Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs, montres connectées et tous appareils électroniques de communication ou de stockage, ainsi que les documents sont interdits.

La qualité de la rédaction est un facteur important d'appréciation des copies. Les candidats sont donc invités à produire des raisonnements clairs, complets et concis.

Les candidats peuvent utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes, en veillant dans ce cas à préciser la référence du résultat utilisé.

Présentation du sujet

Le sujet est un problème qui comporte sept parties :

— La partie I étudie des estimations sur des intégrales utiles dans les parties II et III.

— La partie II a pour but principal d'établir la formule suivante que l'on peut qualifier de factorisation eulérienne partielle de la fonction sinus : pour tout $(n, z) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{C}$ on a

$$\sin(z) = z \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{z^2}{(\pi k)^2}\right) \times \frac{1}{2W_{2n}} \int_{-1}^{1} e^{-izx} \cos^{2n}\left(\frac{\pi}{2}x\right) \mathrm{d}x, \tag{1}$$

où $(W_n)_{n \geqslant 1}$ désigne une suite d'intégrales particulières. On étudie également le passage à la limite $n \to +\infty$.

— La partie III donne une application de la formule (1) au caractère rationnel des nombres $\dfrac{1}{\pi^{2\ell}} \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2\ell}}$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$.

— La partie IV a pour objet d'étudier très brièvement deux familles d'espaces vectoriels qui seront utiles dans les parties suivantes.

— La parties V, VI et VII s'attellent à démontrer deux théorèmes qui montrent que la transformation de Fourier réalise une bijection entre certains espaces étudiés dans la partie IV. Le premier concerne les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à support compact (partie V) et le second, plus général, concerne les distributions sur $\mathbb{R}$ à support compact (parties VI et VII). Ce dernier théorème explique a posteriori pourquoi l'intégrale du membre droit de la formule (1) est supportée sur $[-1, 1]$.

La formule (1) sert de fil conducteur dans tout le sujet à partir de la question 8 et pourra être utilisée si besoin pour toute question ultérieure du sujet. Les différentes parties II, III, IV, V, VI et VII sont globalement indépendantes. Cependant, certaines questions du sujet ont des énoncés ou indications qui font mention de façon explicite à des questions antérieures (dont on pourra admettre les réponses).

Notations, vocabulaire et rappels

Rappel du principe des zéros isolés. Soit $F : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$. Soit z_0 dans U tel que $F(z_0) = 0$. Si F n'est pas identiquement nulle sur U alors il existe $\varepsilon > 0$ vérifiant :

$$\forall z \in U \backslash \{z_0\},\ |z - z_0| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad F(z) \neq 0.$$

Autrement dit, les zéros d'une fonction holomorphe non identiquement nulle sont isolés.

Rappel sur l'holomorphie et la convergence uniforme sur tout compact. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. Si la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact de U vers une fonction $F : U \to \mathbb{C}$ alors F est holomorphe sur U et la suite des dérivées (F_n') converge uniformément sur tout compact vers F'.

— Pour tout entier naturel n, on note $W_n = \displaystyle\int_0^1 \cos^n\left(\frac{\pi x}{2}\right) \mathrm{d}x$.

— Pour tous n dans $\mathbb{N}$ et x dans $\mathbb{R}$, on définit le nombre $\rho_n(x)$ comme suit

$$\begin{array}{lcl} x \in [-1,1] & \Rightarrow & \rho_n(x) = \dfrac{1}{2W_{2n}} \cos^{2n}\left(\dfrac{\pi}{2}x\right), \\ x \notin [-1,1] & \Rightarrow & \rho_n(x) = 0. \end{array}$$

En particulier, on a $\rho_0(x) = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$ et la formule $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \rho_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

— Pour tout z dans $\mathbb{C}$, on note

$$P_n(z) = z\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{z^2}{(\pi k)^2}\right) \qquad \text{et} \qquad \widehat{\rho_n}(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-izx}\rho_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

— Les parties IV, V, VI et VII font intervenir plusieurs familles de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de fonctions à valeurs complexes (on ne demande pas de vérifier qu'il s'agit bien d'espaces vectoriels) :

- On note, pour un entier naturel n,

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{D}^n(\mathbb{R}) & = & \{f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}), \quad \forall x \notin [-1,1] \quad f(x) = 0\}, \text{ et,} \\ \mathcal{D}^\infty(\mathbb{R}) & = & \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), \quad \forall x \notin [-1,1] \quad f(x) = 0\}. \end{array}$$

- On note $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$.
- Pour un entier relatif N, on considère les sous-espaces vectoriels suivants :
  - $\mathcal{H}^N(\mathbb{C}) = \{F \in \mathcal{H}(\mathbb{C}), \quad \exists C > 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad |F(z)| \leqslant C(1+|z|)^{-N}e^{|\mathrm{Im}(z)|}\}$,
  - $\mathcal{H}^N(\mathbb{R})$ désigne le sous-espace vectoriel des restrictions à $\mathbb{R}$ des fonctions de $\mathcal{H}^N(\mathbb{C})$:

$$\mathcal{H}^N(\mathbb{R}) = \{F_{|\mathbb{R}}, \quad F \in \mathcal{H}^N(\mathbb{C})\} \qquad \text{avec} \qquad \left\{\begin{array}{rcl} F_{|\mathbb{R}} : \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ \xi & \mapsto & F(\xi). \end{array}\right.$$

- On note

$$\mathcal{H}^\infty(\mathbb{R}) = \bigcap_{N\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}^N(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{H}^{-\infty}(\mathbb{R}) = \bigcup_{N\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}^N(\mathbb{R}).$$

Partie I

1.a) Donner sans justification l'allure du graphe de la fonction $f : t \mapsto -\ln(\cos(t))$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

1.b) Démontrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que, pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $f(t) \geqslant Mt^2$.

Indication : On pourra

- ou bien appliquer une formule de Taylor à f entre 0 et t ;
- ou bien justifier d'abord l'inégalité $\inf\limits_{1<t<\frac{\pi}{2}} \frac{f(t)}{t^2} \geqslant -\frac{4}{\pi^2}\ln(\cos(1))$ puis étudier un prolongement continu de la fonction $t \in \left]0, 1\right] \mapsto \frac{f(t)}{t^2}$ à $[0, 1]$.

2. Pour tout réel $y > 0$, démontrer que l'on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos^n\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right) = e^{-y^2/2}$.

3. Pour tout réel $\alpha \geqslant 0$, justifier que l'intégrale $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-(\pi x)^2/8}\,\mathrm{d}x$ est bien définie et est un nombre strictement positif.

4. Démontrer que la suite de terme général $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} x^\alpha \cos^n\left(\frac{\pi x}{2\sqrt{n}}\right)\mathrm{d}x$ est convergente.

Indication : on pourra introduire la notation $g_n(x) = x^\alpha \cos^n\left(\frac{\pi x}{2\sqrt{n}}\right)\mathbf{1}_{[0,\sqrt{n}]}(x)$.

5. Vérifier l'inégalité $W_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et démontrer les deux équivalents

$$\int_0^1 x^\alpha \cos^n\left(\frac{\pi x}{2}\right)\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{I(\alpha)}{n^{(1+\alpha)/2}} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{W_n}\int_0^1 x^\alpha \cos^n\left(\frac{\pi x}{2}\right)\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{I(\alpha)}{I(0)n^{\alpha/2}}.$$

où l'on rappelle que W_n est défini par la formule intégrale $W_n = \displaystyle\int_0^1 \cos^n\left(\frac{\pi x}{2}\right)\mathrm{d}x$.

Partie II

On utilise les notations introduites en préambule. Sauf mention contraire, on suppose $n \geqslant 1$.

6. Calculer $\rho_n'(x)$ et $\rho_n''(x)$ pour x dans $]-1, 1[$. Puis démontrer qu'il existe un nombre β_n tel que

$$\forall x \in \left]-1, 1\right[\qquad \rho_n(x) + \frac{1}{(\pi n)^2}\rho_n''(x) = \beta_n \rho_{n-1}(x).$$

7.a) Justifier que l'intégrale $\widehat{\rho_n}(z) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-izx}\rho_n(x)\,\mathrm{d}x$ est bien définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ et démontrer l'inégalité $\sup\limits_{\xi\in\mathbb{R}} |\widehat{\rho_n}(\xi)| \leqslant 1$.

7.b) Démontrer l'égalité $\left(1 - \frac{z^2}{(\pi n)^2}\right)\widehat{\rho_n}(z) = \beta_n \widehat{\rho_{n-1}}(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

7.c) En déduire la valeur de β_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On note désormais $P_n(z) = z\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{z^2}{(\pi k)^2}\right)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

8. Grâce aux questions précédentes, démontrer que l'on a la factorisation suivante :

$$\sin(z) = P_n(z)\widehat{\rho_n}(z).$$

9.a) Pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $x \in [-1, 1]$, démontrer l'inégalité $|e^{izx} - 1| \leqslant |x|(e^{|z|} - 1)$ à l'aide du développement en série entière de la fonction exponentielle.

9.b) En déduire l'inégalité $|\widehat{\rho_n}(z) - 1| \leqslant 2(e^{|z|} - 1) \displaystyle\int_0^1 x\rho_n(x)\,\mathrm{d}x$.

9.c) Pour tout réel positif K, démontrer que la suite de fonctions $(\widehat{\rho_n})_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur le disque fermé $\{z \in \mathbb{C},\ |z| \leqslant K\}$ vers la fonction constante 1.

9.d) Pour tout réel positif K, démontrer que la suite de fonctions $(P_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur le disque fermé $\{z \in \mathbb{C},\ |z| \leqslant K\}$ et déterminer sa limite.

10. La suite de fonctions $(P_n)_{n\geqslant 1}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?

On fixe désormais une partie A de $\mathbb{C}$ non bornée.

11.a) Si la suite $(\widehat{\rho_n})_{n\geqslant 1}$ est uniformément bornée sur A, c'est-à-dire $\displaystyle\sup_{n\geqslant 1}\sup_{z\in A} |\widehat{\rho_n}(z)| < +\infty$, démontrer que l'on a forcément $\displaystyle\lim_{\substack{|z|\to+\infty \\ z\in A}} |\widehat{\rho_n}(z)| = 0$ pour tout $n \geqslant 2$.

11.b) Conclure que $(\widehat{\rho_n})_{n\geqslant 1}$ ne converge pas uniformément sur A.

Partie III

On pourra utiliser les équivalents obtenus à la question 5, ainsi que le résultat de la question 8 : pour tous n dans $\mathbb{N}^*$ et ξ dans $\mathbb{R}$, on a

$$\sin(\xi) = P_n(\xi)\widehat{\rho_n}(\xi) \quad \text{avec} \quad P_n(\xi) = \xi \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\xi^2}{(\pi k)^2}\right).$$

12. Démontrer que $\widehat{\rho_n}$ ne s'annule pas sur $]-\pi, \pi[$.

13.a) Trouver quatre réels a_n, b_n, c_n et d_n tels que l'on a le développement limité à l'ordre 3 :

$$P_n(\xi) = a_n + b_n\xi + c_n\xi^2 + d_n\xi^3 + \xi^3\varepsilon_n(\xi) \quad \text{avec} \quad \lim_{\xi\to 0} \varepsilon_n(\xi) = 0.$$

13.b) Justifier que $\widehat{\rho_n}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que son développement limité en $\xi = 0$ à l'ordre 3 est

$$\widehat{\rho_n}(\xi) = 1 - \xi^2 \int_0^1 x^2\rho_n(x)\,\mathrm{d}x + \xi^3\sigma_n(\xi) \quad \text{avec} \quad \lim_{\xi\to 0} \sigma_n(\xi) = 0.$$

Indication : on pourra développer en série entière $e^{-ix\xi}$ en $\xi = 0$ dans la définition de $\widehat{\rho_n}(\xi)$.

13.c) Déduire de ce qui précède la valeur de la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

14. En notant $\widehat{\rho_n}'$ la dérivée de $\widehat{\rho_n}$, démontrer la formule suivante :

$$\forall \xi \in\,]-\pi, \pi[\, \setminus \{0\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{\cos(\xi)}{\sin(\xi)} = \frac{\widehat{\rho_n}'(\xi)}{\widehat{\rho_n}(\xi)} + \frac{1}{\xi} - 2\xi \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2\ell}}{\pi^{2(\ell+1)}} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{2(\ell+1)}}\right).$$

15. Démontrer la formule suivante :

$$\forall \xi \in \left]-\pi, \pi\right[\setminus\{0\} \qquad \frac{\xi\cos(\xi)}{\sin(\xi)} = 1 - 2\sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{\xi^{2\ell}}{\pi^{2\ell}}\Big(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2\ell}}\Big).$$

Indication : on pourra notamment analyser $\widehat{\rho_n}(\xi)$ grâce à la question 9.c). Quant au terme dérivé $\widehat{\rho_n}'(\xi)$, au moins deux stratégies sont possibles :

- ou bien écrire une formule intégrale sur $[-1, 1]$ de $\widehat{\rho_n}'(\xi)$ et utiliser la question 5 ;
- ou bien également faire appel à la question 9.c).

16. Expliquer dans les grandes lignes comment démontrer que le nombre $\dfrac{1}{\pi^{2\ell}}\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2\ell}}$ est rationnel pour tout ℓ dans $\mathbb{N}^*$.

Partie IV

Les espaces vectoriels étudiés dans cette partie sont définis en préambule.

17. Soit n un entier naturel. Démontrer que la fonction suivante $f \mapsto \|f\|_{\mathcal{D}^n(\mathbb{R})}$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{D}^n(\mathbb{R})$:

$$\|f\|_{\mathcal{D}^n(\mathbb{R})} = \sum_{k=0}^{n} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|.$$

Dans la suite, l'espace vectoriel $\mathcal{D}^n(\mathbb{R})$ est systématiquement muni de la norme $\| \ \|_{\mathcal{D}^n(\mathbb{R})}$.

18. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que l'application linéaire $f \mapsto f^{(n)}$ est continue de $\mathcal{D}^n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{D}^0(\mathbb{R})$.

19. Justifier que l'application $F \mapsto F_{|\mathbb{R}}$ est bijective de $\mathcal{H}^N(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{H}^N(\mathbb{R})$, pour tout $N \in \mathbb{N}$.

20.a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction F_n définie comme suit :

$$\forall z \in \mathbb{C}\setminus\pi\mathbb{Z} \qquad F_n(z) = \frac{\sin(z)}{z\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{z^2}{(\pi k)^2}\right)}.$$

Justifier que la fonction F_n est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\pi\mathbb{Z}$.

20.b) Démontrer que F_n admet un unique prolongement holomorphe sur $\mathbb{C}$ que l'on note encore $F_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

20.c) Pour tout N dans $\mathbb{Z}$, démontrer que F_n appartient à $\mathcal{H}^N(\mathbb{C})$ si et seulement si on a $N \leqslant 1 + 2n$.
Indication :

- pour l'implication $F_n \in \mathcal{H}^N(\mathbb{C}) \Rightarrow N \leqslant 1 + 2n$, on pourra se restreindre à $\mathbb{R}$;
- pour l'implication $N \leqslant 1+2n \Rightarrow F_n \in \mathcal{H}^N(\mathbb{C})$, on pourra distinguer selon que la condition $|z| \leqslant (n+1)\pi$ est satisfaite ou non.

De façon parfaitement similaire, on pourrait vérifier que la fonctionnelle suivante est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{H}^N(\mathbb{R})$:

$$\|F\|_{\mathcal{H}^N(\mathbb{R})} = \sup_{z\in\mathbb{C}} |F(z)|(1+|z|)^N e^{-|\mathrm{Im}(z)|},$$

où l'on identifie toute fonction F dans $\mathcal{H}^N(\mathbb{R})$ à son unique prolongement holomorphe F dans $\mathcal{H}^N(\mathbb{C})$ via la question 19.

21. Pour tout $N \in \mathbb{Z}$, démontrer que l'application linéaire $F \mapsto F'$ est continue de l'espace $\mathcal{H}^N(\mathbb{R})$ dans lui-même (pour la norme ci-dessus).
Indication : on pourra démontrer et exploiter la formule

$$F'(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\theta} F\Big(z + \frac{1}{2}e^{i\theta}\Big)\,\mathrm{d}\theta$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$, puis on pourra traiter le cas $N < 0$ et enfin le cas $N \geqslant 0$.

Partie V

La convention pour la transformation de Fourier est la suivante : pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ appartenant à l'espace de Lebesgue $L^1(\mathbb{R})$ (i.e. f est mesurable et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty$), on note

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \qquad \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

On pourra si besoin utiliser sans preuve le résultat suivant : si une fonction continue f appartient à $L^1(\mathbb{R})$ et vérifie $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ alors on a la formule d'inversion

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\widehat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Les espaces $\mathcal{D}^n(\mathbb{R})$ sont inclus dans $L^1(\mathbb{R})$. Le but de cette partie est de démontrer que la transformation de Fourier réalise une bijection de $\mathcal{D}^\infty(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{R})$.
Les espaces $\mathcal{D}^n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{H}^N(\mathbb{R})$ seront munis des normes définies dans la partie IV.

22. Démontrer que les applications linéaires suivantes sont bien définies et sont continues :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}^0(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{H}^0(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \widehat{f} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{D}^1(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{H}^0(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \widehat{f'} \end{array}$$

Indication : on pourra faire appel à la question 18. On ne demande pas de démontrer la linéarité de ces applications.

Notation : On note alors $\widehat{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (respectivement $\widehat{f'} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$) l'unique prolongement holomorphe de la transformée de Fourier de f (respectivement de f') dont l'existence est justifié à la question 19.

23.a) Pour tout $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R})$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$, démontrer la formule $iz\widehat{f}(z) = \widehat{f'}(z)$.

23.b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, utiliser ce qui précède pour démontrer la continuité de l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}^n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{H}^n(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \widehat{f}. \end{array}$$

Seulement pour les trois questions suivantes, on définit la fonction $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$\begin{array}{lcrcl} |x| \leqslant 1 & \Rightarrow & \psi(x) & = & 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \cos(4^k \pi x), \\ |x| > 1 & \Rightarrow & \psi(x) & = & 0. \end{array}$$

24.a) Démontrer que $\psi \in \mathcal{D}^0(\mathbb{R})$.

24.b) Calculer $\widehat{\psi}(4^\ell \pi)$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$.

24.c) En déduire que $\widehat{\psi} \notin \mathcal{H}^1(\mathbb{R})$.

Dans les quatre questions suivantes, on fixe un entier $N \geqslant 2$ et une fonction F dans $\mathcal{H}^N(\mathbb{R})$ (on note encore $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ son unique prolongement holomorphe appartenant à $\mathcal{H}^N(\mathbb{C})$, voir la question 19).

25.a) Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $\eta \in \mathbb{R}$, justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |e^{ix\xi} F(\xi + i\eta)| \, \mathrm{d}\xi$ est bien définie. Puis démontrer qu'il existe un nombre $M > 0$ (indépendant de N et F) tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \eta \in \mathbb{R} \qquad \int_{\mathbb{R}} |e^{ix\xi} F(\xi + i\eta)| \, \mathrm{d}\xi \leqslant M e^{|\eta|} \|F\|_{\mathcal{H}^N(\mathbb{R})}.$$

25.b) Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $\eta \in \mathbb{R}$, démontrer l'identité

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} F(\xi) \, \mathrm{d}\xi = e^{-x\eta} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} F(\xi + i\eta) \, \mathrm{d}\xi.$$

Indication :

- ou bien dériver par rapport à η et utiliser la question 21 ;
- ou bien intégrer la fonction holomorphe $z \in \mathbb{C} \mapsto e^{ixz} F(z)$ sur le contour formé par le rectangle de sommets d'affixes $-K, K, K + i\eta, -K + i\eta$.

25.c) En déduire que, pour tout réel x tel que $x \notin [-1, 1]$, on a $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} F(\xi) \, \mathrm{d}\xi = 0$.

25.d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} F(\xi) \, \mathrm{d}\xi$. Démontrer que f appartient à $\mathcal{D}^{N-2}(\mathbb{R})$ et que l'on a $\widehat{f} = F$.

26. Conclure que la transformation de Fourier $f \mapsto \widehat{f}$ réalise une bijection de $\mathcal{D}^\infty(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{R})$.

27.a) On reconsidère la fonction ρ_n (définie en préambule). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que ρ_n est de classe $\mathcal{C}^{2n-1}$ sur $\mathbb{R}$.

27.b) Démontrer que ρ_n n'est pas de classe $\mathcal{C}^{2n}$ sur $\mathbb{R}$.

27.c) À l'aide des questions 8 et 20.c), expliquer pourquoi il existe une infinité d'entiers naturels N pour lesquels il existe une fonction F de $\mathcal{H}^N(\mathbb{R})$ telle que l'on ne peut pas améliorer la conclusion « $f \in \mathcal{D}^{N-2}(\mathbb{R})$ » de la question 25.d) par la conclusion plus forte « $f \in \mathcal{D}^{N-1}(\mathbb{R})$ ».

Notations relatives à la théorie des distributions

-Algèbre $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'espace de Schwartz, c'est-à-dire l'espace vectoriel des fonctions $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ vérifiant

$$\forall (k,\ell) \in \mathbb{N}^2 \qquad \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^k \varphi^{(\ell)}(x)| < +\infty.$$

On rappelle que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par produit et transformation de Fourier :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \qquad \varphi\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Le produit de convolution $\varphi * \psi$ est défini par

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (\varphi * \psi)(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x-y)\psi(y)\,\mathrm{d}y.$$

On vérifie que $\varphi * \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et que l'on a les formules suivantes

$$(\varphi * \psi)' = \varphi' * \psi = \varphi * \psi', \qquad \widehat{\varphi * \psi} = \widehat{\varphi}\widehat{\psi} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{2\pi}\widehat{\varphi} * \widehat{\psi} = \widehat{\varphi\psi}\,.$$

-Espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des distributions tempérées sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ pour lesquelles il existe un entier naturel N et une constante $C > 0$ tels que

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \qquad |T(\varphi)| \leqslant C \sum_{\substack{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2 \\ \max(k,\ell)\leqslant N}} \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^k \varphi^{(\ell)}(x)|.$$

Rappelons également qu'il est traditionnel d'écrire $T(\varphi) = \langle T, \varphi\rangle$. La transformée de Fourier de T est la distribution tempérée, notée $\widehat{T}$, définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \qquad \langle \widehat{T}, \varphi\rangle = \langle T, \widehat{\varphi}\rangle.$$

On rappelle également que l'application $T \mapsto \widehat{T}$ est une bijection de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

-Support. Le support d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est le fermé, noté $\mathrm{Supp}(f)$, défini par l'adhérence suivante

$$\mathrm{Supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \neq 0\}}.$$

Pour tout $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et toute partie fermée $A \subset \mathbb{R}$, on dit que T est à support dans la partie A, ce que l'on note $\mathrm{Supp}(T) \subset A$, si la condition suivante est vérifiée pour tout élément $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{Supp}(\varphi) \subset A^c \qquad \Rightarrow \qquad \langle T, \varphi\rangle = 0.$$

-Notation T_f. Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, si la forme linéaire $\varphi \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}(x)$ est bien définie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, elle est notée T_f. Dans le cas où $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on pourra écrire

$$\langle T_f, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}(x).$$

Par exemple, si f appartient à $L^1(\mathbb{R})$ ou $L^\infty(\mathbb{R})$, alors T_f est dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Dans le cas particulier où $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f} \in L^\infty(\mathbb{R})$ et on a :

$$\widehat{T_f} = T_{\widehat{f}}.$$

Partie VI

Les deux premières questions de cette partie portent sur un exemple permettant d'appréhender le lien entre support et appartenance à l'espace $\mathcal{H}^{-\infty}(\mathbb{R})$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on note $\delta_a(\varphi) = \varphi(a)$ la masse de Dirac de φ en a.

28.a) Démontrer que δ_a est une distribution tempérée et donner un exemple de partie compacte $A \subset \mathbb{R}$ vérifiant $\operatorname{Supp}(\delta_a) \subset A$.

28.b) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, déterminer une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que $\widehat{\delta_a} = T_f$ et déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}$ assurant que $f \in \mathcal{H}^{-\infty}(\mathbb{R})$.

On va généraliser cette situation. On fixe F dans $\mathcal{H}^{-\infty}(\mathbb{R})$ et l'on cherche à démontrer l'existence d'une unique distribution tempérée T de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ à support dans $[-1, 1]$ telle que $\widehat{T} = T_F$. On admet que la transformation de Fourier induit une bijection de l'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ dans lui-même. Cela justifie qu'il existe une unique distribution tempérée T telle que

$$\widehat{T} = T_F$$

Ainsi, le seul point manquant est de démontrer que le support de T est inclus dans $[-1, 1]$. Cela fait l'objet des questions suivantes.

29. Justifier que la forme linéaire $T_F : \varphi \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} F(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ est bien définie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et est une distribution tempérée.

Dans le reste de la partie, on admet l'existence d'une fonction u de $\mathcal{D}^{\infty}(\mathbb{R})$, positive, paire et d'intégrale 1. On définit alors la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ comme suit

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad u_n(x) = nu(nx).$$

On remarque que u_n est positive, paire, de classe $\mathcal{C}^{\infty}$, d'intégrale 1 et à support dans $\left[\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\right]$.

30.a) Démontrer que l'application linéaire U_n, définie comme suit, est une distribution tempérée :

$$\begin{array}{rcl} U_n : \mathcal{S}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{C} \\ \varphi & \mapsto & \langle T, \varphi * u_n \rangle \end{array}$$

Indication : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pourra démontrer qu'il existe un nombre $C > 0$ (dépendant de k) tel que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $|x|^k \leqslant C(|x - y|^k + |y|^k)$. Pour cela, on pourra, raisonner par convexité ou vérifier directement que l'on a $|x| \leqslant 2(|x - y|^k + |y|^k)^{\frac{1}{k}}$.

30.b) En exploitant l'identité $\widehat{T} = T_F$, démontrer que $\widehat{U_n}$ est de la forme T_{Ψ_n} où la fonction $\Psi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \forall \xi \in \mathbb{R} \qquad \Psi_n(\xi) = F(\xi)\widehat{u}\left(\frac{\xi}{n}\right).$$

30.c) À l'aide de la question 26, démontrer qu'il existe une fonction g_n dans $\mathcal{D}^{\infty}(\mathbb{R})$ telle que pour tout réel ξ on a $\Psi_n(\xi) = \widehat{g_n}\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)\xi\right)$.

30.d) En déduire qu'il existe une fonction $f_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ à support dans $\left[-(1+\frac{1}{n}), 1+\frac{1}{n}\right]$ telle que les deux distributions U_n et T_{f_n} soient égales.

31.a) Fixons $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$. Démontrer que l'on a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \sup_{t\in[x-1,x+1]} |x|^k |\varphi^{(\ell+1)}(t)| < +\infty.$$

31.b) Démontrer alors que, pour tous entiers naturels k et ℓ, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^k(\varphi * u_n)^{(\ell)}(x) - x^k\varphi^{(\ell)}(x)| = 0.$$

Indication : on pourra utiliser l'identité $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} u_n(y)\,\mathrm{d}y = 1$ et en déduire la valeur de la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |y|u_n(y)\,\mathrm{d}y$.

32. Conclure que le support de T est inclus dans $[-1,1]$.

On donne une modeste application probabiliste. On note X une variable aléatoire réelle dont on note μ la loi (qui est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$) et $\Phi : \xi \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{E}[e^{i\xi X}] \in \mathbb{C}$ la fonction caractéristique.

33.a) Démontrer que l'application linéaire $M : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ définie par $\langle M, \varphi\rangle = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$ est une distribution tempérée.

33.b) Démontrer que $\widehat{M}$ est de la forme T_f pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ à déterminer.

33.c) En supposant Φ dans $\mathcal{H}^{-\infty}(\mathbb{R})$, démontrer l'égalité $\mathbf{P}(X \in [-1,1]) = 1$.
Indication : on pourra admettre la propriété suivante : pour tout nombre rationnel $a > 1$, il existe une fonction $\varphi_a \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ qui vérifie

— pour tout $x \in \,]-\infty, a]$ on a $\varphi_a(x) = 0$;
— pour tout $x \in \,]a, +\infty[$ on a $\varphi_a(x) > 0$,

puis démontrer et exploiter les égalités $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi_a(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = 0$.

Partie VII

Dans les questions qui suivent, on pourra admettre et utiliser qu'il existe une fonction χ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ qui vérifie les deux conditions suivantes :

i) pour tout réel $x \in]-\infty, 1]$, on a $\chi(x) = 1$,

ii) pour tout réel $x \in [2, +\infty[$, on a $\chi(x) = 0$.

34.a) À l'aide de la fonction χ, démontrer que, pour tout $\delta \in]0, 1]$, il existe une fonction affine $s_\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que la fonction $\chi_\delta : x \in \mathbb{R} \mapsto \chi(s_\delta(|x|))$ soit de classe $\mathcal{C}^\infty$ et vérifie les trois conditions suivantes :

i) pour tout réel $x \in [-1-\delta, 1+\delta]$ on a $\chi_\delta(x) = 1$,

ii) pour tout réel $x \notin]-1-2\delta, 1+2\delta[$ on a $\chi_\delta(x) = 0$,

iii) pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|(\chi_\delta)^{(m)}(x)| \leqslant \delta^{-m} \times \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |\chi^{(m)}(x)|$.

Indication : on pourra commencer par étudier le cas $x \geqslant 0$ et chercher s_δ tel que $s_\delta(1+\delta) = 1$ et $s_\delta(1+2\delta) = 2$.

34.b) Pour tout $\delta \in]0, 1]$ et tout couple $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$, démontrer qu'il existe une constante positive $C(\chi, k, \ell)$ ne dépendant que de χ, k et ℓ telle que

$$\forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \qquad \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^k (\chi_\delta f)^{(\ell)}(x)| \leqslant \frac{C(\chi, k, \ell)}{\delta^\ell} \sum_{m=0}^{\ell} \sup_{|x|\leqslant 1+2\delta} |f^{(m)}(x)|.$$

Dans la série de questions suivantes, on fixe une distribution tempérée T sur $\mathbb{R}$ à support dans $[-1, 1]$ et l'on souhaite démontrer que sa transformée de Fourier $\widehat{T}$ est de la forme T_F pour une certaine fonction $F \in \mathcal{H}^{-\infty}(\mathbb{R})$.
Dans un premier temps, on commence par construire une fonction F candidate.
On pose

$$\forall (x, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C} \qquad \chi_{\delta,\xi}(x) = \chi_\delta(x) e^{-ix\xi}.$$

35.a) Pour tout $\delta \in]0, 1]$ et tout $\xi \in \mathbb{C}$, justifier que la fonction $\chi_{\delta,\xi}$ appartient à l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et que le nombre $\langle T, \chi_{\delta,\xi} \rangle$ est indépendant de δ.

Pour tout $\xi \in \mathbb{C}$, on note désormais $F(\xi) = \langle T, \chi_{\delta,\xi} \rangle$ la valeur commune pour δ parcourant $]0, 1]$.

35.b) Démontrer que F est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.
Indication : on pourra utiliser la question 34.b avec $\delta = 1$ et $f(x) = e^{-ix\xi} - \sum\limits_{p=0}^{q} \frac{(-ix\xi)^p}{p!}$ avec $q \in \mathbb{N}$ entier naturel tendant vers $+\infty$.

35.c) Démontrer que F appartient à $\mathcal{H}^{-\infty}(\mathbb{R})$.
Indication : on pourra utiliser la question 34.b avec $\delta = \frac{1}{1+|\xi|}$ et $f(x) = e^{-ix\xi}$.

Dans un second temps, on va démontrer que $\widehat{T} = T_F$.

36.a) Pour tout entier $q \in \mathbb{N}^*$, on note $\lfloor \sqrt{q} \rfloor$ la partie entière de $\sqrt{q}$ (c'est-à-dire le plus grand entier naturel inférieur à $\sqrt{q}$). Démontrer qu'il existe une constante numérique $C > 0$ telle que pour tout $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et tout entier $q \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\left| \int_{-\lfloor \sqrt{q} \rfloor}^{\lfloor \sqrt{q} \rfloor} f(\xi)\, \mathrm{d}\xi - \frac{1}{q} \sum_{p=-q\lfloor \sqrt{q} \rfloor}^{q\lfloor \sqrt{q} \rfloor - 1} f\Big(\frac{p}{q}\Big) \right| \leqslant \frac{C}{\sqrt{q}} \times \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |f'(\xi)|.$$

36.b) Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, démontrer que l'on a

$$\lim_{q \to +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \chi_1(x)\widehat{\varphi}(x) - \frac{\chi_1(x)}{q} \sum_{p=-q\lfloor \sqrt{q} \rfloor}^{q\lfloor \sqrt{q} \rfloor} e^{\frac{-ixp}{q}} \varphi\Big(\frac{p}{q}\Big) \right| = 0.$$

Indication : on pourra admettre et exploiter la formule $\widehat{\varphi}(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \varphi(\xi)\, \mathrm{d}\xi$ que l'on pourra découper selon que $|\xi| \leqslant \lfloor \sqrt{q} \rfloor$ ou $|\xi| > \lfloor \sqrt{q} \rfloor$.

36.c) Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et tout couple $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$, démontrer que l'on a également

$$\lim_{q \to +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^k \frac{d^\ell}{dx^\ell} \left(\chi_1(x)\widehat{\varphi}(x) - \frac{\chi_1(x)}{q} \sum_{p=-q\lfloor \sqrt{q} \rfloor}^{q\lfloor \sqrt{q} \rfloor} e^{\frac{-ixp}{q}} \varphi\Big(\frac{p}{q}\Big) \right) \right| = 0.$$

37. Conclure que $\widehat{T} = T_F$.
Indication : outre les questions précédentes, on pourra également utiliser le résultat de la question 21 impliquant que $F' \in \mathcal{H}^{-\infty}(\mathbb{R})$.
Remarque : il n'est pas attendu de démontrer que T_F est une distribution tempérée. En effet, cela découle soit de la question 29, soit de l'identité $\widehat{T} = T_F$ (une fois démontrée).