Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs, montres connectées et tous appareils électroniques de communication ou de stockage, ainsi que les documents sont interdits.

La qualité de la rédaction est un facteur important d'appréciation des copies. Les candidats sont donc invités à produire des raisonnements clairs, complets et concis.

Les candidats peuvent utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes, en veillant dans ce cas à préciser la référence du résultat utilisé.

Notations, vocabulaire et rappels

Tous les espaces vectoriels considérés dans le problème sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

L'ensemble $C(\mathbb{R})$ (ou $C^0(\mathbb{R})$) désigne l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

L'ensemble $C^1(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues, dérivables, dont la dérivée est continue.

Plus généralement, pour un entier $k \geqslant 1$, l'ensemble $C^k(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions f continues et dérivables dont la dérivée f' appartient à $C^{k-1}(\mathbb{R})$.

L'ensemble $C_c^1(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions de $C^1(\mathbb{R})$ à support compact, i.e. nulles en dehors d'un compact de $\mathbb{R}$.

Pour une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$ on introduit

$$||f||_\infty = \sup\{|f(x)|; x \in \mathbb{R}\} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|.$$

L'ensemble $CB(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}$. Cet ensemble $CB(\mathbb{R})$ muni de la norme $||.||_\infty$ est un espace de Banach, i.e. un espace vectoriel normé complet.

Un espace de Hilbert est un espace de Banach dont la norme provient d'un produit scalaire. La norme d'un espace de Hilbert est dite *norme euclidienne*.

Un exemple d'espace de Hilbert est l'espace $L^2(\mathbb{R})$ qui est l'ensemble des fonctions mesurables de carré intégrable ; on effectue l'identification classique de dire que $f = 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$ si l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}; f(x) \neq 0\}$ est de mesure nulle. Avec cette identification, on a une norme sur $L^2(\mathbb{R})$, définie par

$$||f||_2 = (\int_{\mathbb{R}} f(x)^2 \mathrm{d}x)^{\frac{1}{2}},$$

qui provient du produit scalaire $\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

Pour T une application linéaire continue d'un espace de Banach $(B, ||.||_B)$ dans lui même, on note

$$||T||_{\mathcal{L}(B)} = \sup\{||T(f)||_B; f \in B, ||f||_B \leq 1\}.$$

Pour f dans $CB(\mathbb{R})$ on note $\Upsilon(f)$ l'application définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Upsilon(f)(x) = f(-x).$$

On dit qu'une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ est *évanescente* si elle vérifie

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 0.$$

L'ensemble des fonctions évanescentes est noté E.

En vue de la partie **V**, on donne ici la définition de différentiabilité pour une application définie sur un espace de Hilbert H, définition qui généralise la notion de dérivabilité sur $\mathbb{R}^N$.

Définition 1. *Une application F de H dans $\mathbb{R}$ sera dite différentiable sur H si pour tout u dans H il existe une application linéaire ℓ de H dans $\mathbb{R}$, i.e. une forme linéaire, telle que pour tout h dans H on ait*

$$F(u+h) = F(u) + \ell(h) + o(||h||_H),$$

où $o((||h||_H)$ désigne un élément de H qui converge vers 0 plus vite que $||h||_H$ quand h tend vers 0. L'application ℓ sera notée $DF(u)$, différentielle de F au point u.

En vue de la partie **VI**, on rappelle le théorème suivant pour la convergence faible des suites bornées dans un espace de Hilbert H. Soit $(.,.)$ le produit scalaire sur H.

Theorème. *De toute suite bornée (u_n) dans H on peut extraire une sous-suite $(u_{\sigma(n)})$ qui converge faiblement vers u dans H, i.e. telle que, pour tout v dans H, on ait*

$$\lim_{n\to+\infty} \big(u_{\sigma(n)} - u, v\big) = 0,$$

ou, de manière équivalente, telle que, pour toute forme linéaire ℓ continue sur H, on ait

$$\lim_{n\to+\infty} \ell(u_{\sigma(n)} - u) = 0.$$

Les parties **III** et **IV** sont indépendantes.

Partie I

1) Pour x dans $\mathbb{R}$ et f dans $CB(\mathbb{R})$, on pose

$$g(x) = \exp(x) \int_x^{+\infty} \exp(-t) f(t) \mathrm{d}t. \tag{1}$$

1.a) Démontrer que l'application $g : x \mapsto g(x)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, et que g appartient à $CB(\mathbb{R})$.

1.b) Démontrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée g' en fonction de f et de g.

2) Pour toute fonction f dans $CB(\mathbb{R})$, on note $S(f)$ la fonction g définie par f dans la question 1. On peut ainsi définir une application :

$$\begin{array}{cccc} S & : & CB(\mathbb{R}) & \to & CB(\mathbb{R}) \\ & & f & \mapsto & S(f) \end{array}$$

2.a) Démontrer que S est une application linéaire continue de $CB(\mathbb{R})$ dans $CB(\mathbb{R})$.

2.b) Démontrer que $||S||_{\mathcal{L}(CB(\mathbb{R}))} = 1$.

Jusqu'à la fin de cette partie, on désigne par f une fonction de $CB(\mathbb{R})$ qui est de plus une fonction évanescente.

3) Soit $g = S(f)$.

3.a) Démontrer que

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0.$$

3.b) Démontrer que

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0.$$

3.c) Démontrer que les applications $g = S(f)$ et $\tilde{g} = \Upsilon\left(S\left(\Upsilon(f)\right)\right)$ sont dans E.

4) Pour x dans $\mathbb{R}$, on pose $u(x) = \frac{g(x)+\tilde{g}(x)}{2}$. On sait par les questions précédentes que la fonction u est de classe C^1 et est dans E.

4.a) Pour tout x dans $\mathbb{R}$, établir que $u(x) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \exp(-|x-t|) f(t) \mathrm{d}t$.

4.b) Pour x dans $\mathbb{R}$, calculer $u'(x)$ et vérifier que u' est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

4.c) Etablir que u est solution de l'équation différentielle ordinaire

$$y - y'' = f. \tag{2}$$

5) On s'intéresse aux solutions de l'équation différentielle ordinaire (2) qui sont évanescentes, i.e. aux solutions qui sont de plus dans E.

5.a) Démontrer qu'il existe au moins une solution évanescente à (2).

5.b) Démontrer qu'il existe au plus une solution évanescente à (2).

Partie II

6) Soit f une fonction dans E.

6.a) Démontrer que f est bornée.

6.b) Démontrer qu'il existe un x_0 dans $\mathbb{R}$ tel que $|f(x_0)| = ||f||_\infty$.

6.c) Démontrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

7) On s'intéresse maintenant aux propriétés de l'ensemble E.

7.a) Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $CB(\mathbb{R})$.

7.b) Démontrer que E est un sous-ensemble fermé de $(CB(\mathbb{R}), ||.||_\infty)$.

7.c) Démontrer que $(E, ||.||_\infty)$ est un espace de Banach.

8) On définit l'application $T : CB(\mathbb{R}) \to CB(\mathbb{R})$ par

$$T(f)(x) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \exp(-|x-t|)f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}[S(f)(x) + \Upsilon\left(S(\Upsilon(f))\right)(x)].$$

On s'intéresse aux propriétés de l'application T vue comme une application définie sur E.

8.a) Démontrer que T est une application linéaire continue de E dans E.

8.b) Démontrer que la norme de T vue comme application linéaire de E dans E est égale à 1.

8.c) Démontrer qu'il n'existe pas de fonction f dans E non nulle telle que $||T(f)||_\infty = ||f||_\infty$.

9) Pour un nombre réel $\lambda > 0$, on définit

$$T_\lambda(f)(x) = \frac{\lambda}{2}\int_{\mathbb{R}} \exp(-\lambda|t|)f(x-t)\mathrm{d}t.$$

9.a) Si $\mathbb{1}$ est la fonction constante $x \mapsto \mathbb{1}(x) = 1$, calculer $T_\lambda(\mathbb{1})$.

9.b) Démontrer pour tout $\alpha > 0$:

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda \int_{|t|>\alpha} \exp(-\lambda|t|)\mathrm{d}t = 0.$$

9.c) Démontrer pour toute fonction f dans E :

$$\lim_{\lambda\to+\infty} ||T_\lambda(f) - f||_\infty = 0.$$

9.d) En déduire que l'ensemble $C^2(\mathbb{R}) \cap E$ est dense dans $(E, ||.||_\infty)$.

10) Soit la fonction F définie par l'intégrale généralisée

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(tx)}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

10.a) Etablir que F appartient à E.

10.b) En intégrant la fonction méromorphe

$$z \mapsto \frac{\exp(izx)}{1+z^2}$$

sur un contour bien choisi, calculer $F(x)$.

Partie III

On s'intéresse dans cette partie aux fonctions **évanescentes non identiquement nulles** solutions de l'équation différentielle

$$y - y'' = \frac{3}{2}y^2. \tag{3}$$

Dans cette partie, le terme « solution » abrège « solution évanescente non identiquement nulle de (3) ».
On suppose maintenant et jusqu'à la question 13.h qu'une telle solution, notée u, existe.

11) Démontrer que $u(x) > 0$ pour tout x dans $\mathbb{R}$.
Indication : on pourra démontrer que si f, fonction dans E non identiquement nulle, vérifie, pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$ alors pour tout x dans $\mathbb{R}$, $T(f)(x) > 0$, T ayant été défini dans la question 8.

12)

12.a) Démontrer que u est de classe C^2 et que la dérivée seconde de u est bornée.

12.b) Démontrer pour tous x, h dans $\mathbb{R}$:

$$0 < u(x+h) \leq u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}||u''||_\infty.$$

12.c) En déduire que, pour tout x dans $\mathbb{R}$, on a : $|u'(x)|^2 < 2||u''||_\infty u(x)$.

12.d) Démontrer que les fonctions u' et u'' sont elles aussi dans E.

13) On va à présent calculer toutes les solutions.

13.a) Démontrer pour tout x dans $\mathbb{R}$:

$$u'(x)^2 = u(x)^2(1 - u(x)).$$

13.b) Démontrer que, pour tout x dans $\mathbb{R}$, on a : $0 < u(x) \leq 1$.

Soit $M = \{x \in \mathbb{R}; u(x) = ||u||_\infty\}$.

13.c) Démontrer, que pour tout x dans M, on a : $u(x) = 1$.

13.d) Démontrer que M contient exactement un point.

Soit x_0 tel que $M = \{x_0\}$. On pose $U(x) = u(x + x_0)$ qui est aussi solution et admet son maximum en $x = 0$.

13.e) Démontrer que $U'(x) < 0$, pour tout x dans $]0, +\infty[$.

13.f) Démontrer que, pour tout $x > 0$, on a : $-U'(x) = U(x)\sqrt{1 - U(x)}$.

13.g) Démontrer pour tout $x > 0$

$$\int_{U(x)}^{1} \frac{\mathrm{d}s}{s\sqrt{1-s}} = x.$$

13.h) Calculer cette intégrale (on pourra poser $t = \mathrm{ch}^{-2}(s)$).

13.i) Déterminer toutes les solutions évanescentes non nulles de (3).

Partie IV

Pour une fonction φ dans $C_c^1(\mathbb{R})$ on définit

$$||\varphi||_H = [\int_{\mathbb{R}} \left(\varphi(x)^2 + \varphi'(x)^2\right) \mathrm{d}x]^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

14) Démontrer que $||.||_H$ est une norme euclidienne sur l'espace vectoriel $C_c^1(\mathbb{R})$.

15) On va maintenant établir quelques inégalités fonctionnelles.

15.a) Démontrer que pour tout φ dans $C_c^1(\mathbb{R})$ on a

$$\varphi(x)^2 = 2\int_{-\infty}^{x} \varphi(s)\varphi'(s)\mathrm{d}s = -2\int_{x}^{+\infty} \varphi(s)\varphi'(s)\mathrm{d}s.$$

15.b) En déduire que pour tout φ dans $C_c^1(\mathbb{R})$ on a

$$2||\varphi||_\infty^2 \leq 2||\varphi||_2||\varphi'||_2 \leq ||\varphi||_H^2.$$

15.c) Démontrer que pour tout φ dans $C_c^1(\mathbb{R})$, pour tous x, y dans $\mathbb{R}$.

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq ||\varphi'||_2\sqrt{|x-y|}.$$

On définit maintenant et dans la suite du problème l'espace H comme le complété de $C_c^1(\mathbb{R})$ pour la norme $||.||_H$.
On dit qu'une fonction u dans $L^2(\mathbb{R})$ admet une *dérivée faible* v dans $L^2(\mathbb{R})$ si pour toute fonction φ dans $C_c^1(\mathbb{R})$ on a

$$\int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}} v(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

La dérivée faible sera notée u' (elle coincide avec la dérivée classique quand celle ci existe).

16)

16.a) Démontrer l'unicité (quand elle existe) de la dérivée faible d'une fonction de $L^2(\mathbb{R})$ (on pourra utiliser la densité de $C_c^1(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$).

16.b) Etablir que H est un espace de Hilbert et que H coincide avec l'ensemble des fonctions v dans $L^2(\mathbb{R})$ dont la dérivée faible v' est dans $L^2(\mathbb{R})$.

16.c) Pour v appartenant à H, on pose $\tilde{v}(x) = \int_0^x v'(s)\mathrm{d}s$. Démontrer que $\tilde{v}$ est une fonction continue et qu'il existe une constante C telle que $v = \tilde{v} + C$ presque partout.
On identifiera dans la suite v à ce représentant continu $\tilde{v} + C$.

16.d) Démontrer, pour tout v dans H, l'inégalité $2||v||_\infty^2 \leq ||v||_H^2$; en déduire que $H \subset E$.

16.e) Démontrer, pour tout v dans H, pour tous x, y dans $\mathbb{R}$:

$$|v(x) - v(y)| \leq ||v'||_2\sqrt{|x-y|}.$$

16.f) Démontrer que si v est dans H alors $\int_{\mathbb{R}} |v(x)|^3\mathrm{d}x < +\infty$.

16.g) Démontrer que si v est dans H alors v^2 est aussi dans H.

Dans la suite du problème, on étudie deux problèmes de minimisation avec contrainte sur H : on se propose d'étudier si les deux infima ν et μ définis ci-dessous sont atteints.

Soient

$$\mathcal{V} = \{v \in H; \int_{\mathbb{R}} v(x)^3 \mathrm{d}x = 1\} \text{ et } \nu = \inf_{v \in \mathcal{V}} ||v||_H^2;$$

$$\mathcal{N} = \{v \in H \setminus \{0\}; \nu \int_{\mathbb{R}} v(x)^3 \mathrm{d}x = ||v||_H^2\} \text{ et } \mu = \inf_{v \in \mathcal{N}} ||v||_H^2.$$

Partie V

17) Soient deux formes linéaires ℓ, q continues sur H, i.e. deux applications linéaires continues de H dans $\mathbb{R}$. On suppose Ker $\ell \subset$Ker q. Démontrer qu'il existe un réel λ tel que $q = \lambda\ell$.

18) Démontrer que $\nu > 0$.

19) Pour v dans H, on pose $V(v) = \int_{\mathbb{R}} u(x)^3 \mathrm{d}x - 1$ et $J(v) = ||v||_H^2$.

19.a) Démontrer que V est différentiable sur H et que pour tout v, h dans H on a :

$$DV(v)(h) = 3 \int_{\mathbb{R}} v^2(x)h(x)\mathrm{d}x.$$

Dans la suite de la partie **V**, on **suppose** que l'infimum est atteint, i.e. qu'il existe u dans $\mathcal{V}$ tel que $\nu = ||u||_H^2$. Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathcal{V}, t \mapsto \gamma(t)$ une courbe de classe C^1 inscrite dans $\mathcal{V}$ telle que $\gamma(0) = u$.

19.b) En utilisant que $V(\gamma(t)) = 0$, démontrer que $DV(u)(\gamma'(0)) = 0$.

19.c) Démontrer que $DJ(u)(\gamma'(0)) = 0$.

19.d) Démontrer que $\mathrm{Ker}(DV(u)) \subset \mathrm{Ker}(DJ(u))$.

19.e) En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u - u'' = 3\lambda u^2$.

19.f) Démontrer que $2\lambda u$ est solution de l'équation différentielle (3) de la partie **III**.

20)

20.a) Démontrer que $\mu = \nu$.

20.b) Démontrer que si μ est atteint alors ν est atteint.

Partie VI

Dans cette partie nous allons démontrer que le second problème de minimisation admet un minimum, i.e. que μ (que l'on sait égal à ν par la partie **V**) est atteint.
Pour v dans H, soit

$$N(v) = ||v||_H^2 - \nu \int_{\mathbb{R}} v(x)^3 \mathrm{d}x.$$

Soit (v_n) une suite d'éléments de $\mathcal{N}$ minimisante pour ce problème de minimisation, i.e. il existe une suite (ε_n) qui tend vers 0 telle que, pour tout entier naturel n,

$$\nu \leq ||v_n||_H^2 < \nu + \varepsilon_n. \tag{5}$$

Pour tout entier naturel n, soit x_n un point où $x \mapsto |v_n(x)|$ admet son maximum. Soit (w_n) la suite définie, pout tout n, par $w_n(x) = v_n(x + x_n)$, pour tout x dans $\mathbb{R}$.

21) Démontrer que la suite (w_n) est aussi une suite minimisante.

22) Démontrer que $\nu|w_n(0)| \geq 1$.
Indication : utiliser l'équation $N(w_n) = 0$.

23)

23.a) Démontrer que l'on peut extraire de la suite (w_n) une sous-suite $(w_{\sigma(n)})$ telle que :

- la suite $(w_{\sigma(n)})$ converge vers une fonction u uniformément sur tout compact ;
- $1 \leq \nu|u(0)|$.

Dans la suite, on note (u_n) la suite $(w_{\sigma(n)})$ et u sa limite.

23.b) Démontrer que de cette sous-suite on peut extraire une nouvelle sous-suite (qu'on continuera à noter (u_n)) qui converge de plus faiblement dans H vers u.

23.c) Démontrer que $||u||_H^2 \leq \nu$.

24) On va maintenant relaxer le problème de minimisation.

24.a) Démontrer que

$$\begin{aligned}\nu &= \inf\{||v||_H^2; v \in H; v \neq 0; N(v) = 0\}\\ &= \inf\{||v||_H^2; v \in H; v \neq 0; N(v) \leq 0\}.\end{aligned}$$

24.b) Démontrer que si $N(u) \leq 0$ alors u est un minimum du problème.

On va établir par l'absurde que $N(u) \leq 0$. Supposons $N(u) > 0$.

25) En utilisant la convergence faible dans H, démontrer que

$$\lim_{n\to 0} \left(||u_n - u||_H^2 - ||u_n||_H^2 + ||u||_H^2 \right) = 0.$$

26) En utilisant la convergence uniforme sur tout compact, démontrer que

$$\lim_{n\to 0} \left(\int_{\mathbb{R}} (u_n(x) - u(x))^3 \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} u_n(x)^3 \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} u(x)^3 \mathrm{d}x \right) = 0.$$

27) Démontrer que pour n assez grand $N(u_n - u) < 0$.

28) En déduire une contradiction et conclure.