



REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

Sujets donnés aux concours d'Agrégation et aux concours d'entrée aux grandes Écoles en 1976

N.D.L.R. — Pour permettre à ce numéro de la Revue de présenter un éventail des concours aussi large que possible, nous avons dû renoncer à faire paraître le sujet de certaines épreuves. Nos lecteurs voudront bien nous en excuser.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Composition de mathématiques générales.

INTRODUCTION.

C.3
4 (6128) On se fixe pour tout le problème un espace vectoriel euclidien E de dimension finie supérieure ou égale à 4. Par « vecteur » on entend « élément de E ». Si x et y sont deux vecteurs, on note xy leur produit scalaire (qui est un nombre réel). Si x est un vecteur, on note $|x|$ sa norme \sqrt{xx} . Si x et y sont deux vecteurs non nuls, on note $\widehat{x, y}$ leur angle, c'est-à-dire l'unique nombre réel θ tel que $0 \leq \theta \leq \pi$ et que $\cos \theta = \frac{xy}{|x| \cdot |y|}$.

On convient d'appeler *réflexion* une symétrie hyperplane orthogonale de E , c'est-à-dire un élément ρ du groupe orthogonal $O(E)$ de E tel que $\rho^2 = 1_E$ et que l'ensemble $\text{Ker}(\rho - 1_E)$ des points fixes de ρ soit un hyperplan de E . Si x est un vecteur non nul, ρ_x désigne l'unique réflexion telle que $\rho_x(x) = -x$. On appelle *similitude* le composé d'une transformation orthogonale (élément de $O(E)$) et d'une homothétie (centrée en l'origine de E) de rapport différent de zéro. Deux parties A et B de E sont dites *semblables* s'il existe une similitude σ telle que $\sigma(A) = B$.

Un *cristal* est une partie non-vide X de E telle que, pour tout couple (x, y) , d'éléments de X (éventuellement égaux), on ait

$$y \neq 0, \quad y \neq 2x, \quad 2 \frac{xy}{yy} \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \rho_y(x) \in X.$$

PREMIÈRE PARTIE.

I. — 1^o Soit x et y deux vecteurs, avec $y \neq 0$. On pose alors $n(x, y) = 2 \frac{xy}{yy}$.

Démontrer la formule $\rho_y(x) = x - n(x, y)y$.

I. — 2^o Démontrer que si deux vecteurs x et y appartiennent à un même cristal, on a les inégalités suivantes :

$$0 \leq n(x, y)n(y, x) \leq 4 \quad \text{et} \quad -3 \leq n(x, y) \leq 3.$$

I. — 3° Démontrer l'existence d'une partie Ω de \mathbf{R}^4 , de cardinal 12, telle que si x et y sont deux vecteurs non orthogonaux appartenant à un même cristal, on ait

$$\left(n(x, y), n(y, x), \frac{|y|}{|x|}, \widehat{x, y} \right) \in \Omega.$$

(Par exception, il est nécessaire de traiter complètement cette question, c'est-à-dire de disposer d'un tel ensemble Ω par la liste de ses 12 éléments, pour pouvoir résoudre la suite du problème. En règle générale, il suffit en effet, pour pouvoir répondre à une question, d'admettre les résultats énoncés dans les questions qui la précèdent.)

I. — 4° On dit que deux vecteurs non nuls x et y forment un angle aigu si $0 < \widehat{x, y} < \frac{\pi}{2}$.

Démontrer que si deux vecteurs x et y appartiennent à un même cristal X et forment un angle aigu, alors leur différence $y - x$ appartient à X .

I. — 5° Soit X et Y deux cristaux, F un sous-espace vectoriel de E , λ un nombre réel strictement positif, S_λ la « sphère » formée des vecteurs de norme λ . Démontrer que $X \cap Y$, $X \cap F$ et $X \cap S_\lambda$ sont, ou bien vides, ou bien des cristaux.

I. — 6° Soit X_1, \dots, X_p ($p \geq 2$) une famille finie de cristaux deux à deux *orthogonaux*, c'est-à-dire tels que tout vecteur de X_i soit orthogonal à tout vecteur de X_j , pour $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq p$, $i \neq j$.

Démontrer que la réunion $X = X_1 \cup \dots \cup X_p$ est un cristal (on dira que X est la *réunion orthogonale* des cristaux X_1, \dots, X_p).

I. — 7° Un cristal Y est dit *indécomposable* s'il n'existe pas de cristaux Y_1 et Y_2 tels que Y soit la réunion orthogonale de Y_1 et de Y_2 .

Démontrer que tout cristal non indécomposable X est réunion orthogonale d'une famille finie X_1, \dots, X_p de cristaux indécomposables, et que ces cristaux X_1, \dots, X_p sont parfaitement déterminés par X , à l'ordre près.

I. — 8° Si P est un ensemble formé de vecteurs non nuls, on note $W(P)$ le sous-groupe du groupe orthogonal $O(E)$ engendré par les réflexions ρ_x , lorsque x décrit P .

Démontrer que si un vecteur x appartient à un cristal indécomposable X , alors, d'une part l'orbite de x sous l'action de $W(X)$ et d'autre part l'ensemble X engendrent le même sous-espace vectoriel de E .

I. — 9° Si P est une partie de E , on note $|P|$ l'ensemble des normes $|x|$ lorsque x décrit P .

Démontrer que si X est un cristal indécomposable, l'ensemble $|X|$ possède 1 ou 2 éléments.

I. — 10° Soit X un cristal indécomposable, et soit λ le plus petit élément de $|X|$. Démontrer que si x et y sont deux vecteurs distincts de X , on a $|x - y| \geq \lambda$.

I. — 11° Démontrer que tout cristal est fini.

I. — 12° Démontrer que si X est un cristal, le groupe $W(X)$ est fini.

I. — 13° On appelle *rang* d'un cristal X la dimension du sous-espace vectoriel RX engendré par X .

Démontrer qu'à similitude près il n'existe qu'un seul cristal de rang 1, noté A_1 , et qu'il est indécomposable.

DEUXIÈME PARTIE.

(Les résultats de cette deuxième partie ne sont pas indispensables par la suite.)

II. — 1° Démontrer qu'à similitude près, il n'existe qu'un seul cristal de rang 2, noté S_2 , qui ne soit pas indécomposable et dont tous les vecteurs aient même norme. Dessiner S_2 (dans le plan euclidien RS_2).

II. — 2° Démontrer que dans un cristal X indécomposable de rang 2, on peut trouver deux vecteurs x et y formant un angle aigu. Si de plus $|X|$ possède deux éléments, démontrer que l'on peut imposer la condition supplémentaire $|y| > |x|$.

II. — 3° Démontrer qu'à similitude près, il n'existe qu'un seul cristal de rang 2, noté A_2 , qui soit indécomposable et dont tous les vecteurs aient même norme. Dessiner A_2 .

II. — 4° Démontrer qu'à similitude près, il n'existe, outre le cristal A_2 , que deux autres cristaux indécomposables de rang 2, notés B_2 et G_2 , de cardinaux respectifs 8 et 12. Dessiner des deux cristaux.

TROISIÈME PARTIE.

III. — 1° Démontrer la non-vacuité de l'ensemble $\mathcal{T}(X)$ des vecteurs t qui ne sont orthogonaux à aucun des vecteurs d'un cristal donné X .

III. — 2° Soit X un cristal et $t \in \mathcal{C}(X)$. Notons X_t^+ l'ensemble des vecteurs de X qui forment un angle aigu ou nul avec t . Notons enfin B_t^X l'ensemble des vecteurs de X_t^+ qui ne peuvent pas s'écrire comme somme de deux éléments de X_t^+ . Démontrer que tout élément de X_t^+ est combinaison linéaire d'éléments de B_t^X à coefficients entiers positifs ou nuls.

III. — 3° On dit que deux vecteurs non nuls x et y forment un angle *obtus* si $\frac{\pi}{2} < \widehat{x, y} < \pi$. Soit X un cristal et $t \in \mathcal{C}(X)$; démontrer que les éléments de B_t^X forment entre eux des angles obtus ou droits.

III. — 4° On appelle *demi-espace* (sous-entendu : strict) l'image réciproque de l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$ par une forme linéaire non nulle $E \rightarrow \mathbb{R}$.

Démontrer que si des vecteurs sont situés dans un même demi-espace et forment entre eux, deux à deux, des angles droits ou obtus, alors ils forment une famille libre.

III. — 5° Une partie $B = \{b_1, \dots, b_r\}$ d'un cristal X est dite une *base cristalline* de X si c'est une famille libre, et si pour tout x dans X , il existe un élément $(\varepsilon, v_1, \dots, v_r)$ dans le produit cartésien

$$\{-1, +1\} \times \mathbb{N}^r \quad \text{tel que} \quad x = \varepsilon(v_1 b_1 + \dots + v_r b_r).$$

Cette définition étant posée, soit X un cristal et $t \in \mathcal{C}(X)$; démontrer que B_t^X est une base cristalline de X .

III. — 6° Soit B une base cristalline d'un cristal X .

Démontrer qu'il existe un vecteur $t \in \mathcal{C}(X)$ tel que $tb = 1$, pour tout $b \in B$, et que, pour un tel vecteur t , on a $B = B_t^X$.

III. — 7° Soit B une base cristalline d'un cristal X . On note alors $X^+(B)$ l'ensemble des vecteurs *positifs* de X relativement à B , c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs $x \in X$ qui sont combinaisons linéaires à coefficients positifs ou nuls des éléments de B .

Démontrer que si $b \in B$, la réflexion ρ_b laisse globalement invariant l'ensemble $X^+(B)$ privé de b .

III. — 8° Soit B une base cristalline d'un cristal X . Notons s_B^X la demi-somme des vecteurs de X qui sont positifs relativement à B .

Démontrer que pour tout b dans B , on a $\rho_b(s_B^X) = s_B^X - b$.

III. — 9° Soit x un vecteur d'un cristal X de rang supérieur ou égal à 2. Démontrer qu'il existe un vecteur u orthogonal à x , et donc à $-x$, mais non orthogonal aux autres vecteurs de X .

III. — 10° Soit x, X et u comme à la question précédente, et soit v un vecteur tel que $vx > 0$. Posons

$$\varepsilon = \min_{y \in X, y \neq \pm x} |uy|, \quad M = \max_{y \in X} vy, \quad t = u + \frac{\varepsilon}{2M} v.$$

Démontrer que $t \in \mathcal{C}(X)$ et que $x \in B_t^X$.

III. — 11° Soit B une base cristalline d'un cristal X , et soit $t \in \mathcal{C}(X)$. Soit $\varphi \in W(B)$ tel que le produit scalaire $s_B^X \varphi(t)$ soit maximal (lorsque φ décrit le groupe $W(B)$).

Démontrer que $\varphi(t)$ forme un angle aigu ou nul avec tous les vecteurs de B .

III. — 12° Soit A et B deux bases cristallines d'un même cristal. Démontrer qu'il existe φ dans $W(B)$ tel que $\varphi(A) = B$.

III. — 13° Soit B une base cristalline d'un cristal X . Démontrer que $W(B) = W(X)$.

III. — 14° Démontrer que si deux cristaux ont une base cristalline en commun, alors ils sont égaux.

III. — 15° Démontrer qu'à similitude près, il n'existe qu'un nombre fini de cristaux indécomposables.

QUATRIÈME PARTIE.

Dans cette partie on se fixe une base orthonormale e_1, \dots, e_N ($N \geq 4$) de l'espace euclidien E .

IV. — 1° Soit r un entier tel que $1 \leq r \leq N-1$ et soit A_r l'ensemble des $r(r+1)$ vecteurs de la forme $e_i - e_j$, avec $i \neq j$, $1 \leq i \leq r+1$, $1 \leq j \leq r+1$. Démontrer que A_r est un cristal.

IV. — 2° Démontrer que les r vecteurs $e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_r - e_{r+1}$ constituent une base cristalline de A_r .

IV. — 3° Trouver le nombre d'éléments du groupe $W(A_r)$.

IV. — 4° Soit r un entier tel que $2 \leq r \leq N$. On considère, d'une part, les $2r$ vecteurs $\pm e_i (1 \leq i \leq r)$ et, d'autre part, les $2r(r-1)$ vecteurs $\pm e_i \pm e_j (1 \leq i < j \leq r)$, où les signes \pm sont choisis indépendamment. Soit B_r l'ensemble de ces $2r^2$ vecteurs. Démontrer que B_r est un cristal.

IV. — 5° Démontrer que les r vecteurs $e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{r-1} - e_r, e_r$ constituent une base cristalline de B_r .

IV. — 6° Soit \mathcal{J} l'inversion de centre l'origine de E et de puissance 2, c'est-à-dire l'application qui à tout vecteur non nul x associe l'unique vecteur y colinéaire à x tel que $xy = 2$. Démontrer que si X est un cristal, alors $\mathcal{J}(X)$ est un cristal.

IV. — 7° Démontrer que si B est une base cristalline du cristal X , alors $\mathcal{J}(B)$ est une base cristalline du cristal inverse $\mathcal{J}(X)$.

IV. — 8° Démontrer que les cristaux A_r, B_r et $C_r = \mathcal{J}(B_r)$ sont tous indécomposables.

IV. — 9° Démontrer que, pour $1 \leq r \leq N-1$, on a l'égalité $\mathcal{J}(A_r) = A_r$, et que les deux cristaux B_r et C_r sont semblables.

IV. — 10° Démontrer que les cristaux $A_r (1 \leq r \leq N-1), B_r (2 \leq r \leq N), C_r (3 \leq r \leq N)$ sont deux à deux non semblables.

IV. — 11° Trouver deux cristaux indécomposables non semblables X et Y tels que $W(X) = W(Y)$.

CINQUIÈME PARTIE.

(Les questions 2°, 3°, 4° et 5° de cette cinquième partie sont indépendantes des deuxième, troisième et quatrième parties.)

V. — 1° Un groupe G est dit *cristallographique* si c'est un sous-groupe fini du groupe orthogonal $O(E)$, s'il n'est pas réduit à son élément neutre, si en outre il est engendré par des réflexions, et si enfin il existe une *base de rationalité* pour G , c'est-à-dire une base de E (non nécessairement orthogonale) telle que les matrices des éléments de G par rapport à cette base soient toutes à coefficients rationnels.

Démontrer que si X est un cristal, le groupe $W(X)$ est cristallographique.

V. — 2° Soit A une base de rationalité pour un groupe cristallographique G . Soit T le sous-groupe du groupe additif de E engendré par la réunion $D = \bigcup_{\varphi \in G} \varphi(A)$.

Démontrer qu'il existe un nombre réel ε strictement positif tel que le seul vecteur de T de norme strictement inférieure à ε soit le vecteur nul. (On conserve ces notations dans les questions 3°, 4° et 5° ci-dessous.)

V. — 3° Démontrer que si y est un vecteur non nul tel que la réflexion ρ_y appartienne à G , alors le groupe $T \cap \mathbb{R}y$ (formé des vecteurs de T colinéaires à y) est cyclique.

V. — 4° Soit X l'ensemble des vecteurs non nuls x tels que $\rho_x \in G$ et que x soit un générateur du groupe cyclique $T \cap \mathbb{R}x$. Démontrer que X est un cristal.

V. — 5° Démontrer que $G = W(X)$.

V. — 6° Soit ρ et σ deux réflexions appartenant à un même groupe cristallographique. Démontrer que $(\rho \circ \sigma)^{12} = 1_E$.

V. — 7° Soit φ un élément d'un groupe cristallographique. Considérant φ comme un endomorphisme de l'espace vectoriel E , démontrer que son polynôme caractéristique est à coefficients entiers.

V. — 8° Donner un exemple de sous-groupe fini de $O(E)$, non réduit à l'élément neutre, engendré par des réflexions, mais qui ne soit pas cristallographique.

V. — 9° Démontrer qu'à isomorphie près, il n'y a qu'un nombre fini de groupes cristallographiques.

SIXIÈME PARTIE.

(Sauf pour sa dernière question, cette partie est indépendante de la cinquième partie.)

VI. — 1° Soit B une base cristalline d'un cristal indécomposable X (les notations des questions 1°, 2° et 3° se suivent).

Démontrer que si x et y sont dans B , le nombre $\cos \widehat{x, y}$ ne peut prendre que quatre valeurs.

VI. — 2° Désormais, X est de rang 3.

Démontrer que $B = \{a, b, c\}$, avec a non orthogonal à b et b non orthogonal à c .

VI. — 3° Posons $\alpha = \frac{a}{|a|}$, $\beta = \frac{b}{|b|}$ et $\gamma = \frac{c}{|c|}$. En exprimant que le carré scalaire de chacun des trois vecteurs $\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha + \sqrt{2}\beta + \gamma$ et $\sqrt{3}\alpha + 2\beta + \gamma$ est strictement positif, démontrer que le triplet $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ ne peut prendre que trois valeurs.

VI. — 4° Démontrer que les trois cristaux A_3, B_3 et C_3 sont, à similitude près, les seuls cristaux indécomposables de rang 3.

VI. — 5° Soit ρ, σ et τ trois réflexions appartenant à un même groupe cristallographique. Démontrer que $(\rho \circ \sigma \circ \tau)^{48} = 1_E$.

Composition d'analyse.

PRÉLIMINAIRES.

1° K désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Si Ω est un ouvert non vide de \mathbb{R}^2 , et n un entier positif ($n \in \mathbb{N}$), on note $\mathcal{C}^n(\Omega, K)$ l'ensemble des applications de classe C^n (en tant que fonctions de deux variables réelles) de Ω dans K . En particulier $\mathcal{C}^0(\Omega, K)$ est l'ensemble des applications continues de Ω dans K .

On note $\mathcal{C}^\infty(\Omega, K)$ l'ensemble $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^n(\Omega, K)$.

Lorsque la première (resp. seconde) variable est notée x (resp. y), $\frac{\partial}{\partial x}$ (resp. $\frac{\partial}{\partial y}$) désigne l'opérateur de dérivation partielle par rapport à la première (resp. seconde) variable, et Δ désigne alors l'opérateur

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Si Ω est un ouvert non vide de \mathbb{R}^2 et k un entier positif, on note $\mathcal{H}^k(\Omega, K)$ l'ensemble des éléments f de $\mathcal{C}^\infty(\Omega, K)$ tels que $\Delta^k f = 0$. On a ainsi $\mathcal{H}^0(\Omega, K) = \{0\}$. Un élément f de $\mathcal{H}^k(\Omega, K)$ (plus spécialement de $\mathcal{H}^1(\Omega, K)$) est dit « polyharmonique » [d'ordre k , de Ω dans K] (plus spécialement « harmonique » [de Ω dans K]). On admet sans démonstration que $\mathcal{H}^1(\Omega, K)$ est fermé dans l'espace $\mathcal{C}^0(\Omega, K)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de Ω .

2° On identifiera parfois \mathbb{R}^2 et \mathbb{C} en utilisant la variable complexe $x + iy$. Si celle-ci est notée $z [x = \text{Re}(z); y = \text{Im}(z)]$, on désigne par $\frac{\partial}{\partial z}$ (resp. $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$) l'opérateur de dérivation

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \left(\text{resp.} \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \right).$$

On rappelle alors les formules :

$$a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} = c \frac{\partial}{\partial z} + \bar{c} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \quad \text{si} \quad c = a + ib; \quad \frac{\partial}{\partial z} \circ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \circ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{4} \Delta; \quad df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z},$$

et le résultat suivant :

Si f est une fonction holomorphe d'un ouvert non vide Ω de \mathbb{C} dans \mathbb{C} , on a $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0$ et $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z)$, pour tout z dans Ω .

3° Si a est un complexe, ρ un réel strictement positif, $D(a, \rho)$ (resp. $\bar{D}(a, \rho)$) désigne le disque ouvert (resp. fermé) de \mathbb{C} de centre a , de rayon ρ . Pour Ω disque ouvert non vide de \mathbb{C} , on admet sans démonstration que les éléments de $\mathcal{H}^1(\Omega, \mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{H}^1(\Omega, \mathbb{C})$) sont exactement les parties réelles des fonctions holomorphes de Ω dans \mathbb{C} (resp. les fonctions $f + \bar{g}$, où f, g sont des fonctions holomorphes de Ω dans \mathbb{C}).

4° On désigne par λ la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^2 (ou \mathbb{C}). Les locutions « λ -intégrable », « λ -mesurable », « λ -presque partout », etc., sont usuelles. On désigne par \mathcal{L} l'ensemble des fonctions à valeurs complexes, définies λ -presque partout dans \mathbb{C} , et λ -intégrables. Si f appartient à \mathcal{L} , son intégrale est notée indifféremment

$$\int f(z) d\lambda(z), \quad \int f(\zeta) d\lambda(\zeta), \quad \iint f(x, y) dx dy, \quad \text{etc.}$$

Si K est un compact de \mathbb{C} , \mathcal{L}_K désigne l'ensemble des éléments de \mathcal{L} qui sont nuls λ -presque partout dans $\mathbb{C} \setminus K$. On note plus spécialement, \mathbb{R} étant un réel strictement positif, \mathcal{L}_R pour $\mathcal{L}_{\bar{D}(0, R)}$. Enfin \mathcal{L}_C désigne

$$\bigcap_{R > 0} \mathcal{L}_R.$$