u - I_k)$ , de sorte que  $A_u \in \mathcal{A}_k$ .

On dit qu'une famille équiangulaire  $u = (u_1, u_2, \dots, u_k)$  est aiguë (resp. obtuse) si  $(u_i | u_j) > 0$  (resp.  $(u_i | u_j) < 0$ ) pour  $1 \leq i < j \leq k$ .

6. a. Démontrer que toute famille équiangulaire aiguë est libre.

b. Démontrer l'existence d'une famille équiangulaire aiguë  $u \in U_\gamma^n$ .

7. a. Soit  $u = (u_1, u_2, \dots, u_k) \in U_\gamma^k$ . Démontrer que si la famille  $u = (u_1, u_2, \dots, u_k)$  est liée,

$$\lambda(A_u) = -\frac{1}{\gamma} \text{ et } m\left(-\frac{1}{\gamma}, P_{A_u}\right) = k - \text{rang}(u).$$

b. Démontrer l'existence d'une famille équiangulaire obtuse  $u \in U_\gamma^{n+1}$ .

Jusqu'à la fin de cette partie, on suppose que  $U_\gamma^k$  n'est pas vide, et on désigne par  $u = (u_1, u_2, \dots, u_k)$  un élément de  $U_\gamma^k$ ; pour  $1 \leq i \leq k$ , on pose  $p_i = p_{u_i}$ .

8. a. Démontrer que, pour  $1 \leq i \leq k$ ,  $p_i$  appartient à  $L^s(E)$ .

b. Calculer  $\langle p_i, p_j \rangle$  pour  $1 \leq i < j \leq k$ .

c. Démontrer que  $k \leq \frac{1}{2} n(n+1)$ .

9. On désigne par  $\Pi$  le sous-espace vectoriel de  $L^s(E)$  engendré par  $(p_1, p_2, \dots, p_k)$ . Montrer que  $n \geq \frac{k}{[1 + (k-1)\gamma^2]}$ , et que l'égalité a lieu si et seulement si  $\text{id}_E$  appartient à  $\Pi$ ; démontrer que  $\text{id}_E \in \Pi$  implique  $k \text{id}_E = n \sum_{i=1}^k p_i$ . (On pourra considérer la projection orthogonale de  $\text{id}_E$  sur  $\Pi$ ).

Pour  $1 \leq i < j \leq k$ , on note  $d_{i,j}$  le nombre d'entiers  $t$  tels que  $1 \leq t \leq k$ ,  $t \neq i$ ,  $t \neq j$ , et  $(u_i | u_j)(u_i | u_t)(u_j | u_t) > 0$ . On dit que la famille équiangulaire  $u$  est régulière si  $d_{i,j}$  est indépendant du couple  $(i, j)$ .

Si  $A_u = (\alpha_{i,j})$ , on pose  $A_u^2 = (\alpha'_{i,j})$ .

10. a. Pour  $1 \leq i < j \leq k$ , calculer  $\alpha'_{i,j}$  en fonction de  $k$ ,  $\alpha_{i,j}$  et  $d_{i,j}$ .

b. Montrer que la famille  $u$  est régulière si et seulement s'il existe des réels  $\rho_1, \rho_2$  tels que  $(A_u - \rho_1 I_k)(A_u - \rho_2 I_k) = 0$ .

c. Démontrer que  $\text{id}_E$  appartient à  $\Pi$  si et seulement si la famille  $u$  est liée, de rang  $n$  et régulière; montrer que, dans ce cas, les valeurs propres de  $A_u$  sont  $-\frac{1}{\gamma}$  et  $\frac{1}{\gamma} \left(\frac{k}{n} - 1\right)$  avec les multiplicités respectives  $k - n$  et  $n$ .

11. Cette question est indépendante des questions 8, 9, 10. — On suppose que la famille  $u = (u_1, u_2, \dots, u_k)$  est liée et que «  $k$  est pair, ou  $k - \text{rang}(u) \geq 2$  ».

Démontrer que si  $\frac{1}{\gamma^2}$  est entier, cet entier est impair. (On pourra considérer

le polynôme à coefficients dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  obtenu par réduction, modulo 2, du polynôme caractéristique de  $A_u^2$ ).

12. Démontrer que si  $\text{id}_E$  appartient à  $\Pi$  et si  $k$  est distinct de  $n + 1$  et de  $2n$ ,  $\frac{1}{\gamma}$  est un entier impair.

13. a. Démontrer que si  $k > 2n$ ,  $\frac{1}{\gamma}$  est un entier impair. (On pourra utiliser la question 2.).

b. Montrer que  $n = 6$  implique  $k \leq 16$ .

14. On suppose que  $k = \frac{1}{2}n(n + 1)$ . Montrer que  $n + 2 = \frac{1}{\gamma^2}$ . En déduire que si  $n > 3$ ,  $n + 2$  est le carré d'un entier impair.

### PARTIE III

Si  $\mathcal{O}$  est un ensemble fini ( $\text{Card } \mathcal{O} \geq 2$ ) de droites vectorielles de  $E$ , on appelle repère de  $\mathcal{O}$  toute famille  $(u_D)_{D \in \mathcal{O}}$  telle que, pour toute droite  $D \in \mathcal{O}$ ,  $u_D$  soit un vecteur unitaire de  $D$ ; un tel repère est dit aigu si  $(u_D | u_{D'}) > 0$  pour tout couple  $(D, D')$  de droites distinctes appartenant à  $\mathcal{O}$ . On dit que  $\mathcal{O}$  est un épi d'angle  $\text{Arc cos } \gamma$  si  $\mathcal{O}$  possède un repère  $(u_D)_{D \in \mathcal{O}}$  tel que  $|(u_D | u_{D'})| = \gamma$  pour tout couple  $(D, D')$  de droites distinctes appartenant à  $\mathcal{O}$ . On appelle « base aiguë » de  $E$  tout épi de cardinal  $n$  possédant un repère aigu.

On considère dans toute cette partie une « base aiguë »  $\mathcal{B}$  de  $E$  d'angle  $\text{Arc cos } \gamma$  et un repère aigu  $(u_D)_{D \in \mathcal{B}}$  de  $\mathcal{B}$ , et on suppose que  $k > n$ . On se propose d'étudier les épis  $\mathcal{O}$ , de cardinal  $k$ , contenant  $\mathcal{B}$ .

Pour toute partie  $S$  de  $\mathcal{B}$ , on pose  $e_S = \sum_{D \in S} u_D$ , et on note  $v_S$  l'unique élément de  $E$  tel que, pour toute droite  $D \in \mathcal{B}$ , on ait

$$(v_S | u_D) = -\gamma \quad \text{si } D \in S, \quad (v_S | u_D) = \gamma \quad \text{si } D \notin S.$$

$$\text{On pose } r = \frac{1 - \gamma}{2\gamma} \quad \text{et} \quad \Phi = X^2 - nX + r^2(n + 2r + 1)$$

( $\Phi$  est donc un élément de  $\mathbb{C}[X]$ ); on considère la condition suivante :

(\*) les racines de  $\Phi$  sont entières.

Lorsque la condition (\*) est satisfaite, on note  $h$  la plus petite racine de  $\Phi$ , et on pose

$$z = h - r^2 \quad \text{et} \quad z' = h - r(r + 1).$$

15. Soient  $S, T$  des parties de  $\mathcal{B}$ .

a. Calculer  $(e_S | e_T)$ ,  $\|e_S\|^2$ ,  $(e_{\mathcal{B}} | e_S)$ ,  $\|e_{\mathcal{B}}\|^2$  en fonction de  $n, r$ ,  $\text{Card}(S)$ ,  $\text{Card}(T)$  et  $\text{Card}(S \cap T)$ .

b. Montrer que  $v_S = \omega_S e_{\mathcal{B}} - \frac{1}{r} e_S$ , où  $\omega_S$  est un nombre réel que l'on calculera en fonction de  $n, r$  et  $\text{Card}(S)$ . Calculer  $\|v_S\|^2$  en fonction de  $n, r$  et  $\text{Card}(S)$ . Vérifier que  $\|v_S\| = 1$  si et seulement si  $\text{Card}(S)$  est racine de  $\Phi$ .

c. On suppose que  $\text{Card}(S) = \text{Card}(T)$  et que  $\|v_S\| = 1$ . Calculer  $(v_S | v_T - v_S)$  puis  $(v_S | v_T)$  en fonction de  $r$ ,  $\text{Card}(S)$  et  $\text{Card}(S \cap T)$ . En déduire que

$$(v_S | v_T) = \gamma \quad \text{si et seulement si} \quad \text{Card}(S \cap T) = \text{Card}(S) - r^2,$$

$$(v_S | v_T) = -\gamma \quad \text{si et seulement si} \quad \text{Card}(S \cap T) = \text{Card}(S) - r(r + 1).$$

16. Montrer qu'il existe un épi, de cardinal  $k$ , contenant  $\mathcal{B}$  si et seulement si la condition (\*) est satisfaite et s'il existe une partie  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{B}^{(h)}$  satisfaisant la condition suivante :

$$(**) \left\{ \begin{array}{l} \text{(i) Pour tout couple } (S, T) \text{ d'éléments distincts de } \mathcal{S}, \text{ Card}(S \cap T) \\ \text{appartient à } \{z, z'\}. \\ \text{(ii) Card}(\mathcal{S}) = k - n. \end{array} \right.$$

Jusqu'à la fin de cette partie, sauf dans la question 19, on suppose que  $\mathcal{O}$  est un épi, de cardinal  $k$ , contenant  $\mathcal{B}$  ;  $h, z, z'$  sont alors définis comme il a été précisé plus haut.

17. a. Montrer que  $n \geq 2r(2r + 1)$ .

b. Calculer  $z(n - h - r^2)$  en fonction de  $r$ .

c. On suppose que  $r = 1$  (resp. 2). Démontrer que le couple  $(n, h)$  appartient à un ensemble de cardinal 2 (resp. 5) que l'on précisera.

18. On suppose dans cette question que  $k \geq n + 2$  et que  $r$  n'est pas entier. Montrer que  $r$  n'appartient pas à  $\mathbb{Q}$ . Soient

$$a = r(r + 1) \quad \text{et} \quad b = r^2(n + 2r + 1).$$

De l'égalité  $(n - 2a - 1)r + b - a(n - 1) = 0$ , déduire que  $n = 3$  et  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{5}}$ .

19. On suppose que  $n = 3$  (resp. 6). Démontrer qu'il existe un épi de cardinal 6 (resp. 16), et une famille équiangulaire régulière appartenant à  $U^6$  (resp.  $U^{16}$ ).

20. Dans cette question on suppose que  $k = \frac{1}{2}n(n + 1)$  et  $n > 3$ .

a. Démontrer que  $h^2 - (4r^2 + 4r - 1)h + 2r^3(2r + 3) = 0$ .

b. On pose  $s = 2r - 1$ . Démontrer que ou bien  $s = 1$ , ou bien il existe deux entiers  $c, d$  tels que  $s = 3c^2$  et  $3c^4 + 5c^2 + 1 = d^2$ .

En déduire que si  $n < 10^4$ ,  $n \in \{7, 23, 839\}$ .

On note  $\Gamma$  le stabilisateur de  $\mathcal{O}$  dans  $O(E)$  et  $\pi$  l'homomorphisme de  $\Gamma$  dans  $\mathfrak{S}(\mathcal{O})$  qui à tout  $f \in \Gamma$  associe la permutation de  $\mathcal{O}$  induite par  $f$ . On pose enfin  $G = \pi(\Gamma)$ . Préciser le noyau de  $\pi$ .

21. On suppose que  $h$  est distinct de  $\frac{n}{2}$ . On suppose en outre que deux parties quelconques de  $\mathcal{B}^{(h)}$  satisfaisant la condition (\*\*) peuvent être transformées l'une en l'autre par un élément de  $\mathfrak{S}(\mathcal{B})$ .

a. Montrer que  $G$  permute transitivement les « bases aiguës » de  $E$  contenues dans  $\mathcal{O}$ .

b. Soit  $\mathcal{S}$  une partie de  $\mathcal{B}^{(h)}$  satisfaisant la condition (\*\*). Montrer que le stabilisateur de  $\mathcal{B}$  dans  $G$  est isomorphe au stabilisateur de  $\mathcal{S}$  dans  $\mathfrak{S}(\mathcal{B})$ .

## PARTIE IV

*Cette partie est indépendante de la PARTIE II*

On suppose que  $n = 7$ , et l'on pose  $Y = \{1, 2, \dots, 7\}$ . On considère une « base aiguë »  $\mathcal{B} = \{D_1, D_2, \dots, D_7\}$  de  $E$  d'angle  $\text{Arc cos} \left( \frac{1}{3} \right)$ , et un repère aigu  $(u_D)_{D \in \mathcal{B}}$  de  $\mathcal{B}$ . Si  $i \in Y$ , on pose  $u_i = u_{D_i}$ . Quel que soit  $(i, j)$ , élément de  $Y^2$ , tel que  $i < j$ , on pose

$$v_{i,j} = \frac{1}{3} \left\{ \left( \sum_{t \in Y, t \neq \{i,j\}} u_t \right) - 2(u_i + u_j) \right\} \quad \text{et } D_{i,j} = \mathbb{R}v_{i,j}.$$

Enfin on pose  $\mathcal{D} = \{D_i; (i \in Y)\} \cup \{D_{i,j}; ((i,j) \in Y^2 \text{ et } i < j)\}$ .

22. Montrer que  $\mathcal{D}$  est un épi d'angle  $\text{Arc cos} \left( \frac{1}{3} \right)$  et de cardinal 28.

On conserve les notations  $\Gamma, \pi, G$  introduites dans la partie III, et on note  $\Omega$  l'ensemble des « bases aiguës » de  $E$  contenues dans  $\mathcal{D}$ . Pour tout  $\mathcal{L} \in \Omega$ , on désigne par  $G_{\mathcal{L}}$  le stabilisateur de  $\mathcal{L}$  dans  $G$ , et par  $\sigma_{\mathcal{L}}$  l'homomorphisme de  $G_{\mathcal{L}}$  dans  $\mathfrak{S}(\mathcal{L})$  qui à tout  $g \in G_{\mathcal{L}}$  associe la permutation de  $\mathcal{L}$  induite par  $g$ .

23. Démontrer que chacun des ensembles suivants appartient à  $\Omega$  :

$$\mathcal{L}_1 = \{D_1\} \cup \{D_{1,j}; (2 \leq j \leq 7)\},$$

$$\mathcal{L}_2 = \{D_i; (1 \leq i \leq 4)\} \cup \{D_{5,6}, D_{6,7}, D_{8,7}\},$$

$$\mathcal{L}_3 = \{D_1, D_2\} \cup \{D_{1,2}\} \cup \{D_{3,j}; (4 \leq j \leq 7)\},$$

$$\mathcal{L}_4 = \{D_1\} \cup \{D_{1,j}; (2 \leq j \leq 4)\} \cup \{D_{5,6}, D_{6,7}, D_{8,7}\}.$$

24. Montrer que  $G$  permute transitivement les éléments de  $\Omega$  et que, pour tout  $\mathcal{L} \in \Omega$ ,  $\sigma_{\mathcal{L}}$  est un isomorphisme.

25. a. Montrer que les orbites des  $\mathcal{L}_i (1 \leq i \leq 4)$  sous l'action de  $G_{\mathfrak{B}}$  forment une partition de  $\Omega - \{\mathfrak{B}\}$ . Montrer que  $\text{Card}(\Omega) = 288$ .

b. Calculer le cardinal de  $G$ .

26. Vérifier que toute partie de cardinal 2 de  $\mathcal{D}$  est contenue dans un élément de  $\Omega$ . Montrer qu'étant donnés des couples  $(D, D')$  et  $(\Delta, \Delta')$  de droites de  $\mathcal{D}$  tels que  $D \neq D'$  et  $\Delta \neq \Delta'$ , il existe  $g \in G$  tel que  $g(D) = \Delta$  et  $g(D') = \Delta'$ .