

EPREUVES ECRITES

TEXTE DE L'EPREUVE DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

DURÉE : 6 heures

Les dessins demandés dans le texte seront exécutés sur papier millimétrique.

Pour cette épreuve, le problème a été choisi d'une approche assez facile. Les candidats sont prévenus qu'entreront dans l'appréciation des copies le soin apporté à la présentation, la clarté et la précision de la rédaction. Ils sont en particulier invités :

- d'une part à respecter les notations fixées par le texte;
- d'autre part à assortir leur rédaction de figures *soignées*, soit qu'elles soient explicitement demandées dans l'énoncé, soit que, les ayant aidés à réaliser une situation, elles leur permettent de s'exprimer plus clairement, étant bien entendu qu'une figure ne saurait se substituer à un raisonnement rigoureux.

Les différentes questions du problème, de difficultés inégales, ont une indépendance relative. Aucun ordre n'est imposé pour les résoudre. A condition de l'indiquer clairement, les candidats pourront utiliser pour la résolution d'une question des résultats fournis par l'énoncé d'une question précédente, même s'ils n'ont pu la résoudre.

PARTIE O. — Notations et définitions

O.1.

Pour A et B parties d'un même ensemble, on pose

$$A \setminus B = \{a \in A, a \notin B\} .$$

On note \mathbf{Z} l'anneau des entiers rationnels, \mathbf{R} le corps des réels, \mathbf{C} celui des complexes. Si A est une partie minorée de \mathbf{R} , sa borne inférieure est désignée par $\inf A$.

On considère l'espace métrique \mathbf{R}^2 obtenu en munissant $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ de son produit scalaire canonique noté $(. | .)$, la norme associée étant notée $\| . \|$ et la distance associée $d(. , .)$. Deux vecteurs (ou points) $\xi = (x, y)$ et $\xi' = (x', y')$ ont pour déterminant dans la base canonique le réel $xy' - yx'$ noté $\det(\xi, \xi')$.

La lettre \mathcal{O} désigne le sous-ensemble de \mathbf{R}^2 défini par :

$$\mathcal{O} = \left\{ (x, y) ; 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, y \geq 0, x^2 + y^2 \geq 1 \right\} .$$

On convient de noter :

$$0 = (0, 0) \quad u = (1, 0) \quad v = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad w = (0, 1) .$$

O.2.

On dira qu'une partie Λ de \mathbf{R}^2 est un *réseau*, s'il existe au moins une base $\{\xi, \eta\}$ de \mathbf{R}^2 telle que l'on ait :

$$\Lambda = \mathbf{Z}\xi + \mathbf{Z}\eta = \{p\xi + q\eta ; (p, q) \in \mathbf{Z}^2\} .$$

Tout système $\{\zeta', \eta'\}$, vérifiant $\Lambda = \mathbf{Z} \zeta' + \mathbf{Z} \eta'$, est dit une *base du réseau*. On note respectivement :

Λ_e le réseau dont une base est $\{u, v\}$;

Λ_c le réseau dont une base est $\{u, w\}$;

Λ_r^θ le réseau dont une base est $\{u, \theta w\}$ avec $\theta \geq 1$.

Plus généralement un réseau est dit *réduit*, s'il admet une base de la forme $\{u, j\}$ avec $j \in \mathbb{Q}$.

Deux réseaux sont dits *isométriques* (resp. *semblables*) s'il existe une isométrie (resp. similitude directe ou indirecte) de \mathbf{R}^2 transformant l'un en l'autre. Un réseau semblable à Λ_e est dit *équilatéral*; un réseau semblable à Λ_c (resp. à un Λ_r^θ) est dit *carré* (resp. *rectangulaire*).

0.3.

Pour un réseau quelconque Λ on appelle :

- *carcan* de Λ le nombre réel $\text{carc } \Lambda = \inf \{ \|\lambda\|; \lambda \in \Lambda \setminus 0 \}$;
- *alvéole fondamentale* de Λ l'ensemble

$$\mathfrak{A}(\Lambda) = \{ \zeta \in \mathbf{R}^2; \forall \lambda \in \Lambda, d(0, \zeta) \leq d(\lambda, \zeta) \} .$$

On introduit aussi

$$\mathfrak{A}'(\Lambda) = \{ \zeta \in \mathbf{R}^2; \forall \lambda \in \Lambda \setminus 0, d(0, \zeta) < d(\lambda, \zeta) \} .$$

Dans la suite du texte, on écrira en abrégé \mathfrak{A} et \mathfrak{A}' pour $\mathfrak{A}(\Lambda)$ et $\mathfrak{A}'(\Lambda)$; on posera aussi, pour tout γ de \mathbf{R}^2 ,

$$\mathfrak{A}_\gamma = \{ \zeta + \gamma; \zeta \in \mathfrak{A} \} \quad \text{et} \quad \mathfrak{A}'_\gamma = \{ \zeta + \gamma; \zeta \in \mathfrak{A}' \} .$$

0.4.

Le *stabilisateur* d'un élément x d'un ensemble X , dans lequel opère un groupe G , est : $G_x = \{ g \in G; g(x) = x \}$.

PARTIE I. — Réseaux, classification

I.1.

Dessiner \mathbb{Q} .

Sur des figures séparées :

- dessiner Λ_e ; déterminer et dessiner $\mathfrak{A}(\Lambda_e)$; trouver $\text{carc } \Lambda_e$;
- dessiner un Λ_r^θ ; déterminer et dessiner $\mathfrak{A}(\Lambda_r^\theta)$; trouver $\text{carc } \Lambda_r^\theta$ et $\text{carc } \Lambda_c$.

I.2.

Soit \mathfrak{B} et \mathfrak{B}' deux bases d'un réseau Λ . Démontrer que la matrice de passage de \mathfrak{B} à \mathfrak{B}' est une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ à éléments dans \mathbf{Z} vérifiant $|ad - bc| = 1$. Énoncer une réciproque. Donner des exemples de telles matrices sans élément nul.

Établir que le réel $|\det \mathfrak{B}|$ dépend seulement du réseau Λ et non du choix de sa base; on le note *aire* Λ . Calculer *aire* Λ_r^θ et *aire* Λ_e .

Lorsque Λ est réduit, démontrer que, si $\{u, j\}$ et $\{u, j'\}$ sont deux de ses bases avec j et j' éléments de \mathbb{Q} , on a nécessairement $j = j'$; on note $j(\Lambda)$ le vecteur ainsi canoniquement attaché au réseau réduit Λ .

I.3.

Pour tout Λ démontrer que $\text{carc } \Lambda$ est strictement positif et que les points de Λ sont isolés uniformément par des boules de rayon $\frac{\text{carc } \Lambda}{2}$.

Prouver que le nombre $m(\Lambda)$ des éléments λ de Λ satisfaisant à $\|\lambda\| = \text{carc } \Lambda$ est non nul et fini.

I.4.

Soit $\{\alpha, \beta\}$ une base de \mathbf{R}^2 vérifiant les conditions :

$$(K) \quad \begin{cases} \|\alpha\| \leq \|\beta\| \\ 0 \leq (\alpha | \beta) \leq \frac{1}{2} \|\alpha\|^2 \end{cases}$$

Démontrer les résultats suivants :

- (i) $\forall (p, q) \in \mathbf{Z}^2 \setminus (0, 0), \|p\alpha + q\beta\| \geq \|\alpha\|$
- (ii) $\forall p \in \mathbf{Z}, \forall q \in \mathbf{Z} \setminus 0, \|p\alpha + q\beta\| \geq \|\beta\|$
- (iii) si $p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{Z} \setminus 0, (p, q) \neq (0, 1), (p, q) \neq (0, -1)$, alors $\|p\alpha + q\beta\|^2 \leq \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2$ entraîne $\|p\alpha + q\beta\|^2 = \|\beta - \alpha\|^2$

I.5.

Prouver que, si ξ est un vecteur de Λ vérifiant $\|\xi\| = \text{carc } \Lambda$, il existe η tel que $\{\xi, \eta\}$ soit une base de Λ .

Démontrer que tout réseau Λ possède une base $\{\alpha, \beta\}$ vérifiant (K).

I.6.

Établir que tout réseau est semblable à un réseau réduit et à un seul.

A tout réseau Λ on associe canoniquement, et on note encore $j(\Lambda)$ le vecteur de \mathcal{O} canoniquement attaché dans I.2. au réseau réduit semblable à Λ . Où est $j(\Lambda)$ si Λ est équilatéral, rectangulaire ou carré?

Discuter $m(\Lambda)$ suivant la position de $j(\Lambda)$ dans \mathcal{O} .

Établir l'inégalité : $\text{aire } \Lambda \geq \frac{\sqrt{3}}{2} (\text{carc } \Lambda)^2$ et discuter le cas de l'égalité.

PARTIE II. — Isométries d'un réseau, tore plat

II.1.

Démontrer : $\mathbf{R}^2 = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda$ (voir 0.34)

A-t-on une partition?

Prouver que \mathcal{A} est un hexagone convexe, sauf si Λ est rectangulaire, auquel cas \mathcal{A} est un rectangle. Dessiner le cas général. Démontrer que \mathcal{A}' est l'intérieur de \mathcal{A} et que \mathcal{A}' est partout dense dans \mathcal{A} .

II.2.

On note Γ le groupe $\text{Isom } \Lambda$ des isométries de \mathbf{R}^2 conservant globalement Λ , et $T = \text{Trans } \Lambda$ le sous-groupe de Γ constitué par le groupe additif Λ opérant sur \mathbf{R}^2 , c'est-à-dire par les translations $\xi \rightarrow \xi + \lambda$ avec $\lambda \in \Lambda$. Démontrer que T est distingué dans Γ . Soit G le groupe-quotient Γ/T , isomorphe au stabilisateur de 0 dans Γ ; démontrer que G est un groupe fini, discuter le nombre de ses éléments et sa structure selon $j(\Lambda)$. Discuter dans G l'équation $s^n = e$, où e est l'élément neutre.

II.3.

Pour une base $\mathcal{B} = \{\xi, \eta\}$ de \mathbf{R}^2 , soit $\delta(\mathcal{B})$ l'ensemble des points de \mathbf{R}^2 de la forme $\rho\xi + \rho'\eta$ avec $(\rho, \rho') \in \mathbf{R}^2$ et $|\rho| + |\rho'| \leq \frac{1}{2}$, et $\Delta(\mathcal{B})$ la réunion des images de $\delta(\mathcal{B})$ par les translations $p\xi + q\eta$ avec $(p, q) \in \mathbf{Z}^2$ et $p + q$ pair. On choisit $\xi = (1, 0)$ et $\eta = (2, 1)$, et on note \mathcal{H} l'ensemble $\Delta(\mathcal{B})$ correspondant. La base canonique étant figurée orthonormée (unité de longueur de 4 cm environ), représenter \mathcal{H} par des hachures sur un dessin.

L'ensemble \mathcal{H} est-il stable par le groupe $\text{Trans } \Lambda_c$?

II.4.

Étant donné un réseau Λ , on appelle ici *tore plat associé à Λ* , et on notera $\text{Tore } \Lambda$, le groupe-quotient \mathbf{R}^2/Λ du groupe additif de \mathbf{R}^2 par le sous-groupe Λ , c'est-à-dire l'ensemble des classes $\Lambda + \xi$ avec $\xi \in \mathbf{R}^2$. La projection canonique $\mathbf{R}^2 \rightarrow \text{Tore } \Lambda$ sera notée φ .

Démontrer que pour tout γ de \mathbf{R}^2 la restriction de φ à \mathcal{A}'_γ (voir 0.3.) est injective. On notera $\psi_\gamma : \varphi(\mathcal{A}'_\gamma) \rightarrow \mathcal{A}'_\gamma$ l'application inverse de la double restriction de $\varphi : \mathcal{A}'_\gamma \rightarrow \varphi(\mathcal{A}'_\gamma)$. Pour $\Lambda = \Lambda_c$ dessiner sur une même figure les deux ensembles $(\psi_0 \circ \varphi)(\mathcal{H})$ et $(\psi_\gamma \circ \varphi)(\mathcal{H})$ où ψ_0 correspond à $\gamma = (0, 0)$ et ψ_γ à $\gamma = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

PARTIE III. — Dualité, spectre d'un réseau

III.1.

A un réseau Λ on associe la partie Λ^* de \mathbf{R}^2 définie par :

$$\Lambda^* = \{\eta \in \mathbf{R}^2 ; \forall \lambda \in \Lambda, (\eta | \lambda) \in \mathbf{Z}\} .$$

Démontrer que Λ^* est aussi un réseau; on l'appelle le *dual* de Λ .

Établir : $(\Lambda^*)^* = \Lambda$ et $\text{aire } \Lambda \cdot \text{aire } \Lambda^* = 1$.

Dessiner sur une même figure Λ_0 et Λ_0^* , où Λ_0 est le réseau admettant pour base $\left\{ \left(\frac{4}{5}, 0\right), (1, 1) \right\}$.

Démontrer que le dual d'un Λ lui est semblable, c'est-à-dire que l'on a : $j(\Lambda^*) = j(\Lambda)$. La similitude peut-elle toujours être choisie directe?

III.2.

Étant donné un réseau Λ , une fonction $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{C}$ est dite Λ -*périodique* si, pour tout élément ξ de \mathbf{R}^2 et tout élément λ de Λ , on a

$$f(\xi + \lambda) = f(\xi) .$$

A tout élément γ de \mathbf{R}^2 , on associe la fonction f_γ définie par

$$\xi \rightarrow f_\gamma(\xi) = \exp [2i\pi (\xi | \gamma)] ;$$

f_γ peut-elle être Λ -périodique?

Pour toute fonction $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{C}$ de classe C^2 on pose

$$Df = - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} ;$$

établir, quel que soit l'élément γ de \mathbf{R}^2 , $Df_\gamma = 4 \pi^2 \|\gamma\|^2 f_\gamma$.

III.3.

On appelle *valeur propre* du réseau Λ tout réel μ *non nul*, tel qu'il existe $\eta \in \Lambda^*$ satisfaisant à : $\mu = 4\pi^2 \|\eta\|^2$. La *multiplicité*, notée $m(\mu)$, d'une valeur propre μ est par définition le nombre des éléments η de Λ^* solutions de $4\pi^2 \|\eta\|^2 = \mu$. Démontrer que $m(\mu)$ est pair pour tout Λ et pour tout μ .

On appelle *spectre* de Λ l'ensemble, noté $\text{Spec } \Lambda$, des couples $(\mu, m(\mu))$ où μ parcourt l'ensemble des valeurs propres de Λ .

On note $\mu_1(\Lambda)$ la plus petite valeur propre :

$$\mu_1(\Lambda) = \inf \{ 4\pi^2 \|\eta\|^2; \eta \in \Lambda^* \setminus 0 \}.$$

Établir : $\text{aire } \Lambda \cdot \mu_1(\Lambda) \leq \frac{8\pi^2}{\sqrt{3}}$ et discuter le cas de l'égalité.

III.4.

Déterminer les valeurs propres de Λ_e , Λ_r^e et Λ_c .

Pour Λ_e , calculer l'ordre de multiplicité de chacune des valeurs propres

$$20\pi^2, 36\pi^2, 100\pi^2, 1460\pi^2.$$

Quel est le P.G.C.D. des $m(\mu)$ relatifs à Λ_e ?

Pour Λ_e calculer l'ordre de multiplicité de chacune des valeurs propres

$$\frac{16\pi^2}{3}, \frac{112\pi^2}{3}, 2128\pi^2.$$

Que peut-on dire de $m(\mu)$ pour les valeurs propres de Λ_e ?

III.5.

Existe-t-il des réseaux dont toutes les valeurs propres vérifient $m(\mu) = 2$?

III.6.

Démontrer que deux réseaux Λ et Λ' ont le même spectre si, et seulement si, ils sont isométriques.

III.7.

Étant donné un réseau Λ , on range ses valeurs propres par ordre croissant : $0 < \mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \dots$

Démontrer que la série $\sum_i m(\mu_i) e^{-t\mu_i}$ est convergente pour tout réel t strictement positif; on note $S(t)$ sa somme.

Il pourra être commode d'introduire des alvéoles relatifs à Λ^* et des intégrales doubles d'une fonction $(x, y) \rightarrow g_\tau(x, y) = e^{-\tau(x^2 + y^2)}$.

III.8.

Démontrer que $S(t)$ est, quand t tend vers 0 par valeurs positives, un infiniment grand équivalent à $\frac{\text{aire } \Lambda}{4\pi t}$. On pourra pour cela faire intervenir des intégrales doubles de deux fonctions g_τ .

