

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

(Fondée en 1890)

**Sujets donnés aux concours des Agrégations
et aux concours d'entrée aux grandes Écoles en 1967.**

PREMIÈRE PARTIE

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Mathématiques élémentaires et Mathématiques spéciales.

5787. — Étant donné un ensemble E et une application f de E dans lui-même, on dira que n éléments rangés de E , notés a_1, a_2, \dots, a_n ($n \geq 2$), forment cycle pour f si a_2, a_3, \dots, a_n sont distincts de a_1 et si

$$f(a_1) = a_2, \quad f(a_2) = a_3, \quad \dots, \quad f(a_{n-1}) = a_n \quad \text{et} \quad f(a_n) = a_1.$$

L'image de a_1 par f^h sera notée a_{h+1} pour tout entier h positif ($a_{h+n} = a_h$).

Lorsque E est un espace vectoriel, un endomorphisme f sera dit *cyclique d'ordre n* s'il existe au moins un sous-ensemble de n vecteurs engendrant E et un ordre de rangement tel que ces vecteurs forment cycle pour f .

De même, une transformation affine g d'un espace affine \mathcal{E} sera dite *cyclique d'ordre n* s'il existe au moins un sous-ensemble de n points engendrant \mathcal{E} et un ordre de rangement tel que ces points forment cycle pour g .

I. — A. — E est un espace vectoriel réel de dimension 2 et f un endomorphisme de E , cyclique d'ordre n .

1° Montrer que dans un cycle pour f :

deux vecteurs quelconques sont distincts;

deux vecteurs consécutifs forment une base de E .

Établir les relations

$$f^n = I \quad (I \text{ endomorphisme identique}),$$

$$f^m \neq I \quad \text{quel que soit l'entier } m \text{ compris strictement entre } 0 \text{ et } n.$$

Peut-on construire un cycle pour f à partir d'un vecteur donné?

2° Montrer qu'il existe des bases de E dans lesquelles f est représenté par une matrice du type $\begin{bmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{bmatrix}$;

établir que :

a vaut $+1$ ou -1 ;

a et b sont indépendants du choix d'une telle base ;

$$\text{on a } f^2 = aI + bf.$$

Montrer que le polynôme $P(\lambda) = \lambda^2 - b\lambda - a$ ne peut avoir de racine double.

Caractériser f lorsque $P(\lambda)$ a ses racines réelles.

3° On suppose désormais que les racines de $P(\lambda)$ ne sont pas réelles. Soit V_1, V_2, \dots, V_n un cycle pour f . Montrer qu'il existe une forme bilinéaire symétrique, φ , unique, stable par f et telle que l'on ait $\varphi(V_1, V_1) = 1$. [On rappelle qu'une forme bilinéaire φ est stable par un endomorphisme f si l'on a $\varphi[f(X), f(Y)] = \varphi(X, Y)$ pour tout couple X, Y de vecteurs.]

Montrer que φ définit sur E une structure euclidienne. Quelle est l'interprétation de f dans cette structure? Quelle est alors la figure formée par V_1, V_2, \dots, V_n ?

4° On pose $\varphi(V_1, V_2) = \cos \theta$; exprimer au moyen de θ :

$\varphi(V_k, V_l)$, k et l étant deux entiers quelconques;

V_k sous forme de combinaison linéaire de V_1 et V_2 ;

f^h comme combinaison linéaire de f et de I pour tout entier relatif h .

B. — \mathcal{E} est un espace affine réel de dimension 2, associé à l'espace vectoriel E ; g est une transformation affine de \mathcal{E} , cyclique d'ordre n .

1° Montrer que l'endomorphisme f de E associé à g est cyclique d'ordre n .

Montrer que g admet un point fixe unique.

Une transformation affine de \mathcal{E} associée à un endomorphisme cyclique de E est-elle cyclique?

2° Montrer qu'il existe des ellipses globalement invariantes par g ; et que, par les points d'un cycle pour g , il passe une telle ellipse et une seule.

3° On donne n et trois points A_1, A_2, A_3 . Existe-t-il une transformation affine cyclique d'ordre n pour laquelle A_1, A_2, A_3 soient trois points consécutifs d'un cycle? Dans l'affirmative, indiquer le nombre de solutions et, pour chacune d'elles, préciser la position du point fixe.

Comment doivent être liés quatre points A_1, A_2, A_3 et A_4 pour qu'il existe une transformation affine cyclique d'ordre n pour laquelle A_1, A_2, A_3 et A_4 soient quatre points consécutifs d'un cycle?

4° Pour $n = 6$ et A_1, A_2 donnés, construire A_4, A_5, A_6 , connaissant A_3 . Si l'on suppose de plus le plan euclidien, pour quels points A_3 l'hexagone $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ a-t-il deux côtés consécutifs égaux?

II. — E est maintenant un espace vectoriel réel de dimension 3 et f un endomorphisme de E , cyclique d'ordre n .

1° Établir la relation $f^n = I$ (I endomorphisme identique).

Montrer que :

I, f, f^2 sont linéairement indépendants;

dans une base convenable, f est représenté par une matrice du type

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix};$$

— le polynôme $P(\lambda) = \lambda^3 - c\lambda^2 - b\lambda - a$ divise $\lambda^n - 1$.

2° Montrer que f admet une valeur propre réelle, unique et non multiple.

Quelle est cette valeur propre lorsque f est direct (c'est-à-dire de déterminant positif)? Calculer a, b, c , connaissant l'argument θ d'une des valeurs propres non réelles.

Répondre aux mêmes questions lorsque f est indirect (c'est-à-dire de déterminant négatif); y a-t-il dans ce cas une condition sur n ?

Caractériser au moyen de ses valeurs propres un endomorphisme cyclique d'ordre n de E .

3° Soit V_1, V_2, \dots, V_n un cycle pour f .

Démontrer que, si f est direct, les différences

$$V_2 - V_1, \quad V_3 - V_2, \quad \dots, \quad V_n - V_{n-1}, \quad V_1 - V_n$$

sont contenues dans le seul sous-espace vectoriel de E de dimension 2 (en abrégé : plan) stable par f et forment cycle pour f .

Démontrer que, si f est indirect et n multiple de 4, les sommes

$$V_1 + V_2, \quad V_2 + V_3, \quad \dots, \quad V_{n-1} + V_n, \quad V_n + V_1$$

sont contenues dans le seul plan de E stable par f et forment cycle pour f . Étudier ces sommes lorsque f est indirect et que n n'est pas multiple de 4.

4° Montrer qu'on peut munir E d'un produit scalaire rendant f orthogonal.

Décrire alors la configuration d'un cycle pour f dans les différents cas rencontrés au II, 3°; en fixant $n = 6$, faire une figure relative à chacun des cas.

5° Soit g une transformation affine cyclique d'un espace affine \mathcal{E} associé à l'espace vectoriel E , et soit f l'endomorphisme de E associé à g . Démontrer que :

f est cyclique de même ordre que g ;

f est indirect;

g admet un point fixe unique.

III. — On se propose, indépendamment des deux parties précédentes, d'étudier les endomorphismes cycliques d'un espace vectoriel E complexe de dimension p .

On appellera *cycle propre d'ordre n* de E , tout système de n vecteurs engendrant E et formant cycle pour au moins un endomorphisme de E .

On pose $r = \exp \frac{2i\pi}{n}$. Les égalités

$$W_k = r^k V_1 + r^{2k} V_2 + \dots + r^{nk} V_n \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n)$$

associent à n vecteurs rangés V_1, V_2, \dots, V_n , n vecteurs W_1, W_2, \dots, W_n .

1° Dans l'hypothèse où V_1, V_2, \dots, V_n forment cycle pour un endomorphisme f de E , calculer les $f(W_k)$.

2° On suppose $n = p$. Montrer que tout système de p vecteurs indépendants est un cycle propre, l'endomorphisme associé étant unique; diagonaliser cet endomorphisme.

3° On suppose $n > p$. Montrer que, si V_1, V_2, \dots, V_n sont les vecteurs d'un cycle propre, $n - p$ parmi les vecteurs W_k sont nuls et les p autres sont non nuls; on désigne ces derniers par U_1, U_2, \dots, U_p et par r_1, r_2, \dots, r_p les valeurs r^k correspondantes. Établir l'unicité de l'endomorphisme associé et calculer V_1, V_2, \dots, V_n en fonction de U_1, U_2, \dots, U_p et de r_1, r_2, \dots, r_p .

4° Caractériser par leurs valeurs propres les endomorphismes cycliques d'ordre n de E .

Un tel endomorphisme f étant donné, comment choisir un vecteur V pour que ses images successives par f forment un cycle propre?

5° On donne p vecteurs indépendants rangés V_1, V_2, \dots, V_p . Montrer qu'il existe au moins un endomorphisme f cyclique, dont l'ordre n est donné ($n \geq p$), pour lequel V_1, V_2, \dots, V_p sont p vecteurs consécutifs d'un cycle.

6° Étant donné un endomorphisme cyclique d'ordre n de E , présenter une structure hermitienne le rendant unitaire.

Dans le cas d'un espace vectoriel réel de dimension p , démontrer que, pour tout endomorphisme cyclique, il existe une structure euclidienne le rendant orthogonal.

IV. — Soit F un espace projectif complexe ou réel de dimension p . On désigne par E l'espace vectoriel associé à F .

On appellera *cycle propre d'ordre n* de F tout système de n points engendrant F et formant cycle pour au moins une homographie de F .

Une homographie h de F sera dite *cyclique d'ordre n* si elle est associée à au moins un cycle propre d'ordre n de F .

1° Montrer que, lorsque F est complexe, un système de n points est un cycle propre si, et seulement si, il existe dans E un système de représentants de ces points qui soit un cycle propre d'ordre n .

Montrer que, lorsque F est réel, cette propriété est encore vraie si n est impair, ou si n et p sont pairs tous les deux. Dans le cas où n est pair et p impair, montrer qu'une homographie cyclique d'ordre n de F (réel) peut être représentée par un endomorphisme cyclique de E d'ordre n ou $2n$.

2° Montrer que tout système de $p + 1$ points indépendants de F est un cycle propre de F .

Montrer que tout système de $p + 2$ points, tels que $p + 1$ quelconques d'entre eux soient indépendants, est un cycle pour une homographie et une seule.

3° F est réel de dimension 2. Montrer que toute homographie cyclique h admet un point invariant, qu'elle laisse globalement invariante une droite et une seule et que tous les points d'un cycle pour h sont sur une conique globalement invariante par h .

Peut-on réduire une telle homographie à une transformation cyclique affine?

4° On suppose F réel. Discuter, suivant les parités de n et de p , combien une homographie cyclique d'ordre n laisse de points invariants et de droites globalement invariantes.

Une homographie cyclique de F peut-elle être réduite à une transformation cyclique affine par le choix de l'hyperplan à l'infini?

5° F est réel de dimension 3. Soit h une homographie de F (prolongée sur le complexifié de F) cyclique d'ordre n , ne laissant invariant aucun point réel, et soit f un endomorphisme cyclique associé à h .

a) Montrer que h laisse invariants quatre points non réels, deux à deux conjugués, que l'on désigne par A et \bar{A} , B , et \bar{B} ; on appelle D et D' les droites $A\bar{A}$, et $B\bar{B}$.

Montrer que, pour que h^2 laisse globalement invariante au moins une droite réelle autre que D et D' , il faut et suffit que f ait ses valeurs propres deux à deux opposées.

On suppose dans toute la suite cette condition réalisée.

b) Montrer que h^2 n'a pas de point réel invariant. Montrer qu'il existe une relation linéaire entre I , endomorphisme identique de E , f^2 et f^4 . Étant donné un point M_1 , étudier la figure formée par M_1 et ses images successives par h^2 et montrer que par tout point réel passe une droite et une seule globalement invariante par h^2 .

Montrer que, pour qu'une quadrique propre réelle soit globalement invariante par h , il est nécessaire et suffisant qu'elle contienne les quatre côtés de l'un ou l'autre de deux quadrilatères gauches, que l'on précisera.

Montrer que, par tout point réel non situé sur D ou D' , passent deux quadriques propres réelles globalement invariantes par h . Quelle est leur intersection?

Étant donné une droite réelle globalement invariante par h^2 , préciser la correspondance entre cette droite et son image par h .

Cette étude (IV, 5^o, b) peut-elle être généralisée à des homographies non cycliques de F ?