Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs, montres connectées et tous appareils électroniques de communication ou de stockage, ainsi que les documents sont interdits.

La qualité de la rédaction est un facteur important d'appréciation des copies. Les candidats sont donc invités à produire des raisonnements clairs, complets et concis.

Les candidats peuvent utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes, en veillant dans ce cas à préciser la référence du résultat utilisé.

Notations utilisées tout au long du sujet.

Ensembles. On note $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbf{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs, $\mathbf{Q}$ l'ensemble des rationnels, $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels et $\mathbf{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

– On note également $\mathbf{N}^* = \mathbf{N}\backslash\{0\}$, $\mathbf{R}^* = \mathbf{R}\backslash\{0\}$, $\mathbf{C}^* = \mathbf{C}\backslash\{0\}$, $\mathbf{Q}_+ = \{x \in \mathbf{Q} : x \geq 0\}$, $\mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R} : x \geq 0\}$, $\mathbf{R}_- = \{x \in \mathbf{R} : x \leq 0\}$, $\mathbf{Q}_+^* = \mathbf{Q}_+\backslash\{0\}$, $\mathbf{R}_+^* = \mathbf{R}_+\backslash\{0\}$.

– Soit E un ensemble. S'il est fini, on note $\#E$ son cardinal. Soit $A \subset E$. On note $E \setminus A$ le complémentaire de A dans E. On note ensuite $\mathbf{1}_A : E \to \{0,1\}$ la fonction indicatrice de A définie, pour tout x dans E, par $\mathbf{1}_A(x) = 1$ si x est dans A et $\mathbf{1}_A(x) = 0$ sinon.

Nombres complexes. Pour tout nombre complexe z, on note $\overline{z}$ son conjugué, $|z|$ son module, $\mathrm{Re}(z)$ sa partie réelle, $\mathrm{Im}(z)$ sa partie imaginaire. Pour tout réel σ_0, on note $\mathbf{H}_{\sigma_0}$ le demi-plan ouvert

$$\mathbf{H}_{\sigma_0} = \{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}(z) > \sigma_0\} .$$

On rappelle que pour tout nombre complexe z, il existe des réels θ, appelés *arguments* de z, tels que $z = |z|e^{i\theta}$. Si z est non nul, on appelle *argument principal de* z l'unique argument de z dans l'intervalle $]-\pi,\pi]$. On le note $\arg(z)$. On rappelle que $e^{i\theta} = 1$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $\theta = 2\pi k$.

Fonctions. Pour tout réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ la *partie entière* de x et $\lceil x \rceil$ la *partie entière supérieure* de x, c'est-à-dire $\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbf{Z} : k \leq x\}$ et $\lceil x \rceil = \min\{k \in \mathbf{Z} : x \leq k\}$.
Pour tout $p \in \mathbf{N}$, on note $\mathtt{m}_p : t \mapsto t^p$ la *fonction monômiale de degré* p définie sur $[0,1]$.

– Le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions bornées $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ est noté $\mathcal{B}([0,1],\mathbf{R})$. On rappelle que $\mathcal{B}([0,1],\mathbf{R})$, muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$, est un espace de Banach.

– Soit I un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbf{R}$. Soit $f : I \to \mathbf{C}$ une fonction continue par morceaux. On dit que f est intégrable sur I si $\int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est une quantité finie. Dans ce cas, l'intégrale $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ est un élément de $\mathbf{C}$.

– Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ continue par morceaux et intégrable sur $\mathbf{R}$. Sa *transformée de Fourier* est alors une fonction continue, bornée, bien définie par

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(-2i\pi xt)\,\mathrm{d}t .$$

On rappelle ensuite la *formule d'inversion de Fourier*: si f est continue et si $\widehat{f}$ est intégrable sur $\mathbf{R}$, alors

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \widehat{\widehat{f}}(-t) = f(t) .$$

Fonctions holomorphes. Pour tout ouvert non vide U de $\mathbf{C}$, on note $\mathcal{H}(U)$ la $\mathbf{C}$-algèbre des fonctions holomorphes sur U. Soit V un ouvert non vide de $\mathbf{C}$ et soient f dans $\mathcal{H}(U)$ et g dans $\mathcal{H}(V)$. On rappelle que si $f(U) \subset V$, alors $g \circ f \in \mathcal{H}(U)$.

– On rappelle le *principe des zéros isolés* sous la forme suivante: soit U un ouvert connexe de $\mathbf{C}$ et soit f dans $\mathcal{H}(U)$. Supposons que l'ensemble $\{z \in U \,:\, f(z)=0\}$ contient un point d'accumulation dans U: alors f est identiquement nulle sur U.

– Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de $\mathcal{H}(U)$. On suppose que la série de fonctions de terme général $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est normalement convergente sur tout compact de U. Alors, $f = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est holomorphe sur U, la série des dérivées $(u_n')_{n\in\mathbf{N}^*}$ est également normalement convergente sur tout compact de U et
$f' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'$.

– Soit I un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbf{R}$. Soit $f : U \times I \to \mathbf{C}$ satisfaisant

(a) Pour tout t dans I, $f(\cdot, t) \in \mathcal{H}(U)$.

(b) Pour tout z dans U, $f(z, \cdot)$ est continue par morceaux sur I.

(c) Il existe une fonction g continue par morceaux et intégrable sur I telle que $|f(z,t)| \leq g(t)$ pour tout $(z,t) \in U \times I$.

Alors, l'intégrale à paramètre $z \mapsto F(z) = \int_I f(z,t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie et holomorphe sur U et de même pour $z \mapsto \int_I \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)\,\mathrm{d}t$ qui est la dérivée de F.

Logarithme. On note $\log$ le logarithme dit *principal*: c'est l'unique prolongement holomorphe de la fonction logarithme népérien à l'ouvert $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$ (on notera donc également $\log$ le logarithme népérien sur $\mathbf{R}_+^*$). On rappelle que, pour tout nombre complexe z de module strictement plus petit que 1, on a $\log(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n$.

Le $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\ell_2(\mathbf{N}^*)$. C'est le $\mathbf{C}$-espace vectoriel des suites $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ à valeurs complexes telles que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ soit une quantité finie. Pour tout $\mathbf{b} = (b_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \in \ell_2(\mathbf{N}^*)$, on note $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ la somme de la série de terme général $(\overline{a}_n b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ qui est absolument convergente: cela définit un produit scalaire hermitien pour lequel $\ell_2(\mathbf{N}^*)$ est un espace de Hilbert.

Distributions tempérées. Le $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ des fonctions $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ de classe C^∞ telles que pour tous m, n dans $\mathbf{N}$, $\rho_{m,n}(\varphi) = \sup_{x\in\mathbf{R}} (1+|x|)^m |\varphi^{(n)}(x)| < +\infty$, est la classe de Schwartz (ici, on adopte la convention que $\varphi^{(0)} = \varphi$). On munit $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ de la topologie induite par les semi-normes $(\rho_{m,n})_{m,n\in\mathbf{N}}$.

– Soit une forme linéaire T sur $\mathcal{S}(\mathbf{R})$. On note $\langle T \,|\, \varphi \rangle$ la valeur de T en $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$. On rappelle que T est continue si et seulement s'il existe C dans $\mathbf{R}_+^*$, p dans $\mathbf{N}^*$ et $(m_k, n_k)_{1\leq k\leq p}$ dans $(\mathbf{N}\times\mathbf{N})^p$ tels que $|\langle T \,|\, \varphi \rangle| \leq C \max_{1\leq k\leq p} \rho_{m_k,n_k}(\varphi)$ pour tout φ dans $\mathcal{S}(\mathbf{R})$. Les formes linéaires continues de $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ sont appelées *distributions tempérées*: elles forment un $\mathbf{C}$-espace vectoriel noté $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ que l'on munit de la topologie faible, de sorte que toute suite de distributions tempérées $(T_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge faiblement vers T, élément de $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$, si et seulement si pour tout φ dans $\mathcal{S}(\mathbf{R})$, on a $\lim_{n\to+\infty} \langle T_n \,|\, \varphi \rangle = \langle T \,|\, \varphi \rangle$. On note alors $\lim_{n\to+\infty} T_n = T$.

– Soit T dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$. On rappelle que l'application $\varphi \mapsto -\langle T \,|\, \varphi' \rangle$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbf{R})$. On note cette distribution tempérée T': c'est la *dérivée de T au sens des distributions*. On a donc $\langle T' \,|\, \varphi \rangle = -\langle T \,|\, \varphi' \rangle$ pour tout φ dans $\mathcal{S}(\mathbf{R})$.

– On note δ_0 la *masse de Dirac* en 0 qui est la distribution tempérée telle que $\langle \delta_0 \,|\, \varphi \rangle = \varphi(0)$, pour tout φ dans $\mathcal{S}(\mathbf{R})$.

Nombres premiers. On note $(p_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ l'indexation strictement croissante des nombres premiers et $\mathscr{P} = \{p_n \,;\, n \geq 1\}$ l'ensemble des nombres premiers.

– Pour tout réel positif x, on note $\mathscr{P}(x) = \{p \in \mathscr{P} \,:\, p \leq x\}$ et $\pi(x) = \#\mathscr{P}(x)$ le nombre d'entiers premiers inférieurs à x.

– On introduit la fonction $\Lambda : \mathbf{N}^* \to \mathbf{R}$ définie par

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p\,, & \text{si } n = p^k \text{ pour un entier } p \text{ premier et un entier } k \geq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le but de ce problème est de montrer le *théorème des nombres premiers* qui affirme le résultat suivant:

$$\pi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{\log x} \ . \qquad (\boldsymbol{\mathcal{E}q}_1)$$

La démonstration passe par l'étude statistique de la fonction Λ. La majeure partie du problème consiste en la démonstration de la limite suivante, qui implique ($\boldsymbol{\mathcal{E}q}_1$),

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \Lambda(k) = 1 \ . \qquad (\boldsymbol{\mathcal{E}q}_2)$$

Partie I

Dans cette section sont introduites et étudiées des fonctions utiles dans la suite du problème.

I-1) La fonction Γ. Soit σ dans $\mathbf{R}_+^*$. Montrer que la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $x \mapsto e^{-x}x^{\sigma-1}$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$. On pose $\Gamma(\sigma) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\sigma-1}\,\mathrm{d}x$. Montrer : $\Gamma(\sigma) \in \mathbf{R}_+^*$ et $\Gamma(\sigma+1) = \sigma\Gamma(\sigma)$.

I-2) La fonction ζ. On rappelle que la série de terme général $(n^{-\sigma})_{n\in\mathbf{N}^*}$ est convergente, pour tout réel $\sigma > 1$. On introduit alors la fonction ζ définie pour $\sigma > 1$ par

$$\zeta(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma} \ . \qquad (\boldsymbol{\mathcal{E}q}_3)$$

I-2a) Montrer que ζ est une fonction à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$, de classe C^1 sur $]1,+\infty[$. Montrer que $-\zeta'(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma}\log n$, pour tout réel $\sigma > 1$.

I-2b) Par comparaison série-intégrale, montrer que $\lim_{\sigma\to 0^+} \sigma\zeta(1+\sigma) = 1$.

I-3) Dans le groupe de questions qui suit, on fixe un réel $\alpha > 0$.

I-3a) En distinguant les cas $0 < \alpha < 1$, $\alpha = 1$, $1 < \alpha < 2$, $\alpha = 2$ et $\alpha > 2$, tracer l'allure du graphe de la fonction définie sur $]0,1[$ par $t \mapsto (-\log t)^{\alpha-1}$.

I-3b) Si $\alpha \geq 1$, montrer qu'il existe c_α dans $\mathbf{R}_+^*$ tel que $0 \leq (-\log t)^{\alpha-1} \leq c_\alpha/\sqrt{t}$ pour tout t dans $]0,1]$. Si $\alpha \in]0,1[$, montrer qu'il existe c'_α dans $\mathbf{R}_+^*$ tel que $0 \leq (-\log t)^{\alpha-1} \leq c'_\alpha(1-t)^{-(1-\alpha)}$ pour tout t dans $]0,1[$.

I-3c) Montrer que pour toute fonction f continue par morceaux sur $[0,1]$, donc **bornée** (on l'admettra), la fonction définie sur $]0,1[$ par $t \mapsto f(t)(-\log t)^{\alpha-1}$ est intégrable sur $]0,1[$.
On note alors

$$\Lambda_\alpha(f) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 f(t)(-\log t)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t \ .$$

I-3d) Vérifier que Λ_α est linéaire sur le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur $[0,1]$.
Calculer $\Lambda_\alpha(\mathtt{m}_p)$ en fonction de α, p.

I-3e) Pour toute fonction f continue par morceaux sur $[0,1]$, montrer que $|\Lambda_\alpha(f)| \leq \|f\|_\infty$.

I-3f) On définit la fonction $J : [0,1] \to \mathbf{R}$ en posant

$$J(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, e^{-1}[\,, \\ 1/t & \text{si } t \in [e^{-1}, 1]. \end{cases}$$

Pour tout réel ε dans $]0, e^{-1}[$, déterminer deux fonctions f_ε et h_ε continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ telles que pour tout t dans $[0,1]$, $0 \leq f_\varepsilon(t) \leq J(t) \leq h_\varepsilon(t) \leq e$ et telles que $h_\varepsilon(t) = f_\varepsilon(t) = J(t)$ dès que $|t - e^{-1}| > \varepsilon$. Représenter sur un même graphe f_ε, J et h_ε.

I-3g) On admet que $e^{-1/2} - e^{-1} > e^{-1} - e^{-2}$. Soient ε dans $]\,0, e^{-1} - e^{-2}[$ et t dans $[e^{-1} - \varepsilon, e^{-1} + \varepsilon]$. Montrer que $1/2 \leq -\log t \leq 2$ puis, pour tout α dans $\mathbf{R}_+^*$, que $(-\log t)^{\alpha-1} \leq 2^{\alpha+1}$. Montrer enfin que

$$\Lambda_\alpha(f_\varepsilon) \leq \Lambda_\alpha(J) \leq \Lambda_\alpha(h_\varepsilon) \leq \Lambda_\alpha(f_\varepsilon) + \frac{e2^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha)}\,\varepsilon\ .$$

I-4) Dans ce groupe de questions, on suppose ($\boldsymbol{\mathcal{E}q}_2$) vérifié et on veut montrer que cela implique ($\boldsymbol{\mathcal{E}q}_1$).

I-4a) Pour x dans $[1, +\infty[$, on pose $\psi(x) = \sum_{n\in[1,x]\cap\mathbf{N}} \Lambda(n)$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \psi(x)/x = 1$.

I-4b) On note $\log_p$ le logarithme en base p, défini par $\log_p t = \log t/\log p$ pour tous t dans $\mathbf{R}_+^*$ et p dans $]1, +\infty[$. Soit x dans $[1, +\infty[$. Pour tout p dans $\mathscr{P}$, calculer $\#\big([0, x] \cap \{p^k; k \in \mathbf{N}^*\}\big)$, *i.e.* le nombre de puissances d'exposant strictement positif de p qui sont inférieures à x (s'il y en a). En déduire que

$$\psi(x) = \sum_{p\in\mathscr{P}(x)} \lfloor \log_p x \rfloor \log p\ .$$

Montrer que $\liminf_{x\to+\infty}(x^{-1}\pi(x)\log x) \geq 1$.

I-4c) Soient β dans $]0, 1[$ et x dans $[1, +\infty[$. Montrer que

$$(\pi(x) - x^\beta)\log x \ \leq\ \beta^{-1} \sum_{\substack{p\in\mathscr{P} \\ x^\beta<p\leq x}} \log p \ \leq\ \beta^{-1}(\psi(x) - \psi(x^\beta)) \leq \beta^{-1}\psi(x)\ .$$

En déduire que $\limsup_{x\to+\infty}(x^{-1}\pi(x)\log x) \leq 1/\beta$.

I-4d) Montrer que ($\boldsymbol{\mathcal{E}q}_2$) implique ($\boldsymbol{\mathcal{E}q}_1$).

I-5) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction de classe C^2 telle que

$$\lim_{t\to+\infty} t^2\big(|f(t)| + |f'(t)| + |f''(t)|\big) = \lim_{t\to-\infty} t^2\big(|f(t)| + |f'(t)| + |f''(t)|\big) = 0\ .$$

I-5a) Montrer que f, f' et f'' sont intégrables sur $\mathbf{R}$.

I-5b) Soit x un réel. Comparer $-4\pi^2x^2\widehat{f}(x)$ et $\widehat{(f'')}(x)$.

I-5c) Montrer que $\widehat{f}$ est intégrable sur $\mathbf{R}$.

I-6) Soit $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de nombres complexes. On suppose qu'il existe un réel σ_0 tel que la série de terme général $(|a_n|n^{-\sigma_0})_{n\in\mathbf{N}^*}$ est convergente dans $\mathbf{R}_+$.

I-6a) Montrer que pour tout s dans $\mathbf{H}_{\sigma_0}$, la série de terme général $(a_n n^{-s})_{n\in\mathbf{N}^*}$ est convergente.

On note $\varphi_{\mathbf{a}}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ sa somme qui est appelée *série de Dirichlet associée à* $\mathbf{a}$.

I-6b) Montrer que $\varphi_{\mathbf{a}}$ est holomorphe sur l'ouvert $\mathbf{H}_{\sigma_0}$.

I-6c) Montrer que $\lim_{\sigma\to+\infty} \varphi_{\mathbf{a}}(\sigma) = a_1$.
Soit un entier $n_0 \geq 2$. On suppose que $a_1 = \ldots = a_{n_0-1} = 0$. Montrer que $\lim_{\sigma\to+\infty} n_0^\sigma \varphi_{\mathbf{a}}(\sigma) = a_{n_0}$.

I-6d) Soit $\mathbf{b} = (b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ telle que la série de terme général $(|b_n|n^{-\sigma_0})_{n\in\mathbf{N}^*}$ est convergente dans $\mathbf{R}_+$. On suppose que les séries de Dirichlet $\varphi_{\mathbf{a}}$ et $\varphi_{\mathbf{b}}$ coïncident sur un ouvert non vide de $\mathbf{H}_{\sigma_0}$. Montrer que $a_n = b_n$, pour tout n dans $\mathbf{N}^*$.

I-7) Une application. Pour k, n dans $\mathbf{N}^*$, on pose $e_n(k) = n^{-1-\frac{1}{k}i}$ et on pose $\mathbf{e}(k) = (e_n(k))_{n\in\mathbf{N}^*}$. Le but de ce groupe de questions est de montrer que les suites $(\mathbf{e}(k))_{k\in\mathbf{N}^*}$ engendrent un espace vectoriel noté V qui est dense dans $\ell_2(\mathbf{N}^*)$, l'espace des suites de carré sommable.

I-7a) Montrer que pour tout k dans $\mathbf{N}^*$, $\mathbf{e}(k) \in \ell_2(\mathbf{N}^*)$.

I-7b) Montrer que pour tout $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ dans $\ell_2(\mathbf{N}^*)$, $\varphi_{\mathbf{a}}$ est holomorphe sur $\mathbf{H}_{1/2}$.

I-7c) Soit $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ dans $\ell_2(\mathbf{N}^*)$. On suppose pour tout $\mathbf{b} = (b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ dans V que $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$. Montrer que $\varphi_{\mathbf{a}}$ est identiquement nulle sur $\mathbf{H}_{1/2}$ et conclure.

I-8) Montrer que la fonction ζ définie sur $]1, +\infty[$ par $(\mathcal{E}q_3)$ se prolonge de manière unique en une fonction, toujours notée ζ, holomorphe sur l'ouvert $\mathbf{H}_1$ et montrer que $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ pour tout s dans $\mathbf{H}_1$.
Montrer que les séries de Dirichlet associées aux suites $(\mathbf{1}_{\mathscr{P}}(n))_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(\Lambda(n))_{n\in\mathbf{N}^*}$ sont bien définies et holomorphes sur $\mathbf{H}_1$. (*Indication: on pourra utiliser que* $\Lambda(n) \leq \log n$.)

On utilisera les notations suivantes.

$$\forall s \in \mathbf{H}_1, \quad Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-s} \quad \text{et} \quad \Phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-s}. \qquad (\mathcal{E}q_4)$$

I-9) Cette question porte sur des propriétés élémentaires de la détermination principale du logarithme.

I-9a) Pour tout z dans $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}_-$, on note $h(z) = \exp(\log z)$. Justifier que h est holomorphe sur $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}_-$ et montrer que $h(z) = z$, pour tout z dans $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}_-$. (*Indication: considérer d'abord le cas z réel.*)

I-9b) Pour z dans $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}_-$, montrer que $\mathrm{Re}\,(\log z) = \log|z|$ et que $\exp(i\ \mathrm{Im}\,(\log z)) = z/|z|$.

I-9c) Soit z dans $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}_-$. Pour tout θ dans $]-\pi, \pi[$, on pose $f(\theta) = \mathrm{Im}\,(\log(|z|e^{i\theta})) - \theta$. Justifier que f est bien définie et à valeurs dans $2\pi\mathbf{Z}$.
En déduire : $\mathrm{Im}\,(\log z) \in]-\pi, \pi[$ et $\log z = \log|z| + i\arg(z)$.

I-9d) Trouver deux complexes z_1, z_2 dans $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}_-$ tels que :

$$z_1 z_2 \in \mathbf{C}\backslash\mathbf{R}_- \text{ et } \log(z_1 z_2) \neq \log z_1 + \log z_2.$$

I-9e) Soit $z_0 = 2e^{-i\pi/4}$. Déterminer et représenter sur un dessin l'ensemble

$$\{z \in \mathbf{C}\backslash\mathbf{R}_- : z_0 z \in \mathbf{C}\backslash\mathbf{R}_- \text{ et } \log(z_0 z) = \log z_0 + \log z\}.$$

Partie II

Le but des trois questions suivantes est de montrer que pour toute suite $(\ell_p)_{p\in\mathbf{N}^*}$ à valeurs dans $\mathbf{R}_+$, décroissante et vérifiant pour tous p, q dans $\mathbf{N}^*$ l'égalité $\ell_{pq} = \ell_p \ell_q$, on a l'alternative suivante: $\ell_p = 0$ pour tout $p \geq 2$, ou il existe $\alpha \in \mathbf{R}_+$ tel que $\ell_p = p^{-\alpha}$ pour tout $p \geq 1$.

II-1) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction **croissante** satisfaisant la propriété

$$\forall x, y \in \mathbf{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)\ . \qquad (\mathcal{E}q_5)$$

Démontrer qu'il existe un réel $\alpha \geq 0$ tel que $f(x) = \alpha x$, pour tout réel x.

II-2) Soit G un sous-groupe additif de $\mathbf{R}$. On suppose que G est une partie dense dans $\mathbf{R}$. Soit $g : G \to \mathbf{R}$ une fonction croissante telle que pour tous s, t dans G, on ait $g(s+t) = g(s) + g(t)$.

II-2a) Soit x dans $\mathbf{R}$. On pose $J(x) = \{g(s)\,; s \in G\cap]x, +\infty[\}$. Montrer que $J(x)$ est non vide minoré.

On note $f(x) = \inf J(x)$, la borne inférieure de $J(x)$.

II-2b) Montrer que f est croissante et continue à droite.

II-2c) Soient x un réel et t dans G. Montrer que $\{s \in G : s > x+t\} = \{s'+t\,;\ s' \in G \cap]x, +\infty[\}$. Montrer que $f(x+t) = f(x) + g(t)$.

II-2d) En déduire que f satisfait la propriété ($\boldsymbol{\mathcal{E}q}_5$).

II-2e) Montrer que f prolonge g et qu'il existe $\alpha \in \mathbf{R}_+$ tel que $g(s) = \alpha s$ pour tout $s \in G$.

II-3) Soit $(\ell_p)_{p \in \mathbf{N}^*}$ une suite à valeurs dans $\mathbf{R}_+$ qui n'est pas identiquement nulle. On fait les deux hypothèses suivantes: $(\ell_p)_{p\geq 1}$ est décroissante et pour tous p, q dans $\mathbf{N}^*$, $\ell_{pq} = \ell_p \ell_q$.

II-3a) Calculer ℓ_1 et montrer que l'on a l'alternative suivante: $\ell_p > 0$ pour tout p dans $\mathbf{N}^*$, ou $\ell_p = 0$ pour tout entier $p \geq 2$.

Dans les questions suivantes de ce groupe de questions, on suppose que $\ell_p > 0$ pour tout p dans $\mathbf{N}^*$.

II-3b) Montrer qu'il existe une unique fonction $h : \mathbf{Q}_+^* \to \mathbf{R}_+^*$ telle que $h(p) = \ell_p$ pour tout p dans $\mathbf{N}^*$ et telle que : $\forall r_1, r_2 \in \mathbf{Q}_+^*,\ h(r_1 r_2) = h(r_1)h(r_2)$.

II-3c) Montrer que h est décroissante.

II-3d) En utilisant ce qui précède, montrer qu'il existe un réel $\alpha \geq 0$ tel que $\ell_p = p^{-\alpha}$ pour tout entier $p \geq 1$. (*Indication: on pourra considérer la fonction g telle que $g(\log s) = -\log h(s)$ pour $s \in \mathbf{Q}_+^*$.*)

Dans les questions suivantes de cette partie, $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est une suite à valeurs dans $\mathbf{R}_+$ **non identiquement nulle** et $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est une suite **strictement croissante** de réels positifs tendant vers $+\infty$. On formule l'hypothèse suivante:

(H): *Pour tout σ dans $\mathbf{R}_+^*$, la série de terme général $(a_n e^{-\lambda_n \sigma})_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge dans $\mathbf{R}_+^*$ et sa somme, notée $D(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n \sigma}$, est telle que, pour tout p dans $\mathbf{N}^*$, $D(p\sigma)/D(\sigma)$ a une limite finie notée ℓ_p lorsque σ tend vers 0^+.*

II-4) On suppose que $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ et $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ satisfont (H).

II-4a) Calculer ℓ_1 et montrer que pour tous p, q dans $\mathbf{N}^*$, on a $\ell_{pq} = \ell_p \ell_q$.

II-4b) Montrer l'alternative suivante: $\ell_p = 0$ pour tout entier $p \geq 2$ ou il existe un réel $\alpha \geq 0$ tel que $\ell_p = p^{-\alpha}$ pour tout p dans $\mathbf{N}^*$.

Dans la suite, on ne considère que les cas où les ℓ_p sont strictement positifs. Plus précisément, pour tout réel $\alpha \geq 0$, on introduit l'hypothèse suivante:

(H_α): *$(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ et $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ satisfont (H) et $\lim_{\sigma \to 0^+} D(p\sigma)/D(\sigma) = p^{-\alpha}$, pour tout p dans $\mathbf{N}^*$.*

L'objectif principal de la fin de cette partie est de prouver le résultat suivant: pour tout réel $\alpha \geq 0$ et pour toutes suites $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ et $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ satisfaisant (H_α), on a

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{D(\lambda_n^{-1})} \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} . \qquad (\boldsymbol{\mathcal{E}q}_6)$$

II-5) Soit α un réel ≥ 0. On suppose que les suites $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ et $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ satisfont (H_α).

II-5a) Soient f dans $\mathcal{B}([0,1], \mathbf{R})$ et σ dans $\mathbf{R}_+^*$. Montrer que la série de terme général $(a_n f(e^{-\lambda_n \sigma}) e^{-\lambda_n \sigma})_{n \in \mathbf{N}^*}$ est convergente. On note alors

$$\Lambda_{\alpha,\sigma}(f) = \frac{1}{D(\sigma)} \sum_{n=1}^{\infty} a_n f(e^{-\lambda_n \sigma}) e^{-\lambda_n \sigma}.$$

II-5b) Soit σ dans $\mathbf{R}_+^*$. Montrer que $\Lambda_{\alpha,\sigma}$ est une forme linéaire sur $\mathcal{B}([0,1], \mathbf{R})$. Montrer également que pour tout f dans $\mathcal{B}([0,1], \mathbf{R})$, on a $|\Lambda_{\alpha,\sigma}(f)| \leq \|f\|_\infty$.

II-6) Dans ce groupe de questions, on suppose que α est un réel > 0. On suppose également que les suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ satisfont (H_α). On montre ($\mathcal{E}q_6$) dans ces cas.

II-6a) On rappelle la définition de $\Lambda_\alpha(\cdot)$ de la question **I-3c**. Montrer que pour toute fonction polynômiale Q à coefficients réels on a $\lim_{\sigma\to 0^+}\Lambda_{\alpha,\sigma}(Q) = \Lambda_\alpha(Q)$.

II-6b) Montrer que pour toute fonction $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ continue, on a $\lim_{\sigma\to 0^+}\Lambda_{\alpha,\sigma}(f) = \Lambda_\alpha(f)$. (*Indication: on pourra penser au théorème de Weierstrass* .)

II-6c) Soit ε dans $]\,0, e^{-1}-e^{-2}[$. On rappelle les fonctions J, f_ε et h_ε de la question **I-3f**. Montrer qu'il existe un réel $\sigma_\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall\sigma\in]0,\sigma_\varepsilon],\ \Lambda_\alpha(f_\varepsilon)-\varepsilon \leq \Lambda_{\alpha,\sigma}(J) \leq \Lambda_\alpha(h_\varepsilon)+\varepsilon\ .$$

On pose ensuite $C_\alpha = 1 + e2^{\alpha+2}\Gamma(\alpha)^{-1}$. Montrer :

$$\forall\sigma\in]0,\sigma_\varepsilon],\ |\Lambda_{\alpha,\sigma}(J)-\Lambda_\alpha(J)| \leq C_\alpha\varepsilon.$$

II-6d) Montrer que $\lim_{\sigma\to 0^+}\Lambda_{\alpha,\sigma}(J) = \Lambda_\alpha(J)$. Conclure quant à ($\mathcal{E}q_6$).

II-7) Dans ce groupe de questions, on suppose que les suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ satisfont (H_0). On montre ($\mathcal{E}q_6$) dans ces cas.

II-7a) On pose $g(t) = (1-t)^2$, pour t dans $[0,1]$. Montrer que $\lim_{\sigma\to 0^+}\Lambda_{0,\sigma}(g) = 0$.

II-7b) Soit δ dans $]0,1[$. Montrer que, pour tout réel $\sigma > 0$, on a : $0 \leq \Lambda_{0,\sigma}(\mathbf{1}_{[0,1-\delta]}) \leq \delta^{-2}\Lambda_{0,\sigma}(g)$.

II-7c) Soit f dans $\mathcal{B}([0,1],\mathbf{R})$. Soit δ dans $]0,1[$ et soit σ un réel > 0. Montrer que

$$\big|f(1)-\Lambda_{0,\sigma}(f)\big| \leq \max_{t\in[1-\delta,1]}|f(1)-f(t)| + 2\|f\|_\infty\delta^{-2}\Lambda_{0,\sigma}(g)\ .$$

En déduire que si f est continue à gauche en 1, on a $\lim_{\sigma\to 0^+}\Lambda_{0,\sigma}(f) = f(1)$.

II-7d) En déduire ($\mathcal{E}q_6$) dans le cas où $\alpha = 0$.

Partie III

III-1) Soit $\varphi : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{C}$ une fonction continue. On note D_φ l'ensemble des réels σ tels que la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $x \mapsto \varphi(x)x^{\sigma-1}$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$.

III-1a) Montrer que D_φ est un intervalle de $\mathbf{R}$ (on rappelle que l'ensemble vide et les singletons sont des intervalles de $\mathbf{R}$).

III-1b) On suppose D_φ non vide. Soit un nombre complexe s tel que $\mathrm{Re}(s) \in D_\varphi$. Montrer que la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $x \mapsto \varphi(x)x^{s-1}$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$. On pose alors

$$\mathcal{M}\varphi(s) = \int_0^{+\infty}\varphi(x)x^{s-1}\mathrm{d}x\ . \qquad (\mathcal{E}q_7)$$

La fonction $\mathcal{M}\varphi$ définie ainsi est appelée la *transformée de Mellin de* φ.

III-1c) On suppose que D_φ contient deux réels $\sigma_0 < \sigma_1$. Montrer que $\mathcal{M}\varphi$ est holomorphe sur l'ouvert $\{s\in\mathbf{C} : \sigma_0 < \mathrm{Re}(s) < \sigma_1\}$.

III-1d) Si $\varphi(x) = e^{-x}$, pour tout x dans $\mathbf{R}_+^*$, montrer que $D_\varphi =]0,+\infty[$, puis que $\mathcal{M}\varphi$ est l'unique fonction holomorphe sur $\mathbf{H}_0$ qui prolonge la fonction Γ (définie en **I-1**) à $\mathbf{H}_0$.
On continuera dans la suite du sujet de noter Γ ce prolongement holomorphe:

$$\forall s\in\mathbf{H}_0,\quad \Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}\,\mathrm{d}x. \qquad (\mathcal{E}q_8)$$

III-1e) Montrer : $\forall s \in \mathbf{H}_0, \forall k \in \mathbf{N}^*,\ \Gamma(s+k) = (s+k-1)(s+k-2)\dots s\Gamma(s)$.
(*Indication: on pourra éventuellement utiliser* ***I-1***.)

III-1f) Pour tout réel y, montrer que $\sqrt{1+y^2} \geq 2^{-\frac{1}{2}}(1+|y|)$. Soit k un entier naturel. Pour tout nombre complexe s tel que $\mathrm{Re}(s) \geq 1$, montrer que $|s+k| \geq 2^{-\frac{1}{2}}(1+|\mathrm{Im}(s)|)$.

III-1g) Soit σ_0 dans $]1,+\infty[$; on pose $M_{k,\sigma_0} = 2^{k/2}(1+\Gamma(\sigma_0+k+1))$. Pour tout nombre complexe s tel que $\mathrm{Re}(s) \in [1,\sigma_0]$, montrer que

$$|\Gamma(s)| \leq \frac{M_{k,\sigma_0}}{(1+|\mathrm{Im}(s)|)^k} \ .$$

III-2) Soit $\varphi : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{C}$ une fonction continue. On suppose que D_φ n'est pas vide. Soit σ un réel. Pour tout v dans $\mathbf{R}$, on pose $\Phi_\sigma(v) = \varphi(e^{-2\pi v})e^{-2\pi\sigma v}$.

III-2a) Montrer que Φ_σ est intégrable sur $\mathbf{R}$ si et seulement si $\sigma \in D_\varphi$.

III-2b) On suppose que $\sigma \in D_\varphi$. Montrer que pour tout réel t, on a $\mathcal{M}\varphi(\sigma+it) = 2\pi\widehat{\Phi}_\sigma(t)$.

III-2c) On suppose de plus $\widehat{\Phi}_\sigma$ intégrable sur $\mathbf{R}$. Montrer pour tout x dans $\mathbf{R}_+^*$ et tout σ dans D_φ que

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{M}\varphi(\sigma+it)x^{-\sigma-it}\,\mathrm{d}t \ ,$$

qui est la *formule d'inversion de la transformée de Mellin* .

III-2d) Dans cette question, on considère le cas où $\varphi(x) = e^{-x}$, pour tout x dans $\mathbf{R}_+^*$. Montrer alors que pour tout σ dans $\mathbf{R}_+^*$, $\widehat{\Phi}_\sigma$ est intégrable sur $\mathbf{R}$. (*Indication: on pourra d'abord montrer que* $\Phi'_\sigma(v) = 2\pi\Phi_\sigma(v)(e^{-2\pi v} - \sigma)$*, ensuite poser* $t = e^{-2\pi v}$ *puis utiliser la question* ***I-5***.)

III-2e) Montrer que pour tous x, σ dans $\mathbf{R}_+^*$ on a $e^{-x} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(\sigma+it)x^{-\sigma-it}\,\mathrm{d}t$. En déduire pour tout x dans $\mathbf{R}_+^*$ et tout σ dans $]1,+\infty[$, que

$$\frac{e^{-x}}{x} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Gamma(\sigma+it)}{\sigma-1+it}\,x^{-\sigma-it}\,\mathrm{d}t \ .$$

Les questions suivantes forment une partie indépendante dont le but est de calculer la transformée de Fourier au sens des distributions tempérées (dont la définition est rappelée dans la question **III-5**) de la fonction $2\pi\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}$.

III-3) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction continue, sauf peut-être en 0.
On suppose d'une part que $\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^0 |f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty$ et d'autre part qu'il existe (k, C) dans $\mathbf{N} \times \mathbf{R}_+^*$ tels que pour tout réel x tel que $|x| \geq 1$ on ait $|f(x)| \leq C(1+|x|)^k$.
Montrer que pour tout φ dans $\mathcal{S}(\mathbf{R})$, $f\varphi$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$ et sur $\mathbf{R}_-^*$. Puis montrer que la forme linéaire définie sur $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ par $\varphi \mapsto \int_{-\infty}^0 f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ est continue.

On note T_f cette distribution tempérée: c'est la *distribution représentant* f définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}), \quad \langle T_f \,|\, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \, .$$

III-4) Pour tout x dans $\mathbf{R}^*$, on pose $\ell_0(x) = \log|x|$, $\ell(x) = \log(ix)$ et $\mathtt{sgn}(x) = x/|x|$.
On pose $\ell_0(0) = \ell(0) = \mathtt{sgn}(0) = 0$. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on pose également $q_\varepsilon(x) = (x - i\varepsilon)^{-1}$.

III-4a) Soit φ dans $\mathcal{S}(\mathbf{R})$. Montrer que $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon \int_{-1}^{1} (x^2+\varepsilon^2)^{-1}\varphi(x)\, \mathrm{d}x = \pi\varphi(0)$. (*Indication: on pourra calculer d'abord* $\varepsilon \int_{-1}^{1}(x^2+\varepsilon^2)^{-1}\, \mathrm{d}x$.)

III-4b) Montrer que $\ell = \ell_0 + i\frac{\pi}{2}\mathtt{sgn}$ et que pour toute fonction $f \in \{\ell_0, \mathtt{sgn}, \ell, q_\varepsilon\}$, T_f est une distribution tempérée.

III-4c) Soit φ dans $\mathcal{S}(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe une unique fonction V_φ continue sur $\mathbf{R}$ telle que, pour tout x dans $\mathbf{R}^*$, $V_\varphi(x) = x^{-1}(\varphi(x) - \varphi(0))$. Montrer que la forme linéaire $\mathtt{VP}$ sur $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ donnée par

$$\langle \mathtt{VP} \mid \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(|x|)\ \mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} V_\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

est bien continue sur $\mathcal{S}(\mathbf{R})$.

III-4d) Soient φ dans $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ et ε dans $\mathbf{R}_+^*$. Montrer que $x \mapsto x^{-1}\varphi(x)1_{[\varepsilon,+\infty[}(|x|)$ est intégrable sur $\mathbf{R}$. Montrer ensuite que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\mathbf{1}_{[\varepsilon,+\infty[}(|x|)\ \mathrm{d}x = \langle \mathtt{VP} \mid \varphi\rangle$$

III-4e) Soient φ dans $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ et ε dans $\mathbf{R}_+^*$. Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{-1}\varphi(x)\mathbf{1}_{[\varepsilon,+\infty[}(|x|)\,\mathrm{d}x = (\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon))\log(\varepsilon) - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)\log(|x|)\mathbf{1}_{[\varepsilon,+\infty[}(|x|)\,\mathrm{d}x.$$

En déduire que $T'_{\ell_0} = \mathtt{VP}$.

III-4f) Montrer que $T'_{\mathtt{sgn}} = 2\delta_0$, puis montrer que $T'_\ell = \mathtt{VP} + i\pi\delta_0$.

III-4g) Soient φ dans $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ et ε dans $\mathbf{R}_+^*$. Montrer que

$$\langle T_{q_\varepsilon} \mid \varphi\rangle = \int_{-1}^{1} V_\varphi(x)\frac{x^2}{x^2+\varepsilon^2}\ \mathrm{d}x + i\varepsilon\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\ \mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(|x|)\ \mathrm{d}x\ .$$

En déduire que $\lim_{\varepsilon\to 0^+} T_{q_\varepsilon} = \mathtt{VP} + i\pi\delta_0$.

III-5) Soit T dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$, une distribution tempérée. On rappelle que la transformée de Fourier est un endomorphisme continu de $\mathcal{S}(\mathbf{R})$. Cela garantit que la forme linéaire définie sur $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ par $\varphi \mapsto \langle\, T \mid \widehat{\varphi}\rangle$ est continue. On note $\widehat{T}$ cette distribution tempérée; c'est la *transformée de Fourier de* T.

III-5a) Démontrer que la distribution $T_{2\pi\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}}$ associée à $2\pi\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}$ est tempérée.

III-5b) Soit ε un réel > 0. Calculer la transformée de Fourier de la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $Y_\varepsilon : x \mapsto 2\pi\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}(x)e^{-2\pi\varepsilon x}$.

III-5c) Pour tout φ dans $\mathcal{S}(\mathbf{R})$, montrer que $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\langle T_{Y_\varepsilon} \mid \varphi\rangle = \langle T_{2\pi\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}} \mid \varphi\rangle$.

III-5d) Montrer que $\widehat{T}_{2\pi\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}} = -iT'_\ell$.

Partie IV

On rappelle ici le *théorème fondamental de l'arithmétique:* à tout entier $n > 0$, on associe une **unique** famille $v_p(n) \in \mathbf{N}$, $p \in \mathscr{P}$, telle que d'une part l'ensemble $\{p \in \mathscr{P} : v_p(n) \neq 0\}$ soit fini et telle que d'autre part on ait $n = \prod_{p\in\mathscr{P}} p^{v_p(n)}$. On appelle le nombre $v_p(n)$ la *valuation p-adique* de n.

IV-1) Le but du groupe de questions suivant est de montrer par des arguments probabilistes que pour tout σ dans $]1,+\infty[$,

$$\zeta(\sigma) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{1\le k\le n} \left(1 - p_k^{-\sigma}\right)^{-1}, \qquad (\boldsymbol{\mathcal{E}q}_9)$$

où l'on rappelle que $(p_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ désigne l'indexation strictement croissante des nombres premiers. Pour cela, on fixe σ dans $]1,+\infty[$ et on spécifie l'espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ comme suit: on pose $\Omega = \mathbf{N}^*$, la tribu $\mathscr{F}$ est l'ensemble des sous-ensembles de $\mathbf{N}^*$ et la mesure de probabilité $\mathbf{P}$ est caractérisée par

$$\mathbf{P}(\{n\}) = \frac{1}{n^\sigma \zeta(\sigma)}, \quad n \in \mathbf{N}^* .$$

Pour tout q dans $\mathbf{N}^*$, on note $q\mathbf{N}^*$ l'ensemble des nombres entiers strictement positifs divisibles par q, c'est-à-dire $q\mathbf{N}^* = \{qn\,;\, n \in \mathbf{N}^*\}$.

IV-1a) Exprimer $\mathbf{P}(q\mathbf{N}^*)$ en fonction de σ et q.

IV-1b) Pour tout $n \ge 1$, on pose $A_n = p_n\mathbf{N}^*$. Montrer que les événements A_n, $n \ge 1$, sont mutuellement indépendants.

IV-1c) Conclure.

IV-2) On rappelle que ζ est une fonction de classe C^1 strictement positive sur $]1,+\infty[$. Montrer que pour tout σ dans $]1,+\infty[$, $\log\zeta(\sigma) = -\sum_{n=1}^\infty \log(1-p_n^{-\sigma})$. Montrer ensuite que pour tout σ dans $]1,+\infty[$

$$-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} = \sum_{n=1}^\infty \frac{\log p_n}{p_n^\sigma - 1} .$$

IV-3) Soit Φ comme dans ($\boldsymbol{\mathcal{E}q}_4$). Montrer que $\Phi(\sigma) = -\zeta'(\sigma)/\zeta(\sigma)$ pour tout réel $\sigma > 1$.

IV-4) On rappelle la définition ($\boldsymbol{\mathcal{E}q}_4$) de la fonction Z.

IV-4a) Pour tout réel x dans $[0, 1/2]$, montrer que $0 \le -\log(1-x) - x \le x^2$.

IV-4b) Pour tout σ dans $]1,+\infty[$, on pose $f(\sigma) = -Z(\sigma) + \log\zeta(\sigma)$. Montrer que f est positive décroissante et majorée sur $]1,+\infty[$.

IV-4c) En déduire que $\lim_{\sigma\to0^+} Z(1+\sigma)/\log(\sigma^{-1}) = 1$.

IV-4d) À l'aide de ($\boldsymbol{\mathcal{E}q}_6$), en déduire que $\lim_{n\to+\infty}(\log\log n)^{-1}\sum_{1\le k\le n} k^{-1}\mathbf{1}_{\mathscr{P}}(k) = 1$.

Partie V

V-1) On rappelle le résultat de la question **I-8**: la fonction ζ, définie par ($\boldsymbol{\mathcal{E}q}_3$), se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbf{H}_1$. Le but de ce groupe de questions est de montrer qu'il existe une fonction L holomorphe sur l'ouvert $\mathbf{H}_1$ telle que $\exp L(s) = \zeta(s)$ pour tout s dans $\mathbf{H}_1$.

V-1a) Soit Z comme en ($\boldsymbol{\mathcal{E}q}_4$). Soit s dans $\mathbf{H}_1$. Montrer que $\sum_{k=1}^\infty k^{-1}|Z(ks)| \le \log\zeta(\mathrm{Re}(s))$ à l'aide de la partie **IV**. On pose alors

$$\forall s \in \mathbf{H}_1, \quad L(s) = \sum_{k=1}^\infty k^{-1}Z(ks) = \sum_{k=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{kp_n^{ks}} .$$

V-1b) Montrer que L est holomorphe sur l'ouvert $\mathbf{H}_1$.

V-1c) Montrer que $\exp L(s) = \zeta(s)$ pour tout s dans $\mathbf{H}_1$. (*Indication: calculer d'abord* $\exp L(\sigma)$ *pour* σ *dans* $]1, +\infty[$ *à l'aide de la partie **IV**.*)

V-1d) En déduire que ζ ne s'annule pas sur l'ouvert $\mathbf{H}_1$.

V-1e) Soit Φ comme en ($\boldsymbol{\mathcal{E}q}_4$). Montrer que $\Phi(s) = -\zeta'(s)/\zeta(s)$, pour tout s dans $\mathbf{H}_1$.

V-2) Le but de ce groupe de questions est de prolonger ζ en une fonction holomorphe sur $\mathbf{H}_0 \backslash \{1\}$. Pour cela, on introduit $v_n(s) = \int_n^{n+1} (n^{-s} - x^{-s})\, \mathrm{d}x$ pour n dans $\mathbf{N}^*$ et s dans $\mathbf{C}$.

V-2a) Soit s dans $\mathbf{H}_1$. Montrer que la série de terme général $(v_n(s))_{n \in \mathbf{N}^*}$ est convergente et montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(s) = \zeta(s) - \frac{1}{s-1}$.

V-2b) Soient s dans $\mathbf{H}_0$ et n dans $\mathbf{N}^*$. Montrer que $v_n(s) = s \int_n^{n+1} (\lceil x \rceil - x) x^{-1-s}\, \mathrm{d}x$. Montrer que la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $x \mapsto (\lceil x \rceil - x) x^{-1-s}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, puis que

$$\forall s \in \mathbf{H}_1, \quad \zeta(s) = \frac{1}{s-1} + s \int_1^{+\infty} (\lceil x \rceil - x)\, x^{-1-s}\, \mathrm{d}x\ . \qquad (\boldsymbol{\mathcal{E}q}_{10})$$

V-2c) Montrer que ζ se prolonge en une fonction méromorphe sur l'ouvert $\mathbf{H}_0$ avec un unique pôle simple en $s = 1$. On notera encore ζ ce prolongement.

V-3) Dans ce groupe de questions, on montre que $\zeta(1 + it) \neq 0$ pour tout t dans $\mathbf{R}^*$.

V-3a) Pour tout réel θ, on pose $q(\theta) = 5 + 8\cos(\theta) + 4\cos(2\theta) + \cos(3\theta)$. Exprimer $q(\theta)$ comme un polynôme en $\cos(\theta)$. En déduire que q est une fonction positive.

V-3b) Soient σ dans $]1, +\infty[$ et t dans $\mathbf{R}$. Montrer que

$$\zeta(\sigma)^5 |\zeta(\sigma + it)|^8 |\zeta(\sigma + 2it)|^4 |\zeta(\sigma + 3it)| = \exp\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q(kt \log p_n)}{k p_n^{k\sigma}} \Big).$$

En déduire que $\zeta(\sigma)^5 |\zeta(\sigma + it)|^8 |\zeta(\sigma + 2it)|^4 |\zeta(\sigma + 3it)| \geq 1$.

V-3c) Supposons qu'il existe un réel non nul t_0 tel que $\zeta(1 + it_0) = 0$.
Montrer que $\lim_{\sigma \to 1^+} \zeta(\sigma)\zeta(\sigma + it_0) = \zeta'(1 + it_0)$. En déduire une contradiction et conclure.

V-4) Soient σ dans $[1, +\infty[$ et un réel t tel que $|t| \geq 1$.

V-4a) À l'aide de ($\boldsymbol{\mathcal{E}q}_{10}$), démontrer que $|\zeta(\sigma + it)| \leq |t| + 2 \leq 3|t|$.

V-4b) Montrer de même que $|\zeta'(\sigma + it)| \leq 4|t|$.

V-5) Dans les questions suivantes, on montre l'existence d'un réel $M > 0$ tel que

$$\forall \sigma \in [1, 2], \forall t \in \mathbf{R} \text{ tel que } |t| \geq 1, \quad |\zeta(\sigma + it)|^{-1} \leq M|t|^{11/2}\ .$$

Dans ce qui suit, t est un réel fixé tel que $|t| \geq 1$.

V-5a) Montrer que pour tout réel σ dans $[1, +\infty[$, on a

$$\frac{1}{\zeta(\sigma + it)} = \frac{1}{\zeta(\sigma + 1 + it)} + \int_{\sigma}^{\sigma+1} \frac{\zeta'(x + it)}{\zeta^2(x + it)}\, \mathrm{d}x\ .$$

V-5b) Soit σ dans $[1, +\infty[$. Montrer que $0 \leq \zeta(\sigma + 1) - 1 - 2^{-1-\sigma} \leq \sigma^{-1} 2^{-\sigma}$, par comparaison série-intégrale. En déduire que $|\zeta(\sigma + 1 + it)|^{-1} \leq 4$.

V-5c) En utilisant **V-3b** et les questions précédentes, montrer $|\zeta(x + it)|^{-2} \leq 2.3^{11/4} |t|^{5/4} (x - 1)^{-5/4}$ pour tout réel x dans $]1, 3]$.

V-5d) Pour tout σ dans $]1,2]$, montrer que

$$|\zeta(\sigma+it)|^{-1} \leq 4+2^5 3^{11/4}|t|^{9/4}\big((\sigma-1)^{-1/4}-\sigma^{-1/4}\big) \leq 2^6 3^{11/4}|t|^{9/4}(\sigma-1)^{-1/4}.$$

V-5e) Conclure en réemployant cette inégalité.

V-6) Montrer que Φ se prolonge continûment à l'ensemble fermé $\{s \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}(s) \geq 1 \text{ et } |\mathrm{Im}(s)| \geq 1\}$. Montrer ensuite que pour tout σ dans $[1,2]$ et tout réel t tel que $|t| \geq 1$ on a $|\Phi(\sigma+it)| \leq 4M|t|^{13/2}$, où le réel M est celui introduit à la question **V-5**.

Partie VI

Dans cette section on complète la démonstration de ($\mathcal{E}q_1$).

VI-1) Soit x dans $\mathbf{R}_+^*$. Montrer que la série de terme général $(e^{-nx}\Lambda(n))_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge dans $\mathbf{R}_+$. Montrer que la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}\Lambda(n)$ est continue.
On note désormais, pour tout x dans $\mathbf{R}_+^*$, $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}\Lambda(n)$.

VI-2) On rappelle la définition ($\mathcal{E}q_7$) de la transformée de Mellin de φ. Montrer que $\mathcal{M}\varphi$ est bien définie et holomorphe sur l'ouvert $\mathbf{H}_1$. Calculer explicitement $\mathcal{M}\varphi$ sur $\mathbf{H}_1$.

VI-3) Soit σ dans $]1,2]$. Montrer que la fonction $t \in \mathbf{R} \mapsto \mathcal{M}\varphi(\sigma+it)$ est intégrable sur $\mathbf{R}$. (*Indication: on pourra utiliser les questions **III-1g** et **V-6**.*)

VI-4) Déduire des questions précédentes que pour tout x dans $\mathbf{R}_+^*$ et tout σ dans $]1,2]$, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)e^{-nx} = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\sigma+it)\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}x^{-(\sigma+it)}\,\mathrm{d}t$$

VI-5) Pour tout s dans $\mathbf{H}_1$, on pose $h(s) = \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1}$.

VI-5a) Démontrer que h se prolonge continûment à $\{s \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}(s) \geq 1\}$. (*Indication: on pourra utiliser le prolongement de la fonction $s \mapsto \zeta(s)-(s-1)^{-1}$ à $\mathbf{H}_0$ de la question **V-2**.*)

VI-5b) Montrer l'existence d'un réel $K_1 > 0$ tel que $|h(\sigma+it)| \leq K_1(1+|t|^{13/2})$, pour tout σ dans $[1,2]$ et tout réel t.

VI-5c) Montrer l'existence d'un réel $K_2 > 0$ tel que $|\Gamma(\sigma+it)h(\sigma+it)| \leq K_2(1+|t|)^{-3/2}$ pour tout σ dans $[1,2]$ et tout réel t. Pour tout x dans $\mathbf{R}_+^*$ et tout σ dans $[1,2]$, en déduire que la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $t \in\mapsto \Gamma(\sigma+it)h(\sigma+it)x^{-(\sigma+it)}$ est intégrable sur $\mathbf{R}$.

VI-5d) Pour tout x dans $\mathbf{R}_+^*$, on pose $I(x) = x^{-1}e^{-x} - \sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)e^{-nx}$. Soit σ dans $]1,2]$. Montrer que

$$I(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\sigma+it)h(\sigma+it)x^{-(\sigma+it)}\,\mathrm{d}t\ .$$

VI-5e) Soit x dans $\mathbf{R}_+^*$. Montrer que $xI(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(1+it)h(1+it)e^{-it\log x}\,\mathrm{d}t$.

VI-6) Montrer que $\lim_{x\to 0^+} xI(x) = 0$.

VI-7) En utilisant ($\mathcal{E}q_6$), montrer ($\mathcal{E}q_2$) puis ($\mathcal{E}q_1$).