76e Année Août-Septembre 1965 N° 1-2

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

(Fondée en 1890)

Sujets donnés aux concours des Agrégations et aux concours d'entrée aux grandes Écoles en 1965.

PREMIÈRE PARTIE

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Mathématiques élémentaires et Mathématiques spéciales.

4
5699. — INDICATIONS PRÉLIMINAIRES. — 1° La partie II du problème est indépendante de la partie I. Il n'est pas nécessaire d'avoir traité les parties I et II pour commencer l'étude de la partie III.

2° L'espace projectif (resp. le plan projectif) dont il est question dans les parties I et IV (resp. dans la partie III) est supposé rapporté à un repère permettant de définir chaque point P par quatre (resp. trois) coordonnées *homogènes* x, y, z, t (resp. x, y, z); la matrice-colonne formée par un système de coordonnées du point P sera notée (P).

Les nombres intervenant dans le problème sont des nombres du corps des complexes.

I. — Soient a, b, c, a', b', c' six nombres liés par

$$1 + bcb'c' + cac'a' + aba'b' = 0.$$

On considère la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 0 & ba' & -ca' & bc \\ -ab' & 0 & cb' & ca \\ ac' & -bc' & 0 & ab \\ -b'c' & -c'a' & -a'b' & 0 \end{bmatrix}.$$

1° Démontrer que le carré M^2 est égal à la matrice-unité d'ordre quatre, que l'on désignera par Ω, et que les valeurs propres de M sont $+1$ et -1; quel est l'ordre de multiplicité de chacune d'elles?

2° On considère la transformation de l'espace projectif qui, à chaque point P, fait correspondre le point P' défini par

$$(P') = M.(P).$$

Démontrer que cette transformation admet deux droites de points invariants. Quelles relations existe-t-il entre ces droites et les colonnes des matrices $M + \Omega$ et $M - \Omega$?

3° On donne trois nombres u, v, w, deux à deux différents, et l'on définit les nombres r, r', r'' par les conditions

$$\begin{aligned} r(w - v) + 1 - vw &= 0, \\ r'(u - w) + 1 - wu &= 0, \\ r''(v - u) + 1 - uv &= 0. \end{aligned}$$

Vérifier les relations

$$\begin{aligned} 1 + r'r'' + r''r + rr' &= 0, \\ 1 + vwr'r'' + wur''r + uvrr' &= 0. \end{aligned}$$

On considère la matrice

$$R = \begin{bmatrix} 0 & ur' & -ur'' & r'r'' \\ -vr & 0 & vr'' & r''r \\ wr & -wr' & 0 & rr' \\ -vw & -wu & -uv & 0 \end{bmatrix}.$$

Montrer que les colonnes de $R + \Omega$ représentent quatre points alignés du plan $x + y + z + t = 0$.
Que peut-on dire des points représentés par les colonnes de $R - \Omega$?

II. — Dans un plan euclidien, on donne deux points réels et distincts J et J'. On appelle (σ) le faisceau linéaire des cercles passant par J et J' et (τ) le faisceau des cercles orthogonaux aux cercles de (σ).

1° Sur un cercle τ_1 de (τ) on prend deux points réels A et B hors de la droite des centres et l'on considère les cercles de (σ) passant respectivement par A et B : soient σ_A, σ_B ces deux cercles, supposés distincts. La droite AB recoupe σ_A en C et σ_B en D. Démontrer que les points C et D sont sur un même cercle τ_2 de (τ).

2° En général, la droite $ABCD$ coupe les axes radicaux des faisceaux (σ) et (τ) en des points à distance finie; montrer que l'un de ces points est un centre d'homothétie des cercles τ_1, τ_2 et que l'autre est un centre d'homothétie des cercles σ_A, σ_B.

(L'étude des cas particuliers n'est pas demandée.)

3° Démontrer que les couples de droites (BJ, BJ') et (CJ, CJ') ont mêmes directions de bissectrices.

Soit (φ) la famille des hyperboles équilatères admettant J et J' comme points diamétralement opposés. Démontrer qu'il existe dans (φ) une hyperbole φ_1 passant par A et D et une hyperbole φ_2 passant par B et C.

III. — *Données :* Dans un plan projectif Π on donne quatre droites (E), (F), (G), (H), se coupant deux à deux en six points distincts I, J, K, I', J', K', notés de telle sorte que :

I, J, K sont sur (E); I, J', K' sur (F); I', J, K' sur (G); I', J', K sur (H).

On désigne par (f), (g), (h) les faisceaux linéaires ponctuels de coniques admettant respectivement comme points de base : J, J', K, K' pour (f); K, K', I, I' pour (g); I, I', J, J' pour (h). Les coniques de ces faisceaux, dont il sera question dans la suite, sont des coniques non décomposées.

Notations : A partir de la question 2°, les quatre droites (E), (F), (G), (H) seront représentées respectivement par les équations

$$E = 0, \qquad F = 0, \qquad G = 0, \qquad H = 0,$$

E, F, G, H désignant quatre formes linéaires (de x, y, z) dépendantes, trois quelconques d'entre elles, par exemple F, G, H, étant indépendantes; on suppose que les coefficients des formes sont choisis de façon que la relation de dépendance s'exprime par l'identité

$$F + G + H + E = 0.$$

Tout point du plan Π peut être défini : soit par ses trois coordonnées (F, G, H), c'est-à-dire par les valeurs qu'il donne à ces formes; soit par ses quatre « coordonnées liées » (F, G, H, E), c'est-à-dire par les valeurs (de somme nulle) qu'il donne à ces quatre formes.

Les coniques de (f), (g), (h) seront représentées par les équations respectives

$$EF - \mu GH = 0, \qquad EG - \mu' HF = 0, \qquad EH - \mu'' FG = 0,$$

μ, μ', μ'' étant des paramètres.

Définition : On convient de dire que trois points *rangés* 1, 2, 3 forment un cycle, qui sera noté (1, 2, 3), lorsque ces points sont alignés et lorsqu'il existe : une conique de (h) passant par 1 et 2, une conique de (f) passant par 2 et 3, une conique de (g) passant par 3 et 1.

Pour établir l'existence de tels cycles et pour étudier quelques-unes de leurs propriétés, on considère une conique h_1 de (h) et, sur h_1, deux points A et B distincts (et distincts des points de base), puis les coniques f_A, f_B de (f) et g_A, g_B de (g) qui passent respectivement par A et B.

1° On suppose d'abord que les coniques f_A et f_B sont distinctes, ainsi que g_A et g_B.

Démontrer, en utilisant les trois involutions déterminées sur la droite AB par les coniques (dégénérées et non dégénérées) des trois faisceaux (f), (g), (h), que les coniques f_B et g_A ont en commun un point situé sur la droite AB; soit C ce point, qui définit un cycle (A, B, C).

Démontrer qu'il existe sur la droite ABC un quatrième point, D, permettant de définir trois autres cycles : (B, A, D), (C, D, A), (D, C, B).

Que deviennent ces résultats si f_A et f_B (ou bien g_A et g_B) sont confondues?

2° *(Cette question peut être traitée indépendamment de la solution de la question III, 1°.)*

Les notations u, v, w, r, r', r'' désignent six nombres non nuls, vérifiant les conditions énoncées dans la partie I, 3° et définissant une matrice R.

On définit la conique h_1 par l'équation $EH - w^2 GF = 0$ et les points A et B (distincts des points de base) comme intersections de h_1 avec les droites

$$Hv + Gw = 0, \quad \text{pour A,}$$
$$Hu + Fw = 0, \quad \text{pour B.}$$

Calculer, au moyen de u, v, w, r, r', r'', les coordonnées liées (F, G, H, E) des points A et B; former les équations des coniques f_A, f_B, g_A, g_B.

Établir par le calcul l'existence sur la droite AB des points C et D définis dans l'énoncé de la question III, 1°; calculer les coordonnées liées (F, G, H, E) des points C et D et former l'équation de la conique de (h) qui passe par C et D.

On montrera que les colonnes de la matrice $R + \Omega$ représentent, à un facteur près, les coordonnées liées des points A, B, C, D.

Former, en fonction de u, v, w seuls, une équation de la droite ABCD.

3° On considère une conique de (f), une conique de (g), une conique de (h), définies par leurs équations respectives :

$$EF - u^2GH = 0,$$
$$EG - v^2HF = 0,$$
$$EH - w^2FG = 0,$$

où u^2, v^2, w^2 sont deux à deux distincts.

Les trois coniques, prises deux à deux, se coupent, en général, en six points autres que les points de base.

Étudier la disposition de ces six points en mettant en évidence les cycles qu'ils peuvent former, ainsi que les matrices R qu'on peut leur associer.

4° Quelle relation existe-t-il entre les parties II et III du problème?

IV. — Dans l'espace projectif contenant le plan Π (de la partie III), on donne un tétraèdre dont aucun des sommets O_1, O_2, O_3, O_4 n'est situé dans Π. Désignant par Q_i le plan de la face du tétraèdre opposée au sommet O_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, on appelle (F), (G), (H), (E) les droites d'intersection de Π respectivement avec les plans Q_1, Q_2, Q_3, Q_4.

On suppose que les équations des plans Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 sont respectivement

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0, \qquad T = 0,$$

X, Y, Z, T étant quatre formes linéaires (de x, y, z, t) indépendantes, choisies de façon que le plan Π ait pour équation $X + Y + Z + T = 0$. Tout point de l'espace peut être défini par ses coordonnées (X, Y, Z, T), c'est-à-dire par les valeurs qu'il donne aux quatre formes. Les restrictions dans Π des formes X, Y, Z, T sont identifiées aux formes F, G, H, E de la partie III.

Les six points I, J, K, I', J', K', les faisceaux (f), (g), (h), les cycles dans Π, ainsi que la correspondance entre cycles et matrices R, sont définis comme dans la partie III.

On désigne par Π_1, Π_2, Π_3, Π_4 les plans qui ont respectivement pour équations

$$-X + Y + Z + T = 0,$$
$$X - Y + Z + T = 0,$$
$$X + Y - Z + T = 0,$$
$$X + Y + Z - T = 0.$$

1° On considère dans le plan Π une division de quatre points A, B, C, D tels que (A, B, C), (B, A, D) soient des cycles au sens de la partie III. Les droites O_1A, O_2B, O_3C, O_4D coupent respectivement Π_1, Π_2, Π_3, Π_4 aux points A', B', C', D'.

Démontrer que ces quatre points sont alignés.

On pourra utiliser la matrice $R - \Omega$ étudiée dans I, 3°.

2° On donne, hors du plan Π, une droite L coupant les quatre plans Π_i aux points l_i $(i = 1, 2, 3, 4)$. Soit λ_i le point d'intersection de la droite O_il_i avec le plan Π.

On suppose que les trois points $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont sur une même droite ne passant par aucun des points de base des faisceaux (f), (g), (h); montrer que ces trois points forment alors un cycle et préciser la position du point λ_4.

3° On revient aux points alignés A', B', C', D' de IV, 1°. Trouver le lieu des droites A'B'C'D' correspondant à toutes les divisions ABCD portées par une droite Δ du plan Π, donnée par ses équations :

$$\begin{cases} X + Y + Z + T = 0, \\ \alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0. \end{cases}$$