

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

(Fondée en 1890)

Sujets donnés aux concours d'Agrégation
et aux concours d'entrée aux grandes Écoles en 1969.

PREMIÈRE PARTIE

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Mathématiques générales.

N.B. — Il sera tenu le plus grand compte de la clarté et de la précision de la rédaction.

Dans ce problème les seuls corps qui interviennent sont \mathbf{R} et \mathbf{C} ; tous les espaces vectoriels étudiés sont de dimension finie. On appellera sous-espaces les sous-espaces vectoriels.

5876. — Étant donné un espace vectoriel réel E de dimension n , on rappelle que son complexifié, noté ici $c(E)$, est l'espace vectoriel complexe décrit par $z = x + iy$, où x et y sont des vecteurs de E ; x est dit partie réelle de z , notée $\mathcal{R}(z)$, y est dit partie imaginaire de z , notée $\mathcal{I}(z)$, [$\mathcal{I}(z) = \mathcal{R}(-iz)$]. Le conjugué du vecteur z est le vecteur $\bar{z} = x - iy$.

L'ensemble des conjugués des vecteurs d'une partie V de $c(E)$ est la partie conjuguée de V notée \bar{V} .

E est une partie de $c(E)$; le corps de référence est \mathbf{C} pour les sous-espaces de $c(E)$, \mathbf{R} pour ceux de E .

Tout endomorphisme f de E admet pour prolongement à $c(E)$ l'endomorphisme, noté f' , défini par $f'(x + iy) = f(x) + if(y)$.

I. — Dans toute cette partie Σ désigne un sous-espace de $c(E)$. Le complexifié d'un sous-espace H de E est noté $c(H)$.

1^o a) Le sous-espace Σ de $c(E)$ étant donné, montrer que ses images par les applications $z \mapsto \mathcal{R}(z)$ et $z \mapsto \mathcal{I}(z)$ sont un même sous-espace de E , noté $l(\Sigma)$.

b) Le sous-espace H de E étant donné, préciser $l[c(H)]$.

2^o a) Montrer que $\Sigma \cap E$ est un sous-espace de E et que l'on a l'égalité

$$\Sigma \cap \bar{\Sigma} = c(\Sigma \cap E).$$

b) Établir la formule $\Sigma + \bar{\Sigma} = c[l(\Sigma)]$.

c) On dit qu'un sous-espace Σ de $c(E)$ est un complexifié s'il existe un sous-espace H de E vérifiant $\Sigma = c(H)$. Montrer que Σ est un complexifié si, et seulement si, on a l'égalité $\Sigma = \bar{\Sigma}$.

3^o Un sous-espace de $c(E)$ sera dit irréel si son intersection avec E est réduite au vecteur nul.

a) Montrer que Σ est irréel si, et seulement si, la dimension de $l(\Sigma)$ [en abrégé $\dim l(\Sigma)$] est double de celle de Σ .

b) Établir pour tout Σ la formule

$$\dim l(\Sigma) = 2 \dim \Sigma - \dim (\Sigma \cap \bar{\Sigma}).$$

4^o a) Démontrer que Σ est irréel si, et seulement si, l'application $z \mapsto \mathcal{R}(z)$ de Σ dans $l(\Sigma)$ est injective [ou l'application $z \mapsto \mathcal{I}(z)$].

TB

b) Démontrer qu'un système z_1, z_2, \dots, z_q de vecteurs de $c(E)$ est une base d'un sous-espace irréel si, et seulement si, les $2q$ vecteurs $\Re(z_1), \Re(z_2), \dots, \Re(z_q), \Im(z_1), \Im(z_2), \dots, \Im(z_q)$ constituent un système libre de E .
La dimension d'un sous-espace irréel Σ peut donc prendre toute valeur compatible avec la relation

$$2 \dim \Sigma \leq \dim E.$$

c) Établir qu'on obtient tous les sous-espaces irréels de $c(E)$ par le procédé suivant : on prend un sous-espace H de E de dimension paire et un automorphisme σ de H de carré -1 [c'est-à-dire dont le carré est l'opposé de l'automorphisme identique]; alors $\Sigma = \{x + i\sigma(x); x \in H\}$ [ensemble des vecteurs $x + i\sigma(x)$, où x décrit H] est un sous-espace irréel et l'on a la relation $l(\Sigma) = H$.

5° a) Montrer qu'il n'existe pas d'automorphisme de carré -1 dans un espace réel de dimension impaire.

b) Montrer que tout automorphisme de carré -1 d'un espace réel de dimension paire $2p$ peut être représenté dans une base convenablement choisie par la matrice Ω dont l'élément ω_{jk} ($j^{\text{ème}}$ ligne, $k^{\text{ème}}$ colonne) vaut 1 si $j - k = p$, -1 si $k - j = p$, 0 dans les autres cas; on note

$$\Omega = \left[\begin{array}{c|c} 0 & -I \\ \hline I & 0 \end{array} \right].$$

II. — 1° Montrer que tout endomorphisme φ de $c(E)$ peut s'écrire de façon unique sous la forme $\varphi = f' + ig'$, où f' et g' sont les prolongements à $c(E)$ de deux endomorphismes f et g de E .

2° On appelle \mathcal{L} l'ensemble des endomorphismes de $c(E)$ tels que l'image de E soit sous-espace de $c(E)$.

a) Montrer que les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :

- $\varphi \in \mathcal{L}$;
- $\varphi(E) = (i\varphi)(E)$;
- $\varphi(E) = \varphi[c(E)]$;
- $l(\text{Ker } \varphi) = E$ ($\text{Ker } \varphi$ désigne le noyau de φ).

b) Pour tout $\varphi = f' + ig'$ appartenant à \mathcal{L} , établir la formule

$$2 \text{rang } \varphi = \dim E - \dim (\text{Ker } f \cap \text{Ker } g).$$

3° Soit \mathcal{L}_0 la partie de \mathcal{L} dont les éléments ont un noyau irréel.

a) Montrer que, si la dimension n de E est impaire, \mathcal{L}_0 est vide. On suppose, dans la suite de cette question, que n est un nombre pair $2p$.

b) Montrer que, si $\varphi = f' + ig'$ appartient à \mathcal{L}_0 ,

- $\text{Ker } f \cap \text{Ker } g$ est réduit au vecteur nul;
- il existe un automorphisme σ de E de carré -1 vérifiant

$$f = g \circ \sigma, \quad g = -f \circ \sigma.$$

c) Soit f et g deux endomorphismes de E dont les noyaux ont une intersection réduite au vecteur nul. S'il existe un endomorphisme τ de E satisfaisant aux relations $f = g \circ \tau$, $g = -f \circ \tau$, alors $f' + ig'$ appartient à \mathcal{L}_0 , τ est unique et de carré -1 .

4° L'endomorphisme $\varphi = f' + ig'$ de $c(E)$ étant donné, on se propose d'étudier le système, où τ désigne un endomorphisme inconnu de E :

$$(T) \quad \begin{cases} g \circ \tau = f \\ f \circ \tau = -g \end{cases}$$

- a) (T) admet au moins une solution si, et seulement si, $\varphi \in \mathcal{L}$.
- b) (T) admet une solution unique si, et seulement si, on a

$$\varphi \in \mathcal{L} \quad \text{et} \quad \text{Ker } \varphi \text{ irréel.}$$

c) Si la dimension de E est paire, quel que soit φ appartenant à \mathcal{L} , une solution de (T) au moins est un automorphisme de carré -1 .

III. — On suppose dans cette partie que E est un espace vectoriel euclidien de dimension n . On prolonge à $c(E)$ le produit scalaire de E en posant

$$z.z' = (x + iy).(x' + iy') = x.x' - y.y' + i(x.y' + y.x')$$

quels que soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. On appelle carré scalaire de z , noté z^2 , le produit scalaire $z.z$.

Un vecteur de $c(E)$ est dit isotrope si son carré scalaire est nul. Un sous-espace totalement isotrope [en abrégé : SETI] est un sous-espace de $c(E)$ dont tous les vecteurs sont isotropes. Un SETI est donc irréel.

1° a) Étant donné un système orthonormé de $2q$ vecteurs de E , $u_1, u_2, \dots, u_q, v_1, v_2, \dots, v_q$, montrer que le système $u_1 + iv_1, u_2 + iv_2, \dots, u_q + iv_q$ engendre un SETI de dimension q .

b) Étant donné un espace vectoriel réel E_0 et un sous-espace irréel Σ_0 de son complexifié, établir qu'il existe sur E_0 au moins une structure euclidienne pour laquelle Σ_0 soit un SETI.

Pour l'étude des SETI de $c(E)$, on associe à tout sous-espace irréel Σ de $c(E)$ l'automorphisme σ de $l(\Sigma)$, étudié en I, 4°, c, qui à tout x de $l(\Sigma)$ associe l'unique vecteur y de E tel que $x + iy$ soit élément de Σ .

2° a) Montrer que, pour un endomorphisme τ d'un espace euclidien, deux quelconques des trois propriétés suivantes impliquent la troisième :

- τ est orthogonal,
- τ est de carré -1 ,
- pour tout x le produit scalaire $x \cdot \tau(x)$ est nul.

b) Montrer qu'un sous-espace irréel Σ de $c(E)$ est un SETI si, et seulement si, son automorphisme associé, σ , est orthogonal.

c) Montrer que tout automorphisme orthogonal de carré -1 d'un espace euclidien peut être représenté dans une base orthonormée convenable par la matrice Ω définie en I, 5°, b.

3° Un système z_1, z_2, \dots, z_q de vecteurs de $c(E)$ sera dit normal lorsque les vecteurs $\Re(z_1), \Re(z_2), \dots, \Re(z_q), \Im(z_1), \Im(z_2), \dots, \Im(z_q)$ forment un système orthonormé de E . Tout système normal est la base d'un SETI (voir III-1°-a). Établir que :

- a) tout SETI admet au moins une base normale;
- b) tout système normal d'un SETI peut être complété en une base normale de ce SETI.

4° a) La dimension n de E étant égale à $2p$ ou $2p + 1$, montrer que tout SETI est inclus dans un SETI de dimension p .

On appellera sous-espace totalement isotrope maximal [en abrégé SETIM] tout SETI de dimension p .

b) Montrer que, si la dimension de E est $2p$, il existe deux SETIM et deux seulement contenant un SETI donné de dimension $p - 1$.

5° Dans cette question, E est supposé de dimension $2p$ et orienté.

a) Montrer que tout automorphisme orthogonal de E qui commute avec un automorphisme orthogonal de carré -1 est direct.

b) Étant donné un automorphisme σ de E , orthogonal et de carré -1 , établir que toutes les bases orthonormées dans lesquelles il est représenté par la matrice Ω définie en I, 5°, b sont de même sens.

c) Étant donné un SETIM Σ , montrer que, quelle que soit la base normale z_1, z_2, \dots, z_p de Σ , le sens de la base orthonormée $\Re(z_1), \Re(z_2), \dots, \Re(z_p), \Im(z_1), \Im(z_2), \dots, \Im(z_p)$ de E ne dépend que de Σ . Ce sens (direct ou indirect) est par convention le sens de Σ .

d) Étant donné deux SETIM, Σ et Σ' , montrer qu'il existe au moins un automorphisme orthogonal h de E dont le prolongement h' à $c(E)$ transforme Σ en Σ' .

e) Établir que le prolongement à $c(E)$ de tout automorphisme orthogonal direct (resp. indirect) transforme tout SETIM en un SETIM de même sens (resp. de sens contraire).

6° Dans cette question E est simplement supposé de dimension $2p$.

a) Montrer que tout SETIM de $c(E)$ est sous-espace propre du prolongement d'un automorphisme orthogonal de carré -1 de E . Combien d'automorphismes orthogonaux de carré -1 répondent à la question pour un SETIM donné?

b) Étant donné deux automorphismes f et g de E , soit $\varphi = f' + ig'$ l'endomorphisme de $c(E)$ associé. Montrer que $\text{Ker } \varphi$ est un SETIM si, et seulement si, f et g sont des automorphismes tels que $g^{-1} \circ f$ soit un automorphisme orthogonal de carré -1 .

Montrer que $\varphi(E)$ est un SETIM si, et seulement si, f et g sont des automorphismes tels que $f \circ g^{-1}$ soit un automorphisme orthogonal de carré -1 .