AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Concours de 1962.

5515. — I. — *On considère les deux équations en* z :

(1) $$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n = 0,$$

(2) $$g(z) = z^n - |a_1|z^{n-1} - \cdots - |a_{n-1}|z - |a_n| = 0,$$

où les coefficients a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *sont réels ou complexes;* $|a_i|$ *désigne le module de* a_i. *On suppose* $a_1 \neq 0$, $a_n \neq 0$.

1° a) *Démontrer que l'équation* (2) *a une racine réelle positive et une seule, que l'on représentera par* r.

b) *Vérifier la relation*

(3) $$|f(z)| \geqslant g|z|.$$

En déduire que toutes les racines réelles ou complexes de l'équation (1) *ont un module inférieur ou égal à* r. *Montrer en outre que celles des racines réelles ou complexes de l'équation* (2) *qui sont différentes de* r *ont un module inférieur à* r.

2° *Démontrer les inégalités*

$$r < \underset{i=1,\,2,\,\ldots,\,n}{\operatorname{Max}} (1 + |a_i|) \qquad \text{et} \qquad r < \left(1 + \sum_{i=1}^{i=n} |a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$\left(\right.$*Pour cette dernière, on pourra appliquer l'inégalité de Schwartz à la somme* $\displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} |a_i|\,|z|^{n-i}$.$\left.\right)$

3° *En appelant* r_1 *le module maximal des racines de l'équation* (1), *démontrer la relation*

$$r_1 \geqslant (2^{1/n} - 1)r.$$

[*On pourra partir des relations entre les coefficients et les racines de l'équation* (1).]

Que peut-on déduire des exemples

$$f(z) = (z + 1)^n, \qquad f(z) = 2z^n - (z + 1)^n?$$

4° *Soit la matrice carrée d'ordre* n :

$$A = \begin{bmatrix} |a_1| & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ |a_2| & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ |a_{n-1}| & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ |a_n| & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$

Démontrer que cette matrice admet l'équation (2) *comme équation caractéristique. Vérifier que la matrice* A^{2n-2} *a tous ses termes positifs quels que soient les coefficients* a_i, *tels que* $a_1 \neq 0$, $a_n \neq 0$. *(On pourra commencer par le cas* $a_i = 0$ $[i \neq 1,\ i \neq n]$, $a_1 = a_n = 1$ *et étendre ensuite au cas général.)*

II. — 1° *Soit* $E = R^+$ *l'ensemble des nombres réels positifs (non nuls).* x *et* x' *étant des éléments de* E, *on pose*

$$h(x, x') = |\operatorname{Log} x - \operatorname{Log} x'|.$$

Démontrer que $h(x, x')$ *est une* distance *dans* E. *Vérifier que l'espace métrique* E *défini par la distance* h *est le même espace topologique que l'espace métrique* E *défini par la distance* $d(x, x') = |x - x'|$.

2° *On considère la transformation homographique* T *définie dans* E *par*

T : $$x \to y = \frac{c + dx}{a + bx} \quad (a, b, c, d \text{ éléments de } R^+).$$

a) *Vérifier que l'image* T(E) *de* E *par* T *est contenue dans un sous-espace compact de* E.

b) *Etablir la relation*

$$\frac{h(y, y')}{h(x, x')} \leqslant \operatorname{th} \frac{\lambda}{4}, \tag{4}$$

où y *et* y' *sont les images de* x *et* x' *par* $T(x \neq x')$ *et où* λ *désigne la distance*

$$\lambda = h\left(\frac{c}{a}, \frac{d}{b}\right).$$

c) $x_0 \in E$ *étant fixé, on se propose d'étudier la suite des transformés* $x_n = T^n(x_0)$ *de* x_0 *par* T. *Démontrer que la suite* $\{x_n\}$ *est une suite de Cauchy pour la distance* h.

d) *En déduire que la suite* $\{x_n\}$ *converge dans* E *vers un point limite,* l, *lorsque* n *augmente indéfiniment. Démontrer que* l *est un point invariant par* T $(T(l) = l)$ *et que c'est le seul point de* E *invariant par* T.

3° a) *Soit* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *une matrice* positive, *c'est-à-dire une matrice dont tous les éléments sont dans* R^+. *Une telle matrice sera notée* $A > 0$. *On lui associe l'application linéaire* P *de* R^2 *qui a pour matrice* A *dans la base* $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0,1)$, *ainsi que la transformation homographique* T *de* E *définie au* 2°.

Démontrer au moyen de T *qu'il existe un vecteur propre* (x_1, x_2) positif $(x_1 \in R^+, x_2 \in R^+)$ *de* P, *associé à une valeur propre positive* r. *Vérifier que la deuxième valeur propre de* P *a un module inférieur à* r.

b) *On dit qu'une matrice* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *est* primitive *si ses éléments* a, b, c, d *sont positifs* ou nuls $(A \geqslant 0)$ *et s'il existe un entier* m *tel que la matrice* A^m *soit positive* $(A^m > 0)$.

Démontrer la propriété suivante: pour qu'une matrice $A \geqslant 0$ *soit primitive, il faut et il suffit que*

$$bc \neq 0, \qquad a + d \neq 0. \tag{5}$$

Étendre à une matrice primitive les résultats démontrés au 3°, a) *pour une matrice positive.*

III. — 1° *Soit* $E = (R^+)^n$ *l'ensemble des points* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *où* $x_i \in R^+$. *On pose de plus* $x_0 = 1$ *et, pour deux points* x, x' *éléments de* E :

$$h(x, x') = \operatorname*{Max}_{i,j=0,1,\ldots,n} \left| \operatorname{Log} \frac{x_i}{x_j} - \operatorname{Log} \frac{x'_i}{x'_j} \right|.$$

Démontrer que $h(x, x')$ *est une distance dans* E *qui définit le même espace topologique que la distance euclidienne.*

Préciser pour cette distance la boule de centre x *et de rayon* R. *Représenter cette boule par une figure dans le cas du plan* $(n = 2)$.

2° *Indiquer les résultats qu'on pourrait obtenir par les méthodes qui généralisent celles de la partie* II *et comment ces résultats peuvent s'appliquer à la matrice* A *considérée à la question* I, 4°.

Solution.

par **P. L. Hennequin,** Maître de Conférences à la Faculté des sciences de Clermont-Ferrand.

I

1° a) Puisque $|a_n| \neq 0$, 0 n'est pas racine de (2) qui est équivalente à

$$1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{z^k}. \tag{3}$$

$\sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{z^k}$ est pour $z > 0$ une fonction continue strictement décroissante de $+\infty$ à 0, qui prend donc la valeur 1 pour une et une seule valeur réelle positive r, racine simple de g, qui change une fois et une seule de signe sur $[0, +\infty[$ pour $z = r$.

Si $z \neq r$ on a donc

$$g(|z|)\,(|z| - r) > 0. \tag{4}$$